
ORAUX BLANCS MP — 5 JUIN 2026

Référence	Origine	Thèmes
135-1449	IMT MP	Suite définie implicitement
135-1451	"	Série numérique
135-1498	"	Série génératrice
135-1526	CCINP PSI	Projecteurs orthogonaux
135-1530	IMT PSI	Matrices de rang 1
135-1532	CCINP PSI	Matrice symétrique
135-1575	"	Équation différentielle
135-1579	Navale PSI	Loi de probabilité discrète
135-1583	CCINP PSI	Couple de variables aléatoires
136-1388	IMT MP	Trace et matrices symétriques

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$g_n(t) = \ln t - \operatorname{Arctan} t - n\pi.$$

[1.] Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g_n(x_n) = 0$.

[2.] Démontrer que $e^{n\pi} < x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la nature de la série $\sum 1/x_n$.

[1.] Considérons la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t > 0, \quad g(t) = \ln t - \operatorname{Arctan} t.$$

Il est clair que g est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$, qu'elle tend vers $-\infty$ au voisinage de 0 et vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

☞ La fonction Arctan est bornée sur \mathbb{R} , c'est donc la fonction \ln qui impose les limites de g .

De plus,

$$\forall t > 0, \quad g(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2 - t + 1}{t(1+t^2)} > 0.$$

☞ Le discriminant du numérateur est strictement négatif (égal à -3), donc le numérateur est de signe constant et il est strictement positif pour $t = 1$.

Par conséquent, la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et on déduit du Théorème de la bijection monotone que g réalise une bijection (strictement croissante) de l'intervalle $]0, +\infty[$ sur l'intervalle

$$]\lim_{t \rightarrow 0} g(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)[=]-\infty, +\infty[.$$

Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, réel $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(x_n) = n\pi$.

☞ En définissant les fonctions g_n , l'énoncé offre une fausse piste : il n'y a ici qu'une seule fonction à étudier !

[2.] Il est clair que

$$\forall n \geq 1, \quad g(e^{n\pi}) = n\pi - \operatorname{Arctan}(n\pi) < n\pi = g(x_n).$$

Comme la fonction g est croissante, on en déduit que $e^{n\pi} < x_n$.

☛ Comme $e^{n\pi} > 0$, on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad 0 < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{e^{n\pi}} = (e^{-\pi})^n.$$

Comme $-\pi < 0$, on a donc $0 < e^{-\pi} < 1$, ce qui prouve que la série géométrique $\sum (e^{-\pi})^n$ est convergente et, par comparaison de série de termes généraux positifs, la série $\sum 1/x_n$ est (absolument) convergente.

On considère la suite u définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

[1.] Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

[2.] Quelle est la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$?

[1.] Il est clair que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ (on ne connaît pas le signe de u_0). On en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1},$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Par conséquent, $u_{n+1} \sim 1/n$ et comme la série harmonique $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif, la série $\sum u_n$ est divergente.

[2.] En reprenant la relation de récurrence, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{e^{-u_n}}{n+1} = \frac{1 - u_n + o(u_n)}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o(1/n)\right) \left(1 - \frac{1}{n} + o(1/n)\right) \\ &= \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(-1)^n u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}(1/n^2).$$

La série harmonique alternée $\sum (-1)^n/n$ est convergente (Critère spécial des séries alternées). Comme la série de Riemann $\sum 1/n^2$ est absolument convergente, toute série dont le terme général est $\mathcal{O}(1/n^2)$ est elle-même (absolument) convergente.

Ainsi, la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente (comme somme de deux séries convergentes).

On pose

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} t^n.$$

- [1.] Calculer le rayon de convergence de cette série entière.
 [2.] Expliciter $S(t)$ pour $t \in]-\mathbb{R}, \mathbb{R}[$.
 [3.] Soit X , une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} telle que

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = \lambda S(t).$$

- [3.a.] Que vaut λ ?
 [3.b.] Calculer $\mathbf{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 [3.c.] Calculer l'espérance et la variance de X .

[1.] Par croissances comparées, il est clair que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} \cdot t^n = 0.$$

Puisque le terme général de la série entière reste borné quel que soit $t \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière est infini.

[2.] Remarquons que $n^2 + n + 1 = n(n-1) + 2n + 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad S(t) &= t^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)t^{n-2}}{n!} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= (t^2 + 2t + 1)e^t = (t+1)^2 e^t. \end{aligned}$$

☞ Ce n'est pas une astuce, c'est une méthode!

La présence de la factorielle au dénominateur doit nous conduire à interpréter la série entière comme une série de Taylor et donc à penser en termes de dérivée.

Il faut donc raisonner, non pas sur la base canonique $(1, X, X^2, \dots)$ de $\mathbb{R}[X]$, mais sur la base de Newton

$$(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3), \dots)$$

qui nous a rendu de grands services dans l'étude des séries génératrices.

☞ Il est bon de retenir que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)t^n}{n!} = Q(t)e^t.$$

La réciproque est vraie : quel que soit le polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$, il existe une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t)e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

et (formule du produit de Cauchy)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \frac{1}{(n-k)!}$$

donc

$$\forall n \geq d, \quad c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^d a_k \cdot n(n-1) \cdots (n-k+1).$$

Cette formule est encore vraie pour $0 \leq n < d$ (les derniers termes de la somme sont nuls puisqu'un facteur est nul) et on reconnaît ici une expression de la forme $P(n)/n!$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ (donné par sa décomposition dans la base de Newton).

[3.a.] Par définition, $G_X(1) = 1$, donc $\lambda S(1) = 4\lambda e = 1$. On a donc nécessairement $\lambda = 1/4e$.

[3.b.] Pour tout $t \in [-1, 1]$, on a

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda(n^2 + n + 1)}{n!} \cdot t^n.$$

Par unicité du développement en série entière (le rayon de convergence est strictement positif), on peut identifier terme à terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{n^2 + n + 1}{4n!e}.$$

[3.c.] Puisque le rayon de convergence est strictement supérieur à 1, la fonction génératrice G_X est de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle ouvert qui contient le segment $[-1, 1]$ et la variable aléatoire X admet des moments de tout ordre.

• En particulier,

$$\mathbf{E}(X) = G'_X(1) = 8\lambda e = 2$$

puisque $S'(t) = (t^2 + 4t + 3)e^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

De même,

$$\mathbf{E}(X(X-1)) = G''_X(1) = 14\lambda e = 7/2$$

puisque $S''(t) = (t^2 + 6t + 7)e^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) - [\mathbf{E}(X)]^2 = 3/2.$$

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, un espace euclidien ; $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$, une base orthonormée de E et $p \in L(E)$, un projecteur orthogonal.

[1.] Pour tout $x \in E$,

$$\langle p(x) | x \rangle = \|p(x)\|^2.$$

[2.] Démontrer que

$$\text{rg } p = \sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2.$$

[1.] Pour tout $x \in E$, le vecteur $p(x)$ appartient à $\text{Im } p$ et, comme p est un projecteur, le vecteur $x - p(x)$ appartient à $\text{Ker } p$. Comme p est un projecteur orthogonal, les deux sous-espaces vectoriels $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ sont orthogonaux, donc

$$\langle p(x) | x \rangle = \langle p(x) | x - p(x) + p(x) \rangle = \langle p(x) | x - p(x) \rangle + \langle p(x) | p(x) \rangle = \|p(x)\|^2.$$

[2.] Pour tout projecteur, le rang est égal à la trace.

Soit P , la matrice de p relative à la base orthonormée \mathcal{B} . La j -ième colonne de P contient les coordonnées du vecteur $p(e_j)$ relatives à la base \mathcal{B} et comme cette base est orthonormée, on sait que

$$p(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle e_i | p(e_j) \rangle \cdot e_i$$

(décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée).

Pour $1 \leq j \leq n$, le j -ième coefficient diagonal de la matrice P est donc égal à

$$\langle e_j | p(e_j) \rangle = \|p(e_j)\|^2$$

et finalement

$$\text{rg } p = \text{tr } p = \sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2.$$

Soient $U \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (avec $n \geq 2$) et $A = U \cdot U^T$.

- [1.] La matrice A est-elle diagonalisable ?
- [2.] Déterminer le rang de A . Quel est le spectre de A ?
- [3.] Déterminer le polynôme caractéristique de A .

[1.] La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable (Théorème spectral).

[2.] Si la colonne U est nulle, alors $A = 0_n$, donc le rang de A est nul et son spectre est réduit à $\{0\}$.

☛ Si la colonne U n'est pas nulle, alors les colonnes de A sont toutes proportionnelles à U et l'une d'elles n'est pas nulle, donc le rang de A est égal à 1. Comme $1 < n$, la matrice A n'est pas inversible et 0 est donc une valeur propre. En particulier, le polynôme minimal de A est divisible par X .

Comme A n'est pas nulle, son polynôme minimal n'est pas égal à X .

De plus,

$$A^2 = U \cdot (U^T \cdot U) \cdot U^T = \|U\|^2 \cdot (U \cdot U^T) = \|U\|^2 \cdot A.$$

Donc $X^2 - \|U\|^2 X = X(X - \|U\|^2)$ est un polynôme annulateur unitaire de A .

Comme le polynôme minimal de A est unitaire ; divisible par X ; distinct de X et divise $X(X - \|U\|^2)$, on conclut que

$$\mu_A = X(X - \|U\|^2).$$

☛ Comme $U \neq 0$, le scalaire $\|U\|^2$ est strictement positif. Le polynôme minimal de A est donc scindé à racines simples — mais on le savait déjà, puisque A est diagonalisable.

Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme minimal, donc $\text{Sp}(A) = \{0; \|U\|^2\}$.

[3.] Comme A est diagonalisable, la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.

Comme $\text{rg } A = 1$, le noyau de A est un hyperplan, donc la multiplicité de la valeur propre 0 est égale à $(n - 1)$.

De ce fait, la multiplicité de l'autre valeur propre $\|U\|^2$ est égale à 1.

☛ La multiplicité d'une valeur propre est **comprise** entre 1 et la dimension du sous-espace propre. La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre non nulle étant égale à 1 (= la codimension de l'hyperplan propre $\text{Ker } A$), la multiplicité est donc égale à 1 aussi.

Comme A est diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé ; ses racines sont les valeurs propres de A et leurs multiplicités sont connues. Enfin, par convention, le polynôme caractéristique est unitaire, donc

$$\chi_A = X^{n-1}(X - \|U\|^2).$$

[1.] Rappeler l'inégalité de Schwarz.

[2.] Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq r} \in \mathbb{R}^r$,

$$\left(\sum_{k=1}^r \lambda_k \right)^2 \leq r \sum_{k=1}^r \lambda_k^2.$$

[3.] Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$(\operatorname{tr} B)^2 \leq \operatorname{rg} B \cdot \operatorname{tr}(B^2).$$

[4.] Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad b_{i,i} = 1$$

et que

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, \quad |b_{i,j}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

[4.a.] Exprimer $\operatorname{tr}(B^2)$ et vérifier que $\operatorname{tr}(B^2) \leq 2n$.

[4.b.] Démontrer que $\operatorname{rg} B \geq n/2$.

[1.] Quel que soit le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur E ,

$$\forall x, y \in E, \quad (\langle x | y \rangle)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

[2.] On considère le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^r et les vecteurs

$$x = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r, \quad y = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^r$$

et on applique l'inégalité de Schwarz.

[3.] D'après le Théorème spectral, la matrice B est diagonalisable. En notant r , son rang et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres *non nulles*, la matrice B est semblable à la matrice

$$D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0).$$

La matrice B^2 est donc semblable à la matrice

$$D^2 = \operatorname{Diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_r^2, 0, \dots, 0)$$

et comme deux matrices semblables ont même trace, l'inégalité cherchée revient à

$$\left(\sum_{k=1}^r \lambda_k \right)^2 \leq r \sum_{k=1}^r \lambda_k^2,$$

ce qui a été établi à la question précédente.

[4.a.] On munit l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Comme la matrice B est symétrique,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(B^2) &= \operatorname{tr}(B^T \cdot B) = \|B\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j}^2 \\ &= \sum_{k=1}^n b_{k,k}^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} b_{i,j}^2 \\ &\leq n + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \frac{1}{n} = n + \frac{n(n-1)}{n} = 2n - 1 \leq 2n. \end{aligned}$$

[4.b.] Comme $\operatorname{tr} B = n$, on déduit de ce qui précède que

$$n^2 = (\operatorname{tr} B)^2 \leq r \operatorname{tr}(B^2) \leq 2nr.$$

Par conséquent, $\operatorname{rg} B \geq n/2$.

☞ On obtient ainsi une variante du Lemme d'Hadamard sur les matrices à diagonale fortement dominante (la matrice B n'est pas nécessairement une matrice à diagonale fortement dominante).

On considère l'équation différentielle suivante.

$$\forall t \in I =]0, +\infty[, \quad t^2 x''(t) + tx'(t) + x(t) = \frac{1}{t} + t \quad (E)$$

- [1.] Que prévoit le Théorème de Cauchy-Lipschitz pour l'équation (E) ?
- [2.] Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $g = [x \mapsto f(e^x)]$. Démontrer que f est solution de (E) sur I si, et seulement si, g est solution sur \mathbb{R} d'une équation différentielle du second ordre (qu'on déterminera).
- [3.] Résoudre l'équation (E).

[1.] Sur l'intervalle I , l'équation (E) peut être mise sous la forme canonique

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad (C)$$

avec

$$A(t) = \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

où les deux applications $A : I \rightarrow \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont continues **car** $0 \notin I$.

Par conséquent, pour toute condition initiale $(t_0, (x_0, v_0)) \in I \times \mathbb{R}^2$, il existe une, et une seule, solution F de (C) sur I telle que $F(t_0) = (x_0, v_0)$.

Comme $x \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ est solution de (E) si, et seulement si, $X = (x, x') \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ est solution de (C), on en déduit que, pour tout triplet $(t_0, x_0, v_0) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe une, et une seule, solution f de (E) sur I telle que $f(t_0) = x_0$ et $f'(t_0) = v_0$.

[2.] Comme f est de classe \mathcal{C}^2 sur I et que

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \longmapsto g(x) = f(e^x) \end{aligned}$$

l'application g est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^x f'(e^x) \quad \text{et} \quad g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x).$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) + g(x) = (e^x)^2 f''(e^x) + e^x f'(e^x) + f(e^x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le réel $t = e^x$ appartient à l'intervalle I et comme f est une solution de (E), alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^x)^2 f''(e^x) + e^x f'(e^x) + f(e^x) = \frac{1}{e^x} + e^x = 2 \operatorname{ch} x.$$

La fonction g est donc une solution de l'équation différentielle à coefficients constants

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = e^x + e^{-x}. \quad (E_0)$$

☞ On a raisonné par condition nécessaire ("si f est solution de (E), alors g est solution de (E_0) "), il faudra étudier la réciproque à un moment ou un autre. Il n'est pas utile d'attendre !

Le changement de variable $t = e^x$ peut aussi s'écrire $x = \ln t$, c'est donc aussi une bijection de classe \mathcal{C}^2 de I dans \mathbb{R} . De ce fait, en reprenant les calculs qui viennent d'être faits : si $g(x)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 qui vérifie l'équation (E_0) sur \mathbb{R} , alors $f(t) = g(\ln t)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 qui vérifie l'équation (E) sur I .

[3.] On reconnaît l'équation du pendule harmonique. Donc une fonction $y_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de l'équation homogène associée à (E_0) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_0(x) = a \cos x + b \sin x.$$

L'équation $y''(x) + y(x) = e^x$ admet une solution particulière de la forme $y_1(x) = be^x$. Après substitution et simplification, on trouve que $b = 1/2$.

De même, l'équation $y''(x) + y(x) = e^{-x}$ admet une solution particulière de la forme $y_2(x) = ce^{-x}$. On trouve que $c = 1/2$.

Finalement, une fonction $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de (E_0) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = a \cos x + b \sin x + cx.$$

• On a justifié plus haut qu'on pouvait en déduire les solutions de (E) : une fonction $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ est solution de (E) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall t > 0, \quad f(t) = a \cos \ln t + b \sin \ln t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2t}.$$

Soit X , une variable aléatoire telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

[1.] Vérifier que l'énoncé a un sens.

[2.] Calculer la fonction génératrice de X .

[3.] Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

[1.]

↳ **Rappel.** Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $\mathbf{P}(X = k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ si, et seulement si, la série $\sum p_k$ est une série convergente de terme général positif dont la somme est égale à 1.

On sait que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}. \quad (*)$$

↳ On obtient ce résultat en dérivant terme à terme la série entière $\sum x^n$.

Comme $x = 1/2 \in]-1, 1[$ et que

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4} \cdot (k-1) \cdot (1/2)^{k-2},$$

la série $\sum (k-1)2^{-k}$ est une série convergente de terme général positif et sa somme est égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)(1/2)^{k-2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k(1/2)^{k-1} = \frac{1}{4} \cdot (1 - 1/2)^{-2} = \frac{1}{4} \cdot 4,$$

ce qui prouve qu'il existe bien une variable aléatoire X telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

[2.] D'après (*),

$$\forall t \in [0, 1], \quad G(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)t^k = \frac{t^2}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k(t/2)^{k-1} = \frac{t^2}{(2-t)^2}.$$

[3.] Le rayon de convergence de la série entière $\sum k(t/2)^{k-1}$ est égal à 2, donc la fonction génératrice est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle ouvert $]-2, 2[$.

↳ Le terme général tend vers 0 pour $|t| < 2$ et vers $+\infty$ pour $t = 2$, donc le rayon de convergence est égal à 2.

En particulier, la fonction génératrice G est deux fois dérivable en $t = 1$, donc

$$\mathbf{E}(X) = G'(1) = 4 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X(X-1)) = G''(1) = 16$$

car

$$\forall t \in [0, 1], \quad G'(t) = \frac{4t}{(2-t)^3} \quad \text{et} \quad G''(t) = \frac{8(1+t)}{(2-t)^3}.$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) - [\mathbf{E}(X)]^2 = 4.$$

Soient X et Y , deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et que la loi conditionnelle de Y sachant $[X = m]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$ (avec $0 < p < 1$).

[1.] Déterminer la loi de (X, Y) .

[2.] En déduire la loi de Y .

[3.] Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

[4.] Déterminer la loi de $Z = X - Y$. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

[1.] Par hypothèse, quels que soient les entiers naturels m et n ,

$$\mathbf{P}(X = m, Y = n) = \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(Y = n | X = m).$$

Si $n > m$, le second facteur est nul (la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$ est portée par l'intervalle $\llbracket 0, m \rrbracket$), donc $\mathbf{P}(X = m, Y = n) = 0$. Et si $0 \leq n \leq m$, alors

$$\mathbf{P}(X = m, Y = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \cdot \binom{m}{n} p^n q^{m-n} = e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!} \cdot \frac{(\lambda q)^{m-n}}{(m-n)!}.$$

[2.] Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , la famille $([X = m])_{m \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements et par conséquent

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Y = n) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m, Y = n) = \sum_{m=n}^{+\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!} \cdot \frac{(\lambda q)^{m-n}}{(m-n)!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^k}{k!} = e^{-\lambda + \lambda q} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!}. \end{aligned}$$

On reconnaît ici la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

[3.] Comme X et Y suivent une loi de Poisson, on sait que $\mathbf{P}(X = 0) > 0$ et que $\mathbf{P}(Y = 1) > 0$. Mais la loi conjointe nous dit que $\mathbf{P}(Y \leq X) = 1$ et comme $[X = 0, Y = 1] \subset [Y \leq X]^c$, alors

$$\mathbf{P}(X = 0, Y = 1) = 0 \neq \mathbf{P}(X = 0) \mathbf{P}(Y = 1).$$

Donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

☞ Pour arriver à cette conclusion, on s'est appuyé sur une propriété remarquable ($\mathbf{P}(Y \leq X) = 1$) qui nous a permis de mettre en évidence un évènement négligeable.

Attention, si une propriété comme $\mathbf{P}(Y \leq X) = 1$ indique qu'une contrainte relie X et Y , elle n'empêche pas que les variables aléatoires soient indépendantes. Par exemple, si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli, alors U et $V + 1$ sont encore des variables aléatoires indépendantes et ces deux variables aléatoires vérifient $\mathbf{P}(U \leq V + 1) = 1$.

[4.] L'application Z est une variable aléatoire comme combinaison linéaire de deux variables aléatoires. On décompose l'évènement $[Z = k]$ avec le système complet d'évènements lié à la variable aléatoire X :

$$[Z = k] = \bigsqcup_{m=0}^{+\infty} [X = m, X - Y = k] = \bigsqcup_{m=0}^{+\infty} [X = m, Y = m - k].$$

Comme $\mathbf{P}(Y \geq 0) = 1$ (loi de Poisson),

$$\forall 0 \leq m < k, \quad 0 \leq \mathbf{P}(X = m, Y = m - k) \leq \mathbf{P}(Y = m - k) = 0,$$

il ne reste donc que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Z = k) = \sum_{m=k}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m, Y = m - k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda q)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^n}{n!} = e^{-\lambda + \lambda p} \cdot \frac{(\lambda q)^k}{k!}.$$

La variable aléatoire Z suit donc la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda q)$.

☞ On peut vérifier que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes et relier les calculs qui précèdent à la stabilité de la loi de Poisson pour l'addition.

[1.] Soient E , un espace euclidien; f , un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$, une base orthonormée de E . Démontrer que

$$\operatorname{tr} f = \sum_{k=1}^n \langle x_k | f(x_k) \rangle.$$

[2.] Soient M et N , deux matrices symétriques positives.

[2.a.] Démontrer qu'il existe une matrice $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = M$. En déduire que

$$0 \leq \operatorname{tr}(MN).$$

[2.b.] Démontrer que

$$\operatorname{tr}(MN) \leq \operatorname{tr}(M) \cdot \operatorname{tr}(N).$$

[1.] Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice de f relative à la base orthonormée \mathcal{B} . Par définition,

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad f(x_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \cdot x_i$$

et comme la base \mathcal{B} est orthonormée,

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad f(x_j) = \sum_{i=1}^n \langle x_i | f(x_j) \rangle \cdot x_i.$$

Par unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base (orthonormée ou non!),

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad a_{i,j} = \langle x_i | f(x_j) \rangle$$

et en particulier

$$\operatorname{tr} f = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \sum_{k=1}^n \langle x_k | f(x_k) \rangle.$$

[2.a.] Comme $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $\Delta = \operatorname{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ telles que

$$P^T \cdot M \cdot P = P^{-1} \cdot M \cdot P = \Delta \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq k \leq n, \quad \alpha_k \geq 0.$$

En posant $D = \operatorname{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$ et

$$R = P \cdot D \cdot P^T = P \cdot D \cdot P^{-1},$$

on obtient une matrice $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = M$.

• D'après la propriété fondamentale de la trace,

$$\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(R \cdot R \cdot N) = \operatorname{tr}(R \cdot N \cdot R).$$

Or la matrice RNR est symétrique réelle et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x^T \cdot (RNR) \cdot x = (Rx)^T \cdot N \cdot (Rx) \geq 0$$

puisque $N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Donc $RNR \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$: cette matrice est diagonalisable (Théorème spectral à nouveau) et ses valeurs propres sont positives, donc sa trace est positive.

On a ainsi démontré que $\operatorname{tr}(MN) \geq 0$.

[2.b.] Appliquons une fois encore le Théorème spectral à la matrice M et considérons une base orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs propres de M (associés aux valeurs propres $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$).

D'après la première question et par symétrie de M ,

$$\operatorname{tr}(MN) = \sum_{i=1}^n e_i^T \cdot (MN) e_i = \sum_{i=1}^n (M e_i)^T \cdot (N e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot e_i^T \cdot (N e_i)$$

puisque $(M e_i) = \alpha_i \cdot e_i$. Comme $N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq e_i^T \cdot (N e_i) \leq \sum_{k=1}^n e_k^T \cdot (N e_k) = \operatorname{tr}(N)$$

et comme les α_i sont positifs (ce sont les valeurs propres de $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$),

$$\operatorname{tr}(MN) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot e_i^T \cdot (N e_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \operatorname{tr}(N) = \operatorname{tr}(M) \cdot \operatorname{tr}(N).$$