Calcul intégral : énoncés

Exercices CCP

1) On pose $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos xt \,\mathrm{d}t$. Montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et la calculer.

2) Existence et calcul éventuel de $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x}\,\mathrm{d}x$ et de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln t}{(1-t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t$.

Exercices Mines-Centrale: intégrales sur un segment

3) Soit $f : [0,1] \longrightarrow]0,+\infty[$ continue. On note F la primitive de f qui s'annule en 0. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe une unique suite $(a_0,\ldots,a_n)$ telle que

$$a_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall k,\ \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Étudier la suite $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)$.

4) a) Soit $F : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^4 sur $[a,b]$ et 5 fois dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que

$$F(b) = F(a) + \frac{b-a}{2}\left(F'(a)+F'(b)\right) - \frac{(b-a)^2}{12}\left(F''(b)-F''(a)\right) + \frac{(b-a)^5}{720}F^{(5)}(c).$$

b) Montrer que si f est de classe C^4 sur $[a,b]$, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(b)+f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})\right) - \frac{(b-a)^2}{12n^2}\left(f'(b)-f'(a)\right)\\ &\quad + \frac{(b-a)^4}{720n^4}\left(f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)\right) + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\end{aligned}$$

5) Soient $a,b \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \dfrac{X^n(a-bX)^n}{n!}$.

a) Montrer que pour tous $n,k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(a/b)$ sont des entiers.

b) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{a/b} e^x P_n(x)\,\mathrm{d}x$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

c) On suppose que $e^{a/b}$ est rationnel de dénominateur d. Montrer que $dI_n \in \mathbb{N}$ pour tout n.

d) Quels sont les rationnels r tels que $e^r \in \mathbb{Q}$?

6) (Centrale 2012) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et concave telle que $f(0) = 1$.

a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{2}xf(x) + \frac{1}{2}x$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$. Étudier le cas d'égalité.

7) Calculer un développement asymptotique à 3 termes de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)$.

8) a) **Formule de la moyenne**

Soient φ et ψ deux applications continues d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\psi \geq 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(c)\int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Soient $b > 0$, $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue b-périodique. Étudier la convergence de $I_n = \displaystyle\int_0^b f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercices Mines-Centrale: intégrales sur un intervalle quelconque

9) Soit f positive et continue sur $[0,+\infty[$. On suppose que les intégrales impropres

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

convergent. On pose $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F^2(x)\,\mathrm{d}x$ converge et en donner une majoration.

10) Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f''^2(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

11) a) Montrer que l'application f définie par $f(x) = x^{-1} - \left(2\sin\dfrac{x}{2}\right)^{-1}$ pour $x \in]0,\pi]$ se prolonge à $[0,\pi]$ en une application de classe C^1.

b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin[(n+1/2)\,x]}{2\sin(x/2)}\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de n et donner sa valeur.

c) Montrer que si φ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin[(n+1/2)\,x]\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

d) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

12) Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que I converge et que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

13) Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Étudier l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)-f(at)}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $a > 0$.

14) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et admettant des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer la convergence et calculer la valeur de l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+1) - f(x)]\,\mathrm{d}x.$$

15) (Mines) Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ monotone, continue par morceaux et intégrable. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f$ quand n tend vers l'infini.

Applications :

- en déduire la limite de $(n!/n^n)^{1/n}$ quand n tend vers l'infini ;
- exprimer de deux façons différentes la limite de $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^{1/n}$.

Exercices Mines-Centrale: intégrales à paramètre

16) On pose $\displaystyle J(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\sqrt{\sin^4 t+a^4}}\,\mathrm{d}t$. Quel est le domaine de définition de J ? Étudier la limite et donner des équivalent de $J(a)$ quand a tend vers 0 et quand a tend vers $+\infty$.

17) Montrer que $\displaystyle f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+xt^2)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\displaystyle f(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$, puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln^2(1+t^2)}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

18) Pour $a>0$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$h_a(x)=\int_0^a\frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que h_a est de classe C^∞ et trouver une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par h_a.

19) Si $z\in\mathbb{C}$ est de partie réelle strictement positive, on pose $\displaystyle f(z)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2z}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\displaystyle f(z)^2=\frac{\pi}{4z}$.

20) Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré $n\geq 1$. On suppose que P n'a pas de racine sur $\mathbb{C}$ et on pose :

$$\forall\, r\in[0,+\infty[,\ \forall\theta\in[0,2\pi],\ f(r,\theta)=\frac{r^n e^{in\theta}}{P(re^{i\theta})}.$$

a) Montrer que l'application $\displaystyle F:\ r\longmapsto\int_0^{2\pi}f(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est de classe C^1.

b) Expliciter une relation entre $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ et en déduire que F est nulle.

c) Conclure.

21) (Mines 2014) Soient $\displaystyle f:\ x\longrightarrow\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle g:\ x\longrightarrow\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f et g sont solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $y''+y=1/x$.

b) Montrer que $f=g$.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

22) (Mines 2016) Déterminer le domaine de définition de $f\,:\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}(tx)}{t\ \mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{d}t$; montrer que f est de classe C^∞ et donner un équivalent de $f(x)$ en chaque borne de son domaine de définition.

23) Quel est le domaine de définition de $f\,:\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln\left(x^2+t^2\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$? Déterminer une expression de $f(x)$.

Exercices X-ENS

24) (X) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $D_n = \Big\{k \in \{1, \ldots, n\},\ k \text{ divise } n\Big\}$ et $d_n = \mathrm{Card}(D_n)$.

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ ($\{x\}$ est la *partie fractionnaire* de x). Montrer que $f\,:\ x \longmapsto \left\{\dfrac{1}{x}\right\}$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k = n\,\ln n + (2\gamma - 1)n + O\left(\sqrt{n}\right)$ au voisinage de l'infini.

25) (X 2019) a) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de I.

26) (X 21) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $p > 0$. On suppose qu'il existe C tel que pour toute fonction φ continue et C^1 par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on ait :

$$\int_0^1 f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \leq C\left(\int_0^1 |\varphi(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

Montrer qu'il existe C' tel que :

$$\forall x, y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq C'\,|x-y|^{1/p}.$$

Calcul intégral : corrigés

Exercices CCP

1) Notons $\varphi(x,t) = e^{-t^2}\cos(2xt)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \longmapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et et sommable sur $[0,+\infty[$ ($f(x,t) =_{+\infty} o(e^{-t})$ et $t \longmapsto e^{-t}$ est sommable au voisinage de $+\infty$). f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Nous pouvons ensuite appliquer le théorème de Leibniz, avec $A = \mathbb{R}$ et $I = [0,+\infty[$:

- pour tout $x \in A$, $t \longmapsto \varphi(x,t)$ est de classe C^0 par morceaux et sommable sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \longmapsto \varphi(x,t)$ est de classe C^1 sur A ;
- $\forall x \in A,\ \forall t \in I,\ \left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| = 2te^{-t^2}\ |\sin(2xt)| \leq 2te^{-t^2} = \psi(t)$ avec ψ continue et sommable sur $[0,+\infty[$,

donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2}\ \sin(2xt)\,\mathrm{d}t.$$

On peut ensuite faire une intégration par parties, en posant $u'(t) = 2te^{-t^2}$ et $v(t) = \sin(2xt)$:

$$\forall A > 0,\ \int_0^A 2te^{-t^2}\ \sin(2xt)\,\mathrm{d}t = \Big[e^{-t^2}\sin(2xt)\Big]_0^A - 2x\int_0^A e^{-t^2}\ \cos(2xt)\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne, en faisant tendre A vers $+\infty$, $f'(x) = -2xf(x)$. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-x^2}.$$

2) La fonction $x \longmapsto \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$ et de signe constant sur chaque intervalle $\left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$. L'intégrale étudiée est donc de même nature que la série alternée :

$$\sum_{n\geq 1}\int_{1/(n+1)}^{1/n}\frac{(-1)^{E(1/x)}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = (-1)^n\int_{1/(n+1)}^{1/n}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = (-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc u_n est un terme général de série convergente, comme somme d'un terme général de série convergente (séries harmonique alternée) et d'un terme général de série absolument convergente.

On peut ici calculer la somme de la série :

$$\begin{aligned}
\forall N \geq 1,\ \sum_{n=1}^{2N} u_n &= \sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}\\
&= \ln\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{4}\cdots\frac{2N-1}{2N}\,\frac{2N+1}{2N}\right)\\
&= \ln\left(\frac{(1\times 3\times\cdots\times(2N-1))^2(2N+1)}{(2\times 4\times\cdots\times(2N))^2}\right)\\
&= \ln\frac{((2N)!)^2\,(2N+1)}{2^{4N}(N!)^4}
\end{aligned}$$

On utilise ensuite l'équivalent de Stirling $N! \sim \sqrt{2\pi N} e^{-N} N^N$:

$$\frac{((2N)!)^2 (2N+1)}{2^{4N}(N!)^4} \sim \frac{2\pi \times 2N \times e^{-4N} \times (2N)^{4N} \times (2N)}{2^{4N} 4\pi^2 N^2 e^{-4N} N^{4N}} \sim \frac{2}{\pi}$$

ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{2N} u_n = -\ln \frac{\pi}{2}.$$

Exercices Mines-Centrale: intégrales sur un segment

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les relations imposées s'écrivent :

$$a_0 = 0 \text{ et } \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}, F(a_{i+1}) - F(a_i) = \frac{F(1)}{n}$$

ce qui est équivalent à

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\},\ F(a_i) = \frac{i}{n} F(1).$$

Comme F est strictement croissante (f est strictement positive) et continue, elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0, F(1)]$. Il existe donc une unique suite $(a_0, \ldots, a_n)$ vérifiant les conditions imposées, définie par :

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\},\ a_i = F^{-1}\left(\frac{i}{n} F(1)\right).$$

On a ensuite :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g\left(\frac{i}{n}\right)$$

avec $g : \ t \in [0,1] \ \longmapsto f \circ F^{-1}(tF(1))$. Comme g est continue sur $[0,1]$, S_n converge vers $I = \displaystyle\int_0^1 g(t) \, \mathrm{d}\, t$. On a ensuite, avec le changement de variable $F(x) = tF(1)$:

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} I = \int_0^1 f(x) \frac{F'(x)}{F(1)} \, \mathrm{d}\, x = \frac{\displaystyle\int_0^1 f^2(x) \, \mathrm{d}\, x}{\displaystyle\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}\, x}$$

4) a) Soit $g : \ t \longmapsto F(t) - F(a) - \dfrac{t-a}{2} \left(F'(a) + F'(t)\right) + \dfrac{(t-a)^2}{12} \left(F"(t) - F"(a)\right) - \dfrac{(t-a)^5}{720} M$ où M est choisi de sorte que $g(b) = 0$. g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $[a,b]$ et $g(a) = g(b) = 0$. Il existe donc $x \in]a,b[$ tel que $g'(x) = 0$. On a ensuite, pour tout $t \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= F'(t) - \frac{F'(a) + F'(t)}{2} - \frac{t-a}{2} F''(t) + \frac{t-a}{6} \left(F"(t) - F"(a)\right) + \frac{(t-a)^2}{12} F^{(3)}(t) - \frac{(t-a)^4}{144} M \\ &= \frac{1}{2} \left(F'(t) - F'(a)\right) - \frac{t-a}{3} F"(t) - \frac{t-a}{6} F"(a) + \frac{(t-a)^2}{12} F^{(3)}(t) - \frac{(t-a)^4}{144} M \end{aligned}$$

On peut encore appliquer le théorème de Rolle, car g' est de classe C^1 sur $[a,x]$ et $g'(a) = g'(x) = 0$: il existe $y \in]a,x[$ tel que $g''(y) = 0$. On a, pour tout $t \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{F''(t)}{2} - \frac{F''(t)}{3} - \frac{F''(a)}{6} - \frac{t-a}{3} F^{(3)}(t) + \frac{t-a}{6} F^{(3)}(t) + \frac{(t-a)^2}{12} F^{(4)}(t) - \frac{(t-a)^3}{36} M \\ &= \frac{F''(t) - F''(a)}{6} - \frac{t-a}{6} F^{(3)}(t) + \frac{(t-a)^2}{12} F^{(4)}(t) - \frac{(t-a)^3}{36} M \end{aligned}$$

g'' est continue sur $[a,y]$, dérivable sur $]a,y[$ et $g''(a)=g''(y)=0$, donc il existe $c\in]a,y[$ tel que $g^{(3)}(c)=0$. On a enfin, pour $t\in]a,b[$:

$$\begin{aligned} g^{(3)}(t) &= \frac{F''(t)}{6}-\frac{F''(t)}{6}-\frac{t-a}{6}F^{(4)}(t)+\frac{t-a}{6}F^{(4)}(t)+\frac{(t-a)^2}{12}F^{(5)}(t)-\frac{(t-a)^2}{12}M \\ &= \frac{(t-a)^2}{12}\left(F^{(5)}(t)-M\right) \end{aligned}$$

donc $M=F^{(5)}(c)$, puisque $c-a\neq 0$, ce qui donne la relation demandée en écrivant $g(b)=0$.

b) Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $k\in\{0,1,\dots,n\}$, $a_k=a+k\,\frac{b-a}{n}$. Comme F est de classe C^5, on peut lui appliquer le a) sur chaque $[a_k,a_{k+1}]$ et il existe une suite $(c_k)_{0\le k\le n}$ telle que $a_0<c_0<a_1<c_1<\cdots<a_{n-1}<c_{n-1}<a_n$ et :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n-1}F(a_{k+1})-F(a_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}(F'(a_k)+F'(a_{k+1})-\frac{(b-a)^2}{12n^2}\left(F''(a_{k+1})-F''(a_k)\right)+\frac{(b-a)^5}{720n^5}F^{(5)}(c_k)\right) \\ &= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(b)+f(a)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(a_k)\right)-\frac{(b-a)^2}{12n^2}\left(f'(b)-f'(a)\right)+\frac{(b-a)^4}{720n^4}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f^{(4)}(c_k)\right) \end{aligned}$$

Il reste, pour obtenir le résultat demandé, à démontrer que la *somme de Riemman* $S_n=\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}f^{(4)}(c_k)$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t=f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)$ quand n tend vers l'infini. Comme $f^{(4)}$ est continue sur le compact $[a,b]$, elle y est uniformément continue : pour $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que $|f^{(4)}(x)-f^{(4)}(y)|<\varepsilon$ dès que $x,y\in[a,b]$ avec $|x-y|<\eta$. Pour $n>\dfrac{b-a}{\eta}$, on a :

$$\left|S_n-\int_a^b f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}(f^{(4)}(c_k)-f^{(4)}(t))\,\mathrm{d}t\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\underbrace{|f^{(4)}(c_k)-f^{(4)}(t)|}_{\substack{<\varepsilon \\ car\ |c_k-t|\le a_{k+1}-a_k<\eta}}\,\mathrm{d}t\le\varepsilon(b-a)$$

et donc $S_n=\displaystyle\int_a^b f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t+o(1)$, puis $\dfrac{(b-a)^4}{720n^4}S_n=\dfrac{(b-a)^4}{720n^4}\left(f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)\right)+o(1/n^4)$.

5) a) Comme 0 et $\dfrac{a}{b}$ sont des racines d'ordre n de P_n et que P_n est de degré $2n$, on a déjà $P_n^{(k)}(0)=P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right)=0$ pour $0\le k\le n-1$ ou $k\ge 2n+1$. Pour $k\in[\![n,2n]\!]$, on peut appliquer la formule de Leibnitz :

$$P_n^{(k)}=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}n(n-1)\dots(n-i+1)X^{n-i}n(n-1)\dots(n-k+i+1)(-b)^{k-i}(a-bX)^{n-k+i}.$$

Quand $X=0$ ou $X=\dfrac{a}{b}$, tous les termes de cette somme sont nuls sauf un ($i=n$ quand $X=0$ et $i=k-n$ quand $X=a/n$) :

$$\begin{aligned} P_n^{(k)}(0) &= \frac{1}{n!}\binom{k}{n}n!n(n-1)\dots(2n-k+1)(-b)^{k-n}a^{2n-k}=\binom{k}{n}n(n-1)\dots(2n-k+1)(-b)^{k-n}a^{2n-k}\in\mathbb{Z} \\ P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{1}{n!}\binom{k}{k-n}n(n-1)\dots(2n-k+1)\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-k}n!(-b)^n \\ &= \binom{k}{k-n}n(n-1)\dots(2n-k+1)a^{2n-k}(-1)^n b^{k-n}\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

car $a, b, k-n, 2n-k \in \mathbb{N}$.

b) En majorant grossièrement la fonction intégrée, on obtient :

$$|I_n| \leq \frac{1}{n!}\, e^{a/b} \left(\frac{a}{b}\right)^n a^n\, \frac{b}{a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

c) On fait $2n+1$ intégrations par parties :

$$\begin{aligned} d\,I_n &= d\left[P_n(x)e^x - P_n'(x)e^x + P_n^{(2)}(x)e^x - \cdots + P_n^{(2n)}(x)e^x\right]_0^{b/a} - d\int_0^{b/a} \underbrace{P_n^{(2n+1)}(x)}_{=0} e^x \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \underbrace{d\,e^{a/b}}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)}_{\in\mathbb{Z}} - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \underbrace{d\ P_n^{(k)}(0)}_{\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

donc $d\,I_n$ est entier et $I_n > 0$ car I_n est l'intégrale sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{a}{b}\right]$ (avec $a/b > 0$) d'une fonction continue, positive et non nulle. On a donc $d\,I_n \in \mathbb{N}^*$.

d) Soit $r \in \mathbb{Q}^{+*}$. On peut écrire $r = \dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ et si $e^{a/b}$ était rationnel de dénominateur d, les b) et c) donnerait l'aburdité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq d\,I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit que $e^r \notin \mathbb{Q}$ pour $r \in \mathbb{Q}^{+*}$, puis $e^r = \left(e^{-r}\right)^{-1} \notin \mathbb{Q}$ pour $r \in \mathbb{Q}^{-*}$. Le seul rationnel r tel que e^r est rationnel est donc $r = 0$, puisque $e^0 = 1 \in \mathbb{Q}$.

6) a) Soit $x \in [0,1]$. Comme f est concave, on a :

$$\forall s \in [0,1],\ f(sx) = f((1-s)0 + sx) \geq (1-s)f(0) + sf(x) = 1 - s + sf(x).$$

On obtient donc :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x\int_0^1 f(sx)\,\mathrm{d}s \geq x\int_0^1 (1 - s + sf(x))\,\mathrm{d}s = \frac{x}{2} + \frac{f(x)}{2}.$$

b) En intégrant cette inégalité, on obtient :

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}$$

Une intégration par partie (en notant $F:\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$) donne :

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\Big[xF(x)\Big]_0^1}_{=F(1)} - \int_0^1 xF'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

On obtient donc :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}$$

soit

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4} \geq \frac{3}{2}\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}t.$$

Il reste donc à remarquer que

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \geq \underbrace{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}_{=I} - \frac{1}{4},$$

ce qui est évident car $I^2 - I + \dfrac{1}{4} = \left(I - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$.

Comme cette inégalité a été obtenue en intégrant des inégalités entre des fonctions continues, on aura égalité si et seulement si :

- on a égalité pour tout x dans l'inégalité de la question a), ce qui revient à dire que f est affine sur chaque $[0,x]$, donc sur $[0,1]$;
- $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$,

ce qui donne la fonction $f :\ x \longmapsto 1 - x$.

7) On a $S_n = n\ln n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$. En notant $R_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$, on reconnaît une somme de Riemann (méthode des rectangles pointés à droite), qui converge vers $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = 2\ln 2 - 1$. On a donc :

$$S_n = n\ln n + nR_n = n\ln n + n(2\ln 2 - 1) + o(n).$$

Pour obtenir un troisième terme, il faut calculer un équivalent de l'erreur d'approximation pour la méthode des rectangle. Comme la fonction intégrée est de classe C^2, il est connu que la méthode des trapèzes donne une erreur en $O(1/n^2)$. On pose donc, avec $f :\ x \longmapsto \ln(1+x)$:

$$\forall n \geq 1,\ T_n = \frac{1}{n}\left(\frac{f(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{f(1)}{2}\right) = R_n - \frac{\ln 2}{2n}$$

et on obtient :

$$S_n = n\ln n + nT_n + \frac{\ln 2}{2} = n\ln n + n(2\ln 2 - 1 + O(1/n^2)) + \frac{\ln 2}{2} = n\ln n + n(2\ln 2 - 1) + \frac{\ln 2}{2} + o(1/n).$$

8) a) Si ψ est nulle, le résultat est évident. Sinon, $\int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t$ est non nul (on intègre sur un segment non réduit à un point une fonction continue, positive et non null). En notant $m = \min_{a\leq t\leq b} \varphi(t)$ et $M = \sup_{a\leq t\leq b} \varphi(t)$, on a :

$$m\int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t \leq M\int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} \leq M$$

Par le théorème des valeurs intermédiaire (f est continue donc $f([a,b] = [m,M])$, il existe c tel que

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} = f(c)$$

b) On a :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^b f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{nb} f\left(\frac{x}{n}\right)g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{en posant } x = nt \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kb}^{(k+1)b} f\left(\frac{x}{n}\right)g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^b f\left(\frac{kb+u}{n}\right)g(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{en posant } x = kb+u \ (g \text{ est } b\text{-périodique})
\end{aligned}$$

Si g est positive, on peut appliquer la question a) :

$$\forall k \in \{0,\dots,n-1\},\ \exists c_k \in \left[\frac{kb}{n}, \frac{(k+1)b}{n}\right],\ \int_0^b f\left(\frac{kb+u}{n}\right)g(u)\,\mathrm{d}u = f(c_k)\int_0^b g(u)\,\mathrm{d}u$$

On obtient donc :

$$I_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\right)\left(\int_0^b g(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

avec $\dfrac{kb}{n} \leq c_k \leq \dfrac{(k+1)b}{n}$ pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$. On reconnaît une somme de Riemann :

$$\frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne :

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\frac{1}{b}\int_0^b g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Si maintenant g n'est pas positive, il existe une constante K telle que $g+K$ est positive (g est continue et périodique, elle est donc bornée : il suffit de choisir $K = -\min g$). On a donc :

$$I_n + K\int_0^b f(t)\mathrm{d}t = \int_0^b f(t)(g(nt)+K)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underbrace{\left(\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\frac{1}{b}\int_0^b (g(t)+K)\,\mathrm{d}t\right)}_{=\frac{1}{b}\int_0^b g(t)\,\mathrm{d}t + K\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Dans tous les cas, nous avons donc :

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\frac{1}{b}\int_0^b g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Exercices Mines-Centrale: intégrales sur un intervalle quelconque

9) Posons $G(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \geq 0$. G est de classe C^1 avec $G' = f$ et G a une limite finie en $+\infty$ (car f est intégrable sur $[0,+\infty[$), donc G est bornée. On en déduit que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ avec :

- $F(x) = \dfrac{G(x)}{x} = \dfrac{G(x)-G(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0^+]{} f(0)$ donc F est prolongeable par continuité en 0 ;

- $F(x) = \dfrac{G(x)}{x} = O(1/x)$ au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, F^2 est continue sur $[0, +\infty[$ et intégrable au voisinage de $+\infty$, puisque $F^2(x) = O(1/x^2)$.

On a ensuite, en dérivant la relation $xF(x) = G(x)$:

$$\forall x > 0,\ xF'(x) + F(x) = f(x).$$

Cela donne :

$$\forall x > 0,\ F^2(x) = f(x)F(x) - xF(x)F'(x).$$

En fixant a, b tels que $0 < a < b$, nous avons donc :

$$\int_a^b F^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)F(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b xF(x)F'(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

Comme f^2 et F^2 sont intégrables, fF est aussi intégrable (conséquence de l'inégalité de Cauchty-Schwarz).

D'autre part, une IPP donne :

$$\int_a^b xF(x)F'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2}\,F^2(x)\right]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b F^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $F^2(x) = O(1/x^2)$ et que F est continue en 0, on peut faire tendre a vers 0 et b vers $+\infty$ dans (1) :

$$\int_0^{+\infty} F^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)F(x)\,\mathrm{d} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} F^2(x)\,\mathrm{d}x$$

soit (avec l'inégalité Cauchy-Schwarz) :

$$\int_0^{+\infty} F^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(x)F(x)\,\mathrm{d}x \leq 2\,\|f\|_2\,\|F\|_2.$$

Si F est non nulle, on peut diviser par $\|F\|_2$, ce qui donne :

$$\int_0^{+\infty} F^2(x)\,\mathrm{d}x = 4\,\|f\|_2^2 = 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

et cette inégalité est encore valable quand F est nulle.

10) Par intégration par parties, nous obtenons :

$$\forall A \geq 0,\ \int_0^A f'^2(t)\,\mathrm{d}t = f(A)f'(A) - f(0)f'(0) - \int_0^A f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme f et f'' sont de carrés sommables sur $[0, +\infty[$, ff'' est sommable sur $[0, +\infty[$. C'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall A \geq 0,\ \int_0^A |f(t)f''(t)|\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_0^A f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^A f''^2(t)\,\mathrm{d}t} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{+\infty} f''^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

On en déduit donc que $\int_0^A f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite (finie) quand A tend vers $+\infty$.

Si f'^2 n'était pas sommable sur $[0, +\infty[$, on aurait $\int_0^A f'^2(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$. On aurait ainsi $f(A)f'(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$. Comme $2ff'$ est la dérivée de f^2, ceci entrainerait que $f^2(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$. On peut en effet dire qu'il existe $A_0 \geq 0$ tel que $2f(x)f'(x) \geq 1$ pour $x \geq A_0$, ce qui donne :

$$\forall A \geq A_0,\ f^2(A) = f^2(A_0) + \int_{A_0}^A 2f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x \geq f^2(A_0) + (A - A_0) \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty.$$

Ceci contredit la sommabilité de f^2 au voisinage de $+\infty$.

Nous avons donc démontrer que f'^2 est sommable sur $[0,+\infty[$. On peut également remarquer que ceci prouve que $f(A)f'(A)$ a une limite finie ℓ quand A tend vers $+\infty$: comme f^2 est sommable, ℓ est nécessairement nulle. On peut en effet reprendre la preuve précédente : si $\ell > 0$ (preuve symétrique si $\ell < 0$), il existe $A_0 \geq 0$ tel que $2f(x)f'(x) \geq \frac{\ell}{2}$ pour $x \geq A_0$ et $f^2(A)$ tend vers $+\infty$ quand A tend vers $+\infty$. Nous en déduisons :

$$\int_0^{+\infty} f'^2(t)\,\mathrm{d}t = -f(0)f'(0) - \int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

11) a) On peut utiliser le théorème de prolongement C^1 : f est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ avec

$$\forall x \in]0,\pi],\ f'(x) = \frac{x^2\cos(x/2) - 4\sin^2(x/2)}{4x^2\sin^2(x/2)}.$$

On fait un développement au voisinage de 0 :

$$f'(x) \sim \frac{x^2\cos(x/2) - 4\sin^2(x/2)}{x^4} = \frac{x^2(1 - x^2/8 + o(x^2)) - 4(x/2 - x^3/28 + o(x^3))^2}{x^4} \sim -\frac{1}{24}$$

On en déduit que f est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin[(n+3/2)\,x] - \sin[(n+1/2)\,x]}{2\sin(x/2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos(n+1)x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}\sin[(n+1)x]\right]_0^{\pi} = 0$$

donc I_n ne dépend pas de n.

c) Il suffit de faire une IPP :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x\right| &= \left|-\frac{1}{n+1/2}\left[\varphi(x)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n+1/2}\int_0^{\pi}\varphi'(x)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x+\right| \\ &\leq \frac{|\varphi(\pi)| + |\varphi(0)|}{n+1/2} + \frac{1}{n+1/2}\int_0^{\pi}|\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

d) On applique le résultat précédent à la fonction f définie à la question a) :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,\mathrm{d}x - I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

soit, en faisant le changement de variable $t = (n+1/2)x$ et en remplaçant I_n par $I_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

12) La fonction $t \longmapsto \ln t \ln(1-t)$ est continue sur $]0,1[$ et tend vers 0 en 0^+ et 1^- : I est donc convergente.

En utilisant le développement en série entière de $\ln(1-t)$, on a :

$$I = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} -\ln t\,\frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t$$

Le théorème de sommation terme à terme s'applique :

- pour tout n, $u_n : t \longmapsto -\ln t \dfrac{t^n}{n+1}$ est continue et sommable sur $]0,1[$, avec :

$$\int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^3} \text{ (par intégration par parties)};$$

- $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $]0,1[$;
- $\displaystyle\int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t$ est un terme général de série convergente.

On en déduit que $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

13) On a, pour $0 < u < v$:

$$\int_u^v \frac{f(t)-f(at)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_u^v \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ua}^{va} \frac{f(s)}{s}\,\mathrm{d}s$$

et cette expression a une limite quand v tend vers $+\infty$. On peut ensuite écrire, pour $u > 0$:

$$\begin{aligned}\int_u^{+\infty} \frac{f(t)-f(at)}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_u^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ua}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_u^{ua} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\int_u^{ua} \frac{f(0)}{t}\,\mathrm{d}t}_{=f(0)\ln a} + \underbrace{\int_u^{ua} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,\mathrm{d}t}_{=R(u)}\end{aligned}$$

et nous allons montrer que $R(u)$ tend vers 0 quand u tend vers 0^+ :

$$|R(u)| \leq \sup_{t\in[u,ua]} |f(t)-f(0)| \times \left|\int_u^{ua} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right| = \sup_{t\in[u,ua]} |f(t)-f(0)|\,|\ln(a)| \xrightarrow[u\to 0^+]{} 0$$

car f est continue en 0. L'intégrale étudiée est donc convergente et vaut $f(0)\ln a$.

14) Soient $a < b$ deux réels. On a :

$$\int_a^b [f(x+1)-f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{a+1}^{b+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{b+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{a+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On a ensuite :

$$\inf_{x\in[a,a+1]} f(x) \leq \int_a^{a+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sup_{x\in[a,a+1]} f(x)$$

Comme $f(x)$ tend vers λ_1 quand x tend vers $-\infty$, $\inf_{x\in[a,a+1]} f(x)$ et $\sup_{x\in[a,a+1]} f(x)$ tendent également vers λ_1 quand a tend vers $-\infty$ et le théorème d'encadrement prouve que $\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ tend vers λ_1 quand a tend vers $-\infty$. La seconde intégrale se traite de la même façon : l'intégrale étudiée est convergente et vaut $\lambda_2 - \lambda_1$.

15) Écrivons la preuve dans le cas où f est croissante (l'autre cas se ramène à celui-là en remplaçant f par $-f$). Nous avons :

$$\int_0^{(n-1)/n} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1/n}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

d'où le résultat demandé (les deux encadrants tendent vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$).

En posant $f(x)=\ln x$, qui est bien monotone et intégrable sur $]0,1[$, on a :

$$\ln\left((n!/n^n)^{1/n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x=[x\ln x-x]_0^1=-1$$

ce qui prouve que $(n!/n^n)^{1/n}$ tend vers e^{-1} quand n tend vers l'infini.

Posons $f:\ x\in]0,1[\longmapsto\ln\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)$. f est continue et croissante (on compose deux applications croissantes), avec :

- $f(x)$ a une limite finie en 1 ;
- au voisinage de 0, $f(x)=\ln\left(\dfrac{\pi x}{2}+O(x^3)\right)=\ln x+\ln\pi-\ln 2+\ln(1+O(x^2))\sim\ln x$ donc f est sommable au voisinage de 0 (comparaison de fonctions de signe constant).

On peut donc appliquer le résultat à f :

$$\ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^{1/n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\left(\sin u\right)\,\mathrm{d}u.$$

Cette intégrale se calcule grâce à une astuce : on remarque d'abord que, en posant $v=u-\pi/2$ et $w=\pi-u$, on a

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos v)\,\mathrm{d}v=\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin w)\,\mathrm{d}w$$

On a ensuite :

$$2I=\int_0^{\pi/2}\left(\ln(\sin u)+\ln(\cos u)\right)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin u\cos u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2u\right)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin v)\,\mathrm{d}v-\ln 2\,\frac{\pi}{2}=I-\ln 2\,\frac{\pi}{2}$$

soit $I=-\pi\dfrac{\ln 2}{2}$. Nous avons ainsi :

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^{1/n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^{-\ln 2}=\frac{1}{2}.$$

Exercices Mines-Centrale: intégrales à paramètre

16) a) Pour $a\neq 0$, $J(a)$ est définie, comme intégrale d'une fonction continue sur un segment. Quand $a=0$, l'intégrale est divergente, puisque $\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}$ est équivalent en 0 à $\frac{1}{t^2}$, qui n'est pas intégrable au voisinage de 0. Le domaine de définition de J est donc $\mathbb{R}^*$.

Pour tout $b\in]0,\pi/2]$, l'application $J_b:\ a\longmapsto\displaystyle\int_b^{\pi/2}\frac{\cos t}{\sqrt{\sin^4 t+a^4}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de continuité :

- $\forall a\in\mathbb{R},\ t\longmapsto\dfrac{\cos t}{\sqrt{\sin^4 t+a^4}}$ est continue par morceaux sur $[b,\pi/2]$;
- $\forall t\in[b,\pi/2],\ x\longmapsto\dfrac{\cos t}{\sqrt{\sin^4 t+a^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- $\forall a\in\mathbb{R},\ \forall t\in[b,\pi/2],\ 0\leq\dfrac{\cos t}{\sqrt{\sin^4 t+a^4}}\leq\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}=\varphi(t)$ et φ est continue et intégrable sur $[b,\pi/2]$.

Comme J est décroissante sur $]0,+\infty[$, elle a une limite ℓ (finie ou infinie) en 0^+. On a ensuite :

$$\forall a>0,\ \forall b\in\,]0,\pi/2],\ J(a)\geq J_b(a)$$

donc, en faisant tendre a vers 0^+ :

$$\forall b\in\,]0,\pi/2],\ \ell\geq J_b(0)=\int_b^{\pi/2}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

Quand b tend vers 0, ce minorant tend vers $+\infty$ (l'application $t\longmapsto\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}$ est positive et non intégrable sur $]0,\pi/2]$) : on en déduit que $\ell=+\infty$.

Pour trouver un équivalent, nous allons modifier l'expression de J en posant $u=\sin t$ puis $u=va$:

$$\forall a>0,\ J(a)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{u^4+a^4}}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{a}\int_0^{1/a}\frac{1}{\sqrt{v^4+1}}\,\mathrm{d}v.$$

Comme $v\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{v^4+1}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (elle est continue et équivalente à $1/v^2$ au voisinage de $+\infty$), on a $J(a)\underset{0^+}{\sim}\dfrac{K}{a}$ avec $K=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{v^4+1}}\,\mathrm{d}v$ (cela marche car $K\neq 0$). Par parité, on a $J(a)\underset{0}{\sim}\dfrac{K}{|a|}$.

En posant $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\sqrt{v^4+1}}\,\mathrm{d}v$, on a

$$J(a)=\frac{1}{a}F(1/a)=\frac{1}{a^2}\,\frac{F(1/a)-F(0)}{1/a}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{a^2}$$

car $\dfrac{F(b)-F(0)}{b}$ tend vers $F'(0)=1$ quand b tend vers 0.

17) En posant $g:\ (x,t)\longmapsto\frac{\ln(1+xt^2)}{t(1+t^2)}$, on a, avec $A=[0,a]$ et $I=]0,+\infty[$ où $a>0$:

- $\forall x\in A$, $t\longmapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- $\forall t\in I$, $x\longmapsto g(x,t)$ est continue sur A ;
- $\forall x\in A,\ \forall t\in I,\ 0\leq g(x,t)\leq g(a,t)=\varphi(t)$ et φ est continue et intégrable sur I (φ a une limite finie en 0 et $\varphi(t)=o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$).

Le théorème de continuité s'applique : f est définie et continue sur chaque $[0,a]$, donc sur $\mathbb{R}^+$.

Pour répondre à la question suivante, nous allons appliquer le théorème de Leibniz, avec $A=[a,+\infty[$ et $I=]0,+\infty[$, où $a>0$.

- $\forall x\in A$, $t\longmapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- $\forall t\in I$, $x\longmapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur A ;
- $\forall x\in A$, $t\longmapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- $\mathbb{D}\forall x\in A,\ \forall t\in I,\ 0\leq\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\frac{t}{(1+t^2)((1+t^2x)}\leq\frac{t}{(1+t^2)((1+t^2a)}=\psi(t)$ et ψ est continue et intégrable sur I (ψ a une limite finie en 0 et $\psi(t)=O(1/t^3)$ au voisinage de $+\infty$).

On en déduit que f est de classe C^1 sur chaque $[a,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$, avec :

$$\forall x>0,\ f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x)}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+u)(1+ux)}\,\mathrm{d}u$$

Pour $x \neq 1$, on a $\dfrac{1}{(1+u)(1+ux)} = \dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{1}{1+u} - \dfrac{x}{1+ux}\right)$, ce qui donne :

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ f'(x) = \frac{1}{2(1-x)}\left[\ln\frac{1+u}{1+ux}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1-x}$$

Comme f est continue sur $[0,+\infty[$ et C^1 sur $]0,+\infty[$, on peut écrire :

$$\forall x \geq 0,\ f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(1+t^2)}{t^3}\,\mathrm{d}t$ est convergente (la fonction intégrée est continue sur $]0,+\infty[$, tend vers 0 quand t tend vers 0 et est un $o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$) et une intégration par partie (en vérifiant que les formes indéterminées convergent) donne :

$$I = \underbrace{\left[-\frac{\ln^2(1+t^2)}{2t^2}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{2t\ln(1+t^2)}{(1+t^2)t^2}\,\mathrm{d}t = 2f(1) = \int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

On a ensuite :

$$\forall t \in [0,1[,\ \frac{-\ln t}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} -t^n \ln t.$$

En posant $f_n :\ t \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} -t^n \ln t$, on a :

- f_n converge simplement sur $[0,1]$ vers $f :\ t \longmapsto \dfrac{-\ln t}{1-t}$;
- les f_n et f sont continues sur $[0,1[$;
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1[,\ 0 \leq f_n(t) \leq f(t)$ et f est intégrable sur $[0,1[$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée : $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers l'infini, ce qui donne :

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 -t^k \ln t\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\underbrace{\left[-\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln t\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{t^k}{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

18) Notons $f : (x,t) \longmapsto \dfrac{\cos(tx)}{1+t^2}$. Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, h_a est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h_a^{(k)}(x) = \int_0^a \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{t^k\cos(tx + k\pi/2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $k = 1$, on applique le théorème de Leibniz :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,a]$;
- $\forall t \in [0,a]$, $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,a]$;

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0,1],\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{-t\sin(tx)}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{t}{1+t^2} = \varphi(t)$ et φ est continue et intégrable sur $[0,a]$.

donc h_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ h_a'(x) = -\int_0^a \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $k \geq 1$ et supposons la propriété vraie au rang k. On applique une nouvelle fois le théorème de Leibniz en utilisant la domination :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0,1],\ \left|\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)\right| = \left|\frac{t^{k+1}\cos(tx+(k+1)\pi/2)}{1+t^2}\right| \leq \frac{t^{k+1}}{1+t^2} = \psi(t)$$

avec ψ continue et intégrable sur $[0,a]$: cela prouve la propriété au rang $k+1$.

En particulier, h_a est de classe C^2 avec :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ h"_a(x) - h_a(x) = -\int_0^a \cos(tx)\,\mathrm{d}t = -\frac{\sin(xa)}{x}$$

(en convenant que $\dfrac{\sin(xa)}{x} = a$ quand $x = 0$).

19) Pour $x > 0$, notons $G :\ y \longmapsto f(x+iy)$. Le théorème de Leibniz s'applique facilement et G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec :
$$\forall y \in \mathbb{R},\ G'(y) = \int_0^{+\infty} -it^2 e^{-t^2(x+iy)}\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par partie (en vérifiant que les formes indéterminées convergent), on obtient :
$$\forall y \in \mathbb{R},\ G'(y) = \left[\frac{it}{2(x+iy)}\,e^{-t^2(x+iy)}\right]_0^{+\infty} - \frac{i}{2(x+iy)}\,G(y) = -\frac{i(x-iy)}{2(x^2+y^2)}\,G(y)$$

On en déduit qu'il existe $K \in \mathbb{C}$ telle que :
$$\forall y \in \mathbb{R},\ G(y) = K\,e^{-\frac{1}{4}\ \ln(x^2+y^2) - \frac{i}{2}\ \mathrm{Arctan}(y/x)}$$

On obtient (en remarquant que K est non nul) :
$$\forall y \in \mathbb{R},\ \frac{1}{G(y)^2} = \frac{1}{K^2}\,e^{\frac{1}{2}\ \ln(x^2+y^2)+i\ \mathrm{Arctan}(y/x)} = \frac{1}{K^2}\sqrt{x^2+y^2}\,e^{i\,\mathrm{Arctan}(y/x)} = \frac{x+iy}{K^2}$$

Comme $\dfrac{K^2}{x} = G(0)^2 = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \dfrac{1}{x}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right)^2 = \dfrac{\pi}{4x}$, on obtient l'expression demandée.

20) a) Soit $a > 0$. On peut appliquer le théorème de Leibniz sur l'intervalle $I = [0, 2\pi]$ et sur le domaine $A = [-a, a]$:

- pour tout $r \in A$, $\theta \longmapsto f(r,\theta)$ est continue et sommable sur I (I est un segment) ;
- pour tout $t \in I$, $r \longmapsto f(r,\theta)$ est de classe C^1, avec :
$$\forall r \in A,\ \forall t \in T,\ \frac{\partial f}{\partial r}(t,\theta) = \frac{nr^{n-1}e^{in\theta}P(re^{i\theta}) - r^n e^{i(n+1)\theta}P'(re^{i\theta})}{P^2(re^{i\theta})}$$
- pour tout $r \in A$, $\theta \longmapsto \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)$ est continue sur I ;
$$\forall r \in A,\ \forall t \in T,\ \left|\frac{\partial f}{\partial r}(t,\theta)\right| \leq \frac{na^{n-1}M + a^n M'}{m^2} = \varphi(\theta)$$

  avec $M = \max_{|z|\leq a}|P(z)|$, $M' = \max_{|z|\leq a}|P'(z)|$ et $m = \min_{|z|\leq a}|P(z)| > 0$ (P ne s'annule pas). Ces max et min sont en effet bien définis car les fonctions manipulées sont continues sur le compact $\{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq a\}$.

φ étant continue et sommable sur le segment I, F est de classe C^1 sur chaque $[-a,a]$, donc sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall r \in \mathbb{R},\ F'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(t,\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

b) On a :

$$\forall (r,\theta),\ \frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{inr^n e^{in\theta} P(re^{i\theta}) - ir^{n+1}e^{i(n+1)\theta}P'(re^{i\theta})}{P^2(re^{i\theta})} = ir\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta).$$

On en déduit :

$$\forall r \neq 0,\ F'(r) = -\frac{i}{r}\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \theta}(t,\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\frac{i}{r}\ [f(r,\theta)]_0^{2\pi} = 0$$

donc F est constante sur $\mathbb{R}$, donc nulle puisque $F(0)=0$ (car $n \geq 1$).

c) L'absurdité va venir du comportement de F au voisinage de $+\infty$; en écrivant $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, on a :

$$\forall \theta \in [0,2\pi],\ f(r,\theta) = \frac{1}{a_n + a_{n-1}(re^{i\theta})^{-1} + \cdots + a_0(re^{i\theta})^{-n}} \xrightarrow[r\to+\infty]{} \frac{1}{a_n}$$

et nous allons montrer que $F(r)$ tend vers $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a_n}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{a_n}$. Cela se fait directement, sans utiliser le théorème de convergence dominée, en remarquant que :

$$\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{re^{i\theta}} + \cdots + \frac{a_0}{r^n e^{in\theta}} \right| \geq |a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{r} - \cdots - \frac{|a_1|}{r^{n-1}} - \frac{|a_0|}{r^n} = M(r)$$

Comme $M(r)$ tend vers $|a_n| > 0$ quand r tend vers l'infini, il existe $R > 0$ tel que $M(R) > 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall r \geq R,\ |I - F(r)| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{a_{n-1}r^{-1}e^{-i\theta} + \cdots + a_0 r^{-n}e^{-in\theta}}{a_n(a_n + a_{n-1}r^{-1}e^{-i\theta} + \cdots + a_0 r^{-n}e^{-in\theta})}\,\mathrm{d}\theta \right| \\ &\leq 2\pi\,\frac{|a_{n-1}|r^{-1} + \cdots + |a_0|r^{-n}}{|a_n|M(r)} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Comme $I \neq 0$, nous obtenons une absurdité : l'hypothèse faite est donc fausse et P a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

21) a) Pour $a > 0$, on applique facilement le théorème de Leibniz à f sur $[a,+\infty[$ en posant $\varphi :\ (x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}$:

- pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \longmapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$;
- pour tout $t \in [0,+\infty[$, $x \longmapsto \varphi(x,t)$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$;
- pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \longmapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$;
- pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \longmapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$;
- pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{1+t^2}e^{-xt} \leq \dfrac{t}{1+t^2}e^{-at}$ et $t \longmapsto \dfrac{t}{1+t^2}e^{-at}$ est continue et sommable sur $[0,+\infty[$.

donc f est de classe C^1 sur chaque $[a,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$, avec :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

De la même façon, on montre que l'on peut dériver une seconde fois sous le signe intégral en utilisant la domination :

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{t^2}{1+t^2}e^{-xt} \leq e^{-at}$$

ce qui donne :

$$\forall x > 0,\ f(x) + f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

Pour g, il suffit de remarquer que l'on a :

$$\forall x > 0,\ g(x) = \int_x^{+\infty} \left(\cos x \frac{\sin t}{t} - \sin x \frac{\cos t}{t}\right) \mathrm{d}t = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

pour montrer que g est de classe C^2, avec :

$$\begin{array}{rcl} \forall x > 0,\ g'(x) & = & -\sin x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \cos x \frac{\sin x}{x} - \cos \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t + \sin x \frac{\cos x}{x} \\ & = & -\sin x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \cos \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \\ \forall x > 0,\ g''(x) & = & -\cos x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \sin x \frac{\sin x}{x} + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t + \cos x \frac{\cos x}{x} \\ & = & -g(x) + \dfrac{1}{x} \end{array}$$

b) On en déduit que $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$: il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) - g(x) = A\cos x + B \sin x$ pour tout $x > 0$. Nous avons alors :

- $0 \leq f(x) \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$, donc $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$;
- $g(x) = \cos x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ tend également vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

On a donc $A\cos x + B\sin x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, ce qui impose $A = B = 0$ et $f = g$.

c) Le théorème de continuité s'applique facilement à f sur $[0,+\infty[$, avec la domination :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ 0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

On en déduit que $f(x)$ tend vers $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ quand x tend vers 0^+.

L'étude de g au voisinage de 0 se fait assez facilement avec l'expression :

$$g(x) = \underbrace{\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[x\to 0]{} I} - \sin x \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t}_{=A(x)}$$

Pour lever la forme indéterminée posée par le second terme, il suffit de remarquer que l'on a :

$$\forall x \in]0,1[,\ |A(x)| \leq \int_x^1 \frac{|\cos t|}{t}\,\mathrm{d}t + \left|\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \left|\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right| = -\ln x + \left|\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right|$$

ce qui prouve que $\sin x\, A(x) = O(x \ln x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

En faisant tendre x vers 0 dans l'égalité $g(x) = f(x)$, nous obtenons $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

22) Soit $f : (x,t) \longmapsto \dfrac{\operatorname{sh}(tx)}{t \operatorname{ch} t}\, \mathrm{d}t$, $I =]0,+\infty[$ et $A = [-a,a]$ avec $a \in]0,1[$.

- pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue et sommable sur I (elle a une limite finie x en 0 et est négligeable au voisinage de $+\infty$ devant $e^{(t(|x|-1)}$, qui est sommable au voisinage de $+\infty$ car $|x| - 1 < 0$) ;
- pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I ;
- $\forall (x,t) \in A \times I,\ 0 \leq \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\operatorname{ch}(tx)}{\operatorname{ch} t} \leq \dfrac{\operatorname{ch}(at)}{\operatorname{ch} t} = \varphi(t)$ et φ est continue et sommable sur I (elle est prolongeable par continuité en 0 et équivalente à $e^{-t(1-a)}$ en $+\infty$, avec $1 - a > 0$).

On en déduit que F est de classe C^1 sur chaque $[-a,a]$, donc sur $]-1,1[$, avec :

$$\forall x \in]-1,1[,\ F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(xt)}{\operatorname{ch}(t)}\, \mathrm{d}t.$$

On montre ensuite facilement par récurrence que F est de classe C^k pour tout k avec :

$$\forall x \in]-1,1[,\ F^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{k-1} \operatorname{sh}^{(k)}(xt)}{\operatorname{ch}(t)}\, \mathrm{d}t$$

en utilisant les dominations :

$$\forall a \in]0,1[,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x,t) \in [-a,a] \times I,\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \frac{t^{k-1} \operatorname{ch}^{(k)}(at)}{\operatorname{ch} t}$$

On a ensuite :

$$F'(x) - \int_0^{+\infty} e^{t(x-1)}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{t(x-1)} \frac{e^{-2tx} - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}\, \mathrm{d}t$$

donc

$$\forall x \in]0,1[,\ 0 \leq F'(x) - \int_0^{+\infty} e^{t(x-1)}\, \mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} e^{t(x-1)} (e^{-2tx)} - e^{-2t})\, \mathrm{d}t = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{3-x} \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0.$$

On a donc

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{t(x-1)}\, \mathrm{d}t + o(1) = \frac{1}{1-x} + o(1) \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}.$$

Comme la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ est positive et non sommable sur $[0,1[$, on peut intégrer cet équivalent :

$$F(x) = \int_0^x F'(t)\, \mathrm{d}t \underset{1^-}{\sim} \int_0^x \frac{1}{1-t}\, \mathrm{d}t = -\ln(1-x).$$

23) Notons $g(x,t) = \dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour a et b tels que $0 < a < b$, nous allons montrer que l'on peut appliquer le théorème de Leibniz sur l'intervalle $A = [a,b]$.

- pour tout $t \geq 0$, $x \longmapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \longmapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $I = [0,+\infty[$ car $g(x,t) = o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$;

- pour tous $x \in A$ et $t \in I$, on a la domination :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)} \leq \frac{2A}{(a^2+t^2)(1+t^2)} = \varphi(t)$$

  et φ est continue et intégrable sur I.

f est donc de classe C^1 sur $[a, A]$ pour tous $0 < a < A$, donc sur $]0, +\infty[$, avec :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x \in]0, +\infty[\setminus\{1\}$, on obtient :

$$f'(x) = \frac{2x}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2+x^2} - \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{2x}{1-x^2}\left[\frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\frac{t}{x} - \operatorname{Arctan} t\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{1+x}$$

et cette expression est également valable, par continuité de f', quand $x = 1$. Il existe donc une constante K telle que $\forall x > 0,\ f(x) = \pi\ \ln(1+x) + K$.

Il reste à étudier le comportement de f au voisinage de 0. Nous allons utiliser le théorème de continuité pour montrer que f est définie et continue en 0.

- $\forall x \in [0, 1]$, $t \longmapsto g(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$;
- $\forall t > 0$, $x \longmapsto g(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$;
- pour $x \in [0, 1]$ et $t > 0$, $\ln(t^2) \leq \ln(x^2+t^2) \leq \ln(1+t^2)$, donc $|g(x,t)| \leq \dfrac{|2\ln t| + \ln(1+t^2)}{1+t^2} = \varphi(t)$. La fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$ et sommable (négligeable devant $\dfrac{1}{t^{3/2}}$ au voisinage de $+\infty$ et équivalente à $-2\ln t$ au voisinage de 0).

On en déduit que f est continue sur $[0, 1]$ et C^1 sur $]0, +\infty[$, avec $\forall x \geq 0,\ f(x) = \pi\ \ln(1+x) + f(0)$. On a ensuite :

$$f(0) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,t + \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,t}_{\text{on pose } u=1/t} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,t - \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,u = 0$$

Par parité, f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = \pi\ \ln(1+|x|)$.

Exercices X-ENS

24) a) f est positive t continue par morceaux sur $]0, 1]$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{1/N}^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{N-1}\int_{1/(k+1)}^{1/k} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N-1}\int_{1/(k+1)}^{1/k}\left(\frac{1}{x} - k\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{N-1}\big[\ln x - kx\big]_{1/(k+1)}^{1/k} = \sum_{k=1}^{N-1} -\ln(k) + \ln(k+1) - \frac{1}{k+1} \\
&= \ln N - H_N + 1 = -\gamma + 1 + o(1)
\end{aligned}$$

donc f est sommable sur $]0, 1]$ et $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \gamma$.

b) On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{d=1}^{n} \mathbb{1}_{d\,|\,k}\right)$ où $\mathbb{1}_{d\,|\,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } d \text{ divise } k, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

On peut ensuite échanger les deux sommes :

$$S_n = \sum_{d=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{d \mid k} \right) = \sum_{d=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

car les multiples de d compris entre 1 et n sont les entiers d, $2d$, $\ldots$,$\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor d$. On en déduit :

$$S_n = \sum_{d=1}^{n} \frac{n}{d} - \left\{ \frac{n}{d} \right\} = nH_n - \sum_{d=1}^{n} f\left(\frac{d}{n}\right).$$

25) a) $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ (prolongée par 1 en 0) est continue sur $[0, \infty[$ et par IPP, on a :

$$\forall A > 0,\ I_A = \int_0^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^A + \int_0^A \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ (prolongée par continuité en 0) est sommable au voisinage de $+\infty$ (c'est un $O(1/t^2)$) donc I_A a une limite quand A tend vers $+\infty$ et I converge.

b) Notons, pour $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t$. Le théorème de Leibniz s'applique facilement pour démontrer que f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$:

- pour tout $x \geq a$, $t \longmapsto \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue et sommable sur $[0, +\infty[$;
- pour tout $t \geq 0$, $x \longmapsto \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$;
- pour tous $t \geq 0$ et $x \geq a$,$\left|\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}\right)\right| = e^{-tx}\dfrac{t}{1+t^2} \leq e^{-ta}\dfrac{t}{1+t^2} = \varphi(t)$ avec φ continue et sommable sur $[0, +\infty[$.

f est donc de classe C^1 sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, donc sur $]0, +\infty[$, avec :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On montre de la même façon, en utilisant la domination :

$$\forall t \geq 0,\ \forall x \geq a,\ \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\right)\right| = e^{-tx}\frac{t^2}{1+t^2} \leq e^{-ta}$$

que f est de classe C^2 avec

$$\forall x > 0,\ f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On obtient ainsi :

$$\forall x > 0,\ f(x) + f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

On a d'autre part :

$$\forall x > 0,\ g(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc g est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, avec :

$$\begin{aligned}
\forall x>0,\ g'(x) &= -\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\cos x\,\frac{\sin x}{x}-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t+\sin x\,\frac{\cos x}{x}\\
&= -\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\\
g''(x) &= -\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t+\sin x\,\frac{\sin x}{x}+\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t+\cos x\,\frac{\cos x}{x}\\
&= -g(x)+\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Ainsi, f et g sont solutions sur $]0,+\infty[$ de la même équation différentielle $y+y''=\dfrac{1}{x}$. On en déduit que $f-g$ est solution de l'équation homogène $y+y''=0$: il existe donc $A,\varphi\in\mathbb{R}$ telles que $f(x)-g(x)=K\sin(x-\varphi)$. $g(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ et le théorème de convergence dominée s'applique pour f :

- $\forall t\geq 0,\ \forall x>0,\ 0\leq\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\leq\frac{1}{1+t^2}=\varphi(t)$ et φ est continue et sommable sur $[0,+\infty[$;
- $\forall t\geq 0,\ \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$

donc $f(x)$ tend également vers 0 quand x tend vers $+\infty$: ceci prouve que $K=0$, i.e. que $f=g$.

Nous avons donc pour tout $x\in]0,+\infty[$:

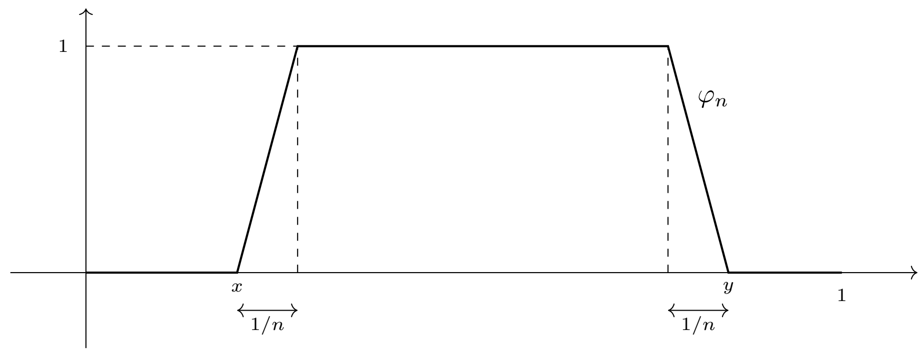
$$f(x)=\underbrace{\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\sin x\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t}_{=A(x)}-\underbrace{\sin x\int_x^{1}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t}_{=B(x)}.$$

Le théorème de continuité pour les fonctions définies par une intégrale prouve que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$. Nous avons ensuite :

- $f(x)$ tend vers $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$ quand x tend vers 0^+ ;
- $A(x)$ tend vers I quand x tend vers 0^+ ;
- $B(x)=\sin x\displaystyle\int_x^1\frac{\cos t-1}{t}\mathrm{d}t+\sin x\int_x^1\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\sin x\int_x^1\frac{\cos t-1}{t}\mathrm{d}t-\sin x\ln x$. Comme $\dfrac{\cos t-1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0^+, $\sin x\displaystyle\int_x^1\frac{\cos t-1}{t}\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+ et $B(x)$ tend aussi vers 0 ($-\sin x\ln x$ est équivalent à $-x\ln x$ qui tend vers 0).

Nous obtenons ainsi $\dfrac{\pi}{2}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

26) Soient x,y avec $0\leq x\leq y\leq 1$. Pour n assez grand (i.e. tel que $y-x\geq 2/n$, considérons la fonction φ_n définie par le graphe :



φ_n est continue et de classe C^1 par morceaux, donc l'hypothèse donne :

$$\int_x^{x+1/n} nf(t)\,\mathrm{d}t - \int_{y-1/n}^{y} nf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\varphi_n'(t)\,\mathrm{d}t \leq C\,\|\varphi_n\|_p \qquad (\star)$$

Un calcul élémentaire donne :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n\|_p &= \left(\int_x^{x+1/n} |n(t-x)|^p\,\mathrm{d}t + \int_{x+1/n}^{y-1/n} 1^p \mathrm{d}t + \int_{y-1/n}^{y} |-n(t-y)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \\
&= \left(\left[n^p \frac{(t-x)^{p+1}}{p+1}\right]_x^{x+1/n} + y - x - \frac{2}{n} + \left[-n^p \frac{(y-t)^{p+1}}{p+1}\right]_{y-1/n}^{y}\right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{2}{(p+1)n} + y - x - \frac{2}{n}\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

En notant F une primitive de f, nous avons :

$$\int_x^{x+1/n} nf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{F(x+1/n)-F(x)}{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} F'(x) = f(x) \text{ et } \int_{y-1/n}^{y} nf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{F(y)-F(y-1/n)}{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} F'(y) = f(y).$$

En faisant tendre n vers l'infini dans $(\star)$, nous obtenons $f(x) - f(y) \leq C\,|x-y|^{1/p}$. Un calcul identique avec $-\varphi_n$ donne $f(y) - f(x) \leq C\,|x-y|^{1/p}$. Comme l'inégalité est vérifiée quand $x = y$ et que le cas $x > y$ est symétrique, nous obtenons :

$$\forall x, y \in [0,1],\ \ |f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|^{1/p}.$$