Jeudi 4 juin

Référence	Origine	Thèmes
120-77	ENS PLS MP	Intégrales généralisées
120-127	ENS PC	Équivalent d'une intégrale
120-202	X MP	Suite définie implicitement
120-216	"	Continuité uniforme
120-227	"	Ordre de grandeur d'une fonction
120-232	"	Convergence uniforme
120-391	X PC	Racine carrée de la dérivation
128-533	Mines MP ?	Classes de similitudes
136-1396	IMT MP	Série semi-convergente
07-15	Classique	Théorème de factorisation

rms120-77

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue. On suppose qu'il existe un réel a tel que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}\,dt$$

converge. Démontrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-bt}\,dt$$

converge pour tout $b > a$.

Comme la fonction $L_a = [t \mapsto f(t)e^{-at}]$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction G définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad G(x) = \int_0^x f(t)e^{-at}\,dt$$

est une fonction de classe de $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ dont la dérivée est L_a (Théorème fondamental) et comme l'intégrale généralisée de L_a sur $\mathbb{R}_+$ est supposée convergente, la fonction G tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$.

En particulier, la fonction G est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

❧ Soit $A > 0$. On intègre par parties en posant $\varepsilon = b - a > 0$:

$$\int_0^A f(t)e^{-bt}\,dt = \int_0^A L_a(t)e^{-\varepsilon t}\,dt = \int_0^A G'(t)e^{-\varepsilon t}\,dt$$
$$= \left[G(t)e^{-\varepsilon t}\right]_0^A + \int_0^A G(t)(\varepsilon e^{-\varepsilon t})\,dt.$$

Comme $G(0) = 0$, que $G(x)$ tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et que $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{A \to +\infty} \left[G(t)e^{-\varepsilon t}\right]_0^A = 0.$$

De plus, la fonction G est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction $[t \mapsto e^{-\varepsilon t}]$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc le produit de ces deux fonctions est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} G(t)e^{-\varepsilon t}\,dt$$

est convergente et

$$\int_0^A f(t)e^{-bt}\,dt \xrightarrow[A \to +\infty]{} \varepsilon \int_0^{+\infty} G(t)e^{-\varepsilon t}\,dt,$$

ce qui prouve que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-bt}\,dt$$

est convergente.

✍ *Avec une hypothèse plus forte, l'exercice perd toute saveur !*

Si on suppose que la fonction $L_a = [t \mapsto f(t)e^{-at}]$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors $L_b = [t \mapsto f(t)e^{-bt}]$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et

$$f(t)e^{-bt} = f(t)e^{-at} \cdot e^{-(b-a)t} \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{-(b-a)t}).$$

Comme $b > a$, la fonction de référence est intégrable au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve que la fonction L_b est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (et donc que l'intégrale généralisée de L_b sur $\mathbb{R}_+$ est convergente).

*Le principal mérite de cet exercice est donc de rappeler la différence technique essentielle entre les intégrales semi-convergentes et les intégrales absolument convergentes : il est **impossible** d'utiliser le Théorème de comparaison avec les intégrales semi-convergentes.*

rms120-127

> *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, *une fonction de classe* $\mathscr{C}^\infty$. *Déterminer un équivalent de*
> $$I_n = \int_0^1 \sin(nt^2) f(t)\, dt$$
> *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

Comme f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, la fonction $f_0 = [t \mapsto f(t) - f(0)]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et nulle en $t = 0$, donc il existe une fonction g, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = f(0) + tg(t).$$

✍ *Voir* **[07-15]** *pour la démonstration de ce théorème de factorisation.*

Par conséquent,

$$I_n = f(0) \int_0^1 \sin(nt^2)\, dt + \int_0^1 t \sin(nt^2).g(t)\, dt.$$

❧ Comme la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on peut intégrer par parties :

$$\int_0^1 t \sin(nt^2).g(t)\, dt = \left[\frac{-\cos(nt^2)}{2n}\, g(t)\right]_0^1 + \frac{1}{2n} \int_0^1 \cos(nt^2) g'(t)\, dt.$$

Il est clair que

$$\frac{g(0) - g(1)\cos n}{2n} \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

et comme g' est continue sur le segment $[0,1]$,

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad \left|\frac{1}{2n} \int_0^1 \cos(nt^2) g'(t)\, dt\right| \leqslant \frac{1}{2n} \int_0^1 1 \cdot \|g'\|_\infty\, dt = \frac{\|g'\|_\infty}{2n}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 t \sin(nt^2).g(t)\, dt \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

✍ *Seule une intégration par parties peut nous donner une estimation aussi fine ! Si avait appliqué tout de suite l'inégalité triangulaire, on aurait obtenu un ordre de grandeur en* $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$ *au mieux.*
Et comme il nous fallait un facteur t *pour intégrer par parties, on était bien obligé de savoir factoriser* f_0*...*

❧ D'autre part, le changement de variable $u = nt^2$ nous donne

$$\int_0^1 \sin(nt^2)\, dt = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\sin u}{2\sqrt{nu}}\, du \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$$

puisque l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$$

est convergente et strictement positive.

✍ *De même que pour la fonction "sinus cardinal", c'est en intégrant par parties qu'on justifie la convergence de cette intégrale généralisée.*
Cette convergence étant vérifiée, on peut invoquer la relation de Chasles pour écrire cette intégrale comme la somme d'une série alternée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sqrt{k\pi + t}}\, dt$$

et il est facile de vérifier que les hypothèses du Critère spécial des séries alternées sont satisfaites. Par conséquent, la somme est du signe du premier terme, c'est-à-dire positive.

Cette somme est en fait strictement *positive, puisque* $u_0 > 0$ *et que* $S = u_0 + R_0$ *où* $|R_0| \leqslant u_1 < u_0$.

❧ Finalement, si $f(0) \neq 0$, alors

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(0)}{2\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du$$

et si $f(0) = 0$, alors

$$I_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

✍ *Si* $f(0) = 0$*, on n'a donc pas vraiment répondu à la question posée... On a dans ce cas*

$$I_n = \frac{g(0) - g(1)\cos n}{2n} + \frac{1}{2n}\int_0^1 \cos(nt^2)g'(t)\,dt.$$

Comme g' *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$*, on peut suivre la même démarche que pour* f *: il existe une fonction* h *de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *telle que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad g'(t) = g'(0) + th(t).$$

On peut alors vérifier d'une part que

$$\int_0^1 \cos(nt^2)\,dt = \frac{1}{2\sqrt{n}}\int_0^n \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,du$$

(avec le changement de variable $u = nt^2$*) et d'autre part que*

$$\int_0^1 \cos(nt^2)th(t)\,dt = \frac{h(1)\sin n}{2n} - \frac{1}{2n}\int_0^1 \sin(nt^2)h'(t)\,dt$$

(en intégrant par parties). On en déduit que

$$\frac{1}{2n}\int_0^1 \cos(nt^2)g'(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

et donc que

$$I_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{g(0) - g(1)\cos n}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

À moins que $g(0) = g(1) = 0$*, on tient alors un équivalent de* I_n.

Et si $g(0) = g(1) = 0$ *? On peut recommencer. Mais on risque de ne jamais finir...*

rms120-202

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, *une fonction continue et strictement croissante.*
[**1.**] *Démontrer que, pour tout entier* $p \in \mathbb{N}^*$, *il existe un, et un seul, réel* $x_p \in [a, b]$ *tel que*

$$f(x_p)^p = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)^p \, dt.$$

[**2.**] *Déterminer la limite de la suite* $(x_p)_{p \geqslant 1}$.

[**1.**] Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$y_p = \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)^p \, dt\right]^{1/p}.$$

❧ Comme f est positive et strictement croissante,

$$\forall\, t \in [a, b], \quad 0 \leqslant f(a) \leqslant f(t) \leqslant f(b).$$

La fonction $[x \mapsto x^p]$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (quel que soit l'entier $p \in \mathbb{N}^*$), donc

$$f(a) \leqslant y_p \leqslant f(b).$$

Mais f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$, donc f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ (Théorème de la bijection monotone). Donc il existe un, et un seul, réel $x_p \in [a, b]$ tel que $y_p = f(x_p)$.

[**2.**] Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f(b) > 0$, on peut supposer que $0 < \varepsilon < f(b)$. Par continuité et croissance de f, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, b-\alpha \leqslant t \leqslant b, \qquad f(b) - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant f(b).$$

Comme f est positive sur $[a, b]$ et que $p \geqslant 1$, on en déduit que

$$\forall\, t \in [a, b-\alpha], \qquad 0 \leqslant f(t).$$

Par conséquent,

$$\forall\, p \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant \int_{b-\alpha}^b \big[f(b) - \varepsilon\big]^p \, dt \leqslant \int_a^b \big[f(t)\big]^p \, dt \leqslant \int_a^b \big[f(b)\big]^p \, dt$$

et donc

$$\forall\, p \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant \left(\frac{\alpha}{b-a}\right)^{1/p} \cdot \big[f(b) - \varepsilon\big] \leqslant y_p \leqslant f(b).$$

Il est clair que

$$\lim_{p \to +\infty} \left(\frac{\alpha}{b-a}\right)^{1/p} \cdot \big[f(b) - \varepsilon\big] = f(b) - \varepsilon > f(b) - 2\varepsilon,$$

donc il existe un rang p_0 tel que

$$\forall\, p \geqslant p_0, \qquad f(b) - 2\varepsilon \leqslant y_p \leqslant f(b).$$

On a ainsi démontré que

$$\lim_{p \to +\infty} y_p = f(b).$$

✍ *Plus généralement, si* f *est continue sur le segment* $[a, b]$, *on peut démontrer que*

$$\lim_{p \to +\infty} \left(\frac{1}{a-b}\int_a^b \big|f(t)\big|^p \, dt\right)^{1/p} = \|f\|_\infty.$$

La démonstration est une simple adaptation de ce qui précède : la fonction $|f|$ *étant continue sur le segment* $[a, b]$, *elle atteint (pas nécessairement en* b *!) sa valeur maximale, qui est égale à* $\|f\|_\infty$.

❧ D'après le Théorème de la bijection monotone, la bijection réciproque de f est continue sur le segment $[f(a), f(b)]$, donc

$$x_p = f^{-1}(y_p) \xrightarrow[p \to +\infty]{} b$$

par composition de limites.

rms120-216

> *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application continue. Étudier les implications entre les propriétés suivantes.*
>
> 1. *L'application f est uniformément continue.*
> 2. *L'application f tend vers des limites finies aux voisinages de $\pm\infty$.*
> 3. *$f(x) = \mathcal{O}(x)$ lorsque x tend vers $\pm\infty$.*

La fonction cos est uniformément continue (elle est en fait 1-lipschitzienne) mais elle n'a pas de limite au voisinage de $+\infty$.

❧ Réciproquement, si une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tend vers une limite finie a au voisinage de $-\infty$ et vers une limite finie b au voisinage de $+\infty$, alors cette fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Pour vérifier cette propriété, fixons un réel $\varepsilon > 0$.

Par définition des limites, il existe deux réels $A < 0$ et $B > 0$ tels que

$$\forall\, x \leqslant A, \quad \big|f(x) - a\big| \leqslant \varepsilon/2 \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \geqslant B, \quad \big|f(x) - b\big| \leqslant \varepsilon/2. \tag{1}$$

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier uniformément continue sur le segment $[A-1, B+1]$ et il existe un réel $\alpha_0 > 0$ tel que

$$\forall\, x, y \in [A-1, B+1], \qquad |x-y| \leqslant \alpha_0 \implies \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Posons maintenant $\alpha = \min\{\alpha_0, 1\} > 0$ et considérons deux réels x et y tels que $|x-y| \leqslant \alpha$. On distingue alors cinq cas :

- Si $x \in [A, B]$, alors $x \in [A-1, B+1]$ et $y \in [A-1, B+1]$ et $|x-y| \leqslant \alpha_0$. On déduit donc de (2) que $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
- Si $x < A$ et $y \geqslant A$, alors $x \geqslant y - 1 \geqslant A - 1$ (puisque $|x-y| \leqslant \alpha \leqslant 1$) et $x < A < 0 < B \leqslant B+1$, donc $x \in [A-1, B+1]$, et $y \leqslant x + 1 < A + 1 < B + 1$ (puisque $|x-y| \leqslant 1$). On conclut alors comme dans le cas précédent.
- Si $x < A$ et $y < A$, alors on déduit de (1) que
$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \big|f(x) - a\big| + \big|a - f(y)\big| \leqslant \varepsilon.$$
- Si $x > B$ et $y \leqslant B$, alors x et y sont tous les deux dans le segment $[A-1, B+1]$ et on conclut comme dans le premier cas.
- Si $x > B$ et $y > B$, alors on déduit de (1) que
$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \big|f(x) - b\big| + \big|b - f(y)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Dans tous les cas, on a démontré que $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$, cqfd.

❧ La fonction $f = \big[t \mapsto \sin(t^2)\big]$ est bornée et *a fortiori* $\mathcal{O}(t)$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, mais elle n'est pas uniformément continue.

Considérons en effet les suites de termes généraux $u_n = \sqrt{2n\pi}$ et $v_n = \sqrt{2n\pi + \pi/2}$. Il est clair que $f(v_n) - f(u_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pourtant

$$v_n - u_n = \frac{v_n^2 - u_n^n}{v_n + u_n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/n),$$

ce qui prouve que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

✍ *Une fonction qui n'est pas lipschitzienne peut très bien être uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$: c'est le cas de la fonction définie par*

$$\forall\, t \in [-1, 1], \qquad f(t) = \sqrt{1-t^2}$$

et prolongée comme une fonction périodique de période 2 (elle est uniformément continue sur $[-1, 1]$ en tant que fonction continue sur un segment et donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$ en tant que prolongement périodique).

❧ Supposons pour finir que f soit uniformément continue. Pour $\varepsilon = 1$, il existe un réel $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad |x-y| \leqslant \alpha_1 \implies \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \varepsilon = 1.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier

$$k_x = \left\lfloor \frac{|x|}{\alpha_1} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$$

tel que $k_x \alpha_1 \leqslant |x| < k_x \alpha_1 + \alpha_1$. Par télescopage, on en déduit que

— si $x < 0$, alors

$$\left|f(x) - f(0)\right| \leqslant \left|f(x) - f(-k_x\alpha_1)\right| + \sum_{k=1}^{k_x} \left|f(-k\alpha_1) - f\big(-(k-1)\alpha_1\big)\right| \leqslant (k_x + 1)$$

— et si $x \geqslant 0$, alors

$$\left|f(x) - f(0)\right| \leqslant \left|f(x) - f(k_x\alpha_1)\right| + \sum_{k=1}^{k_x} \left|f(k\alpha_1) - f\big((k-1)\alpha_1\big)\right| \leqslant (k_x + 1).$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \left|f(x)\right| \leqslant (k_x + 1) + \left|f(0)\right| \leqslant \frac{|x| + 1}{\alpha_1} + 1 + \left|f(0)\right|.$$

Le majorant est de la forme $A|x| + B$, cela prouve donc que

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(x).$$

rms120-227

Soit f, une fonction continue, positive, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $xf(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Par hypothèse, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

est convergente, donc son reste

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

❧ D'autre part, la fonction f tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ (décroissante et positive) et cette limite est nulle (puisque f est intégrable au voisinage de $+\infty$).

✍ ***Prudence !*** *Il n'est* <u>*ni nécessaire, ni suffisant*</u> *que f tende vers 0 au voisinage de $+\infty$ pour que f soit intégrable.*

*Cela dit, **SI** f tend vers une limite au voisinage de $+\infty$ et est intégrable, alors cette limite est nécessairement nulle.*

❧ Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$0 \leqslant \int_A^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et un réel $B > 0$ tel que

$$\forall\, x \geqslant B, \qquad 0 \leqslant Af(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considérons maintenant un réel $x \geqslant C = \max\{A, B\}$: par décroissance de f,

$$\forall\, t \in [A, x], \qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant f(x)$$

et par positivité de f,

$$0 \leqslant xf(x) = Af(x) + (x - A)f(x) \leqslant Af(x) + \int_A^x f(t)\,dt \leqslant Af(x) + \int_A^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a démontré que $xf(x)$ tendait vers 0 au voisinage de $+\infty$.

✍ *On peut démontrer (de la même manière) une propriété analogue pour les séries : Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive et si la série $\sum u_n$ converge, alors nu_n tend vers 0.*

✍ *On peut aussi démontrer un résultat analogue pour les variables aléatoires : Si X est une variable aléatoire d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbf{P}(X > n) = o(1/n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.*

Ce résultat est intéressant, car le Théorème de Markov nous dit seulement que $\mathbf{P}(X > n) = \mathcal{O}(1/n)$ dans ce cas. (Mais le Théorème de Markov ne s'applique pas seulement aux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$!)

rms120-232

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge simplement sur $[a,b]$ vers la fonction f. On suppose que les fonctions f_n sont uniformément lipschitziennes sur $[a,b]$.
Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.

Comme les fonctions f_n sont uniformément lipschitziennes sur $[a,b]$, il existe une constante $M>0$ telle que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, a\leqslant x,y\leqslant b,\qquad \bigl|f_n(x)-f_n(y)\bigr|\leqslant M|x-y|.$$

Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a,b]$ vers f, on peut faire tendre n vers $+\infty$ dans cette propriété :

$$\forall\, a\leqslant x,y\leqslant b,\qquad \bigl|f(x)-f(y)\bigr|\leqslant M|x-y|$$

ce qui prouve que la limite simple f est elle aussi lipschitzienne sur $[a,b]$.

❧ Fixons $x_0\in[a,b]$ et observons : quels que soient $x\in[a,b]$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\bigl|f(x)-f_n(x)\bigr| &= \bigl|f(x)-f(x_0)+f(x_0)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f_n(x)\bigr|\\ &\leqslant \bigl|f(x)-f(x_0)\bigr|+\bigl|f(x_0)-f_n(x_0)\bigr|+\bigl|f_n(x_0)-f_n(x)\bigr|\\ &\leqslant 2M|x-x_0|+\bigl|f(x_0)-f_n(x_0)\bigr|.\end{aligned}$$

❧ Fixons $\varepsilon>0$. Choisissons maintenant un réel $\alpha>0$ tel que $2M\alpha\leqslant \varepsilon/2$ et considérons une subdivision

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_R=b$$

de pas inférieur à α :

$$\forall\, 1\leqslant k\leqslant R,\qquad 0\leqslant x_k-x_{k-1}\leqslant\alpha.$$

✍ *On ne travaille pas sur un intervalle quelconque, mais sur un segment, c'est-à-dire sur un* ***intervalle compact****. C'est presque comme si on travaillait sur un ensemble fini (comme on le sait quand on a entendu parler de la propriété de Borel-Lebesgue).*

Sur l'ensemble **fini** $S=\{x_k,\ 0\leqslant k\leqslant R\}$, la convergence simple équivaut à la convergence uniforme. Par conséquent, il existe un rang $n_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n\geqslant n_0,\ \forall\, 0\leqslant k\leqslant R,\qquad \bigl|f(x_k)-f_n(x_k)\bigr|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

✍ *C'est la position du quantificateur ($\forall\, k$) qui rend la convergence uniforme : la propriété*

$$\forall\, 0\leqslant k\leqslant R,\qquad \bigl|f(x_k)-f_n(x_k)\bigr|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

équivaut à

$$\sup_{t\in S}\bigl|f(t)-f_n(t)\bigr|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

(passage à la borne supérieure) et l'entier n_0 est indépendant de l'indice k.

Pour tout $x\in[a,b]$, il existe (au moins) un indice $0\leqslant k<R$ tel que $x\in[x_k,x_{k+1}]$ et par conséquent

$$\begin{aligned}\forall\, n\geqslant n_0,\qquad \bigl|f(x)-f_n(x)\bigr| &\leqslant 2M|x-x_k|+\bigl|f(x_k)-f_n(x_k)\bigr|\\ &\leqslant 2M\alpha+\varepsilon/2\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

L'entier n_0 est indépendant du réel $x\in[a,b]$, on a ainsi démontré que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur $[a,b]$ vers f.

rms120-391

> *On considère l'endomorphisme*
> $$D = [f \mapsto f']$$
> *de l'espace vectoriel* $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Existe-t-il un endomorphisme* T *de* E *tel que* $T \circ T = D$ *?*

S'il existe un endomorphisme T tel que $T \circ T = D$, alors tout sous-espace propre de D est stable par T.

Considérons la droite vectorielle F dirigée par la fonction $\varepsilon = [t \mapsto e^{-t}]$. Comme $D(\varepsilon) = -\varepsilon$, cette droite vectorielle est contenue dans le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(D + \mathrm{Id})$.

Cette droite vectorielle F étant l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x' + x = 0$, on en déduit en fait que
$$\mathrm{Ker}(D + \mathrm{Id}) = F = \mathbb{R} \cdot \varepsilon.$$

Par conséquent, le sous-espace vectoriel F est une *droite stable* par T. Autrement dit, le vecteur ε (non nul !) est un vecteur propre de T et il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T(\varepsilon) = \lambda \cdot \varepsilon$.

Mais $D(\varepsilon) = T^2(\varepsilon) = \lambda^2 \cdot \varepsilon = -\varepsilon$, donc λ est un nombre <u>réel</u> tel que $\lambda^2 = -1$: c'est impossible.

On a démontré par l'absurde qu'il n'existait pas d'endomorphisme T tel que $T \circ T = D$.

✍ ***Variante*** *par l'absurde, en conservant les notations précédentes.*

Si la famille $(\varepsilon, T\varepsilon)$ *était liée, alors il existerait un scalaire* $\mu \in \mathbb{R}$ *tel que* $T\varepsilon = \mu\varepsilon$ *et* $D\varepsilon = T^2\varepsilon = \mu^2\varepsilon$. *Autrement dit,* ε *serait un vecteur propre de* D *associé à* μ^2*, alors que* ε *est un vecteur propre associé à la valeur propre* -1. *C'est impossible, donc le couple* $(\varepsilon, T\varepsilon)$ *est une famille libre.*

Le sous-espace $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\varepsilon, T\varepsilon)$ *est donc un plan et ce plan est stable par* T *:*
$$T\varepsilon = T\varepsilon \in F, \qquad T(T\varepsilon) = D\varepsilon = -\varepsilon \in F.$$
Par conséquent, le plan F *est aussi stable par* $D = T^2$. *La matrice de l'endomorphisme induit par restriction de* T *au plan* F *relative à la base* $(\varepsilon, T_\varepsilon)$ *est égale à*
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
(on reconnaît la matrice d'une rotation d'angle $\pi/2$*). La matrice de l'endomorphisme induit par restriction de* D *à* F *relative à cette même base est donc*
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -I_2$$
(le carré d'un quart de tour est un demi-tour), ce qui prouve que le plan F *est contenu dans le sous-espace propre* $\mathrm{Ker}(D + I_E)$. *Cela contredit la remarque initiale : les sous-espaces propres de* D *sont tous des droites vectorielles.*

✍ ***Généralisation*** — Merci à MG et SG !

On considère ici D *comme un endomorphisme de* $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$ *avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soient $n \geqslant 2$ *et* $F = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ *: comme* $F = \mathrm{Ker}\, D^n$*, ce sous-espace est stable par* D *et l'endomorphisme* $D_F \in L(F)$ *induit par restriction de* D *est nilpotent d'indice* n *(puisque* $D^{n-1}(X^{n-1}) \neq 0$*).*

Comme $D = T^2$*, les deux endomorphismes* D *et* T *commutent et*
$$\forall\, f \in F, \qquad D^n(Tf) = T(D^n f) = 0$$
donc $Tf \in \mathrm{Ker}\, D^n = F$ *: le sous-espace* F *est aussi stable par* T.

L'endomorphisme $T_F \in L(F)$ *induit par restriction de* T *est nilpotent :*
$$T_F^{2n} = D_F^{2n} = 0$$
donc $T_F^n = 0$ *(puisque l'indice de nilpotence est inférieur à la dimension de l'espace). Mais* $T_F^{2n-2} = D_F^{n-1} \neq 0$ *et comme* $n \geqslant 2$ *il est impossible d'avoir simultanément* $T_F^n = 0$ *et* $T_F^{2n-2} \neq 0$.

*La **classe de similitude** d'une matrice* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *est l'ensemble* $S(A)$ *défini par*

$$S(A) = \{P^{-1}AP,\ P \in GL_n(\mathbb{C})\}.$$

[**1.**] *Démontrer que l'application* $[M \mapsto \chi_M]$ *est continue sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
[**2.**] *On suppose que* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *est diagonalisable. Démontrer que la classe de similitude de* A *est une partie fermée de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
[**3. a.**] *On suppose que la matrice* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *est nilpotente. Démontrer que la matrice nulle* 0_n *appartient à l'adhérence de la classe de similitude* $S(A)$.
[**3. b.**] *Étudier la réciproque.*
[**4.**] *On suppose que la matrice* A *n'est pas diagonalisable. Démontrer que sa classe de similitude* $S(A)$ *n'est pas fermée.*
[**5.**] *Démontrer que, pour toute matrice* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, *l'intérieur de la classe de similitude* $S(A)$ *est vide.*
[**6.**] *Caractériser les matrices* A *dont la classe de similitude* $S(A)$ *est bornée.*

[**1.**] Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique χ_M est un polynôme unitaire de degré n. On considère donc une application d'un espace vectoriel de dimension finie : $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ dans un autre espace vectoriel de dimension finie : $\mathbb{C}_n[X]$. Il suffit donc de démontrer que les coordonnées de χ_M relatives à la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ sont des fonctions continues des coordonnées de M relatives à la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ pour pouvoir conclure que $[M \mapsto \chi_M]$ est une fonction continue.

❧ Par définition du déterminant, pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$\chi_M(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{n,\sigma(n)}$$

où $b_{i,i} = (x - m_{i,i})$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $b_{i,j} = -m_{i,j}$ pour tous $i \neq j$. On en déduit que les coordonnées de χ_M relatives à la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ sont des fonctions polynomiales (et donc continues) des coordonnées de M relatives à la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

[**2.**] Considérons une suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices semblables à A et supposons que cette suite de matrices converge vers une matrice $L \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

❧ Comme A est diagonalisable, il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples μ. Comme des matrices semblables ont mêmes polynômes annulateurs, on en déduit que $\mu(B_k) = 0_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis que $\mu(L) = 0_n$.

✍ *Toute application polynomiale est continue sur l'algèbre de dimension finie* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

On a ainsi démontré que L était diagonalisable.

❧ Des matrices semblables ont même polynôme caractéristique, donc le polynôme caractéristique de chaque matrice B_k est en fait celui de la matrice A. Par continuité, le polynôme caractéristique de L est aussi celui de la matrice A.

❧ On sait ainsi que L et A sont deux matrices diagonalisables et que leurs polynômes caractéristiques sont égaux, donc L et A sont semblables.

✍ *La première partie de la démonstration a montré que* μ *était un polynôme annulateur de* L, *elle ne permet pas de démontrer qu'il s'agit du polynôme minimal de* L *!*

Et même si on savait qu'il s'agissait du polynôme minimal de L, *on ne pourrait toujours pas conclure, car le polynôme minimal ne donne aucune indication sur la dimension des sous-espaces propres !*

❧ *Par ailleurs, il ne suffit pas de savoir que* A *et* L *ont même polynôme caractéristique, car la connaissance du polynôme* χ_L *ne permet pas de savoir si* L *est diagonalisable (à moins que le polynôme caractéristique ne soit scindé à racines simples).*

[**3. a.**] Une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Considérons donc une matrice triangulaire supérieure stricte $N = (n_{k,\ell}) \in S(A)$ et, pour tout paramètre $t \in \mathbb{R}_+^*$, la matrice de passage

$$P_t = \mathrm{Diag}(t, t^2, \dots, t^n) \in GL_n(\mathbb{C}).$$

La matrice $N_t = P_t^{-1} N P_t = (n_{k,\ell}^t)_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n}$ est semblable à N, donc elle est semblable à A et

$$\forall\, 1 \leqslant k, \ell \leqslant n, \qquad n_{k,\ell}^t = t^{\ell-k} n_{k,\ell}.$$

✍ *En multipliant à droite par N_t, on multiplie la ℓ-ième colonne de N par t^ℓ.*
En multipliant à gauche par $N_t^{-1} = \mathrm{Diag}(t^{-1}, \dots, t^{-n})$, on multiplie la k-ième ligne de N par t^{-k}.
Par conséquent, $n_{k,\ell}^t = t^{-k} n_{k,\ell} t^\ell$.

Comme $n_{k,\ell} = 0$ pour $k \geqslant \ell$, c'est-à-dire pour $\ell - k \leqslant 0$, on en déduit que
— si t tend vers 0, alors $t^{\ell-k}$ tend vers 0 pour $k < \ell$ et $n_{k,\ell}^t$ tend vers 0 quels que soient k et ℓ (même pour $k \geqslant \ell$) ;
— si t tend vers $+\infty$, alors $t^{\ell-k}$ tend vers $+\infty$ pour $k < \ell$ et $n_{k,\ell}^t$ tend vers l'infini pour tout couple (k, ℓ) tel que $n_{k,\ell} \neq 0$.

❧ Ainsi, si t tend vers 0, la matrice $N_t \in S(A)$ tend vers la matrice nulle, ce qui prouve que la matrice nulle appartient à l'adhérence de la classe de similitude de A.

✍ *À l'opposé, si A est nilpotente non nulle, alors $N \neq 0_n$ et si t tend vers $+\infty$, alors $\|N_t\|_\infty$ tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la classe de similitude de A n'est pas bornée.*

[**3. b.**] Considérons une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices appartenant à $S(A)$ et supposons qu'elle converge vers une matrice B.

Toutes les matrices A_k sont semblables à A, donc leur polynôme caractéristique est toujours celui de A. Par continuité (cf. première question), le polynôme caractéristique de B est aussi celui de A.

Si B est la matrice nulle, alors le polynôme caractéristique de A est X^n et, d'après le Théorème de Cayley-Hamilton, la matrice A est nilpotente.

[**4.**] Comme la matrice A est complexe, elle est semblable à une matrice diagonale par blocs $\mathrm{Diag}(B_1, \dots, B_r)$ où chaque bloc diagonal est la somme d'une matrice d'homothétie $\lambda_k I$ et d'une matrice nilpotente N_k.

Si A n'est pas diagonalisable, alors l'un des blocs nilpotents N_k n'est pas nul.

✍ *Cela signifie que λ_k n'est pas une racine simple du polynôme minimal de A.*

Supposons par commodité que ce soit $N_1 \in \mathfrak{M}_{d_1}(\mathbb{C})$. Il existe (d'après ce qui précède) une suite $(P_{1,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles telles que

$$\lim_{\ell\to+\infty} P_{1,\ell}^{-1} N_1 P_{1,\ell} = 0_{d_1}.$$

En posant $P_\ell = \mathrm{Diag}(P_{1,\ell}, I_{d_2}, \dots, I_{d_r}) \in GL_n(\mathbb{C})$, on obtient

$$\lim_{\ell\to+\infty} P_\ell^{-1} A P_\ell = A' = \mathrm{Diag}(\lambda_1 I_{d_1}, B_2, \dots, B_r).$$

Dans ces conditions, λ_1 est une racine simple du polynôme minimal de A' et comme, par hypothèse, λ_1 n'est pas une racine simple du polynôme minimal de A, on en déduit que A' n'est pas semblable à A.

Ainsi, la classe de similitude d'une matrice non diagonalisable n'est pas fermée.

[**5.**] Toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable : il existe une matrice triangulaire $T \in S(A)$ et, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$,

$$\big\|(T + \varepsilon I_n) - T\big\| = |\varepsilon| \cdot \|I_n\| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}(T + \varepsilon) = \mathrm{tr}\, T + n\varepsilon \neq \mathrm{tr}\, T = \mathrm{tr}\, A.$$

Par conséquent, toute boule de rayon strictement positif centrée en $T \in S(A)$ contient au moins une matrice qui n'est pas semblable à A et le point T n'appartient donc pas à l'intérieur de $S(A)$.

✍ *Toute boule de rayon strictement positif et centrée en T contient en fait une infinité de matrices qui ne sont pas semblables à A (puisque leur trace est différente de celle de A).*

❧ Considérons maintenant une matrice $M_0 \in S(A)$.

Mais la matrice M_0 est semblable à la matrice triangulaire T, donc il existe une matrice inversible P telle que $M_0 = PTP^{-1}$: la matrice T est donc un antécédent de la matrice M_0 par l'application continue $\Phi = \big[M \mapsto PMP^{-1}\big]$ (= un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel de dimension finie).

✍ *La conjugaison $\Phi = \big[M \mapsto PMP^{-1}\big]$ est en fait un <u>auto</u>morphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et la matrice T est donc l'antécédent de M_0 par Φ. C'est ici sans importance.*

Si la matrice M_0 appartenait à l'intérieur de $S(A)$, alors $S(A)$ serait un voisinage de M_0. Par continuité de la conjugaison Φ, l'image réciproque par Φ de $S(A)$, voisinage de M_0, serait donc un voisinage de T. Mais la classe de similitude $S(A)$ est globalement invariant par conjugaison, donc $S(A)$ serait un voisinage de T et on a démontré que ce n'était pas le cas.

✍ *Dire que la classe de similitude est "invariante par conjugaison" signifie seulement qu'une matrice M est semblable à A si, et seulement si, elle est semblable à une matrice semblable à A !*

❧ Ainsi, la classe de similitude $S(A)$ n'est un voisinage d'aucun de ses points, c'est une partie d'intérieur vide.

✍ *Cette question ne figurait pas dans l'énoncé original.*

[**6.**] On a démontré que la classe de similitude d'une matrice nilpotente non nulle n'était pas bornée.

❧ Si la matrice A n'est pas diagonalisable, il en va de même. (La matrice A est, comme on l'a vu, semblable à une matrice diagonale par blocs où chaque bloc diagonal est la somme d'une homothétie et d'un bloc nilpotent, l'un de ces blocs nilpotents n'étant pas nul.)

❧ Il reste donc à envisager le cas des matrices diagonalisables.

❧ Considérons deux complexes distincts a et b, ainsi qu'un réel $\varepsilon > 0$. En posant

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}), \qquad \text{on obtient} \qquad P_\varepsilon^{-1} D P_\varepsilon = \begin{pmatrix} * & \frac{b-a}{\varepsilon} \\ * & * \end{pmatrix}$$

et comme $a \neq b$, on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|P_\varepsilon^{-1} D P_\varepsilon\|_\infty = +\infty.$$

La classe de similitude de D n'est donc pas bornée.

✍ *On retrouve dans ce calcul l'idée générale de l'exercice : si deux vecteurs propres se rapprochent indéfiniment, les conséquences sont visibles lors du changement de base.*

❧ On en déduit plus généralement que : si A est une matrice diagonalisable qui admet au moins deux valeurs propres distinctes, alors la classe de similitude de A n'est pas bornée.

❧ Finalement, la classe de similitude de A est bornée si, et seulement si, la matrice A est une matrice d'homothétie, auquel cas la classe de similitude $S(A)$ est réduite à $\{A\}$.

rms136-1396

On définit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en posant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \sigma(3n) = 4n, \quad \sigma(3n+1) = 4n+2, \quad \sigma(3n+2) = 2n+1.$$

[**1.**] *Démontrer que σ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.*
[**2.**] *On pose $u_n = (-1)^n/n$ et $v_n = u_{\sigma(n)}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Démontrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes et calculer leurs sommes.*

[**1.**] D'après le Théorème sur la division euclidienne, pour chaque entier $k \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, couple $(n, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, 2\}$ tel que $k = 3n + r$, donc l'application σ est bien définie et il est clair qu'elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

✍ *L'unicité du couple (quotient, reste) de la division euclidienne va structurer la discussion qui suit.*

❧ Soit $m \in \mathbb{N}$. On distingue deux cas :
— Si m est impair, alors il existe un, et un seul, entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2n + 1$ et l'entier $3n + 2$ est l'unique antécédent de m par σ.
— Si m pair, on distingue deux sous-cas :
  — Si $m \equiv 0 \pmod 4$, alors il existe un, et un seul, entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $m = 4n$ et l'entier $3n$ est l'unique antécédent de m par σ.
  — Si $m \equiv 2 \pmod 4$, alors il existe un, et un seul, entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $m = 4n + 2$ et l'entier $3n + 1$ est l'unique antécédent de m par σ.

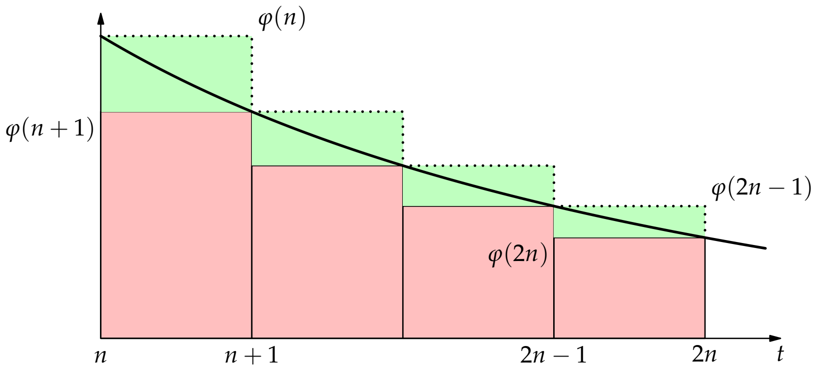
[**2.**] Comme $\sigma(0) = 0$ et que σ réalise une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, cette application induit une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$.

✍ *Pas de division par zéro en vue...*

❧ La série $\sum u_n$ converge d'après le Critère spécial des séries alternées. D'après le Théorème d'Abel radial,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\lim_{x\to 1} \ell n(1+x) = -\ell n\, 2.$$

❧ **Variante géométrique.**
La fonction $\varphi = [t \mapsto {}^1\!/_t]$ étant décroissante, on peut comparer somme et intégrale.



On voit bien que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{2n} \frac{dt}{t} = \ell n \frac{2n}{n} = \ell n\, 2 \leqslant \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}.$$

On en déduit selon le procédé habituel que

$$\ell n\, 2 - \frac{1}{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant \ell n\, 2$$

et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \ell n\, 2.$$

Et alors ? Et alors, selon l'astuce habituelle des séries alternées,

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}-\sum_{q=0}^{n-1}\frac{1}{2q+1}=2\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}-\sum_{q=0}^{n-1}\frac{1}{2q+1}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\sum_{p=1}^{2n}\frac{1}{p}$$

ce qui nous redonne bien :

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}=-\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\ln 2.$$

✍ *Il faut comparer somme et intégrale sur le segment $[n,2n]$. Si on veut aller plus vite en s'appuyant sur l'équivalent célèbre :*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n,$$

on ne peut pas conclure :

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\big[\ln(2n)+o(\ln n)\big]-\big[\ln n+o(\ln n)\big]=o(\ln n).$$

Si on est plus savant,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{=}\ln n+\gamma+o(1)$$

*(où γ est la **constante d'Euler**) et, cette fois, on peut conclure :*

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{=}\ln 2+o(1)$$

parce qu'on sait ce qui se cachait sous le $o(\ln n)$ précédent.

❧ Calculons les sommes partielles de $\sum v_n$ en faisant des "paquets de trois".

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{3n+2}v_k&=\sum_{\ell=1}^{n}(v_{3\ell}+v_{3\ell+1}+v_{3\ell+2})\\&=\sum_{\ell=1}^{n}(u_{4\ell}+u_{4\ell+2}+u_{2\ell+1})\\&=\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{4\ell}+\frac{1}{4\ell+2}-\frac{1}{2\ell+1}=\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{4\ell}-\frac{1}{4\ell+2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\Big(\frac{(-1)^{2\ell}}{2\ell}+\frac{(-1)^{2\ell+1}}{2\ell+1}\Big)=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}.\end{aligned}$$

Que deviennent les oubliés ? Comme $v_1+v_2=u_2+u_1={}^{-1}\!/_2$, on obtient finalement

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\qquad \sum_{k=1}^{3n+2}v_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}$$

et par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{3n+2}v_k=\frac{-\ln 2}{2}.$$

✍ *On n'a pas encore prouvé la convergence de la série puisqu'on n'a étudié qu'une suite extraite de la suite des sommes partielles.*

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{3n}v_k=-v_{3n+1}-v_{3n+2}+\sum_{k=1}^{3n+2}v_k\qquad\text{et}\qquad\sum_{k=1}^{3n+1}v_k=-v_{3n+2}+\sum_{k=1}^{3n+2}v_k.$$

Comme la suite (v_n) tend vers 0, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{3n} v_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{3n+1} v_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{3n+2} v_k = \frac{-\ln 2}{2}$$

et cette fois nous pouvons conclure : la série $\sum v_n$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{-\ln 2}{2}.$$

✍ *Pour une série absolument convergente ou pour une famille sommable, la convergence est dite* ***commutative*** *: elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes sont ajoutés les uns aux autres et la somme non plus.*

La série harmonique est une série semi-convergente : en permutant l'ordre des termes, on a réussi à modifier la somme.

Cf le sujet [Centrale 2009 PSI 1] *sur ce sujet.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0) = 0$. On cherche une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xg(x).$$

[**1. a.**] *Pourquoi faut-il supposer que $f(0) = 0$?*
[**1. b.**] *Discuter l'unicité de la fonction g.*
[**2.**] *La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$g(x) = \int_0^1 f'(xt)\,dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
[**3.**] *Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et*

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = \int_0^1 t^n f^{(n+1)}(tx)\,dt.$$

[**1. a.**] Comme g est continue en 0, le second membre tend nécessairement vers 0.
[**1. b.**] Pour $x \neq 0$, on n'a pas le choix : il faut que $g(x) = f(x)/x$. Et comme g est continue en 0, il faut aussi que

$$g(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Il existe donc au plus une fonction g qui réponde à la question posée.

✍ *D'après la question précédente, pour que g soit continue en 0, il faut que*

$$g(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

donc il faut que f soit dérivable en 0 et que $g(0) = f'(0)$.

[**2.**] Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on déduit du Théorème fondamental que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(u)\,du = x\int_0^1 f'(xt)\,dt$$

avec la contrainte $f(0) = 0$ et le changement de variable affine $u = xt$ (d'où $du = x\,dt$). Il est donc naturel de considérer la fonction g définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \int_0^1 f'(xt)\,dt,$$

d'autant plus que, selon cette définition, $g(0) = f'(0)$!

❧ Pour $x \in \Omega = \mathbb{R}$ et $t \in I = [0, 1]$, on pose

$$\varphi(x, t) = f'(xt).$$

[Régularité] — Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto \varphi(x, t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω (puisque f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$) et

$$\forall\, (x, t) \in \Omega \times I, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, t) = tf''(xt).$$

[Intégrabilité] — Pour tout $x \in \Omega$, les fonctions

$$[t \mapsto \varphi(x, t)] \qquad \text{et} \qquad \left[t \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, t)\right]$$

sont continues sur le segment $I = [0, 1]$, donc intégrables sur I.

[Domination] — Pour tout $A > 0$, la fonction f'' est continue sur le segment $[-A, A]$, donc elle est bornée sur cet intervalle : il existe $M_A > 0$ tel que

$$\forall\, u \in [-A, A], \qquad \left|f''(u)\right| \leqslant M_A.$$

Considérons $x \in [-A, A]$. Pour tout $t \in I$, le produit xt appartient aussi au segment $[-A, A]$, donc

$$\forall\, x \in [-A, A],\ \forall\, t \in I, \qquad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant 1 \cdot M_A.$$

Le majorant est indépendant de x et, en tant que fonction (constante !) de t, il est intégrable sur l'intervalle borné I.

D'après le Théorème de dérivation, la fonction g est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$$\Omega = \bigcup_{A>0} [-A, A]$$

et

$$\forall\, x \in \Omega, \qquad g'(x) = \int_0^1 t f''(xt)\, dt.$$

[**3.**] On reprend l'étude précédente.

Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $[x \mapsto \varphi(x, t)]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω et

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \forall\, x \in \Omega, \qquad \frac{\partial^k}{\partial x^k} \varphi(x, t) = t^k f^{(k+1)}(xt).$$

Par conséquent, pour tout $x \in \Omega$ et tout $k \geqslant 1$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial^k}{\partial x^k} \varphi(x, t)\right]$$

est intégrable sur I (en tant que fonction continue sur un segment). Et, comme plus haut, pour tout $k \geqslant 1$ et tout $A > 0$,

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in [-A, A], \qquad \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} \varphi(x, t)\right| \leqslant M_A,$$

ce qui prouve la domination.

Dans ces conditions, la fonction g est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω et

$$\forall\, k \geqslant 1, \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad g^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k f^{(k+1)}(tx)\, dt.$$

✍ *Supposons que f soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $f(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$. La formule de Taylor avec reste intégral nous donne alors*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt = x^n \int_0^1 \frac{(1-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(xu)\, du.$$

En adaptant la démonstration précédente, on démontre que la fonction g définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{(1-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(xu)\, du$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $f(x) = x^n g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.