Lundi 1er juin

Référence	Origine	Thèmes
136-470	Mines MP	Caractères d'un groupe abélien fini
136-494	"	Matrices nilpotentes
136-495	"	Matrices inversibles
136-592	"	Matrices définies positives
136-624	"	Convexité
136-669	"	Espaces de fonctions
136-785	"	Calcul différentiel
136-786	"	Calcul différentiel
128-198	ENS ?	Groupes
128-224	ENS ?	Matrices trigonalisables
128-454	Mines MP	Arithmétique
128-458	"	Matrices semblables

Soit G, un groupe abélien fini et $\widehat{\mathrm{G}}$, l'ensemble des morphismes de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$.
[**1.**] *Démontrer que $\widehat{\mathrm{G}}$ est un groupe fini.*
[**2.**] *Soit $\varphi \in \widehat{\mathrm{G}}$, non trivial. Démontrer que*

$$\sum_{g \in G} \varphi(g) = 0.$$

[**3.**] *Démontrer que $\widehat{\mathrm{G}}$ est une partie libre de l'espace vectoriel $\mathscr{A}(\mathrm{G}, \mathbb{C})$.*
[**4.**] *En déduire que $\#(\widehat{\mathrm{G}}) \leqslant \#(\mathrm{G})$.*

[**1.**] La loi de composition interne est la multiplication des applications :

$$\forall\, \varphi, \chi \in \widehat{G},\ \forall\, g \in G, \qquad (\varphi \cdot \chi)(g) \overset{\text{déf.}}{=} \varphi(g)\chi(g).$$

Cf **[rms136-1174]** pour la structure de groupes.

❧ Si G est un groupe d'ordre n, alors un caractère $\varphi \in \widehat{\mathrm{G}}$ est une application de G dans $\mathbb{U}_n$ **[rms136-1174]**. Le cardinal de l'ensemble des applications de G dans $\mathbb{U}_n$ est égal à n^n, donc le cardinal du groupe $\widehat{\mathrm{G}}$ est inférieur à n^n. Le groupe $\widehat{\mathrm{G}}$ des caractères est donc bien un groupe fini.

✍ *Pour chaque élément $g \in \mathrm{G}$, il y a donc au plus n valeurs possibles pour $\varphi(g)$ et il y a n éléments dans G.*

[**2.**] Un morphisme de groupes est trivial lorsqu'il est toujours égal à l'élément neutre du groupe d'arrivée.

On suppose donc ici qu'il existe $g_0 \in \mathrm{G}$ tel que $\varphi(g_0) \neq 1$.

Comme φ est un morphisme de groupes,

$$\varphi(g_0)\Big(\sum_{g \in G} \varphi(g)\Big) = \sum_{g \in G} \varphi(g_0)\varphi(g) = \sum_{g \in G} \varphi(g_0 * g).$$

Or, dans un groupe, les **translations à gauche** sont des permutations (= des bijections de G sur G) et comme l'addition dans $\mathbb{C}$ est commutative, on en déduit que

$$\sum_{g \in G} \varphi(g_0 * g) = \sum_{g \in G} \varphi(g).$$

Finalement,

$$\underbrace{\big[\varphi(g_0) - 1\big]}_{\neq 0} \cdot \Big(\sum_{g \in G} \varphi(g)\Big) = 0_{\mathbb{C}}$$

et donc

$$\sum_{g \in G} \varphi(g) = 0_{\mathbb{C}}.$$

✍ *Si le caractère φ est trivial, la somme est égale au cardinal de G (c'est-à-dire à l'ordre du groupe G).*

[**3.**] Les espaces préhilbertiens complexes n'étant plus au programme depuis longtemps, c'est une inspiration divine qui nous souffle de considérer l'application de $\mathscr{A}(\mathrm{G}, \mathbb{C}) \times \mathscr{A}(\mathrm{G}, \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall\, \varphi, \psi \in \mathscr{A}(G, \mathbb{C}), \qquad \langle\, \varphi \,|\, \psi \,\rangle = \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)}\psi(g).$$

❧ Comme $\varphi \in \widehat{\mathrm{G}}$ est une application à valeurs dans le cercle unité $\mathbb{U}$,

$$\forall\, g \in G, \qquad \overline{\varphi(g)} = \frac{1}{\varphi(g)} = \varphi^{-1}(g).$$

✍ *La loi de composition interne sur $\widehat{\mathrm{G}}$ est la multiplication "terme à terme" des applications.*

De plus, $\widehat{G}$ est un groupe, donc $\chi = \varphi^{-1} \times \psi \in \widehat{G}$ et

$$\langle\, \varphi \,|\, \psi \,\rangle = \sum_{g \in G} \chi(g).$$

Si $\varphi \neq \psi$, alors il existe au moins un $g_0 \in G$ tel que $\varphi(g_0) \neq \psi(g_0)$ et $\chi(g_0) \neq 1$. Comme $\chi \in \widehat{G}$ n'est pas trivial, on déduit de la question précédente que

$$\forall\, \varphi \neq \psi \in \widehat{G}, \qquad \langle\, \varphi \,|\, \psi \,\rangle = 0. \tag{$\star$}$$

❧ Énumérons les éléments de $\widehat{G}$: $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}$ et considérons des scalaires complexes $(a_k)_{0 \leqslant k < N}$ tels que

$$\forall\, g \in G, \qquad \sum_{0 \leqslant k < n} a_k \varphi_k(g) = 0_{\mathbb{C}}.$$

L'application $f : G \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall\, g \in \mathbb{C}, \qquad f(g) = \sum_{0 \leqslant k < N} a_k \varphi_k(g)$$

est identiquement nulle, donc

$$\langle\, f \,|\, f \,\rangle = 0.$$

Mais d'après ($\star$),

$$\langle\, f \,|\, f \,\rangle = \sum_{0 \leqslant k < N} \sum_{0 \leqslant \ell < N} \overline{a_k} a_\ell \langle\, \varphi_k \,|\, \varphi_\ell \,\rangle = n \sum_{0 \leqslant k < N} |a_k|^2,$$

ce qui prouve que tous les a_k sont nuls.

✍ *En résumé : on a défini une sorte de produit scalaire (un* ***produit hermitien*** *en fait) sur $\mathscr{A}(G, \mathbb{C})$ pour lequel la famille des éléments de $\widehat{G}$ était orthogonale, ce qui nous a permis de démontrer facilement que cette famille était libre.*

[4.] Puisque la famille $(\varphi_k)_{0 \leqslant k < N}$ est libre dans $\mathscr{A}(G, \mathbb{C})$, la dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{A}(G, \mathbb{C})$ est supérieure à N.

Or G est un ensemble fini de cardinal n, donc $\dim \mathscr{A}(G, \mathbb{C}) = n$.

Ainsi, $\#(\widehat{G}) = N \leqslant n = \#(G)$.

rms136-494

Soit $n \geqslant 2$. Dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathscr{N}$, l'ensemble des matrices nilpotentes et $\mathscr{H}$, celui des matrices de trace nulle.
[**1.**] *Démontrer que* $\text{Vect}(\mathscr{N}) \neq \mathscr{N}$.
[**2.**] *Démontrer que* $\text{Vect}(\mathscr{N}) \subset \mathscr{H}$. *Ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ sont-ils égaux ?*

[**1.**] Les matrices élémentaires $E_{1,2}$ et $E_{2,1}$ sont nilpotentes mais leur somme $E_{1,2} + E_{2,1}$ n'est pas nilpotente.

En effet, les matrices $E_{1,2}$ et $E_{2,1}$ sont triangulaires supérieures strictes (et même nilpotentes d'indice 2). D'autre part, leur somme est symétrique réelle, donc diagonalisable (Théorème spectral) et comme elle n'est pas nulle, elle admet au moins une valeur propre non nulle et n'est par conséquent pas nilpotente.

✍ *Le spectre d'une matrice nilpotente est toujours réduit à $\{0\}$.*

Par conséquent, $E_{1,2} + E_{2,1} \notin \mathscr{N}$ et comme $\mathscr{N}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathscr{N} \subsetneq \text{Vect}(\mathscr{N})$.

[**2.**] Toute matrice nilpotente de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable et son spectre est réduit à $\{0\}$.

✍ *Si M est une matrice nilpotente, alors il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $M^p = O_n$. Par conséquent, il existe un polynôme annulateur de M qui est scindé et M est donc trigonalisable. D'autre part, le spectre de M est contenu dans l'ensemble des racines de ce polynôme annulateur. Enfin, toute puissance d'une matrice inversible est elle-même inversible, donc 0 est valeur propre de chaque matrice nilpotente.*

Par conséquent, la trace de toute matrice nilpotente est nulle, ce qui prouve que

$$\text{Vect}(\mathscr{N}) \subset \mathscr{H}. \tag{$\star$}$$

✍ *Pour toute matrice trigonalisable (et seulement pour les matrices trigonalisables), la trace est égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité.*

❧ Pour $i \neq j$, les matrices élémentaires $E_{i,j}$ sont des matrices nilpotentes.
Par ailleurs, la matrice

$$(E_{1,1} - E_{2,2}) + \underbrace{E_{1,2} - E_{2,1}}_{\in \text{Vect}(\mathscr{N})} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est clairement nilpotente. On en déduit que les matrices

$$D_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$$

appartiennent à $\text{Vect}(\mathscr{N})$ pour tout indice $1 \leqslant i < n$.

Le sous-espace $\text{Vect}(\mathscr{N})$ contient donc une famille libre de $(n^2 - n) + (n - 1) = n^2 - 1$ matrices :

$$(E_{i,j})_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \oplus (D_i)_{1 \leqslant i < n}.$$

Donc $\dim \text{Vect}(\mathscr{N}) \geqslant n^2 - 1$. Or $\dim \mathscr{H} = n^2 - 1$, donc on déduit de l'inclusion $(\star)$ que $\text{Vect}(\mathscr{N}) = \mathscr{H}$.

✍ *Le sous-espace propre $\mathscr{H}$ est, par définition, le noyau d'une forme linéaire non nulle. C'est donc un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et donc un sous-espace de codimension 1.*

rms136-495

> *Soient* A *et* B *dans* $GL_n(\mathbb{R})$. *Démontrer que l'ensemble des matrices non inversibles appartenant à*
>
> $$\{(1-t)A + tB,\ t \in [0,1]\}$$
>
> *est fini et que son cardinal est inférieur à* n.

D'après la formule développée du déterminant, l'expression

$$P(t) = \det\bigl((1-t)A + tB\bigr)$$

est polynomiale en t. De plus, comme A est inversible, $P(0) = \det A \neq 0$, donc P n'est pas le polynôme nul.

❧ Comme A est inversible,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad (1-t)A + tB = A.\bigl[(1-t)I_n + tA^{-1}B\bigr] = A.\bigl[I_n - t(I_n - A^{-1}B)\bigr].$$

En notant r, le rang de $(A-B) = A^{-1}(I_r - A^{-1}B)$, il existe deux matrices inversibles P et Q telles que

$$Q^{-1}(I - A^{-1}B)P = J_r = \mathrm{Diag}(I_r, 0_{n-r}).$$

Donc

$$Q^{-1}\bigl[I_n - t(I_n - A^{-1}B)\bigr]P = Q^{-1}P - tJ_r$$

et par conséquent

$$P(t) = \frac{\det A \det Q}{\det P} \cdot \det(Q^{-1}P - tJ_r).$$

L'expression développée du déterminant nous dit que $\det(Q^{-1}P - tJ_r)$ est une expression polynomiale en t dont le degré est inférieur à r.

✍ *Si on écrit la matrice inversible* $Q^{-1}P$ *en blocs,*

$$Q^{-1}P - tJ_r = \begin{pmatrix} M_1 - tI_r & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions, le coefficient de t^r *est égal à* $(-1)^r \det M_4$ *et il n'y a aucune raison pour que ce coefficient soit systématiquement non nul.*

Comme $P \neq 0$ et que $\deg P \leqslant r$, ce polynôme P s'annule donc au plus r fois sur $\mathbb{C}$ et il existe donc au plus $r = \mathrm{rg}(A-B)$ nombres réels $t \in [0,1]$ tels que la matrice

$$(1-t)A + tB$$

ne soit pas inversible.

rms136-592

Soit G*, un sous-groupe borné de* $GL_n(\mathbb{R})$*. Démontrer que*

$$G \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{I_n\}.$$

Commençons par constater l'évidence : la matrice I_n appartient à G (élément neutre du groupe) et à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

❧ Soit $M \in G \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le Théorème spectral, il existe des scalaires

$$0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_r \tag{$\star$}$$

et des projections orthogonales $P_1, \ldots, P_r$ non nulles telles que

$$M = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k P_k \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \neq \ell, \quad P_k P_\ell = 0_n.$$

✍ *Ces projections orthogonales sont les projections orthogonales sur les différents sous-espaces propres de* M *(qui sont deux à deux orthogonaux, comme chacun sait).*

Le rang de P_k *est donc la dimension du sous-espace propre* $\mathrm{Ker}(M - \lambda_k I_n)$ *et pour cette raison la projection* P_k *n'est pas la matrice nulle.*

On en déduit que

$$\forall\, m \in \mathbb{Z}, \qquad M^m = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^m P_k$$

et comme M appartient au groupe multiplicatif G, on sait que $M^m \in G$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

✍ *Sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*, espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Nous allons donc choisir la norme subordonnée à la norme euclidienne canonique sur* $\mathbb{R}^n$*, puisque* $|||P_k||| = 1$ *pour tout* $1 \leqslant k \leqslant r$*.*

Si $\lambda_r > 1$, alors

$$\begin{aligned} \forall\, m \in \mathbb{Z}, \qquad |||M^m||| &\geqslant \lambda_r^m |||P_r||| - \sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k^m |||P_k||| \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\geqslant \lambda_r^m - \sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k^m \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty \end{aligned}$$

d'après ($\star$). Mais cette inégalité contredit l'hypothèse que G soit borné.

Si $\lambda_1 < 1$, de la même manière,

$$\forall\, m \in \mathbb{Z}, \qquad |||M^m||| \geqslant \lambda_1^m - \sum_{k=2}^{r} \lambda_k^m \xrightarrow[m \to -\infty]{} +\infty$$

et on conclut de même.

En conclusion,

$$1 \leqslant \lambda_1 < \cdots < \lambda_r \leqslant 1$$

donc en fait $r = 1$ et $\lambda_1 = 1$: la matrice M est égale à I_n.

rms136-624

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$*, une partie fermée non vide. On suppose que*

$$\forall\,(x,y) \in C \times C, \qquad x \neq y \implies \left]x,y\right[\cap C \neq \varnothing.$$

Démontrer que C *est convexe.*

Soient x et y, deux points de C et z, un point de l'intervalle $]x,y[$: il existe donc un réel $0 < t_0 < 1$ tel que

$$z = (1-t_0)x + t_0 y.$$

Considérons les deux ensembles

$$A = \big\{0 \leqslant t < t_0 \;:\; (1-t)x + ty \in C\big\} \quad \text{et} \quad B = \big\{t_0 < t \leqslant 1 \;:\; (1-t)x + ty \in C\big\}.$$

Ces ensembles ne sont pas vides : $0 \in A$ et $1 \in B$. Comme C est fermé et que l'application

$$t \mapsto (1-t)x + ty$$

est continue (polynomiale), l'image réciproque

$$F = \big\{0 \leqslant t \leqslant 1 \;:\; (1-t)x + ty \in C\big\}$$

est une partie fermée de $[0,1]$, donc l'ensemble A est un fermé relatif à $[0,t_0[$ et l'ensemble B est un fermé relatif à $]t_0,1]$:

$$A = F \cap [0,t_0[\qquad B = F \cap]t_0,1]\,.$$

Comme A (resp. B) est une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure t_A (resp. une borne inférieure t_B).

Deux cas se présentent pour t_A :

— ou bien $t_A < t_0$ et dans ce cas, $t_A \in A$ (puisque A est un fermé relatif à $[0,t_0[$) ;

— ou bien $t_A = t_0$.

Idem pour t_B, bien entendu.

Supposons que $t_A < t_0 < t_B$: comme $t_A \in A$ et $t_B \in B$, alors

$$x_A = (1-t_A)x + t_A y \in C \qquad \text{et} \qquad y_B = (1-t_B)x + t_B y \in C$$

et $x_A \neq y_B$ puisque $t_A < t_B$. On en déduit alors que $]x_A, y_B[\cap C = \varnothing$, ce qui contredit l'hypothèse initiale sur C.

Donc $t_A = t_0$ ou $t_B = t_0$ et, dans les deux cas,

$$z = (1-t_0)x + t_0 y \in C.$$

On a démontré que C était convexe.

Soient $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* F*, un sous-espace vectoriel de* E *de dimension finie. On suppose que* F *est stable par produit. Démontrer que* F *ne contient que des fonctions constantes.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la dimension de F.

Soit $f \in F$. La famille $(f, f^2, \dots, f^n, f^{n+1})$ est une famille de F (stable par produit) et c'est une famille liée (puisque son cardinal est strictement supérieur à $\dim F$). Par conséquent, il existe des scalaires $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k f^k = 0_E,$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{n+1} a_k \big[f(x)\big]^k = 0.$$

Cela signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de $f(x)$ est une racine du polynôme

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k X^k.$$

Les coefficients a_k ne sont pas tous nuls, donc ce polynôme n'a qu'un nombre fini de racines. Et comme les coefficients a_k ne dépendent pas de x, la fonction f ne peut prendre qu'un nombre **fini** de valeurs.

Mais la fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et, d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble des valeurs prises par f est un intervalle.

Un intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne contient qu'un nombre fini de réels est réduit à un singleton, donc la fonction f est constante.

✍ *En particulier,* $\dim F \leqslant 1$.

rms136-785

Soient U, un ouvert de $\mathbb{R}^n$; x_0, un point de U et trois applications f, g_1, g_2 de U dans $\mathbb{R}$. On suppose que les deux applications g_1 et g_2 sont différentiables sur U, que $g_1(x_0) = g_2(x_0)$ et que

$$\forall\, x \in U, \qquad g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x). \tag{$\star$}$$

Démontrer que f est différentiable au point x_0.

Comme $g_1(x_0) = g_2(x_0)$, l'encadrement ($\star$) nous assure que

$$f(x_0) = g_1(x_0) = g_2(x_0) \tag{$\dagger$}$$

❧ La fonction $g_2 - g_1$ est différentiable et positive sur U. Cette fonction atteint son minimum absolu en $x_0 \in U$ (= elle est nulle), donc

$$dg_2(x_0) - dg_1(x_0) = d(g_2 - g_1)(x_0) = \omega_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}}.$$

Comme g_1 et g_2 sont différentiables, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 + h \in U$,

$$\begin{aligned} g_1(x_0+h) &= g_1(x_0) + dg_1(x_0)(h) + \|h\| \cdot \varepsilon_1(h) \\ g_2(x_0+h) &= g_2(x_0) + dg_2(x_0)(h) + \|h\| \cdot \varepsilon_2(h) \\ &= g_1(x_0) + dg_1(x_0)(h) + \|h\| \cdot \varepsilon_2(h). \end{aligned}$$

D'après ($\star$) et ($\dagger$), pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ "assez proche de $0_{\mathbb{R}^n}$,

$$f(x_0) + dg_1(x_0)(h) + \|h\| \cdot \varepsilon_1(h) \leqslant f(x_0+h) \leqslant f(x_0) + dg_1(x_0)(h) + \|h\| \cdot \varepsilon_2(h)$$

c'est-à-dire

$$\|h\| \cdot \varepsilon_1(h) \leqslant f(x_0+h) - f(x_0) - dg_1(x_0)(h) \leqslant \|h\| \cdot \varepsilon_2(h).$$

Comme les deux fonctions ε_1 et ε_2 tendent vers 0 au voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$, on déduit de l'encadrement précédent que

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0) + dg_1(x_0)(h) + o(h),$$

c'est-à-dire que f est différentiable au point x_0 et que $df(x_0) = dg_1(x_0) = dg_2(x_0)$.

rms136-786

Soit $(E, \|\cdot\|)$*, un espace vectoriel normé de dimension finie (non nulle). On note* B*, la boule unité fermée de* E*;* S*, la sphère unité de* E *et* B_o*, la boule unité ouverte de* E*.*
On considère une fonction continue $f : B \to \mathbb{R}$*, constante sur* S *et différentiable sur* B_o*. Démontrer qu'il existe un point critique de* f *sur la boule ouverte* B_o*.*

La fonction f est continue sur B et B est une partie compacte non vide de E (boule fermée de rayon positif dans un espace vectoriel de dimension finie et non nulle).

✍ *Si la dimension de* E *était nulle, la boule ouverte* B_o *serait vide (tout comme la boule fermée* B *et la sphère* S *d'ailleurs), on serait bien en peine de justifier l'existence d'un point critique !*
Cela dit, un espace vectoriel de dimension nulle...

La fonction $f : B \to \mathbb{R}$ atteint donc un maximum et un minimum sur B.

❧ Si ce maximum et ce minimum sont égaux, alors la fonction f est constante et *tous* les points de B_o sont des points critiques.

❧ La fonction f est constante sur la sphère S. Si ce maximum et ce minimum ne sont pas égaux, alors l'une de ces deux valeurs (au moins) est atteinte ailleurs que sur la sphère S, donc sur la boule ouverte B_o.

Comme f est différentiable sur B_o et qu'elle atteint une valeur extrémale en un point $x_0 \in B_o$, alors x_o est un point critique de f.

✍ *Il ne s'agit pas ici d'appliquer le Théorème de Rolle mais tout simplement de reprendre sa démonstration. Il suffit donc de ne pas se laisser impressionner par l'aspect "calcul différentiel" de l'exercice.*

Soit G, un sous-groupe du groupes des fonctions affines (non constantes) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que toute fonction de G possède un point fixe.
Démontrer qu'il existe un réel ω qui est fixe pour tous les éléments de G.

Considérons $f \in G$: il existe un réel $a \neq 0$ et un réel b tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax + b.$$

Si $a = 1$, alors :
- — ou bien $b = 0$ et tous les réels sont fixes par $f = I_{\mathbb{R}}$;
- — ou bien $b \neq 0$ et f n'a pas de point fixe, ce qui contredit l'hypothèse $f \in G$.

Si $a \neq 1$, alors f admet un, et un seul, point fixe $\alpha = \frac{b}{1-a}$.

✍ *Une application affine non constante réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il faut donc comprendre que la loi de composition interne considérée ici est le produit de composition $\circ$.*

Si $f(x) = ax + b$ (avec $a = 0$), alors la bijection réciproque de f s'exprime : $f^{-1}(x) = {}^{x}/_{a} - {}^{b}/_{a}$.

Si on adjoint les fonctions constantes à G, l'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est muni d'une structure de groupe pour l'addition des fonctions.

❧ Considérons deux éléments f et g de G, distincts de $I_{\mathbb{R}}$ (en supposant que le groupe G n'est pas réduit au neutre : $G \neq \{I_{\mathbb{R}}\}$). Il existe donc quatre réels $a \notin \{0, 1\}$, b, $c \notin \{0, 1\}$ et d tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax + b \quad \text{et} \quad g(x) = cx + d.$$

Comme G est un groupe pour $\circ$, on en déduit que le **commutateur** $f^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ g$ appartient aussi à G. Or

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad (f^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ g)(x) = x + \frac{ad - d + b - bc}{ac}.$$

D'après la discussion initiale, cette fonction affine appartient à G si, et seulement si,

$$ad - d + b - bc = 0$$

ce qui revient à supposer que

$$\frac{b}{1-a} = \frac{d}{1-c}$$

ou encore à supposer que f et g ont même point fixe.

❧ On a ainsi démontré que : si f et g sont deux éléments de G qui ont des points fixes distincts, alors $f^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ g$ est un élément de G qui n'a pas de point fixe — ce qui contredit l'hypothèse sur G.

Autrement dit, deux éléments quelconques de G distincts de l'élément neutre $I_{\mathbb{R}}$ ont même point fixe. Il existe donc un réel ω tel que

$$\forall\, f \in G, \qquad f(\omega) = \omega.$$

✍ *Réciproquement, considérons un réel ω quelconque et notons G_ω, l'ensemble des fonctions affines non constantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(\omega) = \omega$.*

De la sorte, une fonction f appartient à G_ω si, et seulement si, il existe un réel $a \neq 0$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \omega + a(x - \omega)$$

et on vérifie sans peine que l'application

$$[a \mapsto [x \mapsto \omega + a(x - \omega)]]$$

est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ sur $(G_\omega, \circ)$. (En particulier, G_ω est nécessairement un groupe commutatif.)

Les groupes $(G, \circ)$ étudiés ici sont donc isomorphes à un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

> *Démontrer qu'il existe une fonction continue*
> $$f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$
> *qui s'annule sur l'ensemble des matrices trigonalisables sans être identiquement nulle sur* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

La fonction *partie positive* $[x \mapsto x^+]$ est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

De même, la fonction *partie négative* $[x \mapsto x^-]$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_-^*$.

De plus, ces deux fonctions sont caractérisées par les deux identités suivantes :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad x^+ + x^- = |x| \quad \text{et} \quad x^+ - x^- = x.$$

En particulier,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad x^- = \frac{|x| - x}{2}$$

donc la fonction *partie négative* est continue sur $\mathbb{R}$.

✍ *Il faut connaître les graphes de ces deux fonctions !*

❧ Le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

est égal à $X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$ et la matrice A est trigonalisable (en tant que matrice réelle) si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé (sur $\mathbb{R}$), c'est-à-dire si, et seulement si, le discriminant de ce polynôme est positif ou nul.

Or le discriminant du polynôme caractéristique est égal à $(a+d)^2-4(ad-bc) = (a-d)^2+4bc$.

Ainsi, la matrice A est trigonalisable si, et seulement si, $(a - d)^2 + 4bc \geqslant 0$, c'est-à-dire si, et seulement si,

$$f(A) = \big((a - d)^2 + 4bc\big)^- = 0.$$

❧ L'application f ainsi définie est à valeurs positives ; elle est nulle sur l'ensemble des matrices trigonalisables et seulement sur cet ensemble. Enfin, elle est continue comme composée d'une fonction polynomiale des coefficients de A et de la fonction continue $[x \mapsto x^-]$.

Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose que leurs déterminants, respectivement notés a et b, sont premiers entre eux. Démontrer qu'il existe deux matrices U et V dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$AU + BV = I_n.$$

Comme les coefficients de la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont des entiers relatifs, son déterminant

$$a = \det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$$

est également un entier relatif.

Pour les mêmes raisons, les coefficients des comatrices $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ sont des entiers relatifs.

❧ D'après la propriété de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que

$$au + bv = 1.$$

D'après les formules de Cramer,

$$A.[\mathrm{Com}(A)]^\top = a\cdot I_n \quad \text{et} \quad B.[\mathrm{Com}(B)]^\top = b\cdot I_n$$

donc

$$A.\big(u[\mathrm{Com}(A)]^\top\big) + B.\big(v[\mathrm{Com}(B)]^\top\big) = I_n.$$

> *Déterminer les formes linéaires* $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *telles que* $f(A) = f(B)$ *pour tout couple* (A, B) *de matrices semblables.*

Il est clair que la trace convient, ainsi que toutes les formes linéaires proportionnelles à la trace.

❧ Réciproquement, on considère les matrices élémentaires $E_{k,\ell}$ qui constituent la "base canonique" de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et on note $u_{k,\ell}$, l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ représenté par $E_{k,\ell}$ dans la base canonique

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$$

de $\mathbb{C}^n$.

❧ Quels que soient $1 \leqslant k, \ell \leqslant n$, la matrice de l'endomorphisme $u_{k,k}$ relative à la base

$$\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_{k-1}, e_\ell, e_{k+1}, \dots, e_{\ell-1}, e_k, e_{\ell+1}, \dots, e_n)$$

est la matrice $E_{\ell,\ell}$, donc les matrices $E_{k,k}$ et $E_{\ell,\ell}$ sont semblables.

Il faut donc que
$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad f(E_{k,k}) = f(E_{1,1}).$$

❧ Quels que soient $1 \leqslant k \neq \ell \leqslant n$, la matrice de l'endomorphisme $u_{k,\ell}$ relative à la base

$$\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_{k-1}, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{\ell-1}, 2e_\ell, e_{\ell+1}, \dots, e_n)$$

est la matrice $2E_{k,\ell}$, donc les matrices $E_{k,\ell}$ et $2E_{k,\ell}$ sont semblables.

Il faut donc que

$$\forall\, 1 \leqslant k \neq \ell \leqslant n, \qquad f(E_{k,\ell}) = f(2E_{k,\ell}) = 2f(E_{k,\ell}) \qquad \text{(par linéarité de f)}$$

et donc que
$$\forall\, 1 \leqslant k \neq \ell \leqslant n, \qquad f(E_{k,\ell}) = 0.$$

❧ Par linéarité de f, on en déduit que

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad f(A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} f(E_{k,\ell}) = \operatorname{tr}(A) \cdot f(E_{1,1}).$$

On a ainsi démontré que les seules formes linéaires qui convenaient étaient la trace et les formes linéaires proportionnelles à la trace.