
MERCREDI 3 JUIN

| Référence | Origine | Thèmes |
|-----------|----------|-------------------------------------|
| 136-1364 | IMT MP | Réduction d'une matrice |
| 136-1368 | CCINP MP | " |
| 136-1372 | " | " |
| 136-1382 | " | Endomorphisme d'un espace euclidien |
| 136-1385 | " | " |
| 136-1397 | IMT MP | Séries numériques |
| 136-1398 | CCINP MP | " |
| 136-1402 | Dauphine | Intégrales |
| 136-1403 | IMT MP | " |
| 136-1407 | CCINP MP | Suite récurrente |

Soit $n \geq 2$, un entier. On considère la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{i,i} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, $a_{i,j} = -1$ pour $1 \leq j < i \leq n$ et $a_{i,j} = 1$ pour $1 \leq i < j \leq n$. On considère également la matrice $J \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

[1.] Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on considère l'application $P_\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad P_\lambda(x) = \det(\lambda I_n - A - xJ).$$

Démontrer que P est une fonction affine.

[2.] En déduire l'expression du polynôme caractéristique de A .

[3.] La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$?

[1.] La matrice A étant égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & & & \\ \vdots & & & \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a donc

$$P_\lambda(x) = \begin{vmatrix} \lambda - x & -1 - x & \dots & -1 - x \\ 1 - x & & & \\ \vdots & & & \\ 1 - x & \dots & 1 - x & \lambda - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - x & -1 - \lambda & \dots & -1 - \lambda \\ 1 - x & \lambda - 1 & -2 & -2 \\ \vdots & 0 & & -2 \\ 1 - x & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

en effectuant les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour $2 \leq j \leq n$. En développant ce déterminant par la première colonne, on obtient

$$P_\lambda(x) = (\lambda - x)\alpha_{1,1} + (1 - x) \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} \alpha_{i,1}$$

où les mineurs $A_{i,1}$ sont indépendants de x . Par conséquent, P_λ est bien une fonction affine de x .

[2.] Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux, donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad P_\lambda(-1) = (\lambda + 1)^n \quad \text{et} \quad P_\lambda(1) = (\lambda - 1)^n.$$

Comme P_λ est une fonction affine,

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \chi_A(\lambda) = P_\lambda(0) = \frac{(\lambda + 1)^n + (\lambda - 1)^n}{2}.$$

Il existe deux scalaires a et b (dépendant de λ) tels que $P_\lambda(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.

Première méthode. Connaissant les valeurs de $P_\lambda(\pm 1)$, on peut déterminer a et $b = P_\lambda(0)$ en résolvant un système de deux équations (avec les formules de Cramer).

Deuxième méthode. La théorie de l'interpolation de Lagrange nous dit que

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad P_\lambda(x) = P_\lambda(-1) \cdot \frac{x - 1}{(-1) - 1} + P_\lambda(1) \cdot \frac{x + 1}{1 + 1}.$$

Troisième méthode. Les fonctions affines conservent les barycentres :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}, \quad P_\lambda\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n t_k P_\lambda(x_k)$$

quels que soient les scalaires t_1, \dots, t_n dont la somme soit égale à 1.

[3.] Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique χ_A .

$$\begin{aligned}(\lambda + 1)^n + (\lambda - 1)^n = 0 &\iff \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right)^n = -1 = e^{i\pi} \\ &\iff \exists 0 \leq k < n, \quad \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = \exp\left(\frac{i(2k + 1)\pi}{n}\right) \\ &\iff \exists 0 \leq k < n, \quad \lambda \left(1 - \exp\frac{i(2k + 1)\pi}{n}\right) = \left(1 + \exp\frac{i(2k + 1)\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

donc les valeurs propres de A sont les nombres complexes

$$\lambda_k = \frac{2 \cos[(2k + 1)\pi/2n]}{-2i \sin[(2k + 1)\pi/2n]} = i \cot \frac{(2k + 1)\pi}{2n}$$

pour $0 \leq k < n$. La fonction \cot est strictement décroissante sur $]0, \pi[$ et $0 < \pi \leq (2k + 1)\pi \leq (2n - 1)\pi < 2n\pi$, donc les λ_k sont deux à deux distincts.

La matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ possède n valeurs propres complexes deux à deux distinctes, donc elle est diagonalisable.

☞ *La matrice A est antisymétrique et notre calcul montre que ses valeurs propres sont imaginaires pures : tout va bien !*

On considère la matrice

$$A = (i/j)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

- [1.] La matrice A est-elle inversible?
- [2.] Trouver un polynôme annulateur de A .
- [3.] Démontrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
- [4.] Déterminer les sous-espaces propres de A .
- [5.] Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute à A . Démontrer que $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$ sont stables par M .

[1.] Le rang de la matrice A est égal à 1, donc elle n'est pas inversible (sauf si $n = 1$!).

$$A = C.L \quad \text{avec} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \left(1 \quad \frac{1}{2} \quad \cdots \quad \frac{1}{n-1} \quad \frac{1}{n} \right) \quad (*)$$

[2.] D'après la factorisation (*),

$$A^2 = (C.L)(C.L) = C(L.C)L = nC.L = nA$$

puisque

$$\sum_{i=1}^n i \cdot \frac{1}{i} = n.$$

Un polynôme annulateur de A est donc $X^2 - nX = X(X - n)$.

[3.] D'après la question précédente, A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples (puisque $n > 0$), donc A est diagonalisable.

Les valeurs propres de A sont des racines de ce polynôme annulateur, donc $\text{Sp}(A) \subset \{0; n\}$.

☞ On démontrera l'inclusion réciproque en caractérisant les sous-espaces propres.

[4.] On va éviter de parler plus longtemps du cas $n = 1$...

☛ Pour $n \geq 2$, on sait que A n'est pas inversible, donc 0 est une valeur propre de A .

Plus précisément, d'après le Théorème du rang, le noyau de A est un hyperplan et chaque ligne de la matrice A nous donne une équation cartésienne du noyau.

$$(x_1, \dots, x_n) \in \text{Ker } A \iff \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k} = 0.$$

☞ Tout vecteur propre associé à une valeur propre non nulle appartient à l'image de l'endomorphisme ou de la matrice.

☛ Comme le rang de A est égal à 1, l'image de A est la droite dirigée par la colonne C . Donc $\text{Ker}(A - nI_n) \subset \mathbb{R} \cdot C$.

D'après (*), $AC = (C.L)C = C(L.C) = nC$ et comme $C \neq 0$, on en déduit que n est bien une valeur propre de A et que C est un vecteur propre de A associé à n . Donc $\text{Ker}(A - nI_n) = \mathbb{R} \cdot C$.

☛ Finalement, $\text{Sp}(A) = \{0; n\}$ et

$$\dim \text{Ker } A + \dim \text{Ker}(A - nI_n) = (n-1) + 1 = n$$

donc A est diagonalisable.

[5.] Question de cours!

Variante. Comme le rang de A est égal à 1 et que A est diagonalisable, son image est en fait le sous-espace propre associé à la valeur propre non nulle de A .

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$, un endomorphisme non nul tel que

$$f^3 + f = 0.$$

[1.] Démontrer que

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^2 + I). \quad (*)$$

[2.] Démontrer qu'il existe un vecteur non nul $x \in \text{Ker}(f^2 + I)$. Démontrer que le couple $(x, f(x))$ est une famille libre.

[3.] Démontrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[4.] Construire $u \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $u^2 = f$.

[1.] Le polynôme $X^3 + X = X(X^2 + 1)$ est un polynôme annulateur de f . Les facteurs X et $X^2 + 1$ sont premiers entre eux, donc le Théorème de décomposition des noyaux donne directement la décomposition en somme directe.

[2.] Si $\text{Ker}(f^2 + I) = \{0\}$, alors on déduit de (*) que f est l'endomorphisme nul, ce qui est impossible par hypothèse. Il existe donc un vecteur x non nul dans $\text{Ker}(f^2 + I)$.

• Comme $x \neq 0$, le couple $(x, f(x))$ est une famille liée si, et seulement si, il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha \cdot x$. Mais, par construction de x ,

$$-x = f^2(x) = \alpha^2 \cdot x$$

et comme x n'est pas le vecteur nul, on en déduit alors que $\alpha^2 = -1$, ce qui est impossible (dans \mathbb{R} !).

Donc le couple $(x, f(x))$ est une famille libre.

[3.] Le polynôme minimal de f est un diviseur de tout polynôme annulateur, donc un diviseur de $X(X^2 + 1)$.

Comme f n'est pas l'endomorphisme nul, son polynôme minimal n'est pas X . Il ne reste donc plus que deux possibilités pour le polynôme minimal : $X^2 + 1$ et $X(X^2 + 1)$.

Le polynôme caractéristique de A est un polynôme de degré 3 à coefficients réels, donc il admet au moins une racine réelle (Théorème des valeurs intermédiaires) et cette racine est une valeur propre de la matrice A . C'est donc aussi une racine du polynôme minimal : le polynôme minimal de A possède donc au moins une racine réelle. Donc le polynôme minimal de A est le polynôme $X(X^2 + 1)$.

En particulier, 0 est une valeur propre de A , donc la dimension du noyau de A est supérieure à 1.

On déduit alors de (*) que

$$\dim \text{Ker } A = 1 \quad \text{et} \quad \dim \text{Ker}(A^2 + I_3) = 2.$$

Un vecteur non nul x_0 de $\text{Ker } A$ est un vecteur directeur de A (c'est-à-dire une base); le couple $(x, f(x))$ étudié à la question précédente est une base de $\text{Ker}(A^2 + I_3)$. On déduit de (*) que la famille

$$\mathcal{B}_0 = (x_0, x, f(x))$$

est une base de \mathbb{R}^3 et la matrice de f dans cette base \mathcal{B}_0 est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

car :

- $f(x_0) = 0$,
- $f(x) = 0 \cdot x_0 + 0 \cdot x + 1 \cdot f(x)$,
- et $f^2(x) = -x = 0 \cdot x_0 + (-1) \cdot x + 0 \cdot f(x)$.

[4.] On reconnaît le bloc inférieur droit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix}.$$

Puisqu'il s'agit de la rotation d'angle $\pi/2$, une "racine carrée" de f peut se déduire de la rotation d'angle $\pi/4$: l'endomorphisme u défini par

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie $u^2 = f$.

L'espace $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$. On considère un endomorphisme u de E , représenté dans la base canonique par la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On note w , l'endomorphisme de E représenté dans la base canonique par la matrice A^\top .

[1.] Démontrer que

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x) | y \rangle = \langle x | w(y) \rangle.$$

[2.] Soit F , un sous-espace stable par u . Démontrer que F^\perp est stable par w .

[3.] Dans cette question, on suppose que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[3.a.] Calculer χ_A . Les matrices A et A^\top sont-elles diagonalisables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$?

[3.b.] Déterminer les sous-espaces stables par u .

[1.] Pour le produit scalaire canonique, la base canonique est orthonormée.

Par conséquent, si x et y sont représentés par X et Y dans la base canonique, alors

$$\langle u(x) | y \rangle = (UX)^\top \cdot Y = X^\top \cdot U^\top \cdot Y = \langle x | w(y) \rangle.$$

☞ L'endomorphisme w est l'adjoint de u .

Dans une base qui n'est pas orthonormée, l'expression matricielle du produit scalaire fait apparaître la matrice de Gram.

[2.] Soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x \in F$,

$$\langle x | w(y) \rangle = \langle u(x) | y \rangle = 0$$

car $u(x) \in F$ (hypothèse de stabilité) et $y \in F^\perp$. Ce calcul prouve que $w(y)$ est orthogonal à F et donc que F^\perp est stable par w .

[3.a.] On trouve $\chi_A = X^3 - X^2 = X^2(X - 1)$. Le rang de A est égal à 2 puisque $C_1 = C_3$ et que (C_1, C_2) est libre, donc la dimension de $\text{Ker } A$ est égale à 1 (Théorème du rang). Or 0 est une valeur propre double, donc A n'est pas diagonalisable.

Comme A et A^\top ont même rang et même polynôme caractéristique, la matrice A^\top n'est pas diagonalisable non plus.

☞ Autre argument possible : $P^{-1}AP = B$ si, et seulement si, $Q^{-1}A^\top Q = B^\top$ avec $Q = (P^\top)^{-1}$, donc A est diagonalisable si, et seulement si, A^\top est diagonalisable.

[3.b.] Les sous-espaces propres $\{0\}$ et E sont évidemment stables par u .

Une droite vectorielle est stable par u si, et seulement si, elle est dirigée par un vecteur propre de u .

— Le sous-espace propre de u associé à la valeur propre 0 (= son noyau!) est dirigé par $(1, 0, -1)$.

— Le sous-espace propre de u associé à la valeur propre 1 est dirigé par $(0, 1, 1)$.

D'après la question [2.], un plan P est stable par u si, et seulement si, la droite vectorielle P^\perp est stable par w , c'est-à-dire si P^\perp est dirigée par un vecteur propre de w .

— Le sous-espace propre de w associé à la valeur propre 0 est dirigé par $(1, -1, 1)$.

— Le sous-espace propre de w associé à la valeur propre 1 est dirigé par $(1, 0, 1)$.

L'endomorphisme u admet donc six sous-espaces vectoriels stables :

— les deux sous-espaces vectoriels évidents : $\{0\}$ et E ;

— les deux droites propres $\text{Ker } u = \mathbb{R} \cdot (1, 0, -1)$ et $\text{Ker}(u - I_E) = \mathbb{R} \cdot (1, 0, 1)$;

— les deux plans

$$[x - y + z = 0] = \text{Ker } u \oplus \text{Ker}(u - I_E) \quad \text{et} \quad [x + z = 0] = \text{Ker } u^\perp.$$

Soient E , un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{S}(E)$. On note a (resp. b), la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de f .

[1.] Démontrer que

$$\forall x \in E, \quad a\|x\|^2 \leq \langle f(x) | x \rangle \leq b\|x\|^2.$$

[2.] Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \langle f(x) | x \rangle \leq r\|x\|^2.$$

Démontrer que $b \leq r$.

[3.] Soit $k \in \mathbb{R}$. On note $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice définie par $a_{i,i} = k$, $a_{i,i\pm 1} = 1$ et $a_{i,j} = 0$ si $|i - j| \geq 2$. Démontrer que la plus grande valeur propre de A est inférieure à $k + 2$.

[1.] D'après le Théorème spectral, pour tout $x \in E$, il existe une famille $(x_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(f)}$ de vecteurs deux à deux orthogonaux tels que

$$x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} x_\lambda \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(f), \quad f(x_\lambda) = \lambda x_\lambda.$$

Par conséquent,

$$\langle f(x) | x \rangle = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda \|x_\lambda\|^2$$

et comme

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(f), \quad a \leq \lambda \leq b,$$

on obtient

$$\forall x \in E, \quad a\|x\|^2 \leq \langle f(x) | x \rangle \leq b\|x\|^2.$$

[2.] Comme b est une valeur propre de f , il existe un vecteur propre x_b associé à b et

$$\langle f(x_b) | x_b \rangle = b\|x_b\|^2 \leq r\|x_b\|^2.$$

Comme un vecteur propre n'est, par définition, pas nul, le facteur $\|x_b\|^2$ est strictement positif et donc $b \leq r$.

➤ Plus généralement, le rayon spectral d'un endomorphisme auto-adjoint est toujours égal à sa norme d'application linéaire continue (pour la norme subordonnée à la norme euclidienne, bien sûr).

[3.] La matrice A est symétrique réelle. Elle représente donc un endomorphisme auto-adjoint f dans une base orthonormée.

• Quel que soit $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\langle f(x) | x \rangle = \sum_{i=1}^n kx_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=2}^n x_i^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2.$$

On en déduit que

$$\forall x \in E, \quad \langle f(x) | x \rangle \leq (k + 2)\|x\|^2$$

et, d'après la question précédente, la plus grande valeur propre de A est inférieure à $(k + 2)$.

➤ On peut aussi démontrer que $A - \lambda I_n$ est injective pour tout réel $\lambda \geq k + 2$ (lemme d'Hadamard sur les matrices à diagonale fortement dominante).

[1.] Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{X^2(X+1)}.$$

[2.] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

[2.a.] Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

[2.b.] Déterminer la nature de la série $\sum (u_n - 1/n)$.

[2.c.] Déterminer la nature de la série $\sum (nu_n - 1)$.

[1.]

$$\frac{1}{X^2(X+1)} = \frac{-1}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X+1}$$

[2.a.] En comparant la somme u_n à l'intégrale $\int_n^{+\infty} dt/t^2$, on trouve

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

La série harmonique est une série divergente de terme général positif, donc la série $\sum u_n$ est divergente.

[2.b.] Par télescopage,

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

et par linéarité,

$$\forall n \geq 1, \quad u_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}.$$

En comparant la somme $u_n - 1/n$ à l'intégrale

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2(t+1)},$$

on trouve que

$$u_n - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par conséquent, la série $\sum (u_n - 1/n)$ est absolument convergente.

[2.c.] Plus précisément, la comparaison de la somme et de l'intégrale montre que

$$\forall n \geq 1, \quad u_n - \frac{1}{n} \geq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2(t+1)} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Par conséquent, $nu_n - 1$ est minoré par une quantité équivalente à $1/2n$. Comme la série $\sum 1/2n$ est une série divergente de terme général positif, on en déduit que la série $\sum (nu_n - 1)$ est divergente.

↳ La comparaison somme/intégrale démontre en fait que

$$u_n - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

mais on n'a pas besoin d'une telle précision ici.

Évidemment, il faut faire une figure pour établir sereinement cette comparaison.

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $0 < u_0 < \pi/2$ et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin u_n.$$

[1.] Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Préciser sa limite.

[2.] Étudier la nature de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$. En déduire la nature de la série $\sum u_n^3$.

[3.] Étudier la nature de la série

$$\sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.

[1.] Par hypothèse, $0 < u_0 < \pi/2$ et on sait que

$$\forall x \in [0, \pi/2], \quad 0 \leq \sin x \leq \min\{x, 1\}.$$

Par conséquent, $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_{n+1} = \sin u_n \leq u_n.$$

En tant que suite décroissante et positive, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

La suite extraite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge elle aussi, vers la même limite. Or $u_{n+1} = \sin u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et \sin est continue sur \mathbb{R} , donc la limite ℓ vérifie $\sin \ell = \ell$, c'est-à-dire $\ell = 0$.

☞ On doit connaître quelques propriétés de \sin .

[2.] La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est une série télescopique. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

Le terme général de cette série est négatif (puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante), donc cette série est en fait *absolument* convergente.

☞ Comme u_n tend vers 0, on déduit du développement limité de \sin au voisinage de 0 que

$$u_{n+1} = \sin u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$$

et donc

$$u_n^3 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -6(u_{n+1} - u_n).$$

Comme la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente, on en déduit que la série $\sum u_n^3$ est absolument convergente.

☞ On ne peut appliquer AUCUN théorème de comparaison à une série semi-convergente.

[3.] Comme u_n tend vers 0 par valeurs strictement supérieures, la suite de terme général $\ln u_n$ tend vers $-\infty$. Or

$$\forall n \geq 1, \quad \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln u_{n+1} - \ln u_n.$$

Il s'agit à nouveau d'une série télescopique, mais elle est divergente.

☞ On sait que

$$\frac{\sin x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

et donc que

$$\ln \frac{\sin x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Par conséquent, comme u_n tend vers 0,

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-u_n^2}{6}$$

c'est-à-dire

$$u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -6 \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Le second membre est le terme général *positif* d'une série *divergente*, donc la série $\sum u_n^2$ est divergente.

☞ On peut démontrer à l'aide du Théorème de Cesaro que $u_n \sim \sqrt[3]{3/n}$. Cet équivalent explique les résultats précédents.

[1.] Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) |\sin nt| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt.$$

[2.] Le résultat est-il encore vrai si f est seulement continue par morceaux sur $[0, \pi]$?

[1.] La fonction intégrande est continue sur le segment $[0, \pi]$, donc l'intégrale est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad \alpha_{k,n} = \frac{k\pi}{n}.$$

En particulier, $\alpha_{0,n} = 0$ et $\alpha_{n,n} = \pi$. On notera aussi $\delta_n = \alpha_{1,n} = \pi/n$. Les propriétés fondamentales de l'intégrale permettent de transformer l'intégrale étudiée :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(t) |\sin nt| dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\alpha_{k,n}}^{\alpha_{k+1,n}} f(t) |\sin nt| dt && \text{(relation de Chasles)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\delta_n} f(\alpha_{k,n} + t) \sin(nt) dt && \text{(changement de variable } t \leftarrow t - \alpha_{k,n}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi f\left(\alpha_{k,n} + \frac{u}{n}\right) \sin u \frac{du}{n} && \text{(changement de variable } u = nt) \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\alpha_{k,n} + \frac{u}{n}\right) \sin u du. && \text{(linéarité)} \end{aligned}$$

L'expression trouvée paraît proche de l'expression suivante :

$$\int_0^\pi \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_{k,n}) \sin u du = \left(\frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_{k,n}) \right) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin u du = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_{k,n}) \right).$$

On reconnaît ici une somme de Riemann associée à la fonction f sur le segment $[0, \pi]$. Comme la fonction f est continue, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_{k,n}) \sin u du = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt. \quad (*)$$

Il reste donc à estimer la différence

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \int_0^\pi \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\alpha_{k,n} + \frac{u}{n}\right) \sin u du - \int_0^\pi \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_{k,n}) \sin u du \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\alpha_{k,n} + \frac{u}{n}\right) - f(\alpha_{k,n}) \right] \sin u du \end{aligned}$$

en remarquant que la variation u/n de la variable est comprise entre 0 et $\pi/n = \delta_n$.

• Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le segment $[0, \pi]$, elle est uniformément continue sur $[0, \pi]$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0, \pi], \quad |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Comme δ_n tend vers 0, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\delta_n| \leq \alpha$ pour tout $n \geq n_0$. Par conséquent,

$$\forall n \geq n_0, \forall 0 \leq k < n, \forall u \in [0, \pi], \quad \left| f\left(\alpha_{k,n} + \frac{u}{n}\right) - f(\alpha_{k,n}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

et de ce fait $|\Delta_n| \leq \varepsilon/2$ pour tout $n \geq n_0$. D'après (*), il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq n_1, \quad \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt - \int_0^\pi \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_{k,n}) \sin u du \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}, \quad \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt - \int_0^\pi f(t) |\sin nt| dt \right| \leq \varepsilon.$$

On a ainsi démontré le résultat souhaité.

[2.] Dans le raisonnement précédent, la continuité ne sert véritablement qu'au moment d'exploiter la continuité uniforme.

↳ *Ce qui suit est une sorte de raisonnement par densité — malheureusement, nous ne disposons pas d'une norme !*

• Soient $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux et $\varepsilon > 0$. Il existe (faites une FIGURE !) une fonction continue $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\int_0^\pi |g(t) - f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On en déduit par inégalité triangulaire intégrale que

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^\pi g(t) |\sin nt| dt - \int_0^\pi f(t) |\sin nt| dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après la question précédente, il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \left| \int_0^\pi f(t) |\sin nt| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par inégalité triangulaire à nouveau,

$$\forall n \geq N, \quad \left| \int_0^\pi g(t) |\sin nt| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(t) dt \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que le résultat démontré pour les fonctions continues est toujours vrai pour les fonctions continues par morceaux.

Soient f et g , deux applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Déterminer les limites des suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

La somme S_n est une somme de Riemann associée à la fonction fg . Or le produit fg est continu sur le segment $[0, 1]$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc elle est bornée. Par conséquent, pour tout $n \geq 1$,

$$|T_n - S_n| \leq \frac{\|f\|_\infty}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right|$$

par inégalité triangulaire.

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la fonction g est continue sur le segment $[0, 1]$, elle est uniformément continue, donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad |x - y| \leq \alpha \implies |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon.$$

Pour tout entier n assez grand pour que $0 < 1/n \leq \alpha$, on en déduit que

$$\forall 0 \leq k < n, \quad \left| g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \varepsilon$$

et donc que

$$|T_n - S_n| \leq \|f\|_\infty \cdot \varepsilon.$$

On a ainsi démontré que la suite $(T_n - S_n)$ tendait vers 0 et on en conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = 2x(1 - x).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n , la n -ième itérée de $f : f_1 = f$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_{n+1} = f \circ f_n.$$

[1.] Démontrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction g (qu'on identifiera). La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

[2.] Soit $0 < a < 1/2$. Démontrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, 1 - a]$.

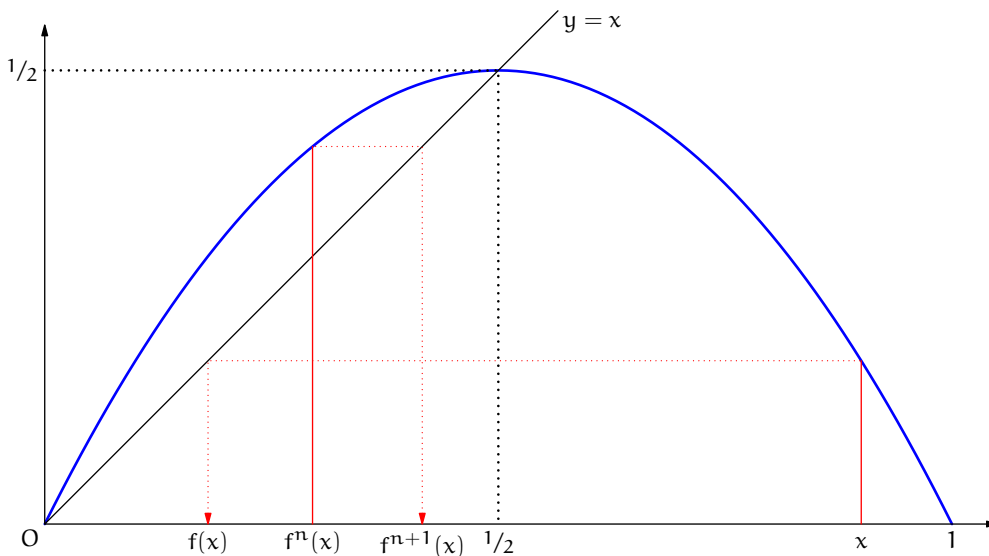
[1.] La fonction f est strictement croissante sur $[0, 1/2]$ et strictement décroissante sur $[1/2, 1]$. De plus, $f(0) = f(1) = 0$ et $f(1/2) = 1/2$. On en déduit que l'intervalle $[0, 1/2]$ est stable par f et que :

- si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- si $x = 1/2$, alors $f_n(x) = 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- si $0 < x < 1/2$, alors $0 < f_n(x) < 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- si $1/2 < x < 1$, alors $0 < f_1(x) < 1/2$ et donc $0 < f_n(x) < 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
- si $x = 1$, alors $f^n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En résumé : ou bien la suite de terme général $f_n(x)$ est constante, ou bien

$$\forall n \geq 1, \quad 0 < f^n(x) < 1/2.$$

• Posons $g(x) = f(x) - x = -2x^2 + x = x(1 - 2x)$. La fonction g est nulle en $x = 0$ et en $x = 1/2$, strictement positive sur $]0, 1/2[$ (= entre ses racines). Par conséquent, si $y \in]0, 1/2[$, alors $f(y) = y + g(y) > y$ et, si la suite $(f^n(x))$ n'est pas stationnaire, alors la sous-suite $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.



En résumé :

- si $x = 0$ ou si $x = 1$, alors $f^n(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$;
- si $x = 1/2$, alors $f^n(x) = 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- pour tous les autres x , la suite $(f^n(x))$ converge vers une limite $0 < \ell \leq 1/2$ (Théorème de la limite monotone).

Comme f est continue, cette dernière limite est un point fixe de f , donc elle est égale à $1/2$.

On a ainsi démontré que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction g telle que

$$g(0) = g(1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, 1[, \quad g(x) = 1/2.$$

Comme les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$ (composées de fonctions continues) et que g n'est pas continue sur $[0, 1]$ (discontinuités en 0 et en 1), la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

[2.] Par symétrie,

$$\forall t \in [a, 1 - a], \quad f(1 - t) = f(t)$$

et comme f est croissante sur $[a, 1/2]$ et décroissante sur $[1/2, 1 - a]$,

$$\forall t \in [a, 1 - a], \quad f(a) \leq f(t) \leq f(1/2) = 1/2.$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall x \in [a, 1 - a], \forall n \geq 1, \quad f^n(a) \leq f^n(x) \leq 1/2$$

et donc que la convergence est uniforme sur $[a, 1 - a]$:

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [a, 1 - a], \quad |1/2 - f^n(x)| \leq |1/2 - f^n(a)|$$

puisque le majorant est indépendant de x et tend vers 0 (convergence simple au point a).