Oraux blancs MP — 3 juin 2026

rms134-1395

> *Soient* A *et* B, *deux matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. *On suppose que* A *est inversible et que* B *est nilpotente.*
> [**1.**] *Si ces deux matrices commutent :* $AB = BA$, *alors les matrices* $A - B$ *et* $A + B$ *sont inversibles.*
> [**2.**] *Sinon, la matrice* $A + B$ *n'est pas nécessairement inversible.*

✍ *On généralise ici un résultat du cours : si* x *est un élément nilpotent d'indice* n *dans un anneau* A, *alors* $1_A - x$ *est inversible et*

$$(1_A - x)^{-1} = 1_A + x + \cdots + x^{n-1}.$$

[**1.**] Comme $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, on sait que l'indice de nilpotence de B est inférieur à n :

$$B^n = 0_n.$$

Comme les matrices A et B commutent, on sait que

$$(A - B)\sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{(n-1)-k} = A^n - B^n = A^n$$
$$(A + B)\sum_{k=0}^{n-1} A^k (-B)^{(n-1)-k} = A^n - (-B)^n = A^n$$

et comme A^n est inversible (puisque A est inversible), on en déduit que les deux matrices $A \pm B$ sont inversibles avec

$$(A - B)^{-1} = (A^n)^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{(n-1)-k},$$
$$(A + B)^{-1} = (A^n)^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} A^k (-B)^{(n-1)-k}.$$

✍ *La formule de la somme géométrique*

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) \star \left(\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}\right)$$

est vraie dans n'importe quel anneau $(A, +, \star)$, *commutatif ou non, pourvu que les deux éléments* x *et* y *considérés ici commutent entre eux.*

[**2.**] Il est clair que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente. Il est tout aussi clair que la matrice

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

✍ *Il suffit de trouver un contre-exemple, le plus simple est le meilleur.*
On commence donc par choisir la matrice nilpotente la plus simple qui soit.
Pour que la somme $A + B$ *ne soit pas inversible, il suffit que la seconde colonne de cette matrice soit nulle, ce qui impose la seconde colonne de* A.
Pour que A *soit inversible, il suffit alors de choisir une première colonne non proportionnelle à la seconde colonne qu'on vient de choisir.*
Et le tour est joué !

rms134-1399

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

[**1.**] *Si u et v sont deux endomorphismes nilpotents non nuls de $\mathbb{R}^n$ qui commutent, alors*

$$\operatorname{rg}(u \circ v) < \operatorname{rg} v.$$

[**2.**] *Si $u_1, \dots, u_n$ sont des endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^n$ qui commutent deux à deux, alors la composée*

$$u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n$$

est l'endomorphisme nul.

✍ *Il s'agit ici de généraliser un résultat du cours : si u est un endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension n, alors l'indice de nilpotence de u est inférieur à n et u^n est l'endomorphisme nul.*

[**1.**] Comme u et v sont deux endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel de dimension n, leur indice de nilpotence est strictement inférieur à n et

$$u^n = v^n = \omega.$$

❧ Il est clair que $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ et donc que

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v.$$

❧ Comme u et v commutent, le sous-espace $F = \operatorname{Im} v$ est stable par u et

$$\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u \circ v).$$

Comme v n'est pas l'endomorphisme nul, alors $\dim F = \operatorname{rg} v \geqslant 1$.

❧ Considérons l'endomorphisme u_F de F induit par restriction de u au sous-espace stable F. Pour tout $x \in F$,

$$u_F(x) = u(x) \in F$$

donc

$$\forall\, x \in F, \quad (u_F)^n(x) = u^n(x) = 0_E.$$

Ainsi, u_F est un endomorphisme nilpotent de F et en particulier

$$\operatorname{rg} u_F < \dim F = \operatorname{rg} v.$$

Par définition de l'image d'une application linéaire, un vecteur y appartient à $\operatorname{Im} u_F$ si, et seulement si, il existe un vecteur $x \in F$ tel que $y = u_F(x) = u(x)$ c'est-à-dire, par définition du sous-espace F, s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que

$$y = u(x) = u\big(v(x_0)\big) = (u \circ v)(x_0) = (v \circ u)(x_0)$$

(On rappelle que u et v commutent.) Autrement dit :

$$\operatorname{Im} u_F = \operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im}(v \circ u)$$

et en particulier

$$\operatorname{rg} u_F = \operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(v \circ u).$$

On a ainsi démontré que

$$\operatorname{rg}(u \circ v) < \operatorname{rg} v.$$

✍ *Par symétrie, on a également démontré que*

$$\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(v \circ u) < \operatorname{rg} u.$$

[**2.**] Considérons des endomorphismes nilpotents $u_1, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ qui commutent deux à deux et la famille d'entiers naturels $(d_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ définie par

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad d_k = \operatorname{rg}(u_1 \circ \dots \circ u_k).$$

❧ Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k$ est nilpotent :

$$(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k)^n = u_1^n \circ u_2^n \circ \cdots \circ u_k^n = \omega$$

car les endomorphismes u_ℓ commutent deux à deux et leurs indices de nilpotence respectifs sont tous majorés par n (= la dimension de l'espace vectoriel sur lequel ils agissent).

❧ Il est clair que $d_1 = \operatorname{rg} u_1 < n$ et, d'après ce qui précède, pour tout $1 \leqslant k < n$, deux cas se présentent :

— ou bien l'endomorphisme $v_k = u_1 \circ \cdots \circ u_k$ est nul et, dans ce cas,

$$u_1 \circ \cdots \circ u_n = u_1 \circ \cdots \circ u_k \circ \cdots \circ u_n$$

est l'endomorphisme nul ;

— ou bien v_k est un endomorphisme nilpotent non nul qui commute avec u_{k+1} et, dans ce cas, $d_{k+1} < d_k$.

Si l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n$ n'était pas l'endomorphisme nul, alors on aurait une famille <u>strictement</u> décroissante de n entiers naturels <u>strictement</u> compris entre 0 et n :

$$0 < d_n < d_{n-1} < \cdots < d_1 < n$$

ce qui est évidemment impossible.

La composée $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n$ est donc l'endomorphisme nul.

rms134-1402

Soient $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. *On suppose que* AB *est semblable à la matrice* $\mathrm{Diag}(0,9,9)$. *Calculer le rang de* BA *et déterminer* BA.

❧ Par hypothèse, $\mathrm{AB} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{BA} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{AB})\mathrm{P} = \mathrm{Diag}(0,9,9).$$

Autrement dit : $(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A})(\mathrm{BP}) = \mathrm{Diag}(0,9,9)$. Comme

$$\mathrm{BA} = (\mathrm{BP})(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}),$$

quitte à remplacer A par $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$ et B par BP, on peut donc supposer que le produit AB est **égal** à $\mathrm{Diag}(0,9,9)$ (et pas seulement semblable à cette matrice diagonale).

❧ Par hypothèse, il est clair que le rang de AB est égal à 2.

Le rang d'une matrice est toujours inférieur au nombre de ses lignes, ainsi qu'au nombre de ses colonnes. Par conséquent, les rangs de A, B et BA sont tous inférieurs à 2.

❧ Comme $\mathrm{Im}(\mathrm{AB}) \subset \mathrm{Im}\,\mathrm{A}$, le rang de AB est inférieur au rang de A. On a donc :

$$2 = \mathrm{rg}(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{rg}\,\mathrm{A} \leqslant 2$$

et donc $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = 2$. Comme $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, les deux colonnes de A sont linéairement indépendantes et le noyau de la matrice A est donc réduit au vecteur nul.

Il existe donc une matrice ligne $\mathrm{L}_0 \in \mathfrak{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $\mathrm{A}_0 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_0 \\ \mathrm{A}_0 \end{pmatrix}.$$

❧ Décomposons B en blocs de manière analogue : il existe une matrice colonne $\mathrm{C}_0 \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et une matrice carrée $\mathrm{B}_0 \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{C}_0 & \mathrm{B}_0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_0\mathrm{C}_0 & \mathrm{L}_0\mathrm{B}_0 \\ \mathrm{A}_0\mathrm{C}_0 & \mathrm{A}_0\mathrm{B}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0 = 9\mathrm{I}_2$, donc A_0 et B_0 sont inversibles (on le savait déjà pour B_0) et commutent (A_0 est, à un facteur près, l'inverse de B_0).

Comme la ligne $\mathrm{L}_0\mathrm{B}_0$ est nulle et que B_0 est inversible, alors L_0 est la ligne nulle.

De même, la colonne $\mathrm{A}_0\mathrm{C}_0$ est nulle et A_0 est inversible, donc C_0 est la colonne nulle.

Ainsi,

$$\mathrm{BA} = \mathrm{C}_0\mathrm{L}_0 + \mathrm{B}_0\mathrm{A}_0 = \mathrm{B}_0\mathrm{A}_0 = 9\mathrm{I}_2.$$

En particulier, $\mathrm{rg}\,\mathrm{BA} = 2$.

rms134-1405

Soit u*, un endomorphisme non nul de* $E = \mathbb{R}^3$ *tel que*

$$u^3 + u = 0.$$

[**1.**] *Démontrer que*

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u \qquad \textit{et que} \qquad \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2 + I).$$

[**2.**] *Démontrer que* u *n'est pas injectif et que* $\operatorname{rg} u = 2$*.*
[**3.**] *En déduire qu'il existe une base de* E *dans laquelle la matrice de* u *est*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[**1.**] Comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, le Théorème du rang nous indique que

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u. \tag{1}$$

Par ailleurs, si le vecteur y appartient à $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$, alors il existe un vecteur x tel que $y = u(x)$ et $u^2(x) = u(y) = 0_E$. Or, par hypothèse,

$$0_E = u^3(x) + u(x) = u\big(u^2(x)\big) + u(x) = u(0_E) + y = y.$$

Donc $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont en somme directe et, d'après la relation (1) sur les dimensions,

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u.$$

❧ Par hypothèse, le polynôme $X^3 + X = X(X^2 + 1)$ est un polynôme annulateur de u. Comme X et $X^2 + 1$ sont premiers entre eux, le théorème de décomposition des noyaux nous donne

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + I). \tag{2}$$

On déduit de cette décomposition que

$$\dim E = \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Ker}(u^2 + I)$$

et de (1) que $\dim \operatorname{Ker}(u^2 + I) = \dim \operatorname{Im} u$.

Par ailleurs, pour tout vecteur $y \in \operatorname{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et donc

$$(u^2 + I)(y) = u^3(x) + u(x) = 0_E$$

donc $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker}(u^2 + I)$.

Ayant démontré une inclusion et l'égalité des dimensions, on peut conclure à l'égalité des sous-espaces vectoriels :

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2 + I).$$

✍ *En appliquant le Théorème de décomposition des noyaux, on a obtenu*

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + I).$$

Il faut alors résister à la tentation d'identifier $\operatorname{Im} u$ *et* $\operatorname{Ker}(u^2 + I)$ *: un sous-espace peut avoir une infinité de supplémentaires !*

(Seul le supplémentaire orthogonal, quand il existe, est unique.)

[**2.**] Si u est injectif, alors $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ et par conséquent $E = \operatorname{Ker}(u^2 + I)$. On a donc

$$u^2 = -I$$

et en particulier

$$(\det u)^2 = -1$$

(puisque la dimension de E est *impaire*), ce qui est absurde (puisque $\det u \in \mathbb{R}$).

❧ On déduit de (1) que $\operatorname{rg} u < 3$ et donc $\operatorname{rg} u \leqslant 2$.

Comme u n'est pas l'endomorphisme nul (par hypothèse), le sous-espace $\operatorname{Ker}(u^2+I)$ n'est pas réduit au vecteur nul (d'après (2)) et il existe donc un vecteur $x_0 \neq 0_E$ dans ce sous-espace.

La famille (x_0) est donc libre et, d'après le Théorème d'augmentation des familles libres, la famille $(x_0, u(x_0))$ est liée si, et seulement si, le vecteur $u(x_0)$ appartient au sous-espace engendré par x_0 ; autrement dit, s'il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(x_0) = \alpha \cdot x_0.$$

En appliquant u, on en déduit que

$$u^2(x_0) = \alpha^2 \cdot x_0 \quad \text{et donc que} \quad \alpha^2 \cdot x_0 = -x_0$$

puisque $x_0 \in \operatorname{Ker}(u^2+I)$. Comme $x_0 \neq 0_E$, on en déduit que $\alpha^2 = -1$, ce qui est impossible (puisque α est réel).

Par conséquent, la famille $(x_0, u(x_0))$ est libre. Comme $x_0 \in \operatorname{Ker}(u^2+I)$ et que $\operatorname{Ker}(u^2+I)$ est un sous-espace stable par u, on a justifié que cet espace contenait une famille libre de deux vecteurs.

✍ *Quel que soit le polynôme P, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par u.*

Ainsi,

$$\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Ker}(u^2+I) \geqslant 2.$$

Finalement, on a démontré que

$$\operatorname{rg} u = 2 \qquad \text{et que} \qquad \dim \operatorname{Ker} u = 1$$

d'après (1).

✍ *On peut aboutir au résultat en étudiant le polynôme caractéristique de u.*

On connaît un polynôme annulateur de u : $X(X^2+1)$. Le polynôme minimal de u est un polynôme unitaire, non constant, qui divise tous les polynômes annulateurs. Comme u n'est pas l'endomorphisme nul, on en déduit que le polynôme minimal de u est égal à (X^2+1) ou à $X(X^2+1)$.

Le polynôme caractéristique est un polynôme de degré 3 (la dimension de E) et possède les mêmes facteurs irréductibles que le polynôme minimal (ce dernier point est au programme lorsque le polynôme minimal est scindé mais pas dans le cas général).

Par conséquent, le polynôme caractéristique est de la forme

$$(X^2+1)^m \quad \textit{ou} \quad X^{m_1}(X^2+1)^{m_2}$$

où les entiers m, m_1 et m_2 sont au moins égaux à 1. Comme le degré est égal à 3, la seule possibilité est $X(X^2+1)$.

Comme 0 est une racine simple du polynôme caractéristique, la dimension du noyau est égale à 1 et le rang est donc égal à 2 (1).

[**3.**] Comme $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, on peut choisir un vecteur e_1 qui dirige $\operatorname{Ker} u$.

On choisit ensuite un vecteur e_2, non nul, dans $\operatorname{Ker}(u^2+I)$. On a justifié plus haut que le couple $(e_2, e_3) = (e_2, u(e_2))$ était alors une famille libre de deux vecteurs de $\operatorname{Ker}(u^2+I)$. Comme ce sous-espace est un plan, on a donc trouvé une base !

On dispose ainsi

— d'un vecteur directeur de $\operatorname{Ker} u$

— et d'une base de $\operatorname{Ker}(u^2+I)$.

Comme ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E, on en déduit que la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est bien une base de E.

Par choix de e_1, on a $u(e_1) = 0_E$.

Par choix de e_3, on a $u(e_2) = e_3$ et comme $e_2 \in \operatorname{Ker}(u^2+I)$, on a

$$u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2.$$

Donc la matrice de u relative à cette base est bien

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

✍ *Pour bien comprendre la question posée, il faut d'abord lire la matrice* A *comme il convient ! Cette matrice est diagonale par blocs :*

$$A = \mathrm{Diag}(A_0, A_1)$$

avec $A_0 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ *et*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}).$$

Cela doit alors faire penser à une décomposition de E *en somme directe de deux sous-espaces vectoriels (une droite et un plan) stables par* u *et donc à une base de* E *adaptée à la décomposition* (2).

rms134-1455

Soient E, un espace euclidien et u, un endomorphisme de E tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$. Un tel endomorphisme est dit ***normal****.*

✍ *Les endomorphismes auto-adjoints et les isométries vectorielles sont évidemment des endomorphismes normaux.*

[**1.**] *Pour tout $x \in E$,*

$$\left\| u^*(x) \right\|^2 = \left\| u(x) \right\|^2.$$

[**2.**] *En déduire que u et u^* ont mêmes valeurs propres et mêmes sous-espaces propres.*
[**3.**] *Démontrer que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.*
[**4.**] *Si u est diagonalisable, alors u est auto-adjoint.*

[**1.**] Pour tout vecteur $x \in E$,

$$\begin{aligned} \left\| u^*(x) \right\|^2 &= \left\langle u^*(x) \,\middle|\, u^*(x) \right\rangle = \left\langle x \,\middle|\, (u \circ u^*)(x) \right\rangle \\ &= \left\langle x \,\middle|\, (u^* \circ u)(x) \right\rangle && \text{(u et u^* commutent)} \\ &= \left\langle u(x) \,\middle|\, u(x) \right\rangle = \left\| u(x) \right\|^2. \end{aligned}$$

[**2.**] Comme l'endomorphisme I est auto-adjoint,

$$(u - \lambda I)^* = (u^* - \lambda I).$$

Par conséquent, si l'endomorphisme u est normal, alors

$$(u - \lambda I)^* \circ (u - \lambda I) = (u - \lambda I) \circ (u^* - \lambda I).$$

D'après la question précédente,

$$\forall\, x \in E, \quad \left\| (u^* - \lambda I)(x) \right\|^2 = \left\| (u - \lambda I)(x) \right\|^2$$

et en particulier

$$\forall\, x \in E, \quad u^*(x) - \lambda x = 0_E \iff u(x) - \lambda x = 0_E.$$

Autrement dit : u et u^* ont mêmes valeurs propres et mêmes sous-espaces propres.

✍ *Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E et si la matrice d'un endomorphisme u quelconque relative à cette base $\mathscr{B}$ est la matrice A, alors la matrice de l'adjoint u^* relative à $\mathscr{B}$ est la matrice $A^\top$.*

On en déduit que, d'une manière générale, les endomorphismes u et u^* ont mêmes valeurs propres (les polynômes caractéristiques sont égaux), mais aussi que les sous-espaces propres associés à une même valeur propre ont même dimension puisque

$$\operatorname{rg}(u - \lambda I) = \operatorname{rg}(u^* - \lambda I).$$

L'hypothèse de normalité sur u nous donne un résultat beaucoup plus fort : les sous-espaces propres sont égaux !

❧ **Variante.**
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de u. Le sous-espace propre

$$F = \operatorname{Ker}(u - \lambda I)$$

est stable par u^* (puisque u et u^* commutent) et donc par $(u^* - \lambda I)$.

Quels que soient les vecteurs x et y dans F,

$$\left\langle u(x) - \lambda x \,\middle|\, y \right\rangle = \left\langle 0_E \,|\, y \right\rangle = 0$$

mais, par définition de l'adjoint,

$$0 = \left\langle u(x) - \lambda x \,\middle|\, y \right\rangle = \left\langle x \,\middle|\, u^*(y) - \lambda y \right\rangle.$$

On a remarqué que le vecteur $u^*(y) - \lambda y$ appartenait au sous-espace F et on voit qu'il est orthogonal à tous les vecteurs x de F. Il s'agit donc du vecteur nul et on a ainsi démontré que

$$\forall\, y \in \operatorname{Ker}(u - \lambda I), \qquad u^*(y) = \lambda y.$$

Autrement dit, $\operatorname{Ker}(u - \lambda I) \subset \operatorname{Ker}(u^* - \lambda I)$. Par symétrie, l'inclusion réciproque est vraie et les sous-espaces propres sont donc égaux.

[3.] Soient λ et μ, deux valeurs propres distinctes de u. On considère un vecteur propre x associé à λ et un vecteur propre y associé à μ. On déduit de la question précédente que $u^*(y) = \mu y$.

Par conséquent,

$$\lambda \langle x \,|\, y \rangle = \langle u(x) \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, u^*(y) \rangle = \mu \langle x \,|\, y \rangle .$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $\langle x \,|\, y \rangle = 0$ et donc que les sous-espaces propres $\operatorname{Ker}(u - \lambda I)$ et $\operatorname{Ker}(u - \mu I)$ sont orthogonaux.

[4.] Si l'endomorphisme normal u est diagonalisable, alors

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)}} \operatorname{Ker}(u - \lambda I).$$

En choisissant une base orthonormée de chaque sous-espace propre de u, on obtient alors une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.

Dans cette base, la matrice de u est diagonale (base de vecteurs propres) et donc symétrique. Comme la matrice de u relative à une base <u>orthonormée</u> bien choisie est symétrique réelle, on en déduit que $u = u^*$.

rms134-1464

> *Soit E, un espace euclidien. On note K, l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E.*
> [**1.**] *Soit $p \in L(E)$, un projecteur. Démontrer que $p \in K$ si, et seulement si,*
>
> $$\forall\, x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$
>
> [**2.**] *En déduire que K est compact.*

[**1.**] **(Question de cours)**

❧ Si p est une projection orthogonale, alors pour tout $x \in E$, les vecteurs $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux, donc

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2$$

(Théorème de Pythagore).

✍ *Cette propriété signifie qu'un projecteur orthogonal est toujours une application linéaire continue et que $|||p||| \leqslant 1$.*
Comme $p(x) = x$ pour tout vecteur $x \in \operatorname{Im} p$, on en déduit que, en général, $|||p||| = 1$.

❧ Réciproquement, si p n'est pas une projection orthogonale, alors il existe deux vecteurs $u \in \operatorname{Im} p$ et $v \in \operatorname{Ker} p$ tels que $\langle u \,|\, v \rangle \neq 0$. (En particulier, ces deux vecteurs sont distincts de 0_E.)
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$x(t) = u + t \cdot v \quad \text{si bien que} \quad p[x(t)] = u.$$

En calculant $\|x(t)\|^2$, on vérifie qu'il existe des réels t tels que

$$\|x(t)\| > \|u\| = \|p[x(t)]\|.$$

[**2.**] L'ensemble K est une partie de $L(E)$, espace vectoriel de <u>dimension finie</u>. Cet espace peut être muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à la norme euclidienne.

❧ D'après la question précédente,

$$\forall\, p \in K, \qquad |||p||| \leqslant 1,$$

donc K est une partie bornée de $L(E)$.

❧ Considérons une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de projecteurs orthogonaux qui converge vers une endomorphisme $f \in L(E)$.
Pour tout vecteur $x \in E$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \|f(x) - p_n(x)\| \leqslant |||f - p_n|||\, \|x\|$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} p_n(x) = f(x).$$

De manière analogue, pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\|(f \circ f)(x) - (p_n \circ p_n)(x)\| \\
&\qquad \leqslant \|(f \circ f)(x) - (p_n \circ f)(x) + (p_n \circ f)(x) - (p_n \circ p_n)(x)\| \\
&\qquad \leqslant \|(f - p_n) \circ f(x)\| + \|[p_n \circ (f - p_n)](x)\| \qquad \text{(inégalité triangulaire et linéarité de } p_n) \\
&\qquad \leqslant |||f - p_n|||\, \|f(x)\| + |||p_n|||\, |||f - p_n|||\, \|x\| \\
&\qquad \leqslant |||f - p_n|||\, \big[\|f(x)\| + \|x\|\big].
\end{aligned}$$

Comme $|||f - p_n|||$ tend vers 0 (par hypothèse), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} (p_n \circ p_n)(x) = (f \circ f)(x).$$

Comme tous les p_n sont des projecteurs,

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_n(x) = (p_n \circ p_n)(x)$$

donc

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = (f \circ f)(x)$$

par unicité de la limite.

L'endomorphisme f est donc un projecteur. De plus,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |||p_n||| \leqslant 1$$

donc $|||f||| \leqslant 1$.

✍ *La boule unité fermée de $L(E)$ est fermée : comme tous les p_n appartiennent à ce fermé, la limite f appartient encore à ce fermé.*

D'après la question précédente, l'endomorphisme f est donc un projecteur orthogonal. Nous avons donc démontré que K était une partie fermée de $L(E)$.

❧ Comme $L(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie, toute partie fermée et bornée de $L(E)$ est compacte. Donc K est compacte.

✍ ***Variante rapide** — D'après la première question, la partie K est l'intersection de la boule unité fermée de $L(E)$ et de l'ensemble*

$$[f \circ f - f = \omega_E]$$

des projecteurs de E.

L'application $[f \mapsto f \circ f - f]$ est continue de $L(E)$ dans $L(E)$ (comme $|||\cdot|||$ est une norme d'algèbre, les applications polynomiales sont continues), donc l'ensemble des projecteurs de E est un fermé (image réciproque d'un singleton [=fermé] par une application continue).

L'ensemble K est donc une partie fermée (intersection de deux fermés) contenue dans une partie compacte (la boule unité d'un espace vectoriel de dimension finie), donc K est bien un compact.

rms134-1477

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note r_n, le reste de la division euclidienne de n par 5.
[**1.**] *La série $\sum \frac{r_n}{n(n+1)}$ est convergente.*
[**2.**] *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{k(k+1)}.$$

Exprimer S_{5n} en fonction des nombres harmoniques

$$H_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}.$$

[**3.**] *En déduire la valeur de*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)}.$$

[**1.**] Par définition de la division euclidienne,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant r_n < 5.$$

Donc

$$\frac{r_n}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

et, par comparaison avec une série de Riemann, la série est (absolument) convergente.
[**2.**] Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout entier $0 \leqslant r \leqslant 4$,

$$r_k = r \iff \exists\, \ell \in \mathbb{N}, \quad k = 5\ell + r.$$

On peut donc décomposer S_{5n} en somme de cinq termes.

$$\begin{aligned}
S_{5n} &= \sum_{k=1}^{5n} \frac{r_k}{k(k+1)} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+1)(5\ell+2)} + 2\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+2)(5\ell+3)} + 3\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+3)(5\ell+4)} \\
&\qquad + 4\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+4)(5\ell+5)} + 0\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{5\ell(5\ell+1)}
\end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$$

permet de simplifier l'expression.

$$\begin{aligned}
S_{5n} &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+1} - \frac{1}{5\ell+2} + 2\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+2} - \frac{1}{5\ell+3} + 3\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+3} - \frac{1}{5\ell+4} + 4\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+4} - \frac{1}{5\ell+5} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+1} + \frac{1}{5\ell+2} + \frac{1}{5\ell+3} + \frac{1}{5\ell+4} - \frac{4}{5\ell+5} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+1} + \frac{1}{5\ell+2} + \frac{1}{5\ell+3} + \frac{1}{5\ell+4} + \frac{1}{5\ell+5} - \frac{1}{\ell+1} \\
&= \sum_{k=1}^{5n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_{5n} - H_n.
\end{aligned}$$

[**3.**] Il faut alors comparer la somme

$$H_{5n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k}$$

à l'intégrale

$$I_n = \int_n^{5n} \frac{dt}{t} = \ell n\, 5.$$

La méthode usuelle (FAITES UNE FIGURE !) nous donne :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \ell n\, 5 + \frac{1}{5n} \leqslant S_{5n} \leqslant \ell n\, 5 + \frac{1}{n}$$

et on déduit du théorème d'encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty} S_{5n} = \ell n\, 5.$$

❧ Comme la série converge, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ses sommes partielles est convergente. Toute suite extraite d'une suite convergente est elle-même convergente et tend vers la même limite. Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{5n} = \ell n\, 5.$$

Autrement dit,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)} = \ell n\, 5.$$

✍ *En présentant les calculs de manière un peu plus abstraite (c'est-à-dire en faisant intervenir une somme double), on devrait pouvoir généraliser le résultat au cas de la division euclidienne par un entier naturel* $p \geqslant 2$ *quelconque.*

rms134-1486

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} X^n.$$

Pour tout réel $R > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, toutes les racines complexes de P_n ont un module supérieur à R.

✍ *Pour tout $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est scindé sur $\mathbb{C}$: il possède donc n racines complexes (en comptant avec multiplicité).*

Par ailleurs, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers la fonction $\exp$ (théorie des séries entières) et la fonction $\exp$ ne s'annule en aucun point de $\mathbb{C}$.

Il faut bien que les racines de P_n soient passées quelque part... Nous allons montrer qu'elles sont parties vers l'infini.

Nous allons raisonner par l'absurde en fixant $R > 0$ et en supposant qu'il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}^*$ tels que le polynôme P_n admette au moins une racine complexe z_n telle que $|z_n| \leqslant R$.

✍ *Il revient au même de considérer un compact K non vide et de supposer que*

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, n \geqslant N,\ \exists\, z_n \in K, \quad P_n(z_n) = 0.$$

En effet, tout compact est borné et donc contenu dans un disque fermé de rayon $R > 0$.

❧ Autrement dit, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |z_{n_k}| \leqslant R \quad \text{et} \quad P_{n_k}(z_{n_k}) = 0.$$

Comme la suite $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe bornée, il existe une sous-suite $(z_{\varphi(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Les inégalités larges étant conservées par passage à la limite, on en déduit que

$$|\ell| \leqslant R.$$

❧ Les polynômes P_n sont les sommes partielles de la série entière dont la somme est exp. Comme le rayon de convergence de cette série entière est infini, cette série de fonctions converge uniformément sur tout compact contenu dans $\mathbb{C}$ et en particulier sur le disque fermé $[|z| \leqslant R]$. Comme ℓ et les z_{n_k} appartiennent tous à ce disque fermé, on a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\big|\exp(\ell) - P_{n_k}(z_{n_k})\big| &\leqslant \big|\exp(\ell) - \exp(z_{n_k})\big| + \big|\exp(z_{n_k}) - P_{n_k}(z_{n_k})\big| \\ &\leqslant \big|\exp(\ell) - \exp(z_{n_k})\big| + \|\exp - P_{n_k}\|_\infty\end{aligned}$$

où la borne supérieure est prise sur le disque fermé $[|z| \leqslant R]$.

Comme z_{n_k} converge vers ℓ et que exp est continue sur $\mathbb{C}$, on a bien

$$\lim_{k\to+\infty} \big|\exp(\ell) - \exp(z_{n_k})\big| = 0.$$

Comme la suite des fonctions $(P_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur le disque fermé $[|z| \leqslant R]$,

$$\lim_{k\to+\infty} \|\exp - P_{n_k}\|_\infty = 0.$$

Par encadrement, on a donc démontré que

$$\exp(\ell) = \lim_{k\to+\infty} P_{n_k}(z_{n_k}).$$

Or, par définition, $P_{n_k}(z_{n_k}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc $\exp(\ell) = 0$: impossible !

rms134-1497

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum n^{(-1)^n} x^n$$

et calculer sa somme.

Il faut d'abord comprendre que la série entière étudiée est la somme de deux séries entières :

$$\sum (2k)x^{2k} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Il est clair que, pour $|x| < 1$, les deux termes généraux sont des suites bornées, donc le rayon de convergence de la somme est au moins égal à 1.

D'autre part, pour $|x| > 1$, la suite de terme général $n^{(-1)^n} x^n$ n'est pas bornée (par croissances comparées d'une suite géométrique divergente et d'une suite de puissances). Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière est inférieur à 1.

En conclusion, le rayon de convergence est égal à 1.

❧ Fixons $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. Alors

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2kx^{2k} = x \sum_{k=1}^{+\infty} 2kx^{2k-1}.$$

(Le terme en $k = 0$ est nul !)

On reconnaît ici la série dérivée de $\sum x^{2k}$. Comme le rayon de convergence est strictement positif, on peut dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} \forall\, x \in]-1,1[, \quad S_1(x) &= x\frac{d}{dx}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} (x^2)^k\Big) \\ &= x\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{1-x^2}\Big) \\ &= x\frac{2x}{(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$S_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

et on reconnaît cette fois la série primitive de $\sum x^{2k}$. On peut primitiver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence (toujours parce que le rayon de convergence est strictement positif) et comme $S_2(0) = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall\, x \in]-1,1[, \quad S_2(x) &= \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}\,dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

pour tout $x \in]-1, 1[$.

rms134-1499

On note

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}\,x^n$$

et D*, l'ensemble des réels* x *pour lesquels la somme* $S(x)$ *est définie.*

[**1.**] *Identifier l'ensemble* D*. La somme* S *est-elle continue sur* D *?*

[**2.**] *Démontrer que la série entière*

$$\sum\Big(\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}}\Big)\,x^n$$

converge normalement sur $[-1, 1]$*.*

[**3.**] *En déduire la limite de* $(1-x)S(x)$ *lorsque* x *tend vers* 1 *par valeurs inférieures.*

[**1.**] Lorsque n tend vers $+\infty$, le quotient $1/\sqrt{n}$ tend vers 0, donc

$$\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\,x^n \sim \frac{x^n}{n^{1/2}}.$$

Par croissances comparées, le terme général de la série entière
- tend vers 0 pour $|x| \leqslant 1$;
- tend vers l'infini pour $|x| > 1$.

Le rayon de convergence de la série entière est donc égal à 1 et, d'après le cours,

$$]-1, 1[\ \subset D \subset [-1, 1].$$

Pour $x = 1$, l'équivalent calculé plus haut prouve que la série $\sum \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (comparaison avec une série de Riemann divergente).

Pour $x = -1$, la série $\sum \sin\frac{1}{\sqrt{x}}x^n$ est alternée, la valeur absolue $\sin 1/\sqrt{n}$ du terme général tend vers 0 en décroissant, donc la série converge d'après le Critère spécial des séries alternées.

✍ *On ne peut pas appliquer le Théorème de comparaison avec une série semi-convergente, mais seulement avec une série absolument convergente.*

Dans le cas $x = -1$*, l'équivalent prouve seulement que la série n'est pas absolument convergente et il faut étudier le comportement du terme général (et non pas celui de l'équivalent trouvé) pour pouvoir conclure.*

En conclusion, $D = [-1, 1[$ et, d'après le Théorème d'Abel, la somme S est continue sur D.

✍ *D'après le cours, la somme d'une série entière est toujours continue sur l'intervalle ouvert de convergence.*

Le Théorème d'Abel nous dit que : si $R > 0$ *est le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n x^n$ *et si la série* $\sum a_n R^n$ *converge, alors la convergence est uniforme sur* $[0, R]$ *et la somme est donc continue sur* $[0, R]$*.*

Pour $x = -1$*, on peut donc appliquer le Théorème d'Abel avec*

$$a_n = (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad R = 1$$

ou vérifier directement que la série de fonctions converge uniformément sur $[-1, 0]$ *en exploitant le Critère spécial des séries alternées (domination du reste d'ordre* n*) : pour* $-1 \leqslant x \leqslant 0$*, la série* $\sum \sin\frac{1}{\sqrt{n}}x^n$ *est alternée et la valeur absolue*

$$\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\,|x|^n$$

du terme général tend vers 0 *en décroissant, donc*

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [-1, 0], \quad \big|R_n(x)\big| \leqslant \big|u_{n+1}(x)\big| \leqslant \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

où le majorant est indépendant de x *et tend vers* 0*.*

✍ *Comme la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série divergente de terme général positif, on peut démontrer que*

$$\lim_{x\to 1} S(x) = +\infty,$$

ce qui justifie qu'on cherche un ordre de grandeur de $S(x)$ au voisinage gauche de 1.

❧ *Considérons une série $\sum a_n$ de terme général positif, qu'on suppose divergente. Pour $A > 0$, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\sum_{n=1}^{N_0} a_n \geqslant A + 1.$$

Une fonction polynomiale étant continue, on en déduit que

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{N_0} a_n x^n > A$$

et donc qu'il existe un seuil $0 < x_0 < 1$ tel que

$$\forall\, x \in [x_0, 1[, \quad \sum_{n=1}^{N_0} a_n x^n \geqslant A.$$

Comme les a_n et x sont positifs, on en déduit que

$$\forall\, x \in [x_0, 1[, \quad S(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N_0} a_n x^n \geqslant A$$

et on a prouvé que

$$\lim_{x\to 1} S(x) = +\infty.$$

[**2.**] Comme $\sin' = \cos$, on déduit de l'Inégalité des accroissements finis que la fonction sin est lipschitzienne de constante 1 :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad |\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|.$$

Par conséquent, pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\left|\left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) x^n\right| &\leqslant \left|\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right| \\
&\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}.
\end{aligned}$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in [-1, 1]$ et ce majorant est équivalent à $1/n^{3/2}$, c'est donc le terme général d'une série convergente.

On a ainsi démontré que la série entière convergeait normalement sur le segment $[-1, 1]$.

[**3.**] On déduit de la question précédente que la fonction T définie par

$$T(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) x^n$$

est continue sur le segment $[-1, 1]$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
(1-x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^{n+1} \\
&= \sin 1.x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) x^n \\
&= \sin 1.x + T(x).
\end{aligned}$$

Comme T est continue sur $[-1,1]$, elle admet en particulier une limite finie, égale à $T(1)$, au voisinage gauche de 1, ce qui prouve que

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} (1-x)S(x) = \sin 1 + T(1).$$

✍ *Il se trouve qu'on peut calculer* $T(1)$ *! En effet, il s'agit de la somme d'une série télescopique :*

$$T(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin 1 = -\sin 1.$$

On a donc en fait démontré que

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} (1-x)S(x) = 0$$

et donc que

$$S(x) \underset{x \overset{<}{\to} 1}{=} o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

On a bien calculé un ordre de grandeur de $S(x)$*, mais pas un équivalent !*

rms134-1516

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx.$$

Justifier la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $[x \mapsto \cos^n x]$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc l'intégrale est bien définie.

Comme $0 \leqslant \cos x < 1$ pour tout $x \in]0, \pi/2]$,

$$\forall\, x \in]0, \pi/2]\,, \quad \lim_{n \to +\infty} \cos^n x = 0 \tag{3}$$

et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in]0, \pi/2]\,, \quad 0 \leqslant \cos^{n+1} x \leqslant \cos^n x < 1 \tag{4}$$

donc, en intégrant (4),

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x \, dx \leqslant \int 0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

et, par convergence dominée [(3) et (4)],

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n| = 0.$$

On peut donc appliquer le Critère spécial des séries alternées et en conclure que la série alternée $\sum u_n$ est convergente.

✍ *L'étude classique des intégrales de Wallis montre que*

$$|u_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$$

et donc que la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente (par comparaison à une série de Riemann).

❧ Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in [0, \pi/2], \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos^k x.$$

Chaque fonction f_n est continue sur le segment $[0, \pi/2]$ et par conséquent intégrable.

Pour $x \in]0, \pi/2]$, on reconnaît une série géométrique :

$$f_n(x) = \frac{1 - (-\cos x)^{n+1}}{1 + \cos x}$$

ce qui justifie la convergence simple vers une fonction continue :

$$\forall\, 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$$

mais aussi que la convergence est dominée :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant \frac{1 + \cos^{n+1} x}{1 + \cos x} \leqslant \frac{2}{1 + \cos x}.$$

✍ *Le majorant trouvé est indépendant du paramètre n et intégrable sur $]0, \pi/2]$ (puiqu'il admet un prolongement continu sur le segment $[0, \pi/2]$).*

On peut remarquer que la domination est vraie sur le segment $[0, \pi/2]$ puisque $f_n(0) = 1$ ou 0 selon la parité de n, mais pas la convergence simple : la suite de terme général $f_n(0)$ est divergente. C'est sans importance pour appliquer le Théorème de convergence dominée.

On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

donc on a démontré que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}.$$

❧ Il reste à calculer l'intégrale. On pose pour cela

$$t = \tan\frac{x}{2},$$

ce qui nous donne

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Après simplifications, il ne reste que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^1 dt = 1.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 1.$$

rms134-1522

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
[**1.**] *On suppose que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f'(x) = e^{-x}.$$

Démontrer que f *tend vers* 0 *au voisinage de* $+\infty$.
[**2.**] *Plus généralement, on suppose que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) + f'(x) = 0.$$

Démontrer que f *tend vers* 0 *au voisinage de* $+\infty$.

[**1.**] La fonction f est une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = e^{-x}.$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y(x) = Ae^{-x}$$

et une solution particulière est de la forme

$$y_0(x) = Bxe^{-x}$$

donc il existe deux réels A et B tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (A + Bx)e^{-x}.$$

On en déduit (par croissances comparées) que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

✍ *Un calcul rapide montre que* $B = 1$*, mais on n'a même pas besoin de connaître la valeur de* B *pour conclure !*

[**2.**] Puisque la fonction f est donnée, on peut définir une fonction auxiliaire g en posant

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = f'(x) + f(x).$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction g est bien continue sur $\mathbb{R}$ et, par hypothèse, elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

On peut alors voir la fonction f comme une solution de l'équation différentielle suivante.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = g(x). \tag{$\star$}$$

Les solutions de l'équation homogène associée à $(\star)$ sont de la forme

$$y(x) = Ae^{-x}.$$

On en déduit la solution générale de $(\star)$ en faisant varier la constante :

$$y(x) = A(x)e^{-x} \qquad \text{avec} \qquad A'(x)e^{-x} = g(x),$$

donc A est une primitive de $[x \mapsto g(x)e^{x}]$.

Comme la fonction f est une solution de l'équation différentielle $(\star)$, il existe une constante K telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x}\left(K + \int_0^x g(t)e^t\, dt\right).$$

La valeur de K importe peu, il reste à démontrer que

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} \int_0^x g(t)e^t\, dt = 0.$$

✍ *Tout cela est particulièrement astucieux et aussi classique qu'astucieux... Impossible de traiter cet exercice sans connaître l'astuce !*

❧ Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction g tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, il existe un seuil $A > 0$ tel que

$$\forall\, x \geqslant A, \quad \left|g(t)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Sur le segment $[0, A]$, la fonction g est continue, donc elle est bornée : il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall\, x \in [0, A], \quad \left|g(t)\right| \leqslant M.$$

Pour tout $x \geqslant A$, la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire nous donnent :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x g(t)e^t\,dt\right| &\leqslant \left|\int_0^A g(t)e^t\,dt\right| + \left|\int_A^x g(t)e^t\,dt\right| \\
&\leqslant \int_0^A \left|g(t)\right|e^t\,dt + \int_A^x \left|g(t)\right|e^t\,dt \\
&\leqslant M\int_0^A e^t\,dt + \varepsilon\int_A^x e^t\,dt \\
&\leqslant Me^A + \varepsilon e^x.
\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\forall\, x \geqslant A, \quad \left|e^{-x}\int_0^x g(t)e^t\,dt\right| \leqslant Me^A.e^{-x} + \varepsilon.$$

Comme $Me^A.e^{-x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, il existe un seuil $A' > 0$ tel que

$$\forall\, x \geqslant A', \qquad 0 \leqslant Me^A.e^{-x} \leqslant \varepsilon$$

et finalement

$$\forall\, x \geqslant \max\{A, A'\}, \qquad \left|e^{-x}\int_0^x g(t)e^t\,dt\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat attendu.

rms134-1531

> *La probabilité pour qu'une personne passant sous l'échafaudage d'un peintre en bâtiment reçoive une goutte de peinture est $p \in]0,1[$. On note X (resp. Y), le nombre de passants ayant reçu une goutte de peinture (resp. n'ayant pas reçu de goutte de peinture).*
> [**1.**] *On suppose que n personnes sont passées. Donner les lois de X et de Y. Calculer* $\mathbf{Cov}(X,Y)$. *Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?*
> [**2.**] *On suppose que N personnes sont passées, où N est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner les lois de X et de Y, ainsi que l'espérance et la variance de X. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?*

✍ *Nous allons commencer par traiter ces deux questions dans un même cadre général, avant de passer aux applications numériques.*

On modélise la situation décrite par l'énoncé de la manière suivante :

— il existe trois variables aléatoires N, X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui vérifient la relation suivante :

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad X(\omega) + Y(\omega) = N(\omega);$$

— pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

✍ *Cette dernière hypothèse est justifiée par le fait qu'on reconnaît ici un schéma de Bernoulli et que X représente, d'une certaine manière, le nombre de succès lors d'une succession de n tentatives (et Y représente alors le nombre d'échecs).*

❧ On en déduit avant toute chose que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n, q)$ avec $q = 1 - p$. En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y = k \mid N = n)\,\mathbf{P}(N = n) &= \mathbf{P}(Y = k, N = n)\\
&= \mathbf{P}(N - X = k, N = n)\\
&= \mathbf{P}(X = n - k, N = n)\\
&= \mathbf{P}(X = n - k \mid N = n)\,\mathbf{P}(N = n)\\
&= \binom{n}{n-k} p^{n-k} q^{n-(n-k)}\,\mathbf{P}(N = n) && (\text{pour } 0 \leqslant n - k \leqslant n)\\
&= \binom{n}{k} q^k p^{n-k}\,\mathbf{P}(N = n) && (\text{soit } 0 \leqslant k \leqslant n)
\end{aligned}$$

par symétrie des coefficients binomiaux.

[**1.**] On suppose pour commencer que la variable aléatoire N est presque sûrement constante :

$$\mathbf{P}(N = n) = 1.$$

Dans ces conditions, l'évènement $[N \neq n]$ est négligeable et

$$\begin{aligned}
\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) &= \mathbf{P}(X = k, N = n) + \mathbf{P}(X = k, N \neq n)\\
&= \mathbf{P}(X = k \mid N = n)\,\mathbf{P}(N = n) = \mathbf{P}(X = k \mid N = n).
\end{aligned}$$

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

De même, la variable aléatoire Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, q)$.

❧ Comme N est presque sûrement constante, elle est indépendante de X. (Voir ci-dessous en cas de doute.) Comme $Y = N - X$ et que la covariance est linéaire à droite,

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(X, N) - \mathbf{V}(X) = 0 - \mathbf{V}(X) = -npq < 0.$$

Comme la covariance de X et Y n'est pas nulle, ces deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

✍ *Comme $\mathbf{P}(N = n) = 1$, on a aussi $\mathbf{P}(N = k) = 0$ pour tout entier $k \neq n$.*

Pour $k \neq n$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on a donc

$$0 \leqslant \mathbf{P}(X = \ell, N = k) \leqslant \mathbf{P}(N = k) = 0$$

et donc

$$\mathbf{P}(X = \ell, N = k) = 0 = \mathbf{P}(X = \ell)\,\mathbf{P}(N = k).$$

Pour $k = n$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on a aussi (voir plus haut)

$$\mathbf{P}(X = \ell, N = n) = \mathbf{P}(X = \ell) = \mathbf{P}(X = \ell)\,\mathbf{P}(N = n).$$

Ces calculs prouvent que X et N sont indépendantes.

[**2.**] On suppose maintenant que la variable aléatoire N suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.
D'après la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k \mid N = n)\,\mathbf{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\cdot\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda q}
\end{aligned}$$

et comme $-1 + q = -p$, la variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda p)$.
De même, Y suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda q)$.
En particulier, $\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda p$.

❧ Quels que soient les entiers k et ℓ, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = k, Y = \ell) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = \ell, N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, N - X = \ell, N = n) && \text{(puisque } X + Y = N\text{)} \\
&= \mathbf{P}(X = k, N = k + \ell) && \text{(contrainte } n = k + \ell\text{)} \\
&= \mathbf{P}(X = k \mid N = k + \ell)\,\mathbf{P}(N = k + \ell) \\
&= \binom{k+\ell}{k}p^k q^\ell e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!} \\
&= \mathbf{P}(X = k)\,\mathbf{P}(Y = \ell).
\end{aligned}$$

Cela prouve bien que X et Y sont indépendantes.
En particulier, cette fois, la covariance de X et Y est nulle.

rms134-1659

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que f et f" sont bornées.

[**1.**] *Justifier l'existence des réels*

$$M_0(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f(x)| \quad \textit{et} \quad M_2(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f''(x)|.$$

[**2.**] *Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, démontrer que*

$$\forall\, h > 0, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}.$$

[**3.**] *Justifier alors l'existence de*

$$M_1(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$$

et démontrer que

$$M_1(f) \leqslant 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}. \tag{$\star$}$$

[**4.**] *Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit une fonction $f_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ en posant*

$$\forall\, 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad f_\varepsilon(x) = 2 - (2-x)^{2+\varepsilon}$$

et

$$\forall\, x > 2, \quad f_\varepsilon(x) = 2.$$

Démontrer que f_ε, f'_ε et f''_ε sont bornées sur $\mathbb{R}_+$. Préciser les valeurs de $M_0(f_\varepsilon)$, de $M_1(f_\varepsilon)$ et de $M_2(f_\varepsilon)$.

[**5.**] *En déduire que le facteur 2 est la meilleure constante possible dans l'inégalité ($\star$).*

[**1.**] Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure réelle (Axiome de la borne supérieure). Comme f et f'' sont définies sur $\mathbb{R}_+$, les ensembles

$$\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}_+\} \quad \text{et} \quad \{|f''(x)|,\ x \in \mathbb{R}_+\}$$

ne sont pas vides. Comme f et f'' sont supposées bornées, ces deux ensembles sont également majorés. Par conséquent, les deux réels $M_0(f)$ et $M_2(f)$ sont bien définis.

[**2.**] D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}_+, \quad |f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} M_2(f).$$

En particulier, pour $a = x \in \mathbb{R}_+$ et $b = x + h$ avec $h \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2} M_2(f).$$

On en déduit par inégalité triangulaire que

$$\big||hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)|\big| \leqslant \frac{h^2}{2} M_2(f)$$

et donc que

$$\begin{aligned} |hf'(x)| &\leqslant \frac{h^2}{2} M_2(f) + |f(x+h) - f(x)| \\ &\leqslant 2M_0(f) + \frac{h^2}{2} M_2(f) \end{aligned}$$

(à nouveau par inégalité triangulaire). Comme $h > 0$, on en déduit que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}.$$

[**3.**] Dans l'encadrement précédent, le majorant est indépendant de x. Cela prouve que la dérivée f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et par conséquent que le réel $M_1(f)$ est bien défini (pour les raisons données plus haut).

Dans cet encadrement, le minorant est indépendant de $h > 0$, on peut donc passer à la borne inférieure :

$$\forall x \geqslant 0, \quad |f'(x)| \leqslant \inf_{h>0} \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}.$$

Une étude (rapide !) des variations de la fonction

$$\varphi = \left[h \mapsto \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}\right]$$

montre que

$$\inf_{h>0} \varphi(h) = \varphi\left(\sqrt{\frac{4M_0(f)}{M_2(f)}}\right) = 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}.$$

Par conséquent, on a bien

$$\forall x \geqslant 0, \quad |f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}.$$

Le majorant est indépendant de la variable x, on peut cette fois passer à la borne supérieure et trouver :

$$M_1(f) \leqslant 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}.$$

[4.] Il est clair que f_ε est strictement croissante sur $[0, 2]$. Comme

$$f_\varepsilon(2) = 2, \quad f_\varepsilon(0) = 2 - 2^{2+\varepsilon} = 2 - 4.2^\varepsilon < -2$$

et que $f_\varepsilon(x) = 2$ pour tout $x > 2$, on en déduit que

$$M_0(f_\varepsilon) = 4.2^\varepsilon - 2.$$

❧ Pour tout $0 \leqslant x \leqslant 2$, on a

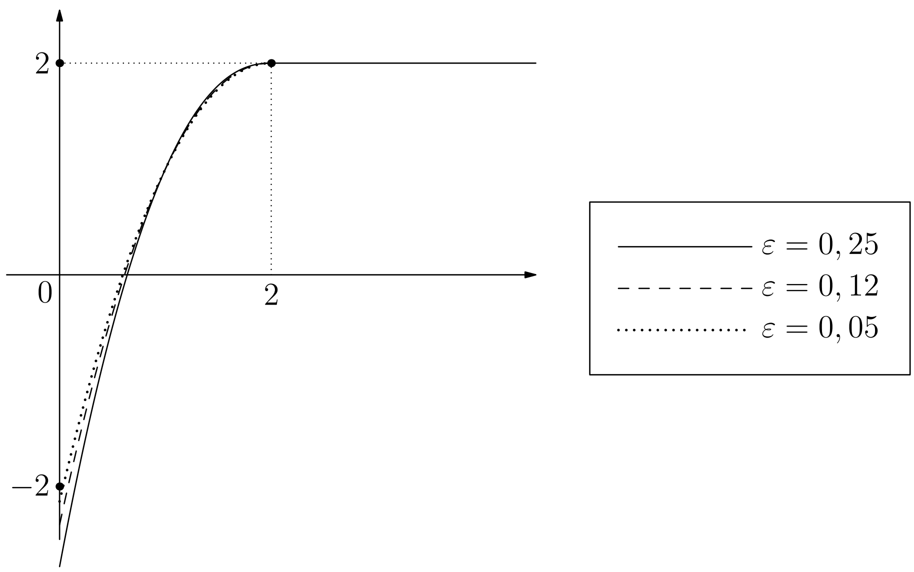
$$f'_\varepsilon(x) = (2+\varepsilon)(2-x)^{1+\varepsilon}.$$

Il est aussi clair que la dérivée f'_ε est décroissante sur $[0, 2]$ (et nulle sur $]2, +\infty[$!) avec

$$f'_\varepsilon(0) = 2^{1+\varepsilon}(2+\varepsilon), \quad f'_\varepsilon(2) = 0.$$

Par conséquent,

$$M_1(f_\varepsilon) = 2.(2+\varepsilon).2^\varepsilon.$$



❧ Enfin, f''_ε est nulle sur $]2, +\infty[$ et

$$\forall x \in [0, 2], \quad f''_\varepsilon(x) = -(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)(2-x)^\varepsilon.$$

La dérivée seconde est donc négative et croissante sur $[0, 2]$:

$$f''_\varepsilon(0) = -(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)2^\varepsilon, \quad f''_\varepsilon(2) = 0$$

d'où finalement
$$M_2(f_\varepsilon) = (2+\varepsilon)(1+\varepsilon)2^\varepsilon.$$

✍ *Un détail à ne pas perdre de vue : pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction f_ε est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.*
En effet,
— *elle est clairement de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, 2[$ et sur $]2, +\infty[$;*
— *elle tend vers 2 à gauche et à droite de $x = 2$ (donc le raccord est continu) ;*
— *sa dérivée tend vers 0 à gauche et à droite de $x = 2$ (donc le raccord est de classe $\mathscr{C}^1$) ;*
— *sa dérivée seconde tend vers 0 à gauche et à droite de $x = 2$ (donc le raccord est de classe $\mathscr{C}^2$).*
En revanche, la fonction f_0 définie par
$$\forall\, x \in [0, 2], \quad f_0(x) = 2 - (2-x)^2 \quad \textit{et} \quad \forall\, x > 2, \quad f_0(x) = 2$$
n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$: sa dérivée seconde est égale à -2 sur $[0, 2[$ et identiquement nulle sur $]2, +\infty[$.
Cette fonction ne peut donc pas servir de contre-exemple alors même que
$$M_1(f_0) = 2\sqrt{M_0(f_0)M_2(f_0)}.$$

[**5.**] Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un réel $\alpha < 2$ tel que
$$\frac{M_1(f)}{\sqrt{M_0(f)M_2(f)}} \leqslant \alpha$$
pour toute fonction f bornée et de dérivée seconde bornée.
En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc
$$\frac{M_1(f_\varepsilon)}{\sqrt{M_0(f_\varepsilon)M_2(f_\varepsilon)}} = \frac{2.(2+\varepsilon).2^\varepsilon}{\sqrt{[4.2^\varepsilon - 2][(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)2^\varepsilon]}} \leqslant \alpha.$$
En faisant tendre ε tend vers 0, on obtiendrait alors
$$\frac{2.2.1}{\sqrt{[4-2][2.1.1]}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2 \leqslant \alpha$$
(puisque les inégalités larges sont conservées par passage à la limite), ce qui est absurde puisqu'on a supposé que $\alpha < 2$.
Le facteur 2 est donc optimal (minimal).

rms134-1663

Soient $a < b$*, deux nombres réels, et* f*, une application de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur le segment* $[a, b]$*, à valeurs réelles, telle que*

$$f(a) = f(b) = 0$$

et on considère le polynôme

$$P_0 = \frac{(X-a)(X-b)}{2}.$$

[**1.**] *Trouver une relation simple entre les deux intégrales suivantes.*

$$\int_a^b f(t)\, dt \qquad \int_a^b f''(t)P_0(t)\, dt$$

[**2.**] *En déduire que*

$$\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty.$$

[**1.**] Il est clair que les deux intégrales sont bien définies (fonctions continues sur un segment).

La fonction f et la fonction polynomiale associée à P_0 sont de classe $\mathscr{C}^2$, ce qui nous permet d'intégrer deux fois par parties après avoir remarqué que $P_0''(t) = 1$ pour tout $t \in [a, b]$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\, dt &= \int_a^b f(t)P_0''(t)\, dt \\
&= \big[f(t)P_0'(t)\big]_a^b - \int_a^b f'(t)P_0'(t)\, dt \\
&= -\int_a^b f'(t)P_0'(t)\, dt && (\text{car } f(a) = f(b) = 0) \\
&= -\big[f'(t)P_0(t)\big]_a^b + \int_a^b f''(t)P_0(t)\, dt \\
&= \int_a^b f''(t)P_0(t)\, dt && (\text{car } P_0(a) = P_0(b) = 0)
\end{aligned}$$

[**2.**] La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$, sa dérivée seconde f'' est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle est bornée :

$$\forall\, t \in [a, b], \qquad \big|f''(t)\big| \leqslant \|f''\|_\infty.$$

On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| &= \left|\int_a^b f''(t)P_0(t)\, dt\right| \\
&\leqslant \int_a^b \big|f''(t)P_0(t)\big|\, dt \leqslant \|f''\|_\infty \int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2}\, dt.
\end{aligned}$$

✍ *On doit immédiatement se rendre compte que la fonction associée à* P_0 *est négative sur le segment* $[a, b]$ *(signe d'un trinôme entre ses racines).*

On effectue ensuite le changement de variable affine usuel pour se ramener à l'intervalle $[0, 1]$ (cf le cours sur les fonctions convexes).

$$t = (1-u)a + ub \qquad dt = (b-a)\, du$$

On obtient ainsi

$$\int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2}\, dt = \frac{(b-a)^3}{2}\int_0^1 u(1-u)\, du = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

✍ *Il est plus efficace de changer de variable avant de développer la fonction intégrande : le facteur* $(b-a)^3$ *apparaît sous forme factorisée et le calcul de l'intégrale est alors immédiat.*

Complément

On vient d'effectuer le calcul qui donne l'efficacité de la méthode des trapèzes pour approcher une intégrale au moyen d'une somme de Riemann.

❧ Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$, alors il existe une fonction affine φ telle que

$$\varphi(a) = f(a) \qquad \text{et} \qquad \varphi(b) = f(b).$$

L'existence (et l'unicité) de φ découle du théorème sur l'interpolation de Lagrange et l'expression de φ présente peu d'intérêt. En effet, comme φ est affine, son intégrale sur le segment $[a, b]$ est l'aire d'un trapèze et donc

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2} \times (b - a) = \frac{f(a) + f(b)}{2} \times (b - a).$$

❧ On peut alors appliquer ce qui précède à la fonction $g = f - \varphi$: il est clair que g est de classe $\mathscr{C}^2$, on a fait ce qu'il fallait pour que $g(a) = g(b) = 0$ et de plus $g'' = f''$ (puisque la fonction φ est affine), si bien qu'on a en fait déjà démontré que

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty.$$

Il reste à découper le segment $[a, b]$ au moyen d'une subdivision

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = b \quad \text{avec} \quad \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{b-a}{n}.$$

Chaque segment $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ étant contenu dans le segment $[a, b]$, on a

$$\sup_{t \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]} \left| f''(t) \right| \leqslant \sup_{t \in [a,b]} \left| f''(t) \right| = \|f''\|_\infty$$

et le duo habituel (relation de Chasles et inégalité triangulaire) nous donne

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \big[f(\alpha_k) + f(\alpha_{k+1}) \big] \right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^3}{12} \cdot \|f''\|_\infty \\ &\leqslant n \cdot \frac{(b-a)^3}{12 n^3} \cdot \|f''\|_\infty = \frac{K}{n^2}. \end{aligned}$$

❧ L'erreur commise en approchant l'intégrale de f par la méthode des trapèzes avec une subdivision en n sous-intervalles est donc $\mathcal{O}(1/n^2)$, c'est-à-dire un ordre de grandeur plus précise que la méthode des rectangles.

❧ C'est d'autant plus remarquable que les expressions simplifiées des deux méthodes sont très semblables !

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)$$

$$T_n = \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(\alpha_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(\alpha_k) + \frac{f(\alpha_n)}{2} \right]$$