
MARDI 2 JUIN

Certains énoncés ont été transmis par des candidats aux concours en 2025 - merci à eux.

Autant que possible, j'ai veillé à établir des énoncés mathématiquement corrects, faites-moi signe si vous rencontrez des points litigieux.

Thèmes abordés	
135-py-32	Résolution d'une équation différentielle linéaire
135-py-35	Produit eulérien du sinus
135-py-40	Loi des événements rares
135-py-43	Inégalité de Gronwall
Centrale25-I07	Méthode de Newton (retour E.C-T.)

On considère l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x^2)y''(x) + xy'(x) - \frac{y(x)}{4} = 0. \quad (\text{E})$$

[1.] On commence par une résolution purement numérique.

[1.a.] Démontrer qu'il existe une, et une seule, solution de (E) telle que $y(0) = \sqrt{3}$ et $y'(0) = 0$.

[1.b.] Compléter le code suivant pour tracer l'allure du graphe de cette solution pour $t \in [-1, 1]$.

```
def f(x, t):
    return np.array(...)

T = np.arange(0, 1, 0.01)
X = integr.odeint(...)
plt.plot(T, ...)
T = np.arange(0, -1, -0.01)
X = integr.odeint(...)
plt.plot(T, ...)
```

[2.] Dans cette question, on cherche les solutions qui sont développables en série entière.

[2.a.] Déterminer les solutions de (E) qui sont développables en série entière. (On ne demande pas d'explicitier leur somme.)

[2.b.] Démontrer que toute solution de (E) est développable en série entière au voisinage de l'origine.

[2.c.] En déduire une autre façon de tracer la courbe tracée à la question précédente.

[3.] Dans cette dernière question, on résout littéralement l'équation (E) au moyen d'un changement de variable bien choisi.

[3.a.] Soit h , une solution de (E). Déterminer une équation différentielle vérifiée par $g = h \circ sh$.

[3.b.] En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R} .

[1.a.] L'équation différentielle (E) est une équation du second ordre linéaire et homogène. Ses coefficients sont clairement des fonctions continues et le coefficient de $y''(x)$ ne s'annule pas. Par conséquent, on peut réécrire l'équation (E) sous forme résoluble d'un système linéaire du premier ordre :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{4(1+x^2)} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 4x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}. \quad (\text{S})$$

D'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, le système (S) admet une unique solution $Y(x)$ telle que $Y(x_0) = (y_0, v_0)$. Autrement dit : l'équation (E) admet une unique solution $y(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = v_0$.

[1.b.] Dans l'équation (E), le facteur de la dérivée seconde ne s'annule pas, donc on n'a aucune difficulté à écrire l'équation sous forme résoluble.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} x'(t) \\ 1/4 x(t) - tx'(t) \end{pmatrix}$$

Sous cette forme, l'inconnue est le couple $X = (x, x')$, donc à chaque instant, la position $x(t)$ est représentée par $X[0]$ et la vitesse $x'(t)$ par $X[1]$.

On en déduit l'expression de la fonction f .

```
def f(X, t):
    return np.array([X[1], (X[0]/4-t*X[1])/(1+t**2)])
```

• On résout dans un premier temps sur l'intervalle $[0, 1]$, en précisant la condition initiale : $t = 0, x(0) = \sqrt{3}$ et $x'(0) = 0$.

La solution X est un tableau numpy de la forme

$$X = ((x_k, v_k))_{0 \leq k < N}.$$

On récupère les positions successives en fonction du temps $(x_k)_{0 \leq k < N}$ avec $X[:, 0]$. On pourrait récupérer de même les vitesses successives en fonction du temps $(v_k)_{0 \leq k < N}$ avec $X[:, 1]$.

```
T = np.arange(0, 1, 0.01)
Xp = integr.odeint(f, np.array([np.sqrt(3), 0]), T)
plt.plot(T, Xp[:,0], 'r')
```

• On résout ensuite sur l'intervalle $[-1, 0]$ en conservant la même condition initiale, donc en considérant une discrétisation *décroissante* de l'intervalle $[-1, 0]$.

```
T = np.arange(0, -1, -0.01)
Xm = integr.odeint(f, np.array([np.sqrt(3), 0]), T)
plt.plot(T, Xm[:,0], 'r')
```

• On a imposé la même couleur (rouge) sur les deux tracés pour obtenir une courbe d'une seule couleur. (Par défaut, deux courbes consécutives sont tracées dans des couleurs différentes).

[2.a.] Si y est une fonction développable en série entière, alors il existe un réel $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad xy'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n, \quad x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

pour tout $x \in]-r, r[$ car la fonction y est alors de classe \mathcal{C}^∞ et ses dérivées successives peuvent être calculées en dérivant terme à terme.

• On en déduit (après quelques simplifications) que

$$\forall x \in]-r, r[, \quad (1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \frac{1}{4}y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + \frac{(2n+1)(2n-1)}{4} a_n \right] x^n$$

et comme le rayon de convergence est strictement, on en déduit que y est solution de (E) sur $]-r, r[$ si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} + \frac{(2n+1)(2n-1)}{4} a_n$$

(Unicité du développement en série entière).

• Ainsi, la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ est solution de (E) si, et seulement si, le rayon de convergence de la série entière est strictement positif et si ses coefficients vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{(2n+1)(2n-1)}{4(n+2)(n+1)} a_n.$$

• Une telle relation de récurrence nous conduit à discuter sur la parité des indices.

• Les coefficients de rang pair sont liés par la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k+2} = -\frac{(4k+1)(4k-1)}{4(2k+2)(2k+1)} a_{2k} \quad (*)$$

et entièrement déterminés par la donnée de a_0 : la suite $(\alpha_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $\alpha_0 = 1$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2k} = (-1)^k \prod_{\ell=1}^k \frac{(4\ell+1)(4\ell-1)}{(4\ell+4)(4\ell+2)}$$

nous donne $a_{2k} = \alpha_{2k} \cdot a_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Les coefficients de rang impair sont liés par la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k+3} = -\frac{(4k+3)(4k+1)}{4(2k+3)(2k+2)} a_{2k+1} \quad (**)$$

et entièrement déterminés par la donnée de a_1 : la suite $(\alpha_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $\alpha_1 = 1$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2k+1} = (-1)^k \prod_{\ell=1}^k \frac{(4\ell+3)(4\ell+1)}{(4\ell+6)(4\ell+4)}$$

nous donne $a_{2k+1} = \alpha_{2k+1} \cdot a_1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- Si $a_0 \neq 0$, alors les termes de rang pair sont tous différents de 0 et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{2k+2} x^{2k+2}}{a_{2k} x^{2k}} \right| = x^2.$$

Par conséquent, la série $\sum a_{2k} x^{2k}$ converge absolument pour $|x| < 1$ et diverge grossièrement pour $|x| > 1$ (règle de d'Alembert).

- Si $a_1 \neq 0$, alors les termes de rang impair sont tous différents de 0 et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{2k+3} x^{2k+3}}{a_{2k+1} x^{2k+1}} \right| = x^2.$$

Par conséquent, la série $\sum a_{2k+1} x^{2k+1}$ converge absolument pour $|x| < 1$ et diverge grossièrement pour $|x| > 1$.

• Finalement, les solutions de (E) qui sont développables en série entière sont les fonctions de la forme

$$y = a_0 S_0 + a_1 S_1 \quad \text{où} \quad S_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k} x^{2k} \quad \text{et} \quad S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k+1} x^{2k+1}.$$

[2.b.] La théorie de Cauchy-Lipschitz nous assure que l'ensemble des solutions de (E) est un plan vectoriel.

Les calculs précédents nous ont montré que l'ensemble des solutions de (E) qui sont développables en série entière est le sous-espace engendré par les fonctions S_0 et S_1 . Comme ces deux fonctions ne sont pas identiquement nulles ($\alpha_0 = \alpha_1 = 1$), que S_0 est paire et que S_1 est impaire, ces deux fonctions ne sont pas proportionnelles. L'ensemble des solutions développables en série entière est donc un plan.

Par conséquent, toute solution de (E) est développable en série entière au voisinage de 0 (avec un rayon de convergence égale à 1 — sauf pour la solution nulle, bien entendu).

[2.c.] Puisque S_0 est paire et que S_1 est impaire, on a

$$S_0(0) = 1, \quad S_0'(0) = 0, \quad S_1(0) = 0, \quad S_1'(0) = 1$$

et l'unique solution de l'équation (E) associée au problème de Cauchy $(x_0, y_0, v_0) = (0, \sqrt{3}, 0)$ s'exprime donc

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad y(x) = y_0 \cdot S_0(x) + v_0 \cdot S_1(x) = \sqrt{3} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k} x^{2k}.$$

• Pour tracer le graphe de cette solution, il suffit de savoir calculer une valeur approchée assez précise de la somme de cette série entière.

Les relations (*) et (**) montrent que les séries entières $\sum \alpha_{2k} x^{2k}$ et $\sum \alpha_{2k+1} x^{2k+1}$ vérifient les hypothèses du Critère spécial des séries alternées pour tout $x \in]-1, 1[$.

• On peut démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 (ce n'est pas spécialement compliqué, mais ça n'a rien d'évident). On en déduit que le Critère spécial des séries alternées s'applique aussi pour $x = \pm 1$ et par conséquent les solutions de (E) sont développables en série entière sur le segment $[-1, 1]$.

• L'estimation du reste donnée par le Critère spécial des séries alternées nous montre qu'on aura un tracé satisfaisant en ne considérant que les 20 premiers termes de la série.

```
def DSE(T, n):
    s, puiss = np.ones_like(T), np.ones_like(T)
    coeff = 1
    for k in range(n):
        coeff *= -(4*k+1)*(4*k-1)/(4*(2*k+2)*(2*k+1))
        puiss *= T**2
        s += coeff*puiss
    return s
```

```
T = np.arange(-1, 1, 0.01)
Z = np.sqrt(3)*DSE(T, 20)
plt.plot(T, Z)
```

[3.a.] Quelle que soit la fonction h de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , la fonction $g = h \circ \text{sh}$ vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = \text{ch } t \cdot h'(\text{sh } t) \quad \text{et} \quad g''(t) = (1 + \text{sh}^2 t)h''(\text{sh } t) + \text{sh } t h'(\text{sh } t).$$

Comme sh réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, & \quad (1 + x^2)h''(x) + xh'(x) - \frac{h(x)}{4} = 0 \\ \iff \forall t \in \mathbb{R}, & \quad g''(t) - \frac{1}{4}g(t) = 0 \end{aligned}$$

☞ En résolvant une équation du second degré, on trouve l'expression de la bijection réciproque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arg sh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Comme sh est une fonction impaire, sa réciproque est également une fonction impaire — on ne peut pas dire que ça saute aux yeux.

[3.b.] Les solutions de cette équation (à coefficients constants) sont bien connues : il existe deux constantes réelles a_0 et a_1 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = a_0 \text{ch } \frac{t}{2} + a_1 \text{sh } \frac{t}{2}$$

et par conséquent la solution générale de (E) est de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = a_0 \text{ch } \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{2} + a_1 \text{sh } \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{2}.$$

☞ Il est bon de conserver la décomposition de la solution générale comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, ça aide à voir plus clair.

☞ Il est facile de vérifier qu'on n'a pas fait de faute de calcul en superposant le graphe obtenu pour $a_0 = \sqrt{3}$ et $a_1 = 0$ aux graphes précédents.

```
Y = np.sqrt(3)*np.cosh(.5*np.log(T+np.sqrt(1+T**2)))
plt.plot(T, Y, 'b')
```

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right).$$

[1.] Déterminer une valeur approchée de u_n pour $n \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ et de u_{10^k} pour $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

Proposer une conjecture sur la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

[2.] Pour tout réel $0 < t < \pi$, on pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t}.$$

[2.a.] Tracer les graphes de f et de g . Quelle conjecture peut-on en déduire ? **On admettra cette conjecture dans la suite.**

[2.b.] Déterminer la limite de g au voisinage de 0.

[2.c.] Démontrer que les fonctions f et g peuvent être prolongées en des fonctions continues sur $]0, \pi[$.

[3.] En calculant l'intégrale de $g(t)$ sur $[0, x]$ de deux manières, déterminer la limite de

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

[4.] La fonction f est-elle intégrable sur $]0, \pi[$?

[1.] Par définition, $u_1 = 3/4$ et

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = u_{n-1} \times \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right).$$

Un code récursif s'en déduit immédiatement et suffit pour calculer les premiers termes de la suite.

```
def u(n):
    if n==1:
        return 3/4
    else:
        return (1-1/(4*n**2))*u(n-1)

for n in range(1, 11):
    print(u(n))
```

⚠ La récursivité est très limitée en Python et il n'est pas possible d'utiliser un code récursif pour calculer les valeurs de u_n avec $n > 10^3$.

```
def u_iter(n):
    un = 3/4
    for k in range(2, n+1):
        un *= (1-1/(4*k**2))
    return un

for k in range(1, 5):
    print(u_iter(10**k))
```

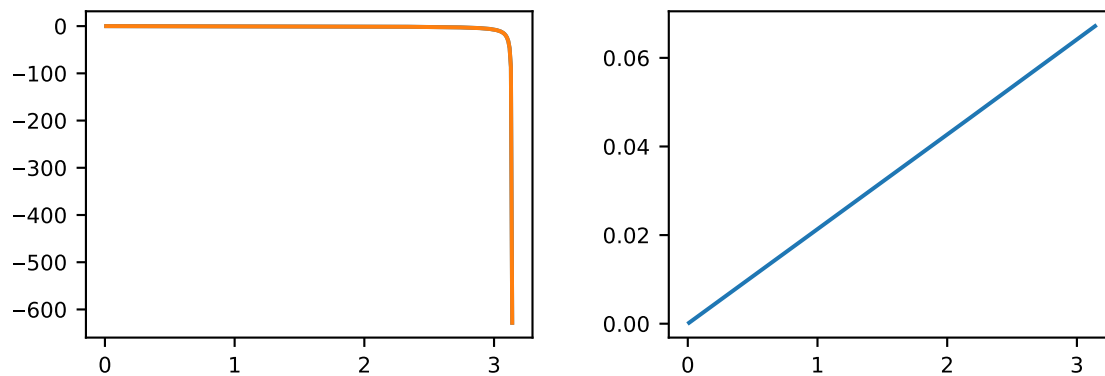
Il semble que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (mais lentement).

[2.a.] Le code est sans problème.

```
T = np.arange(0.01, np.pi, 0.01)
plt.plot(T, f(10, T))
plt.plot(T, g(T))
```

Mais on n'y voit pas grand'chose (figure de gauche)! Il vaudrait mieux tracer la différence entre les deux fonctions (figure de droite).

```
plt.figure(figsize=(3., 2.25))
plt.plot(T, f(10, T)-g(T))
```



On peut conjecturer que la différence entre f et g est nulle.

☞ On n'a pas calculé les valeurs de f , mais seulement des sommes partielles et sans aucune subtilité. Il est donc tout à fait naturel que la différence entre f et g augmente légèrement avec t : c'est l'erreur de calcul sur f qui se manifeste ainsi.

[2.b.] Par définition,

$$g(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t \sin t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}.$$

Lorsque t tend vers 0,

$$t \cos t - \sin t \underset{t \rightarrow 0}{=} \left(t - \frac{t^3}{2} + o(t^3) \right) - \sin t = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) t^3 + o(t^3)$$

donc $g(t) \sim -t/3$ au voisinage de 0. La fonction g tend donc vers 0 au voisinage de 0.

[2.c.] Il est clair que g est continue sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$ et on vient de voir que g tendait vers 0 au voisinage de l'origine. En posant $g(0) = 0$, on définit donc un prolongement de g qui est continu sur $[0, \pi[$.

☛ Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$\forall t \in [0, \pi[, \quad \varphi_n(t) = \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

Il est clair que φ_1 est continue sur $[0, \pi[$ et que φ_n est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0, \pi]$ pour tout $n \geq 2$.

☛ Pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $t \in [0, \pi]$,

$$|\varphi_n(t)| = \frac{2t}{n^2\pi^2 - t^2} \leq \frac{2\pi}{(n^2 - 1)\pi^2}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de t et ce majorant est $\mathcal{O}(1/n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc la série $\sum_{n \geq 2} \varphi_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$.

La somme de la série $\sum_{n \geq 1} \varphi_n$ est donc continue sur $[0, \pi]$ et elle coïncide avec f sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$. On a ainsi démontré que f admettait un prolongement continu sur $[0, \pi]$.

☞ On a admis que $f(t) = g(t)$ pour $0 < t < \pi$. Ayant prolongé les deux fonctions par continuité en 0, on en déduit que $f(t) = g(t)$ pour tout $0 \leq t < \pi$.

[3.] Comme g est continue sur $[0, \pi]$, elle admet des primitives sur cet intervalle et la fonction G définie par

$$\forall x \in [0, \pi[, \quad G(x) = \int_0^x g(t) dt$$

est la primitive qui est nulle en $x = 0$.

• Il est clair que $\ln \sin x - \ln x = \ln \frac{\sin x}{x}$ est une primitive de g sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$. Comme cette expression tend vers 0 au voisinage de 0, on en déduit que

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad G(x) = \ln \frac{\sin x}{x}.$$

• Une primitive sur $]0, \pi[$ est en particulier une fonction continue en 0. Par conséquent, l'unique primitive qui est nulle en 0 est aussi l'unique primitive qui tend vers 0 en 0.

• En admettant que $f = g$ sur $]0, \pi[$,

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{2t}{t^2 - x^2} dt + \int_0^x \sum_{n=2}^{+\infty} \varphi_n(t) dt.$$

On a démontré que la série de fonctions continues $\sum_{n \geq 2} \varphi_n$ convergeait normalement sur $]0, \pi[$. Par conséquent,

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \int_0^x \sum_{n=2}^{+\infty} \varphi_n(t) dt = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^x \varphi_n(t) dt = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \frac{x^2 - n^2 \pi^2}{-n^2 \pi^2}$$

• L'égalité

$$\int_0^x \varphi_1(t) dt = \ln \frac{x^2 - \pi^2}{-\pi^2} = \ln \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right)$$

n'est vraie que pour $0 \leq x < \pi$.

• On a donc démontré que

$$\forall 0 < x < \pi, \quad \ln \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$$

ou, si on préfère,

$$\forall 0 < x < \pi, \quad \frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

• Par continuité de la fonction exp, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \exp \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{(\pi/2)^2}{n^2 \pi^2} \right) \right] = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

[4.] La fonction f est continue sur $]0, \pi[$ (depuis qu'on l'a prolongée par continuité en 0) et elle est de signe constant (négative, en tant que somme de fonctions négatives), donc elle est intégrable sur $]0, \pi[$ si, et seulement si, l'intégrale

$$\int_0^x f(t) dt = \ln \frac{\sin x}{x}$$

tend vers une limite finie lorsque x tend vers π . Ce n'est pas le cas, donc f n'est pas intégrable sur $]0, \pi[$.

• Variante.

On a décomposé f en somme de deux fonctions :

$$f(t) = \frac{2t}{(t-\pi)(t+\pi)} + S(t) \quad \text{où} \quad S(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \varphi_n(t).$$

La fonction S est continue sur le segment $]0, \pi[$ car, pour tout $n \geq 2$, les fonctions φ_n sont continues sur $]0, \pi[$ et la série $\sum_{n \geq 2} \varphi_n$ converge normalement sur $]0, \pi[$.

Ainsi, la fonction f est intégrable sur $]0, \pi[$ si, et seulement si, la fonction φ_1 est intégrable sur $]0, \pi[$.

Or

$$\varphi_1(t) \underset{t \rightarrow \pi}{\sim} \frac{1}{t - \pi}$$

donc φ_1 n'est pas intégrable au voisinage de π et f ne l'est pas non plus.

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Soient $\lambda > 0$ et Y , une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Pour tout entier $n > \lambda$, on considère une variable aléatoire S_n suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$.

[1.] Étant donné une fonction bornée f et les deux réels $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$ comme arguments, écrire une fonction qui renvoie une valeur approchée de $\mathbf{E}[f(Y)]$ à $\varepsilon \cdot \|f\|_\infty$ près.

[2.] Étant donné une fonction f , le réel $\lambda > 0$ et l'entier $n > \lambda$ comme arguments, écrire une fonction qui renvoie la valeur de $\mathbf{E}[f(S_n)]$.

[3.a.] On choisit ici $\lambda = 2$ et $f(x) = e^{-x}$. Afficher les valeurs de $\mathbf{E}[f(S_n)]$ pour $n \in \llbracket 3, 100 \rrbracket$. Comparer avec $\mathbf{E}[f(Y)]$ à 10^{-4} près.

[3.b.] Mêmes questions avec $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Établir une conjecture.

[3.c.] Démontrer cette conjecture.

[4.] Soient X et Y , deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} . Démontrer que

$$\forall A \subset \mathbb{N}, \quad |\mathbf{P}(X \in A) - \mathbf{P}(Y \in A)| \leq \mathbf{P}(X \neq Y).$$

[1.] Comme la fonction f est bornée, la variable aléatoire $f(Y)$ est bornée, donc c'est une variable aléatoire d'espérance finie et, d'après la formule de transfert,

$$\mathbf{E}[f(Y)] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} f(k) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

☞ Si on sait que la variable aléatoire $f(Y)$ est d'espérance finie, alors la famille $(f(k) \mathbf{P}(Y = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est sommable et il n'est donc pas nécessaire de justifier cette propriété.

☛ D'après la formule de la série exponentielle et l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall \lambda > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\lambda^n}{n!} \leq \frac{\lambda^N}{N!} e^\lambda$$

et donc

$$\forall \lambda > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sum_{n=N}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \leq \frac{\lambda^N}{N!}.$$

☞ Avec $f(t) = e^t$, on a $f^{(N)}(t) = e^t$ et par conséquent $|f^{(N)}(t)| \leq e^\lambda$ pour tout $t \in [0, \lambda]$.

☛ Comme la fonction f est supposée bornée,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left| f(k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq \|f\|_\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

et comme le majorant est le terme général d'une série convergente, on en déduit que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=N}^{+\infty} f(k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq \|f\|_\infty \left(\sum_{k=N}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \leq \|f\|_\infty \frac{\lambda^N}{N!}$$

par inégalité triangulaire.

☛ Cette estimation nous permet de contrôler la précision lors du calcul approché de l'espérance de $f(Y)$:

$$\mathbf{E}(f(Y)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

☛ On commence par une fonction auxiliaire qui détermine la valeur de N en fonction du paramètre λ et de la tolérance ε choisie.

```
def nb_iterations(lbd, eps):
    k, erreur = 1, lbd
    while erreur > eps:
        k += 1
        erreur *= lbd/k
    return k
```

On calcule $\lambda^N/N!$ par récurrence en remarquant que $\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \times \frac{\lambda}{k}$.

• Connaissant le nombre d'itérations à effectuer pour assurer la précision voulue, on calcule une somme partielle de la série.

```
def esp_Poisson(f, lbd, eps):
    N = nb_iterations(lbd, eps)
    s, pk = 0, 1
    for k in range(N):
        s += f(k)*pk
        pk *= lbd/(k+1)
    return s*np.exp(-lbd)
```

Ici encore, on calcule $\mathbf{P}(Y = k)$ par récurrence et on attend la dernière minute pour faire apparaître le facteur $e^{-\lambda}$.

[2.] Toujours d'après la formule de transfert,

$$\mathbf{E}[f(S_n)] = \sum_{k=0}^n f(k) \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^n f(k) \cdot \underbrace{\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left[\frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{(n-\lambda)^{n-k}}{n^n}\right]}_{p_k}.$$

↳ Il s'agit ici de calculer une somme finie, donc on peut calculer la valeur exacte de l'espérance — exacte aux erreurs d'arrondi près, bien entendu !

• Pour $k = 0$, le cofacteur p_k de $f(k)$ est égal à $(1 - \lambda/n)^n$ et pour $0 \leq k < n$,

$$p_{k+1} = p_k \cdot \frac{\lambda}{k+1} \cdot \frac{n-k}{n-\lambda}.$$

Il reste alors à coder le calcul de

$$\mathbf{E}[f(S_n)] = f(0) \cdot p_0 + \sum_{0 \leq k < n} f(k+1) \cdot p_{k+1}.$$

```
def esp_binomiale(f, n, lbd):
    pk = (1-lbd/n)**n
    s = pk*f(0)
    for k in range(n):
        pk *= lbd*(n-k)/((k+1)*(n-lbd))
        s += f(k+1)*pk
    return s
```

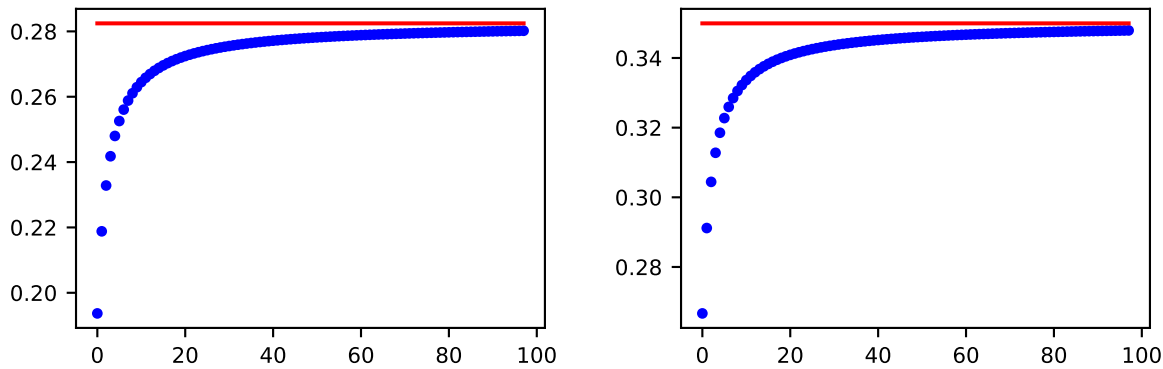
[3.a.] Le code est sans aucun mystère et son exécution suggère que $\mathbf{E}[f(S_n)]$ se rapproche de $\mathbf{E}[f(Y)]$ (voir plus bas, figure de gauche).

```
lbd = 2
def f(x):
    return np.exp(-x)
E_bin = [esp_binomiale(f, n, lbd) for n in range(3, 101)]
E_P = [esp_Poisson(f, lbd, 1e-2)]*len(E_bin)
plt.plot(E_bin, 'b.')
plt.plot(E_P, 'r')
```

[3.b.] Le code est analogue, on introduit une autre manière de définir une fonction.

Cette fois encore, l'espérance $\mathbf{E}[f(S_n)]$ se rapproche de $\mathbf{E}[f(Y)]$ lorsque n augmente (figure de droite ci-dessous).

```
f = lambda x: 1/(1+x**2)
E_bin = [esp_binomiale(f, n, lbd) for n in range(3, 101)]
E_P = [esp_Poisson(f, lbd, 1e-2)]*len(E_bin)
plt.plot(E_bin, 'b.')
plt.plot(E_P, 'r')
```



[3.c.] Nous allons démontrer que $\mathbf{E}[f(S_n)]$ converge vers $\mathbf{E}[f(Y)]$ lorsque n tend vers $+\infty$, quelle que soit la fonction f continue et bornée sur \mathbb{R}_+ .

↳ Cette question ne figurait pas dans l'énoncé original.

• D'après le cours ("loi des événements rares"),

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(S_n = k) = \mathbf{P}(Y = k)$$

et donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} |\mathbf{P}(S_n = k) - \mathbf{P}(Y = k)| = 0. \quad (\star)$$

• Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Les restes d'une série convergente tendent vers 0, donc il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$0 \leq \sum_{k=N}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) \leq \varepsilon. \quad (\dagger)$$

Cet entier N étant fixé, on déduit de (\star) qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=0}^{N-1} |\mathbf{P}(S_n = k) - \mathbf{P}(Y = k)| \leq \varepsilon. \quad (\ddagger)$$

• Comme f est bornée, on déduit de la formule de transfert et de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(f(Y)) - \mathbf{E}(f(S_n))| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} |f(k)| \cdot |\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(S_n = k)| + \sum_{k=N}^{+\infty} |f(k)| \cdot (\mathbf{P}(Y = k) + \mathbf{P}(S_n = k)) \\ &\leq \|f\|_{\infty} \cdot \left(\varepsilon + \varepsilon + \sum_{k=N}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = k) \right) \end{aligned}$$

d'après (\dagger) et (\ddagger) .

• Également de (\dagger) et de (\ddagger) , on déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = k) &= 1 - \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}(S_n = k) = \left(1 - \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}(Y = k) \right) + \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(S_n = k)] \\ &= \sum_{k=N}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) + \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(S_n = k)] \\ &\leq \sum_{k=N}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) + \sum_{k=0}^{N-1} |\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(S_n = k)| \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

On a ainsi prouvé qu'il existait un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |\mathbf{E}[f(Y)] - \mathbf{E}[f(S_n)]| \leq 4\|f\|_{\infty} \varepsilon$$

et donc que $\mathbf{E}[f(S_n)]$ converge effectivement vers $\mathbf{E}[f(Y)]$ quand n tend vers $+\infty$.

[4.]

☞ Si on admet que $[X = Y] \in \mathcal{A}$ pour toutes les variables aléatoires X et Y définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, alors $[X \neq Y] = [X = Y]^c \in \mathcal{A}$ et la démonstration suivante vaut pour toutes les variables aléatoires et non pas seulement pour les variables aléatoires discrètes.

Il est clair que

$$[Y \in A] = [Y \in A, X = Y] \sqcup [Y \in A, X \neq Y]$$

donc

$$\mathbf{P}(Y \in A) \leq \mathbf{P}(Y \in A, X = Y) + \mathbf{P}(Y \in A, X \neq Y)$$

mais il est aussi clair que

$$[Y \in A] \cap [X = Y] \subset [X \in A] \quad \text{et que} \quad [Y \in A, X \neq Y] \subset [X \neq Y]$$

donc

$$\mathbf{P}(Y \in A) \leq \mathbf{P}(X \in A) + \mathbf{P}(X \neq Y).$$

☛ On a ainsi démontré que

$$\mathbf{P}(Y \in A) \leq \mathbf{P}(X \in A) + \mathbf{P}(X \neq Y).$$

Par symétrie, on en déduit que

$$\mathbf{P}(X \in A) \leq \mathbf{P}(Y \in A) + \mathbf{P}(X \neq Y)$$

et finalement, on a démontré que

$$|\mathbf{P}(Y \in A) - \mathbf{P}(X \in A)| \leq \mathbf{P}(X \neq Y).$$

☞ Cette question, totalement hors sujet, figurait dans l'énoncé original.

Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, une fonction intégrable. On considère une fonction f , solution du problème de Cauchy

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + [1 + q(x)]y(x) = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b. \quad (E)$$

[1.] Écrire une fonction trace (a, b, u, v, q) qui trace l'allure du graphe d'une solution du problème de Cauchy (E) sur le segment $[u, v]$. Quelle conjecture peut-on faire ?

[2.] Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$z(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)q(t)f(t) dt.$$

[2.a.] Démontrer que z est de classe \mathcal{C}^2 et simplifier l'expression $z''(x) + z(x)$.

[2.b.] Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| \leq |a| + |b| + \int_0^x |q(t)f(t)| dt.$$

[2.c.] En déduire que la fonction f est bornée.

[1.] L'équation différentielle considérée est une équation linéaire et homogène du second ordre. Le coefficient de y'' est constant et la fonction q est continue sur \mathbb{R}_+ , donc le Théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur l'intervalle \mathbb{R}_+ : quelle que soit la condition initiale $(x_0, y_0, v_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cette équation admet une, et une seule, solution $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que

$$(f(x_0), f'(x_0)) = (y_0, v_0).$$

Pour (E), $x_0 = 0, y_0 = a$ et $v_0 = b$.

• Il faut résoudre sur l'intervalle $[0, v]$ (puisque la condition initiale prend $x_0 = 0$ comme "instant initial" et tronquer le résultat pour ne tracer que sur le sous-intervalle $[u, v]$).

```
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

def trace(a, b, u, v, q):
    if u>v:
        u, v = v, u
    def f(x, t):
        return np.array([x[1], -(1+q(t))*x[0]])
    T = np.arange(0, v, 0.1)
    X = odeint(f, np.array([a, b]), T)
    n_debut = sum(T<u)
    plt.plot(T[n_debut:], X[n_debut:,0])
```

↳ Pour bien faire, il faudrait tester si $u < v$.

• Après quelques essais, on constate qu'une sorte de régime permanent s'établit. Il semble que la solution de ce problème de Cauchy soit bornée.

[2.a.] Remarquons tout d'abord que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad z(x) = f(x) + \sin x \int_0^x \cos tq(t)f(t) dt - \cos x \int_0^x \sin tq(t)f(t) dt.$$

La fonction q est continue et la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 , donc les

$$\int_0^x \cos tq(t)f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_0^x \sin tq(t)f(t) dt$$

sont de classe \mathcal{C}^1 (Théorème fondamental), donc z est de classe \mathcal{C}^1 et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad z'(x) = f'(x) + \cos x \int_0^x \cos tq(t)f(t) dt + \sin x \int_0^x \sin tq(t)f(t) dt.$$

Il apparaît sur cette expression que z' est de classe \mathcal{C}^1 et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad z''(x) = f''(x) - \sin x \int_0^x \cos tq(t)f(t) dt + \cos x \int_0^x \sin tq(t)f(t) dt + q(x)f(x)$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad z''(x) + z(x) = f''(x) + f(x) - q(x)f(x) = 0$$

d'après l'équation différentielle vérifiée par f .

[2.b.] D'après les calculs qui précèdent, $z(0) = f(0) = a$ et $z'(0) = f'(0) = b$ et il existe deux réels A et B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad z(x) = A \cos x + B \sin x.$$

On en déduit facilement que $A = a$ et que $B = b$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = a \cos x + b \sin x - \int_0^x \sin(x-t)q(t)f(t) dt.$$

Comme $x \geq 0$, on intègre bornes croissantes et on peut déduire de l'inégalité triangulaire pour les intégrales que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| &\leq |a| \times 1 + |b| \times 1 + \int_0^x |\sin(x-t)q(t)f(t)| dt \\ &\leq |a| + |b| + \int_0^x |q(t)| |f(t)| dt. \end{aligned}$$

[2.c.] Simplifions l'encadrement précédent : il existe deux fonctions continues et positives $g(t) = |f(t)|$ et $\varphi(t) = |q(t)|$ ainsi qu'une constante positive $c \in \mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) \leq c + \int_0^x \varphi(t)g(t) dt.$$

Comme le produit φg est une fonction continue sur \mathbb{R}_+ , le second membre est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ :

$$h(x) = c + \int_0^x \varphi(t)g(t) dt$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h'(x) = \varphi(x)g(x) \leq \varphi(x)h(x).$$

• Comme la fonction φ est continue sur \mathbb{R}_+ , elle admet une primitive Φ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h'(x) - \varphi(x)h(x) = h'(x) - \Phi'(x)h(x) \leq 0.$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad [h'(x) - \Phi'(x)h(x)] \exp(-\Phi(x)) \leq 0$$

et donc que l'expression

$$h(x) \exp(-\Phi(x))$$

est une fonction décroissante (et positive) de x .

• On sait que $h(0) = c$ et on peut choisir $\Phi(0) = 0$ (une primitive est définie à une constante additive près). Dans ces conditions, on a démontré que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| \leq h(x) \leq h(0) \exp(\Phi(x)) = c \exp \int_0^x |q(t)| dt.$$

Comme q est intégrable sur \mathbb{R}_+ , le second membre est majoré par

$$c \exp \int_0^{+\infty} |q(t)| dt,$$

ce qui prouve que la fonction $|f|$ est bien bornée sur \mathbb{R}_+ .

On considère une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en posant $M_0 = \alpha M$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M_{k+1} = M_k(2I_n - MM_k).$$

[1. a.] On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que la matrice A est inversible. Estimer numériquement la limite de la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour $M = A$ et $\alpha = 1/3$. Comparer avec A^{-1} .

[1. b.] On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}).$$

Relier B^2 à B . Pour $M = B$ et $\alpha = \frac{1}{100}$, estimer la limite de la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Commenter le résultat obtenu.

[2.] Démontrer que

$$\forall j, k \in \mathbb{N}, \quad M_{j+k} = M_j \sum_{i=0}^{2^k-1} (I_n - MM_j)^i.$$

On pourra procéder par récurrence sur k .

[3.] Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que le rayon spectral de M , défini par

$$\rho = \max_{\lambda \in \text{Sp}(M)} |\lambda|$$

n'est pas nul et on considère un réel α tel que

$$0 < \alpha < \frac{2}{\rho^2}.$$

[3. a.] Démontrer que la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

[3. b.] On suppose de plus que la matrice M est inversible. Déterminer la limite de la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

[4.] Commenter le résultat obtenu en 1.b.

☞ Autre question

Cet exercice illustre la **méthode de Newton**.

☛ Le principe est simple : pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, on part d'une valeur approchée a de la solution et on identifie la fonction f à sa tangente au point d'abscisse a . L'abscisse où cette tangente coupe l'axe $[y = 0]$ est, si tout se passe bien, une bonne approximation de la solution cherchée.

Si on itère le procédé, on définit une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec la relation de récurrence suivante :

$$(x_k - x_{k+1})f'(x_k) = f(x_k). \quad (*)$$

[Faire une FIGURE!]

☛ Appliquée à la fonction $f(x) = x^2 - u$ avec $u > 0$, on retrouve ainsi la **méthode de Héron d'Alexandrie** (premier siècle de notre ère) pour calculer une valeur approchée de \sqrt{u} .

☛ Appliquée à la fonction $f(x) = 1/x - u$ avec $u \neq 0$, on obtient une méthode pour calculer une valeur approchée de $1/u$ qui n'effectue que des additions, des soustractions et des multiplications.

☛ On peut reformuler la relation de récurrence (*) pour l'exprimer sous la forme $x_{k+1} = F(x_k)$. On constate alors que : si $F(\omega) = \omega$, alors $F'(\omega) = 0$. En conséquence, si la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge bien vers ω comme on l'espère, la fin du processus est extrêmement rapide.

[1. a.] La matrice A est inversible car son déterminant ($\text{alg. det}(A)$) est égal à 4 et donc non nul.

☛ Le code de la suite récurrente est sans mystère.

```
def Newton(A, alpha, n):
    M = alpha*A
    for k in range(n):
        M = M.dot(2*np.eye(3)-A.dot(M))
    return M
```

Au terme de dix itérations, on obtient (à 10^{-16} près, la lecture est malaisée)

$$M_{10} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que cette matrice est bien l'inverse de A en calculant $A \cdot \text{dot}(M_{10})$.

☞ Si on a le temps d'être curieux, on peut faire varier la valeur de α . On se rendra compte que la méthode diverge pour $\alpha = 1$.

[1.b.] En calculant $B \cdot \text{dot}(B)$, on constate que $B^2 = 6B$. La matrice M_{10} est illisible :

$$M_{10} = \begin{pmatrix} 0.13888889 & -0.05555556 & 0.02777778 \\ -0.05555556 & 0.05555556 & 0.05555556 \\ 0.02777778 & 0.05555556 & 0.13888889 \end{pmatrix}$$

mais heureusement $B \cdot \text{dot}(M_{10})$ est plus familière :

$$BM_{10} = \begin{pmatrix} 0.83333333 & -0.33333333 & 0.16666667 \\ -0.33333333 & 0.33333333 & 0.33333333 \\ 0.16666667 & 0.33333333 & 0.83333333 \end{pmatrix}.$$

On peut alors deviner que $M_{10} = \frac{1}{36}B$.

☛ Puisque $B^2 = 6B$, la matrice $\Pi = \frac{1}{6}B$ est une matrice de projection (projection sur $\text{Im } B$, bien entendu, et cette projection est orthogonale puisque la matrice est symétrique). On a donc $B = 6\Pi$ et la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{6}\Pi = \frac{1}{36}B$.

☞ On peut vérifier que le processus diverge pour $\alpha = 1/3$. Cela sera expliqué plus loin.

[2.] Toutes les matrices M_k considérées sont des polynômes en M (récurrence immédiate), donc elles commutent deux à deux (et sont symétriques réelles).

☛ Fixons $j \in \mathbb{N}$. La relation donnée est évidente pour $k = 0$ (la somme ne contient qu'un seul terme : la matrice I_n) et claire pour $k = 1$ aussi :

$$M_{j+1} = M_j[(I_n - MM_j)^0 + (I_n - MM_j)^1] = M_j[I_n + (I_n - MM_j)] = M_j(2I_n - MM_j).$$

Soit alors $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons [HR] que

$$M_{j+k} = M_j \sum_{i=0}^{2^k-1} (I_n - MM_j)^i.$$

Par construction de la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$,

$$M_{j+k+1} = M_{j+k}(2I_n - MM_{j+k})$$

et, par [HR], l'astuce taupinale et l'identité de Leibniz (somme géométrique),

$$\begin{aligned} MM_{j+k} &= MM_j \sum_{i=0}^{2^k-1} (I_n - MM_j)^i \\ &= [I_n - (I_n - MM_j)] \sum_{i=0}^{2^k-1} (I_n - MM_j)^i = I_n - (I_n - MM_j)^{2^k}. \end{aligned}$$

On en déduit alors (à nouveau par [HR]) que

$$\begin{aligned} M_{j+k+1} &= M_j \left[\sum_{i=0}^{2^k-1} (I_n - MM_j)^i \right] \left[I_n + (I_n - MM_j)^{2^k} \right] \\ &= M_j \left[\sum_{i=0}^{2^k-1} (I_n - MM_j)^i + \sum_{i=0}^{2^k-1} (I_n - MM_j)^{2^k+i} \right] = M_j \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} (I_n - MM_j)^i. \end{aligned}$$

[3.a.] On déduit de la question précédente (pour $j = 0$) que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M_k = M_0 \sum_{i=0}^{2^k-1} (I_n - MM_0)^i. \quad (\dagger)$$

• La matrice M est symétrique réelle, donc diagonalisable (Théorème spectral) et, quelle que soit la matrice inversible P , l'application $A \mapsto P^{-1}AP$ est un endomorphisme de l'algèbre de dimension finie $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

On a remarqué plus que les matrices M_k étaient des polynômes en M . Plus précisément, la relation (\star) détermine une suite de polynômes $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{N}, \quad M_k = Q_k(M).$$

Par conséquent,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P^{-1}M_kP = P^{-1}Q_k(M)P = Q_k(P^{-1}MP). \quad (\ddagger)$$

• Il faut souligner ce point capital : les polynômes Q_k ne dépendent pas de la matrice M considérée.

Nous allons donc supposer que la matrice M est diagonale :

$$M = \text{Diag}(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

où x_1, \dots, x_r sont des réels non nuls.

Pour chaque valeur propre (réelle) λ de M , la relation de récurrence (\dagger) nous donne la valeur propre correspondante pour M_k :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_k = \alpha \lambda \sum_{i=0}^{2^k-1} (1 - \alpha \lambda^2)^i.$$

Si $\lambda = 0$, alors $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Sinon,

$$0 < \alpha \lambda^2 \leq \alpha \rho^2 < 2 \quad \text{et donc} \quad -1 < 1 - \alpha \lambda^2 < 1.$$

La formule de la somme géométrique nous donne alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = \alpha \lambda \frac{1}{1 - (1 - \alpha \lambda^2)} = \frac{1}{\lambda}.$$

On a ainsi démontré que : si $M = \text{Diag}(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = \text{Diag}\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_r}, 0, \dots, 0\right).$$

Revenons au cas général (non diagonal). D'après (\ddagger) , si $P^{-1}MP = \text{Diag}(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$, alors $P^{-1}M_kP$ tend vers $\text{Diag}(1/x_1, \dots, 1/x_r, 0, \dots, 0)$. L'application $A \mapsto PAP^{-1}$ est continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie). Par conséquent, la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers

$$P \text{Diag}\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_r}, 0, \dots, 0\right) P^{-1}.$$

• Variante savante.

Considérons un espace euclidien $(E, \|\cdot\|)$, munissons l'espace $L(E)$ de la norme $\|\cdot\|$ subordonnée à $\|\cdot\|$ et, suivant (\ddagger) , étudions la série d'endomorphismes

$$\sum \alpha u (I_E - \alpha u^2)^i$$

où $u \in \mathcal{S}(E)$. D'après le Théorème spectral, pour tout vecteur $x \in E$, il existe une, et une seule, famille orthogonale $(x_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(u)}$ de vecteurs de E telle que

$$x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} x_\lambda \quad \text{et} \quad u(x) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda x_\lambda.$$

On en déduit que

$$\alpha u(I_E - \alpha u^2)^i(x) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (\alpha \lambda)(1 - \alpha \lambda^2)^i \cdot x_\lambda$$

et donc, d'après le Théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \|\alpha u(I_E - \alpha u^2)^i(x)\|^2 &= \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \|(\alpha \lambda)(1 - \alpha \lambda^2)^i \cdot x_\lambda\|^2 \\ &\leq \max_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (\alpha \lambda)^2 (1 - \alpha \lambda^2)^{2i} \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \|x_\lambda\|^2 \\ &\leq \max_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (\alpha \lambda)^2 (1 - \alpha \lambda^2)^{2i} \cdot \|x\|^2. \end{aligned}$$

Comme $|\lambda| \leq \rho$ (par définition du rayon spectral ρ) et que $0 < \alpha < 2/\rho^2$, alors $-1 < 1 - \alpha \lambda^2 < 1$ pour toute valeur propre *non nulle*. Comme le spectre de u est un ensemble *fini*, il existe un réel $0 < K < 1$ tel que

$$0 \leq \max_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (\alpha \lambda)^2 (1 - \alpha \lambda^2)^{2i} \leq (\alpha \rho)^2 K^{2i}$$

et donc tel que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \|\alpha u(I_E - \alpha u^2)^i\| \leq \alpha \rho K^i.$$

Par conséquent, la série d'endomorphismes $\sum \alpha u(I_E - \alpha u^2)^i$ converge absolument dans $L(E)$. Dans un espace vectoriel de dimension finie, la convergence absolument implique la convergence, donc la suite extraite de la suite des sommes partielles

$$\sum_{i=0}^{2^k-1} \alpha u(I_E - \alpha u^2)^i$$

converge dans $L(E)$ quand k tend vers $+\infty$.

[3.b.] En diagonalisant la matrice M , on a déjà identifié la limite de la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et si M est inversible, on a déjà démontré que la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeait vers l'inverse M^{-1} .

• **Variante savante.**

Dans la deuxième démonstration, on a justifié la convergence mais pas encore identifié la limite L de la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

On a établi à la question 2. que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad MM_k = I_n - (I_n - MM_0)^{2^k} = I_n - (I_n - \alpha M^2)^{2^k}.$$

Comme M est supposée inversible, ses valeurs propres λ vérifient $0 < |\lambda| \leq \rho$ et, en reprenant les calculs de la question précédente, on montre que

$$\|I_n - \alpha M^2\| < 1.$$

Par sous-multiplicativité de la norme $\|\cdot\|$, on en déduit que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|(I_n - \alpha M^2)^{2^k}\| = 0$$

et donc que MM_k tend vers I_n . Par continuité de $A \mapsto MA$ et par composition de limites, le produit MM_k tend vers ML et, par unicité de la limite, $ML = I_n$, ce qui prouve que la limite L est bien l'inverse de la matrice M .

↳ Si on passe à la limite dans la relation de récurrence qui définit la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on obtient seulement $L = LML$, ce qui ne permet pas de conclure directement.

[4.] Les valeurs propres de B sont 0 (simple) et 6 (double) comme l'indique `alg.eigvals(B)`. Par conséquent, $\rho = 6$ et avec $\alpha = 10^{-2}$, on a bien $0 < \alpha < 2/36$.

En revanche, avec $\alpha = 1/3$, cette condition de convergence n'est plus vérifiée et cela explique pourquoi on a pu observer la divergence de la suite dans ce cas.

Pour un endomorphisme auto-adjoint $u \in \mathcal{S}(E)$ quelconque,

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u.$$

Les deux sous-espaces vectoriels sont stables par u et l'endomorphisme u_0 induit par restriction à $\text{Im } u$ est un automorphisme de $\text{Im } u$.

L'étude précédente montre alors que la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l'endomorphisme v caractérisé par

$$\forall x \in \text{Ker } u, \quad v(x) = 0_E \quad \text{et} \quad \forall x \in \text{Im } u, \quad v(x) = u_0^{-1}(x)$$

si bien que $u \circ v = v \circ u$ est la projection orthogonale sur $\text{Im } u$.