
ORAUX BLANCS MP — 5 JUIN 2026

Référence	Origine	Thèmes
134-1395	IMT MP	Calcul matriciel
134-1399	"	Endomorphismes nilpotents
134-1402	"	Calcul matriciel
134-1405	CCINP MP	Réduction
134-1455	"	Espaces euclidiens
134-1464	IMT MP	Espaces euclidiens
134-1477	St Cyr	Séries numériques
134-1486	Dauphine	Racines d'un polynôme
134-1497	IMT MP	Série entière
134-1499	CCINP MP	Équivalent de la somme d'une série entière
134-1516	IMT MP	Série numérique
134-1522	"	Équation différentielle
134-1531	CCINP MP	Calcul des probabilités
134-1659	CCINP PC	Analyse réelle
134-1663	"	Convergence de la méthode des trapèzes
120-1036	Navale PC	Calcul matriciel
132-1166	IMT PSI	Calcul d'une intégrale généralisée
132-1173	CCINP PSI	Intégration terme à terme
132-1175	"	Équation différentielle
132-1177	IMT PSI	Système différentiel
132-1190	CCINP PSI	Calcul des probabilités
132-1204	CCINP PC	Réduction des endomorphismes
132-1220	IMT PC	Étude spectrale
132-1231	"	Calcul différentiel
132-1235	CCINP PC	Calcul des probabilités
136-1398		Suite récurrente

Soient A et B , deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A est inversible et que B est nilpotente.

[1.] Si ces deux matrices commutent : $AB = BA$, alors les matrices $A - B$ et $A + B$ sont inversibles.

[2.] Sinon, la matrice $A + B$ n'est pas nécessairement inversible.

☞ On généralise ici un résultat du cours : si x est un élément nilpotent d'indice n dans un anneau A , alors $1_A - x$ est inversible et

$$(1_A - x)^{-1} = 1_A + x + \cdots + x^{n-1}.$$

[1.] Comme $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, on sait que l'indice de nilpotence de B est inférieur à n :

$$B^n = 0_n.$$

Comme les matrices A et B commutent, on sait que

$$(A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{(n-1)-k} = A^n - B^n = A^n$$

$$(A + B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k (-B)^{(n-1)-k} = A^n - (-B)^n = A^n$$

et comme A^n est inversible (puisque A est inversible), on en déduit que les deux matrices $A \pm B$ sont inversibles avec

$$(A - B)^{-1} = (A^n)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{(n-1)-k},$$

$$(A + B)^{-1} = (A^n)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} A^k (-B)^{(n-1)-k}.$$

☞ La formule de la somme géométrique

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) * \left(\sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} \right)$$

est vraie dans n'importe quel anneau $(A, +, *)$, commutatif ou non, pourvu que les deux éléments x et y considérés ici commutent entre eux.

[2.] Il est clair que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente. Il est tout aussi clair que la matrice

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

☞ Il suffit de trouver un contre-exemple, le plus simple est le meilleur.

On commence donc par choisir la matrice nilpotente la plus simple qui soit.

Pour que la somme $A + B$ ne soit pas inversible, il suffit que la seconde colonne de cette matrice soit nulle, ce qui impose la seconde colonne de A .

Pour que A soit inversible, il suffit alors de choisir une première colonne non proportionnelle à la seconde colonne qu'on vient de choisir.

Et le tour est joué!

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

[1.] Si u et v sont deux endomorphismes nilpotents non nuls de \mathbb{R}^n qui commutent, alors

$$\text{rg}(u \circ v) < \text{rg } v.$$

[2.] Si u_1, \dots, u_n sont des endomorphismes nilpotents de \mathbb{R}^n qui commutent deux à deux, alors la composée

$$u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n$$

est l'endomorphisme nul.

↳ Il s'agit ici de généraliser un résultat du cours : si u est un endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension n , alors l'indice de nilpotence de u est inférieur à n et u^n est l'endomorphisme nul.

[1.] Comme u et v sont deux endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel de dimension n , leur indice de nilpotence est strictement inférieur à n et

$$u^n = v^n = \omega.$$

• Il est clair que $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v$ et donc que

$$\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg } v.$$

• Comme u et v commutent, le sous-espace $F = \text{Im } v$ est stable par u et

$$\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u \circ v).$$

Comme v n'est pas l'endomorphisme nul, alors $\dim F = \text{rg } v \geq 1$.

• Considérons l'endomorphisme u_F de F induit par restriction de u au sous-espace stable F . Pour tout $x \in F$,

$$u_F(x) = u(x) \in F$$

donc

$$\forall x \in F, \quad (u_F)^n(x) = u^n(x) = 0_E.$$

Ainsi, u_F est un endomorphisme nilpotent de F et en particulier

$$\text{rg } u_F < \dim F = \text{rg } v.$$

Par définition de l'image d'une application linéaire, un vecteur y appartient à $\text{Im } u_F$ si, et seulement si, il existe un vecteur $x \in F$ tel que $y = u_F(x) = u(x)$ c'est-à-dire, par définition du sous-espace F , s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que

$$y = u(x) = u(v(x_0)) = (u \circ v)(x_0) = (v \circ u)(x_0)$$

(On rappelle que u et v commutent.) Autrement dit :

$$\text{Im } u_F = \text{Im}(u \circ v) = \text{Im}(v \circ u)$$

et en particulier

$$\text{rg } u_F = \text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(v \circ u).$$

On a ainsi démontré que

$$\text{rg}(u \circ v) < \text{rg } v.$$

↳ Par symétrie, on a également démontré que

$$\text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(v \circ u) < \text{rg } u.$$

[2.] Considérons des endomorphismes nilpotents u_1, \dots, u_n de \mathbb{R}^n qui commutent deux à deux et la famille d'entiers naturels $(d_k)_{1 \leq k \leq n}$ définie par

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad d_k = \text{rg}(u_1 \circ \dots \circ u_k).$$

• Pour tout entier $1 \leq k \leq n$, l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k$ est nilpotent :

$$(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k)^n = u_1^n \circ u_2^n \circ \cdots \circ u_k^n = \omega$$

car les endomorphismes u_ℓ commutent deux à deux et leurs indices de nilpotence respectifs sont tous majorés par n (= la dimension de l'espace vectoriel sur lequel ils agissent).

• Il est clair que $d_1 = \text{rg } u_1 < n$ et, d'après ce qui précède, pour tout $1 \leq k < n$, deux cas se présentent :

— ou bien l'endomorphisme $v_k = u_1 \circ \cdots \circ u_k$ est nul et, dans ce cas,

$$u_1 \circ \cdots \circ u_n = u_1 \circ \cdots \circ u_k \circ \cdots \circ u_n$$

est l'endomorphisme nul ;

— ou bien v_k est un endomorphisme nilpotent non nul qui commute avec u_{k+1} et, dans ce cas, $d_{k+1} < d_k$.

Si l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n$ n'était pas l'endomorphisme nul, alors on aurait une famille strictement décroissante de n entiers naturels strictement compris entre 0 et n :

$$0 < d_n < d_{n-1} < \cdots < d_1 < n$$

ce qui est évidemment impossible.

La composée $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n$ est donc l'endomorphisme nul.

Soient $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que AB est semblable à la matrice $\text{Diag}(0, 9, 9)$.
Calculer le rang de BA et déterminer BA .

Par hypothèse, $AB \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et $BA \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, il existe une matrice $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}(AB)P = \text{Diag}(0, 9, 9).$$

Autrement dit : $(P^{-1}A)(BP) = \text{Diag}(0, 9, 9)$. Comme

$$BA = (BP)(P^{-1}A),$$

quitte à remplacer A par $P^{-1}A$ et B par BP , on peut donc supposer que le produit AB est égal à $\text{Diag}(0, 9, 9)$ (et pas seulement semblable à cette matrice diagonale).

Par hypothèse, il est clair que le rang de AB est égal à 2.

Le rang d'une matrice est toujours inférieur au nombre de ses lignes, ainsi qu'au nombre de ses colonnes. Par conséquent, les rangs de A , B et BA sont tous inférieurs à 2.

Comme $\text{Im}(AB) \subset \text{Im} A$, le rang de AB est inférieur au rang de A . On a donc :

$$2 = \text{rg}(AB) \leq \text{rg} A \leq 2$$

et donc $\text{rg} A = 2$. Comme $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, les deux colonnes de A sont linéairement indépendantes et le noyau de la matrice A est donc réduit au vecteur nul.

Il existe donc une matrice ligne $L_0 \in \mathfrak{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $A_0 \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} L_0 \\ A_0 \end{pmatrix}.$$

Décomposons B en blocs de manière analogue : il existe une matrice colonne $C_0 \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et une matrice carrée $B_0 \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$B = \begin{pmatrix} C_0 & B_0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$AB = \begin{pmatrix} L_0 C_0 & L_0 B_0 \\ A_0 C_0 & A_0 B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $A_0 B_0 = 9I_2$, donc A_0 et B_0 sont inversibles (on le savait déjà pour B_0) et commutent (A_0 est, à un facteur près, l'inverse de B_0).

Comme la ligne $L_0 B_0$ est nulle et que B_0 est inversible, alors L_0 est la ligne nulle.

De même, la colonne $A_0 C_0$ est nulle et A_0 est inversible, donc C_0 est la colonne nulle.

Ainsi,

$$BA = C_0 L_0 + B_0 A_0 = B_0 A_0 = 9I_2.$$

En particulier, $\text{rg} BA = 2$.

Soit u , un endomorphisme non nul de $E = \mathbb{R}^3$ tel que

$$u^3 + u = 0.$$

[1.] Démontrer que

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u \quad \text{et que} \quad \text{Im } u = \text{Ker}(u^2 + I).$$

[2.] Démontrer que u n'est pas injectif et que $\text{rg } u = 2$.

[3.] En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1.] Comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, le Théorème du rang nous indique que

$$\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u. \quad (1)$$

Par ailleurs, si le vecteur y appartient à $\text{Ker } u \cap \text{Im } u$, alors il existe un vecteur x tel que $y = u(x)$ et $u^2(x) = u(y) = 0_E$. Or, par hypothèse,

$$0_E = u^3(x) + u(x) = u(u^2(x)) + u(x) = u(0_E) + y = y.$$

Donc $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont en somme directe et, d'après la relation (1) sur les dimensions,

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u.$$

Par hypothèse, le polynôme $X^3 + X = X(X^2 + 1)$ est un polynôme annulateur de u . Comme X et $X^2 + 1$ sont premiers entre eux, le théorème de décomposition des noyaux nous donne

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Ker}(u^2 + I). \quad (2)$$

On déduit de cette décomposition que

$$\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Ker}(u^2 + I)$$

et de (1) que $\dim \text{Ker}(u^2 + I) = \dim \text{Im } u$.

Par ailleurs, pour tout vecteur $y \in \text{Im } u$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et donc

$$(u^2 + I)(y) = u^3(x) + u(x) = 0_E$$

donc $\text{Im } u \subset \text{Ker}(u^2 + I)$.

Ayant démontré une inclusion et l'égalité des dimensions, on peut conclure à l'égalité des sous-espaces vectoriels :

$$\text{Im } u = \text{Ker}(u^2 + I).$$

En appliquant le Théorème de décomposition des noyaux, on a obtenu

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u = \text{Ker } u \oplus \text{Ker}(u^2 + I).$$

Il faut alors résister à la tentation d'identifier $\text{Im } u$ et $\text{Ker}(u^2 + I)$: un sous-espace peut avoir une infinité de supplémentaires !

(Seul le supplémentaire orthogonal, quand il existe, est unique.)

[2.] Si u est injectif, alors $\text{Ker } u = \{0_E\}$ et par conséquent $E = \text{Ker}(u^2 + I)$. On a donc

$$u^2 = -I$$

et en particulier

$$(\det u)^2 = -1$$

(puisque la dimension de E est impaire), ce qui est absurde (puisque $\det u \in \mathbb{R}$).

• On déduit de (1) que $\text{rg } u < 3$ et donc $\text{rg } u \leq 2$.

Comme u n'est pas l'endomorphisme nul (par hypothèse), le sous-espace $\text{Ker}(u^2 + I)$ n'est pas réduit au vecteur nul (d'après (2)) et il existe donc un vecteur $x_0 \neq 0_E$ dans ce sous-espace.

La famille (x_0) est donc libre et, d'après le Théorème d'augmentation des familles libres, la famille $(x_0, u(x_0))$ est liée si, et seulement si, le vecteur $u(x_0)$ appartient au sous-espace engendré par x_0 ; autrement dit, s'il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(x_0) = \alpha \cdot x_0.$$

En appliquant u , on en déduit que

$$u^2(x_0) = \alpha^2 \cdot x_0 \quad \text{et donc que} \quad \alpha^2 \cdot x_0 = -x_0$$

puisque $x_0 \in \text{Ker}(u^2 + I)$. Comme $x_0 \neq 0_E$, on en déduit que $\alpha^2 = -1$, ce qui est impossible (puisque α est réel).

Par conséquent, la famille $(x_0, u(x_0))$ est libre. Comme $x_0 \in \text{Ker}(u^2 + I)$ et que $\text{Ker}(u^2 + I)$ est un sous-espace stable par u , on a justifié que cet espace contenait une famille libre de deux vecteurs.

▮ *Quel que soit le polynôme P , les sous-espaces vectoriels $\text{Ker } P(u)$ et $\text{Im } P(u)$ sont stables par u .*

Ainsi,

$$\dim \text{Im } u = \dim \text{Ker}(u^2 + I) \geq 2.$$

Finalement, on a démontré que

$$\text{rg } u = 2 \quad \text{et que} \quad \dim \text{Ker } u = 1$$

d'après (1).

▮ *On peut aboutir au résultat en étudiant le polynôme caractéristique de u .*

On connaît un polynôme annulateur de u : $X(X^2 + 1)$. Le polynôme minimal de u est un polynôme unitaire, non constant, qui divise tous les polynômes annulateurs. Comme u n'est pas l'endomorphisme nul, on en déduit que le polynôme minimal de u est égal à $(X^2 + 1)$ ou à $X(X^2 + 1)$.

Le polynôme caractéristique est un polynôme de degré 3 (la dimension de E) et possède les mêmes facteurs irréductibles que le polynôme minimal (ce dernier point est au programme lorsque le polynôme minimal est scindé mais pas dans le cas général).

Par conséquent, le polynôme caractéristique est de la forme

$$(X^2 + 1)^m \quad \text{ou} \quad X^{m_1}(X^2 + 1)^{m_2}$$

où les entiers m , m_1 et m_2 sont au moins égaux à 1. Comme le degré est égal à 3, la seule possibilité est $X(X^2 + 1)$.

Comme 0 est une racine simple du polynôme caractéristique, la dimension du noyau est égale à 1 et le rang est donc égal à 2 (1).

[3.] Comme $\dim \text{Ker } u = 1$, on peut choisir un vecteur e_1 qui dirige $\text{Ker } u$.

On choisit ensuite un vecteur e_2 , non nul, dans $\text{Ker}(u^2 + I)$. On a justifié plus haut que le couple $(e_2, e_3) = (e_2, u(e_2))$ était alors une famille libre de deux vecteurs de $\text{Ker}(u^2 + I)$. Comme ce sous-espace est un plan, on a donc trouvé une base!

On dispose ainsi

- d'un vecteur directeur de $\text{Ker } u$
- et d'une base de $\text{Ker}(u^2 + I)$.

Comme ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E , on en déduit que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est bien une base de E .

Par choix de e_1 , on a $u(e_1) = 0_E$.

Par choix de e_3 , on a $u(e_2) = e_3$ et comme $e_2 \in \text{Ker}(u^2 + I)$, on a

$$u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2.$$

Donc la matrice de u relative à cette base est bien

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

☞ Pour bien comprendre la question posée, il faut d'abord lire la matrice A comme il convient ! Cette matrice est diagonale par blocs :

$$A = \text{Diag}(A_0, A_1)$$

avec $A_0 = (0) \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ et

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}).$$

Cela doit alors faire penser à une décomposition de E en somme directe de deux sous-espaces vectoriels (une droite et un plan) stables par \mathfrak{u} et donc à une base de E adaptée à la décomposition (2).

Soient E , un espace euclidien et u , un endomorphisme de E tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$. Un tel endomorphisme est dit **normal**.

↳ Les endomorphismes auto-adjoints et les isométries vectorielles sont évidemment des endomorphismes normaux.

[1.] Pour tout $x \in E$,

$$\|u^*(x)\|^2 = \|u(x)\|^2.$$

[2.] En déduire que u et u^* ont mêmes valeurs propres et mêmes sous-espaces propres.

[3.] Démontrer que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

[4.] Si u est diagonalisable, alors u est auto-adjoint.

[1.] Pour tout vecteur $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|u^*(x)\|^2 &= \langle u^*(x) | u^*(x) \rangle = \langle x | (u \circ u^*)(x) \rangle \\ &= \langle x | (u^* \circ u)(x) \rangle && (u \text{ et } u^* \text{ commutent}) \\ &= \langle u(x) | u(x) \rangle = \|u(x)\|^2. \end{aligned}$$

[2.] Comme l'endomorphisme I est auto-adjoint,

$$(u - \lambda I)^* = (u^* - \lambda I).$$

Par conséquent, si l'endomorphisme u est normal, alors

$$(u - \lambda I)^* \circ (u - \lambda I) = (u - \lambda I) \circ (u^* - \lambda I).$$

D'après la question précédente,

$$\forall x \in E, \quad \|(u^* - \lambda I)(x)\|^2 = \|(u - \lambda I)(x)\|^2$$

et en particulier

$$\forall x \in E, \quad u^*(x) - \lambda x = 0_E \iff u(x) - \lambda x = 0_E.$$

Autrement dit : u et u^* ont mêmes valeurs propres et mêmes sous-espaces propres.

↳ Si \mathcal{B} est une base orthonormée de E et si la matrice d'un endomorphisme u quelconque relative à cette base \mathcal{B} est la matrice A , alors la matrice de l'adjoint u^* relative à \mathcal{B} est la matrice A^\top .

On en déduit que, d'une manière générale, les endomorphismes u et u^* ont mêmes valeurs propres (les polynômes caractéristiques sont égaux), mais aussi que les sous-espaces propres associés à une même valeur propre ont même dimension puisque

$$\text{rg}(u - \lambda I) = \text{rg}(u^* - \lambda I).$$

L'hypothèse de normalité sur u nous donne un résultat beaucoup plus fort : les sous-espaces propres sont égaux!

• Variante.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de u . Le sous-espace propre

$$F = \text{Ker}(u - \lambda I)$$

est stable par u^* (puisque u et u^* commutent) et donc par $(u^* - \lambda I)$.

Quels que soient les vecteurs x et y dans F ,

$$\langle u(x) - \lambda x | y \rangle = \langle 0_E | y \rangle = 0$$

mais, par définition de l'adjoint,

$$0 = \langle u(x) - \lambda x | y \rangle = \langle x | u^*(y) - \lambda y \rangle.$$

On a remarqué que le vecteur $u^*(y) - \lambda y$ appartenait au sous-espace F et on voit qu'il est orthogonal à tous les vecteurs x de F . Il s'agit donc du vecteur nul et on a ainsi démontré que

$$\forall y \in \text{Ker}(u - \lambda I), \quad u^*(y) = \lambda y.$$

Autrement dit, $\text{Ker}(u - \lambda I) \subset \text{Ker}(u^* - \lambda I)$. Par symétrie, l'inclusion réciproque est vraie et les sous-espaces propres sont donc égaux.

[3.] Soient λ et μ , deux valeurs propres distinctes de u . On considère un vecteur propre x associé à λ et un vecteur propre y associé à μ . On déduit de la question précédente que $u^*(y) = \mu y$.

Par conséquent,

$$\lambda \langle x | y \rangle = \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle = \mu \langle x | y \rangle.$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $\langle x | y \rangle = 0$ et donc que les sous-espaces propres $\text{Ker}(u - \lambda I)$ et $\text{Ker}(u - \mu I)$ sont orthogonaux.

[4.] Si l'endomorphisme normal u est diagonalisable, alors

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)}^{\perp} \text{Ker}(u - \lambda I).$$

En choisissant une base orthonormée de chaque sous-espace propre de u , on obtient alors une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u .

Dans cette base, la matrice de u est diagonale (base de vecteurs propres) et donc symétrique. Comme la matrice de u relative à une base orthonormée bien choisie est symétrique réelle, on en déduit que $u = u^*$.

Soit E , un espace euclidien. On note K , l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E .

[1.] Soit $p \in L(E)$, un projecteur. Démontrer que $p \in K$ si, et seulement si,

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

[2.] En déduire que K est compact.

[1.] (Question de cours)

Si p est une projection orthogonale, alors pour tout $x \in E$, les vecteurs $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux, donc

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$$

(Théorème de Pythagore).

Cette propriété signifie qu'un projecteur orthogonal est toujours une application linéaire continue et que $\|p\| \leq 1$.

Comme $p(x) = x$ pour tout vecteur $x \in \text{Im } p$, on en déduit que, en général, $\|p\| = 1$.

Réciproquement, si p n'est pas une projection orthogonale, alors il existe deux vecteurs $u \in \text{Im } p$ et $v \in \text{Ker } p$ tels que $\langle u | v \rangle \neq 0$. (En particulier, ces deux vecteurs sont distincts de 0_E .)

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$x(t) = u + t \cdot v \quad \text{si bien que} \quad p[x(t)] = u.$$

En calculant $\|x(t)\|^2$, on vérifie qu'il existe des réels t tels que

$$\|x(t)\| > \|u\| = \|p[x(t)]\|.$$

[2.] L'ensemble K est une partie de $L(E)$, espace vectoriel de dimension finie. Cet espace peut être muni de la norme $\|\cdot\|$ subordonnée à la norme euclidienne.

D'après la question précédente,

$$\forall p \in K, \quad \|p\| \leq 1,$$

donc K est une partie bornée de $L(E)$.

Considérons une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de projecteurs orthogonaux qui converge vers une endomorphisme $f \in L(E)$.

Pour tout vecteur $x \in E$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \|f(x) - p_n(x)\| \leq \|f - p_n\| \|x\|$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x) = f(x).$$

De manière analogue, pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \| (f \circ f)(x) - (p_n \circ p_n)(x) \| \\ & \leq \| (f \circ f)(x) - (p_n \circ f)(x) + (p_n \circ f)(x) - (p_n \circ p_n)(x) \| \\ & \leq \| (f - p_n) \circ f(x) \| + \| [p_n \circ (f - p_n)](x) \| \quad (\text{inégalité triangulaire et linéarité de } p_n) \\ & \leq \|f - p_n\| \|f(x)\| + \|p_n\| \|f - p_n\| \|x\| \\ & \leq \|f - p_n\| [\|f(x)\| + \|x\|]. \end{aligned}$$

Comme $\|f - p_n\|$ tend vers 0 (par hypothèse), on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n \circ p_n)(x) = (f \circ f)(x).$$

Comme tous les p_n sont des projecteurs,

$$\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n(x) = (p_n \circ p_n)(x)$$

donc

$$\forall x \in E, \quad f(x) = (f \circ f)(x)$$

par unicité de la limite.

L'endomorphisme f est donc un projecteur. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|p_n\| \leq 1$$

donc $\|f\| \leq 1$.

↳ La boule unité fermée de $L(E)$ est fermée : comme tous les p_n appartiennent à ce fermé, la limite f appartient encore à ce fermé.

D'après la question précédente, l'endomorphisme f est donc un projecteur orthogonal. Nous avons donc démontré que K était une partie fermée de $L(E)$.

• Comme $L(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie, toute partie fermée et bornée de $L(E)$ est compacte. Donc K est compacte.

↳ **Variante rapide** — D'après la première question, la partie K est l'intersection de la boule unité fermée de $L(E)$ et de l'ensemble

$$[f \circ f - f = \omega_E]$$

des projecteurs de E .

L'application $[f \mapsto f \circ f - f]$ est continue de $L(E)$ dans $L(E)$ (comme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, les applications polynomiales sont continues), donc l'ensemble des projecteurs de E est un fermé (image réciproque d'un singleton [=fermé] par une application continue).

L'ensemble K est donc une partie fermée (intersection de deux fermés) contenue dans une partie compacte (la boule unité d'un espace vectoriel de dimension finie), donc K est bien un compact.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note r_n , le reste de la division euclidienne de n par 5.

[1.] La série $\sum \frac{r_n}{n(n+1)}$ est convergente.

[2.] Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{k(k+1)}.$$

Exprimer S_{5n} en fonction des nombres harmoniques

$$H_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}.$$

[3.] En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)}.$$

[1.] Par définition de la division euclidienne,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq r_n < 5.$$

Donc

$$\frac{r_n}{n(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et, par comparaison avec une série de Riemann, la série est (absolument) convergente.

[2.] Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout entier $0 \leq r \leq 4$,

$$r_k = r \iff \exists \ell \in \mathbb{N}, \quad k = 5\ell + r.$$

On peut donc décomposer S_{5n} en somme de cinq termes.

$$\begin{aligned} S_{5n} &= \sum_{k=1}^{5n} \frac{r_k}{k(k+1)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+1)(5\ell+2)} + 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+2)(5\ell+3)} + 3 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+3)(5\ell+4)} \\ &\quad + 4 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+4)(5\ell+5)} + 0 \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{5\ell(5\ell+1)} \end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$$

permet de simplifier l'expression.

$$\begin{aligned} S_{5n} &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+1} - \frac{1}{5\ell+2} + 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+2} - \frac{1}{5\ell+3} + 3 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+3} - \frac{1}{5\ell+4} + 4 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+4} - \frac{1}{5\ell+5} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+1} + \frac{1}{5\ell+2} + \frac{1}{5\ell+3} + \frac{1}{5\ell+4} - \frac{4}{5\ell+5} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+1} + \frac{1}{5\ell+2} + \frac{1}{5\ell+3} + \frac{1}{5\ell+4} + \frac{1}{5\ell+5} - \frac{1}{\ell+1} \\ &= \sum_{k=1}^{5n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_{5n} - H_n. \end{aligned}$$

[3.] Il faut alors comparer la somme

$$H_{5n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k}$$

à l'intégrale

$$I_n = \int_n^{5n} \frac{dt}{t} = \ln 5.$$

La méthode usuelle (FAITES UNE FIGURE!) nous donne :

$$\forall n \geq 1, \quad \ln 5 + \frac{1}{5n} \leq S_{5n} \leq \ln 5 + \frac{1}{n}$$

et on déduit du théorème d'encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{5n} = \ln 5.$$

• Comme la série converge, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de ses sommes partielles est convergente. Toute suite extraite d'une suite convergente est elle-même convergente et tend vers la même limite. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{5n} = \ln 5.$$

Autrement dit,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)} = \ln 5.$$

↳ En présentant les calculs de manière un peu plus abstraite (c'est-à-dire en faisant intervenir une somme double), on devrait pouvoir généraliser le résultat au cas de la division euclidienne par un entier naturel $p \geq 2$ quelconque.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k.$$

Pour tout réel $R > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, toutes les racines complexes de P_n ont un module supérieur à R .

↳ Pour tout $n \geq 1$, le polynôme P_n est scindé sur \mathbb{C} : il possède donc n racines complexes (en comptant avec multiplicité).

Par ailleurs, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers la fonction \exp (théorie des séries entières) et la fonction \exp ne s'annule en aucun point de \mathbb{C} .

Il faut bien que les racines de P_n soient passées quelque part... Nous allons montrer qu'elles sont parties vers l'infini.

Nous allons raisonner par l'absurde en fixant $R > 0$ et en supposant qu'il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}^*$ tels que le polynôme P_n admette au moins une racine complexe z_n telle que $|z_n| \leq R$.

↳ Il revient au même de considérer un compact K non vide et de supposer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n \geq N, \exists z_n \in K, P_n(z_n) = 0.$$

En effet, tout compact est borné et donc contenu dans un disque fermé de rayon $R > 0$.

• Autrement dit, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, |z_{n_k}| \leq R \quad \text{et} \quad P_{n_k}(z_{n_k}) = 0.$$

Comme la suite $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite complexe bornée, il existe une sous-suite $(z_{\varphi(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Les inégalités larges étant conservées par passage à la limite, on en déduit que

$$|\ell| \leq R.$$

• Les polynômes P_n sont les sommes partielles de la série entière dont la somme est \exp . Comme le rayon de convergence de cette série entière est infini, cette série de fonctions converge uniformément sur tout compact contenu dans \mathbb{C} et en particulier sur le disque fermé $\{|z| \leq R\}$. Comme ℓ et les z_{n_k} appartiennent tous à ce disque fermé, on a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\exp(\ell) - P_{n_k}(z_{n_k})| &\leq |\exp(\ell) - \exp(z_{n_k})| + |\exp(z_{n_k}) - P_{n_k}(z_{n_k})| \\ &\leq |\exp(\ell) - \exp(z_{n_k})| + \|\exp - P_{n_k}\|_{\infty} \end{aligned}$$

où la borne supérieure est prise sur le disque fermé $\{|z| \leq R\}$.

Comme z_{n_k} converge vers ℓ et que \exp est continue sur \mathbb{C} , on a bien

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\exp(\ell) - \exp(z_{n_k})| = 0.$$

Comme la suite des fonctions $(P_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur le disque fermé $\{|z| \leq R\}$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\exp - P_{n_k}\|_{\infty} = 0.$$

Par encadrement, on a donc démontré que

$$\exp(\ell) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P_{n_k}(z_{n_k}).$$

Or, par définition, $P_{n_k}(z_{n_k}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc $\exp(\ell) = 0$: impossible!

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum n^{(-1)^n} x^n$$

et calculer sa somme.

Il faut d'abord comprendre que la série entière étudiée est la somme de deux séries entières :

$$\sum (2k)x^{2k} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}.$$

Il est clair que, pour $|x| < 1$, les deux termes généraux sont des suites bornées, donc le rayon de convergence de la somme est au moins égal à 1.

D'autre part, pour $|x| > 1$, la suite de terme général $n^{(-1)^n} x^n$ n'est pas bornée (par croissances comparées d'une suite géométrique divergente et d'une suite de puissances). Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière est inférieur à 1.

En conclusion, le rayon de convergence est égal à 1.

• Fixons $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. Alors

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2kx^{2k} = x \sum_{k=1}^{+\infty} 2kx^{2k-1}.$$

(Le terme en $k = 0$ est nul!)

On reconnaît ici la série dérivée de $\sum x^{2k}$. Comme le rayon de convergence est strictement positif, on peut dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence $] -1, 1[$:

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad S_1(x) &= x \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (x^2)^k \right) \\ &= x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= x \frac{2x}{(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$S_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

et on reconnaît cette fois la série primitive de $\sum x^{2k}$. On peut primitiver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence (toujours parce que le rayon de convergence est strictement positif) et comme $S_2(0) = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad S_2(x) &= \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

pour tout $x \in]-1, 1[$.

On note

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$$

et D , l'ensemble des réels x pour lesquels la somme $S(x)$ est définie.

[1.] Identifier l'ensemble D . La somme S est-elle continue sur D ?

[2.] Démontrer que la série entière

$$\sum \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n$$

converge normalement sur $[-1, 1]$.

[3.] En déduire la limite de $(1-x)S(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

[1.] Lorsque n tend vers $+\infty$, le quotient $1/\sqrt{n}$ tend vers 0, donc

$$\sin \frac{1}{\sqrt{x}} x^n \sim \frac{x^n}{n^{1/2}}.$$

Par croissances comparées, le terme général de la série entière

— tend vers 0 pour $|x| \leq 1$;

— tend vers l'infini pour $|x| > 1$.

Le rayon de convergence de la série entière est donc égal à 1 et, d'après le cours,

$$]-1, 1[\subset D \subset [-1, 1].$$

Pour $x = 1$, l'équivalent calculé plus haut prouve que la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (comparaison avec une série de Riemann divergente).

Pour $x = -1$, la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{x}} x^n$ est alternée, la valeur absolue $\sin 1/\sqrt{n}$ du terme général tend vers 0 en décroissant, donc la série converge d'après le Critère spécial des séries alternées.

⚡ On ne peut pas appliquer le Théorème de comparaison avec une série semi-convergente, mais seulement avec une série absolument convergente.

Dans le cas $x = -1$, l'équivalent prouve seulement que la série n'est pas absolument convergente et il faut étudier le comportement du terme général (et non pas celui de l'équivalent trouvé) pour pouvoir conclure.

En conclusion, $D = [-1, 1[$ et, d'après le Théorème d'Abel, la somme S est continue sur D .

⚡ D'après le cours, la somme d'une série entière est toujours continue sur l'intervalle ouvert de convergence.

Le Théorème d'Abel nous dit que : si $R > 0$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et si la série $\sum a_n R^n$ converge, alors la convergence est uniforme sur $[0, R]$ et la somme est donc continue sur $[0, R]$.

Pour $x = -1$, on peut donc appliquer le Théorème d'Abel avec

$$a_n = (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad R = 1$$

ou vérifier directement que la série de fonctions converge uniformément sur $[-1, 0]$ en exploitant le Critère spécial des séries alternées (domination du reste d'ordre n) : pour $-1 \leq x \leq 0$, la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ est alternée et la valeur absolue

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} |x|^n$$

du terme général tend vers 0 en décroissant, donc

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [-1, 0], \quad |R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

où le majorant est indépendant de x et tend vers 0.

☞ Comme la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série divergente de terme général positif, on peut démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = +\infty,$$

ce qui justifie qu'on cherche un ordre de grandeur de $S(x)$ au voisinage gauche de 1.

☛ Considérons une série $\sum a_n$ de terme général positif, qu'on suppose divergente. Pour $A > 0$, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=1}^{N_0} a_n \geq A + 1.$$

Une fonction polynomiale étant continue, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{N_0} a_n x^n > A$$

et donc qu'il existe un seuil $0 < x_0 < 1$ tel que

$$\forall x \in [x_0, 1[, \quad \sum_{n=1}^{N_0} a_n x^n \geq A.$$

Comme les a_n et x sont positifs, on en déduit que

$$\forall x \in [x_0, 1[, \quad S(x) \geq \sum_{n=1}^{N_0} a_n x^n \geq A$$

et on a prouvé que

$$\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = +\infty.$$

[2.] Comme $\sin' = \cos$, on déduit de l'Inégalité des accroissements finis que la fonction sin est lipschitzienne de constante 1 :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |\sin a - \sin b| \leq |a - b|.$$

Par conséquent, pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \left| \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n \right| &\leq \left| \sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}. \end{aligned}$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in [-1, 1]$ et ce majorant est équivalent à $1/n^{3/2}$, c'est donc le terme général d'une série convergente.

On a ainsi démontré que la série entière convergeait normalement sur le segment $[-1, 1]$.

[3.] On déduit de la question précédente que la fonction T définie par

$$T(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n$$

est continue sur le segment $[-1, 1]$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} (1-x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^{n+1} \\ &= \sin 1 \cdot x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n \\ &= \sin 1 \cdot x + T(x). \end{aligned}$$

Comme T est continue sur $[-1, 1]$, elle admet en particulier une limite finie, égale à $T(1)$, au voisinage gauche de 1, ce qui prouve que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)S(x) = \sin 1 + T(1).$$

✎ Il se trouve qu'on peut calculer $T(1)$! En effet, il s'agit de la somme d'une série télescopique :

$$T(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin 1 = -\sin 1.$$

On a donc en fait démontré que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)S(x) = 0$$

et donc que

$$S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{=} o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

On a bien calculé un ordre de grandeur de $S(x)$, mais pas un équivalent !

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx.$$

Justifier la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $[x \mapsto \cos^n x]$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc l'intégrale est bien définie.

Comme $0 \leq \cos x < 1$ pour tout $x \in]0, \pi/2]$,

$$\forall x \in]0, \pi/2], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n x = 0 \quad (3)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, \pi/2], \quad 0 \leq \cos^{n+1} x \leq \cos^n x < 1 \quad (4)$$

donc, en intégrant (4),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

et, par convergence dominée [(3) et (4)],

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0.$$

On peut donc appliquer le Critère spécial des séries alternées et en conclure que la série alternée $\sum u_n$ est convergente.

↳ L'étude classique des intégrales de Wallis montre que

$$|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$$

et donc que la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente (par comparaison à une série de Riemann).

• Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall x \in [0, \pi/2], \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos^k x.$$

Chaque fonction f_n est continue sur le segment $[0, \pi/2]$ et par conséquent intégrable.

Pour $x \in]0, \pi/2]$, on reconnaît une série géométrique :

$$f_n(x) = \frac{1 - (-\cos x)^{n+1}}{1 + \cos x}$$

ce qui justifie la convergence simple vers une fonction continue :

$$\forall 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$$

mais aussi que la convergence est dominée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \quad |f_n(x)| \leq \frac{1 + \cos^{n+1} x}{1 + \cos x} \leq \frac{2}{1 + \cos x}.$$

↳ Le majorant trouvé est indépendant du paramètre n et intégrable sur $]0, \pi/2]$ (puisque'il admet un prolongement continu sur le segment $[0, \pi/2]$).

On peut remarquer que la domination est vraie sur le segment $[0, \pi/2]$ puisque $f_n(0) = 1$ ou 0 selon la parité de n , mais pas la convergence simple : la suite de terme général $f_n(0)$ est divergente. C'est sans importance pour appliquer le Théorème de convergence dominée.

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = \sum_{k=0}^n u_k$$

donc on a démontré que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

• Il reste à calculer l'intégrale. On pose pour cela

$$t = \tan \frac{x}{2},$$

ce qui nous donne

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

Après simplifications, il ne reste que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x} = \int_0^1 dt = 1.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 1.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

[1.] On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f'(x) = e^{-x}.$$

Démontrer que f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

[2.] Plus généralement, on suppose que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + f'(x) = 0.$$

Démontrer que f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

[1.] La fonction f est une solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = e^{-x}.$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y(x) = Ae^{-x}$$

et une solution particulière est de la forme

$$y_0(x) = Bxe^{-x}$$

donc il existe deux réels A et B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (A + Bx)e^{-x}.$$

On en déduit (par croissances comparées) que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

↳ Un calcul rapide montre que $B = 1$, mais on n'a même pas besoin de connaître la valeur de B pour conclure!

[2.] Puisque la fonction f est donnée, on peut définir une fonction auxiliaire g en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f'(x) + f(x).$$

Comme f est de classe \mathcal{C}^1 , la fonction g est bien continue sur \mathbb{R} et, par hypothèse, elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

On peut alors voir la fonction f comme une solution de l'équation différentielle suivante.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = g(x). \quad (*)$$

Les solutions de l'équation homogène associée à (*) sont de la forme

$$y(x) = Ae^{-x}.$$

On en déduit la solution générale de (*) en faisant varier la constante :

$$y(x) = A(x)e^{-x} \quad \text{avec} \quad A'(x)e^{-x} = g(x),$$

donc A est une primitive de $[x \mapsto g(x)e^x]$.

Comme la fonction f est une solution de l'équation différentielle (*), il existe une constante K telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x} \left(K + \int_0^x g(t)e^t dt \right).$$

La valeur de K importe peu, il reste à démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt = 0.$$

☞ *Tout cela est particulièrement astucieux et aussi classique qu'astucieux... Impossible de traiter cet exercice sans connaître l'astuce!*

☛ Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction g tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, il existe un seuil $A > 0$ tel que

$$\forall x \geq A, \quad |g(t)| \leq \varepsilon.$$

Sur le segment $[0, A]$, la fonction g est continue, donc elle est bornée : il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall x \in [0, A], \quad |g(t)| \leq M.$$

Pour tout $x \geq A$, la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire nous donnent :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x g(t)e^t dt \right| &\leq \left| \int_0^A g(t)e^t dt \right| + \left| \int_A^x g(t)e^t dt \right| \\ &\leq \int_0^A |g(t)|e^t dt + \int_A^x |g(t)|e^t dt \\ &\leq M \int_0^A e^t dt + \varepsilon \int_A^x e^t dt \\ &\leq Me^A + \varepsilon e^x. \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\forall x \geq A, \quad \left| e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt \right| \leq Me^A \cdot e^{-x} + \varepsilon.$$

Comme $Me^A \cdot e^{-x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, il existe un seuil $A' > 0$ tel que

$$\forall x \geq A', \quad 0 \leq Me^A \cdot e^{-x} \leq \varepsilon$$

et finalement

$$\forall x \geq \max\{A, A'\}, \quad \left| e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt \right| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat attendu.

La probabilité pour qu'une personne passant sous l'échafaudage d'un peintre en bâtiment reçoive une goutte de peinture est $p \in]0, 1[$. On note X (resp. Y), le nombre de passants ayant reçu une goutte de peinture (resp. n'ayant pas reçu de goutte de peinture).

[1.] On suppose que n personnes sont passées. Donner les lois de X et de Y . Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

[2.] On suppose que N personnes sont passées, où N est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner les lois de X et de Y , ainsi que l'espérance et la variance de X . Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

☞ Nous allons commencer par traiter ces deux questions dans un même cadre général, avant de passer aux applications numériques.

On modélise la situation décrite par l'énoncé de la manière suivante :

— il existe trois variables aléatoires N , X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans \mathbb{N} , qui vérifient la relation suivante :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) + Y(\omega) = N(\omega);$$

— pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

☞ Cette dernière hypothèse est justifiée par le fait qu'on reconnaît ici un schéma de Bernoulli et que X représente, d'une certaine manière, le nombre de succès lors d'une succession de n tentatives (et Y représente alors le nombre d'échecs).

☛ On en déduit avant toute chose que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$ avec $q = 1 - p$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y = k \mid N = n) \mathbf{P}(N = n) &= \mathbf{P}(Y = k, N = n) \\ &= \mathbf{P}(N - X = k, N = n) \\ &= \mathbf{P}(X = n - k, N = n) \\ &= \mathbf{P}(X = n - k \mid N = n) \mathbf{P}(N = n) \\ &= \binom{n}{n-k} p^{n-k} q^{n-(n-k)} \mathbf{P}(N = n) && \text{(pour } 0 \leq n - k \leq n) \\ &= \binom{n}{k} q^k p^{n-k} \mathbf{P}(N = n) && \text{(soit } 0 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

par symétrie des coefficients binomiaux.

[1.] On suppose pour commencer que la variable aléatoire N est presque sûrement constante :

$$\mathbf{P}(N = n) = 1.$$

Dans ces conditions, l'évènement $[N \neq n]$ est négligeable et

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) &= \mathbf{P}(X = k, N = n) + \mathbf{P}(X = k, N \neq n) \\ &= \mathbf{P}(X = k \mid N = n) \mathbf{P}(N = n) = \mathbf{P}(X = k \mid N = n). \end{aligned}$$

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

De même, la variable aléatoire Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$.

☛ Comme N est presque sûrement constante, elle est indépendante de X . (Voir ci-dessous en cas de doute.) Comme $Y = N - X$ et que la covariance est linéaire à droite,

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(X, N) - \mathbf{V}(X) = 0 - \mathbf{V}(X) = -npq < 0.$$

Comme la covariance de X et Y n'est pas nulle, ces deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

☞ Comme $\mathbf{P}(N = n) = 1$, on a aussi $\mathbf{P}(N = k) = 0$ pour tout entier $k \neq n$.

Pour $k \neq n$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on a donc

$$0 \leq \mathbf{P}(X = \ell, N = k) \leq \mathbf{P}(N = k) = 0$$

et donc

$$\mathbf{P}(X = \ell, N = k) = 0 = \mathbf{P}(X = \ell) \mathbf{P}(N = k).$$

Pour $k = n$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on a aussi (voir plus haut)

$$\mathbf{P}(X = \ell, N = n) = \mathbf{P}(X = \ell) = \mathbf{P}(X = \ell) \mathbf{P}(N = n).$$

Ces calculs prouvent que X et N sont indépendantes.

[2.] On suppose maintenant que la variable aléatoire N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
D'après la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k \mid N = n) \mathbf{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda q} \end{aligned}$$

et comme $-1 + q = -p$, la variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

De même, Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda q)$.

En particulier, $\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda p$.

• Quels que soient les entiers k et ℓ , d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = k, Y = \ell) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = \ell, N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, N - X = \ell, N = n) && \text{(puisque } X + Y = N) \\ &= \mathbf{P}(X = k, N = k + \ell) && \text{(contrainte } n = k + \ell) \\ &= \mathbf{P}(X = k \mid N = k + \ell) \mathbf{P}(N = k + \ell) \\ &= \binom{k + \ell}{k} p^k q^\ell e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k + \ell)!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!} \\ &= \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = \ell). \end{aligned}$$

Cela prouve bien que X et Y sont indépendantes.

En particulier, cette fois, la covariance de X et Y est nulle.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que f et f'' sont bornées.

[1.] Justifier l'existence des réels

$$M_0(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| \quad \text{et} \quad M_2(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f''(x)|.$$

[2.] Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, démontrer que

$$\forall h > 0, \quad |f'(x)| \leq \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}.$$

[3.] Justifier alors l'existence de

$$M_1(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$$

et démontrer que

$$M_1(f) \leq 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}. \quad (\star)$$

[4.] Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit une fonction $f_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$\forall 0 \leq x \leq 2, \quad f_\varepsilon(x) = 2 - (2-x)^{2+\varepsilon}$$

et

$$\forall x > 2, \quad f_\varepsilon(x) = 2.$$

Démontrer que f_ε , f'_ε et f''_ε sont bornées sur \mathbb{R}_+ . Préciser les valeurs de $M_0(f_\varepsilon)$, de $M_1(f_\varepsilon)$ et de $M_2(f_\varepsilon)$.

[5.] En déduire que le facteur 2 est la meilleure constante possible dans l'inégalité (\star) .

[1.] Toute partie non vide et majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure réelle (Axiome de la borne supérieure). Comme f et f'' sont définies sur \mathbb{R}_+ , les ensembles

$$\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}_+\} \quad \text{et} \quad \{|f''(x)|, x \in \mathbb{R}_+\}$$

ne sont pas vides. Comme f et f'' sont supposées bornées, ces deux ensembles sont également majorés. Par conséquent, les deux réels $M_0(f)$ et $M_2(f)$ sont bien définis.

[2.] D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad |f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{2} M_2(f).$$

En particulier, pour $a = x \in \mathbb{R}_+$ et $b = x + h$ avec $h \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2} M_2(f).$$

On en déduit par inégalité triangulaire que

$$|hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)| \leq \frac{h^2}{2} M_2(f)$$

et donc que

$$\begin{aligned} |hf'(x)| &\leq \frac{h^2}{2} M_2(f) + |f(x+h) - f(x)| \\ &\leq 2M_0(f) + \frac{h^2}{2} M_2(f) \end{aligned}$$

(à nouveau par inégalité triangulaire). Comme $h > 0$, on en déduit que

$$\forall x \geq 0, \quad |f'(x)| \leq \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}.$$

[3.] Dans l'encadrement précédent, le majorant est indépendant de x . Cela prouve que la dérivée f' est bornée sur \mathbb{R}_+ et par conséquent que le réel $M_1(f)$ est bien défini (pour les raisons données plus haut).

Dans cet encadrement, le minorant est indépendant de $h > 0$, on peut donc passer à la borne inférieure :

$$\forall x \geq 0, \quad |f'(x)| \leq \inf_{h>0} \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}.$$

Une étude (rapide!) des variations de la fonction

$$\varphi = \left[h \mapsto \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2} \right]$$

montre que

$$\inf_{h>0} \varphi(h) = \varphi\left(\sqrt{\frac{4M_0(f)}{M_2(f)}}\right) = 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}.$$

Par conséquent, on a bien

$$\forall x \geq 0, \quad |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}.$$

Le majorant est indépendant de la variable x , on peut cette fois passer à la borne supérieure et trouver :

$$M_1(f) \leq 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}.$$

[4.] Il est clair que f_ε est strictement croissante sur $[0, 2]$. Comme

$$f_\varepsilon(2) = 2, \quad f_\varepsilon(0) = 2 - 2^{2+\varepsilon} = 2 - 4 \cdot 2^\varepsilon < -2$$

et que $f_\varepsilon(x) = 2$ pour tout $x > 2$, on en déduit que

$$M_0(f_\varepsilon) = 4 \cdot 2^\varepsilon - 2.$$

• Pour tout $0 \leq x \leq 2$, on a

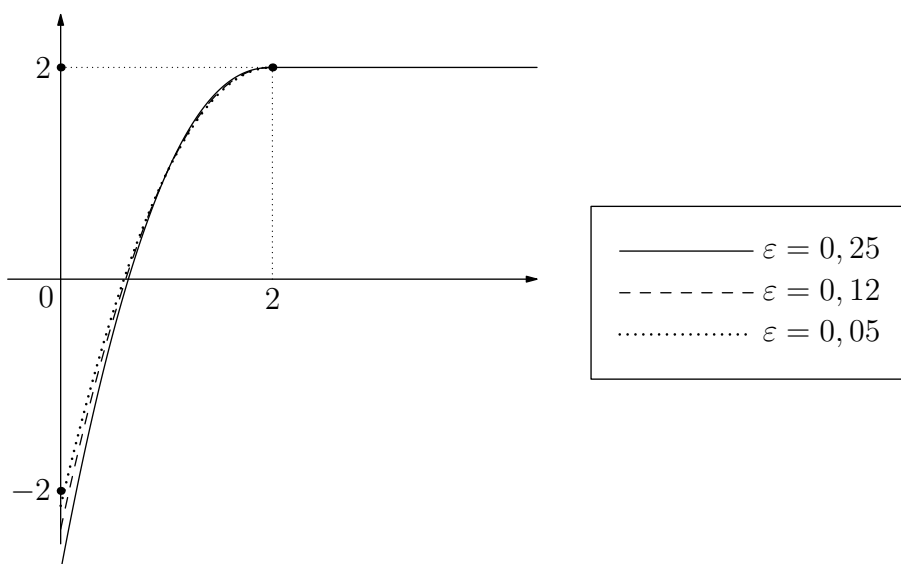
$$f'_\varepsilon(x) = (2 + \varepsilon)(2 - x)^{1+\varepsilon}.$$

Il est aussi clair que la dérivée f'_ε est décroissante sur $[0, 2]$ (et nulle sur $]2, +\infty[$!) avec

$$f'_\varepsilon(0) = 2^{1+\varepsilon}(2 + \varepsilon), \quad f'_\varepsilon(2) = 0.$$

Par conséquent,

$$M_1(f_\varepsilon) = 2 \cdot (2 + \varepsilon) \cdot 2^\varepsilon.$$



• Enfin, f''_ε est nulle sur $]2, +\infty[$ et

$$\forall x \in [0, 2], \quad f''_\varepsilon(x) = -(2 + \varepsilon)(1 + \varepsilon)(2 - x)^\varepsilon.$$

La dérivée seconde est donc négative et croissante sur $[0, 2]$:

$$f''_\varepsilon(0) = -(2 + \varepsilon)(1 + \varepsilon)2^\varepsilon, \quad f''_\varepsilon(2) = 0$$

d'où finalement

$$M_2(f_\varepsilon) = (2 + \varepsilon)(1 + \varepsilon)2^\varepsilon.$$

- ↳ Un détail à ne pas perdre de vue : pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction f_ε est bien de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+ .
 En effet,
 — elle est clairement de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 2[$ et sur $]2, +\infty[$;
 — elle tend vers 2 à gauche et à droite de $x = 2$ (donc le raccord est continu);
 — sa dérivée tend vers 0 à gauche et à droite de $x = 2$ (donc le raccord est de classe \mathcal{C}^1);
 — sa dérivée seconde tend vers 0 à gauche et à droite de $x = 2$ (donc le raccord est de classe \mathcal{C}^2).
 En revanche, la fonction f_0 définie par

$$\forall x \in [0, 2], \quad f_0(x) = 2 - (2 - x)^2 \quad \text{et} \quad \forall x > 2, \quad f_0(x) = 2$$

n'est pas de classe \mathcal{C}^2 : sa dérivée seconde est égale à -2 sur $[0, 2[$ et identiquement nulle sur $]2, +\infty[$.
 Cette fonction ne peut donc pas servir de contre-exemple alors même que

$$M_1(f_0) = 2\sqrt{M_0(f_0)M_2(f_0)}.$$

[5.] Raisonons par l'absurde en supposant qu'il existe un réel $\alpha < 2$ tel que

$$\frac{M_1(f)}{\sqrt{M_0(f)M_2(f)}} \leq \alpha$$

pour toute fonction f bornée et de dérivée seconde bornée.

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc

$$\frac{M_1(f_\varepsilon)}{\sqrt{M_0(f_\varepsilon)M_2(f_\varepsilon)}} = \frac{2 \cdot (2 + \varepsilon) \cdot 2^\varepsilon}{\sqrt{[4 \cdot 2^\varepsilon - 2][(2 + \varepsilon)(1 + \varepsilon)2^\varepsilon]}} \leq \alpha.$$

En faisant tendre ε tend vers 0, on obtiendrait alors

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{\sqrt{[4 - 2][2 \cdot 1 \cdot 1]}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2 \leq \alpha$$

(puisque les inégalités larges sont conservées par passage à la limite), ce qui est absurde puisqu'on a supposé que $\alpha < 2$.

Le facteur 2 est donc optimal (minimal).

Soient $a < b$, deux nombres réels, et f , une application de classe \mathcal{C}^2 sur le segment $[a, b]$, à valeurs réelles, telle que

$$f(a) = f(b) = 0$$

et on considère le polynôme

$$P_0 = \frac{(X-a)(X-b)}{2}.$$

[1.] Trouver une relation simple entre les deux intégrales suivantes.

$$\int_a^b f(t) dt \quad \int_a^b f''(t)P_0(t) dt$$

[2.] En déduire que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty.$$

[1.] Il est clair que les deux intégrales sont bien définies (fonctions continues sur un segment).

La fonction f et la fonction polynomiale associée à P_0 sont de classe \mathcal{C}^2 , ce qui nous permet d'intégrer deux fois par parties après avoir remarqué que $P_0'(t) = 1$ pour tout $t \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \int_a^b f(t)P_0''(t) dt \\ &= [f(t)P_0'(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)P_0'(t) dt \\ &= - \int_a^b f'(t)P_0'(t) dt && (\text{car } f(a) = f(b) = 0) \\ &= -[f'(t)P_0(t)]_a^b + \int_a^b f''(t)P_0(t) dt \\ &= \int_a^b f''(t)P_0(t) dt && (\text{car } P_0(a) = P_0(b) = 0) \end{aligned}$$

[2.] La fonction f étant de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$, sa dérivée seconde f'' est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle est bornée :

$$\forall t \in [a, b], \quad |f''(t)| \leq \|f''\|_\infty.$$

On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= \left| \int_a^b f''(t)P_0(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f''(t)P_0(t)| dt \leq \|f''\|_\infty \int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2} dt. \end{aligned}$$

☞ On doit immédiatement se rendre compte que la fonction associée à P_0 est négative sur le segment $[a, b]$ (signe d'un trinôme entre ses racines).

On effectue ensuite le changement de variable affine usuel pour se ramener à l'intervalle $[0, 1]$ (cf le cours sur les fonctions convexes).

$$t = (1-u)a + ub \quad dt = (b-a) du$$

On obtient ainsi

$$\int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2} dt = \frac{(b-a)^3}{2} \int_0^1 u(1-u) du = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

☞ Il est plus efficace de changer de variable avant de développer la fonction intégrande : le facteur $(b-a)^3$ apparaît sous forme factorisée et le calcul de l'intégrale est alors immédiat.

Complément

On vient d'effectuer le calcul qui donne l'efficacité de la méthode des trapèzes pour approcher une intégrale au moyen d'une somme de Riemann.

• Si la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$, alors il existe une fonction affine φ telle que

$$\varphi(a) = f(a) \quad \text{et} \quad \varphi(b) = f(b).$$

L'existence (et l'unicité) de φ découle du théorème sur l'interpolation de Lagrange et l'expression de φ présente peu d'intérêt. En effet, comme φ est affine, son intégrale sur le segment $[a, b]$ est l'aire d'un trapèze et donc

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2} \times (b - a) = \frac{f(a) + f(b)}{2} \times (b - a).$$

• On peut alors appliquer ce qui précède à la fonction $g = f - \varphi$: il est clair que g est de classe \mathcal{C}^2 , on a fait ce qu'il fallait pour que $g(a) = g(b) = 0$ et de plus $g'' = f''$ (puisque la fonction φ est affine), si bien qu'on a en fait déjà démontré que

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a) \right| \leq \frac{(b - a)^3}{12} \|f''\|_\infty.$$

Il reste à découper le segment $[a, b]$ au moyen d'une subdivision

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = b \quad \text{avec} \quad \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{b - a}{n}.$$

Chaque segment $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ étant contenu dans le segment $[a, b]$, on a

$$\sup_{t \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]} |f''(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f''(t)| = \|f''\|_\infty$$

et le duo habituel (relation de Chasles et inégalité triangulaire) nous donne

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b - a}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(\alpha_k) + f(\alpha_{k+1})] \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^3}{12} \cdot \|f''\|_\infty \\ &\leq n \cdot \frac{(b - a)^3}{12n^3} \cdot \|f''\|_\infty = \frac{K}{n^2}. \end{aligned}$$

• L'erreur commise en approchant l'intégrale de f par la méthode des trapèzes avec une subdivision en n sous-intervalles est donc $\mathcal{O}(1/n^2)$, c'est-à-dire un ordre de grandeur plus précise que la méthode des rectangles.

• C'est d'autant plus remarquable que les expressions simplifiées des deux méthodes sont très semblables !

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{b - a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) = \frac{b - a}{n} \sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \\ T_n &= \frac{b - a}{n} \left[\frac{f(\alpha_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(\alpha_k) + \frac{f(\alpha_n)}{2} \right] \end{aligned}$$

[1.] Soit $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(C + M) = \det(M).$$

Démontrer que $C = 0_n$.

[2.] Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A + M) = \det(B + M).$$

Démontrer que $A = B$.

[3.] Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A + M) = \det(B + M^T).$$

Que dire de A et B ?

[1.] Raisonnons par l'absurde.

Si $C \neq 0_n$, alors il existe un entier $1 \leq r \leq n$ tel que C soit équivalente à J_r : il existe deux matrices P, Q inversibles telles que

$$Q^{-1}CP = J_r.$$

Dans ces conditions, la matrice M définie par

$$M = Q(I_n - J_r)P^{-1}$$

n'est pas inversible et $\det(M) = 0$.

↪ La matrice $(I_n - J_r)$ est diagonale et l'un de ses coefficients diagonaux (au moins) est nul.

Mais la somme $C + M = QI_nP = QP$ est inversible (produit de matrices inversibles), donc $\det(C + M) \neq 0$: c'est impossible.

Par conséquent, la matrice C est nécessairement la matrice nulle.

↪ La propriété étudiée est évidente pour la matrice nulle, faut-il le dire ?

[2.] L'application $M \mapsto B + M$ réalise une bijection de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sur lui-même. On suppose donc ici que

$$\forall M' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(C + M') = \det(M') \quad \text{avec} \quad C = A - B.$$

On déduit de la question précédente que $C = 0_n$ et donc que $A = B$.

[3.] Une matrice et sa transposée ont même déterminant. Par conséquent, on suppose ici que

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A + M) = \det(B^T + M)$$

et on déduit de la question précédente que $A = B^T$.

Démontrer l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} 1 - t \operatorname{Arctan} \frac{1}{t} dt$$

puis calculer sa valeur.

Il est clair que la fonction $f = [t \mapsto 1 - t \operatorname{Arctan} 1/t]$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Comme la fonction Arctan tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$, la fonction f tend vers 1 au voisinage de $t = 0$. Admettant une limite finie au voisinage de 0, elle est donc intégrable au voisinage de 0.

D'autre part, d'après le développement limité à l'ordre trois au voisinage de 0 de la fonction Arctan ,

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)$$

donc

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3t^2},$$

ce qui prouve que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

La fonction f est donc intégrable sur $]0, +\infty[$, ce qui prouve que l'intégrale généralisée est bien définie ("convergente", comme on dit).

• On connaît l'identité classique :

$$\forall t > 0, \quad \operatorname{Arctan} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} t. \quad (\star)$$

On en déduit que

$$\forall t > 0, \quad f(t) = 1 - \frac{\pi}{2} t + t \operatorname{Arctan} t.$$

En intégrant par parties,

$$\int t \operatorname{Arctan} t dt = \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t - \int \frac{t^2}{2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} t$$

donc une primitive de f est

$$F(t) = \frac{t}{2} - \frac{\pi t^2}{4} + \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} t.$$

Par définition,

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) - F(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t).$$

Avec l'identité (\star) rappelée plus haut,

$$\frac{t}{2} - \frac{\pi t^2}{4} + \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} \frac{1}{t} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} \left[\frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \right] = o(1)$$

donc

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \frac{\pi}{4}.$$

[1.] Démontrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{\ln(t^2) \ln(1-t^2)}{t^2} dt$$

est convergente.

[2.] Calculer l'intégrale

$$u_n = \int_0^1 t^{2n-2} \ln(t^2) dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

[3.] Au moyen d'un développement en série entière, en déduire que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t^2) \ln(1-t^2)}{t^2} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}.$$

[1.] Il est clair que la fonction f définie par

$$\forall 0 < t < 1, \quad f(t) = \frac{\ln(t^2) \ln(1-t^2)}{t^2}$$

est continue sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

☞ On sait que \ln est intégrable au voisinage (droit !) de 0. On sait aussi que $\ln(a-u)$ est intégrable au voisinage (gauche !) de a pour tout $a \in \mathbb{R}$ (changement de variable affine).

- ☛ Lorsque t tend vers 0, on a $f(t) \sim -2 \ln t$, donc f est intégrable au voisinage de 0.
- ☛ Lorsque t tend vers 1,

$$f(t) = \frac{2 \ln(1+t)}{t^2} \cdot \ln t \cdot \ln(1-t) = o(\ln(1-t)),$$

donc f est intégrable au voisinage de 1.

Ainsi, la fonction f est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ et l'intégrale généralisée est (absolument) convergente.

[2.] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi_n = [t \mapsto t^{2n-2} \ln(t^2)]$ est continue sur l'intervalle $]0, 1[$ et dominée par $\ln t$ au voisinage de $t = 0$.

☞ On a en fait $\varphi_1(t) = 2 \ln t$ et $\varphi_n(t) = o(\ln t)$ pour $n \geq 2$.

Par conséquent, l'intégrale généralisée u_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- ☛ Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, en intégrant par parties,

$$\int_{\varepsilon}^1 t^{2n-2} \ln(t^2) dt = \left[\ln(t^2) \frac{t^{2n-1}}{2n-1} \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{2}{t} \cdot \frac{t^{2n-1}}{2n-1} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 - \frac{2}{2n-1} \int_0^1 t^{2n-2} dt.$$

Par définition des intégrales généralisées convergentes, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 t^{2n-2} \ln(t^2) dt = \frac{-2}{(2n-1)^2}.$$

[3.] D'après le développement en série entière de $\ln(1-u)$ au voisinage de 0,

$$\forall t \in]0, 1[, \quad f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t) \quad \text{où} \quad \psi_n(t) = \frac{-t^{2n-2} \ln(t^2)}{n} = \frac{-1}{n} \cdot \varphi_n(t).$$

D'après la question précédente, la série $\sum \psi_n$ est une série de fonctions intégrables sur $]0, 1[$; cette série converge simplement sur $]0, 1[$ et sa somme, la fonction f , est continue sur cet intervalle.

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 |\psi_n(t)| dt = \frac{-1}{n} \int_0^1 \varphi_n(t) dt = \frac{2}{2(2n-1)^2},$$

donc la série $\sum \int_0^1 |\psi_n(t)| dt$ est convergente.

On déduit alors du Théorème d'intégration terme à terme que la fonction f est intégrable sur $]0, 1[$ (ce qu'on avait déjà prouvé) et que

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \psi_n(t) dt = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)^2}.$$

On considère l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y''(x) - (x + 1)y'(x) + y(x) = 0. \quad (E)$$

- [1.] Déterminer les solutions polynomiales de (E).
 [2.] Déterminer une équation différentielle (E') vérifiée par $z(x) = y(x)/x$.
 [3.] Calculer les réels a , b et c tels que

$$\frac{2 - 4X^2}{X(X^2 - 1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X + 1}.$$

- [4.] En déduire les solutions de (E'), puis les solutions de (E).

[1.] L'équation étant linéaire et homogène, on peut supposer que la solution y est une fonction polynomiale unitaire de degré d :

$$y(x) = x^d + \dots$$

où les termes absents constituent une fonction polynomiale de degré strictement inférieur à d .

On en déduit que

$$xy'(x) = dx^d + \dots \quad \text{et} \quad (x^2 - 1)y''(x) = d(d - 1)x^d + \dots.$$

Par conséquent,

$$(x^2 - 1)y''(x) - (x + 1)y'(x) + y(x) = (d^2 + d - 2)x^d + \dots$$

et comme le second membre est identiquement nul, il faut que

$$0 = d^2 + d - 2 = (d - 1)(d + 2)$$

et donc que $d = 1$.

En substituant $y(x) = x + a$ dans l'équation, on trouve $a = 0$.

Par conséquent, y est une solution polynomiale de l'équation (E) si, et seulement si, il existe une constante réelle K telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = Kx.$$

[2.]

L'énoncé suggère simplement d'achever la résolution de l'équation en appliquant la méthode de variation de la constante!

On cherche une solution y de la forme $y(x) = xz(x)$. En supposant que z soit de classe \mathcal{C}^2 , on en déduit que

$$\begin{aligned} y(x) &= xz(x) \\ y'(x) &= xz'(x) + z(x) \\ y''(x) &= xz''(x) + 2z'(x) \end{aligned}$$

et donc que

$$(x^2 - 1)y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = (x^2 - 1)xz''(x) + (4x^2 - 2)z'(x).$$

La fonction z est donc une solution de l'équation

$$(x^2 - 1)xz''(x) + (4x^2 - 2)z'(x) = 0. \quad (E')$$

On remarquera que cette équation est en fait une équation du *premier ordre* en l'inconnue $z'(x)$.

[3.] Avec les méthodes usuelles, on trouve rapidement

$$\frac{2 - 4X^2}{X(X^2 - 1)} = \frac{-2}{X} - \frac{1}{X - 1} - \frac{1}{X + 1}.$$

[4.] En considérant (E') comme une équation d'inconnue $z'(x)$, on déduit de la décomposition en éléments simples précédentes que z est solution de (E') si, et seulement si, il existe une constante réelle K_1 telle que

$$z'(x) = \frac{K_1}{x^2(x + 1)(x - 1)}.$$

Nouvelle décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{x^2(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{x^2} - \frac{1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1}$$

et on en déduit que z est solution de (E') si, et seulement si, il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que

$$z(x) = K_2 + K_1 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right).$$

Par conséquent, y est solution de (E) si, et seulement si, il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que

$$y(x) = K_1 \left(1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right) + K_2 x.$$

On a passé sous silence la question des intervalles de définition. Il y a ici trois singularités : $x = \pm 1$ (qui se voient sur l'équation différentielle elle-même) et $x = 0$ (qui apparaît lors de la mise en œuvre de la méthode de variation de la constante). Par conséquent, il y a quatre intervalles de résolution :

$$I_1 =]-\infty, -1[, \quad I_2 =]-1, 0[, \quad I_3 =]0, 1[, \quad I_4 =]1, +\infty[$$

et, pour chacun de ces intervalles, il y a deux constantes d'intégration — soit en tout huit constantes d'intégration!

Plus précisément, pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, il existe deux constantes réelles A_k et B_k telles que

$$\forall x \in I_k, \quad y(x) = A_k \left(1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right) + B_k x.$$

Je rappelle que $\ln |u(x)|$ est une primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ sur tout intervalle sur lequel la fonction u ne s'annule pas.

Il est donc inutile de discuter sur l'intervalle pour calculer les primitives, c'est seulement pour simplifier l'expression des primitives (= éliminer la valeur absolue) que la discussion est nécessaire.

On peut ensuite se pencher sur la question des raccordements en $x = 0$ et en $x = \pm 1$.

Pour que les solutions sur I_3 et I_4 se raccordent par continuité en $x = 1$, il faut d'une part que $A_3 = A_4 = 0$ (pour qu'il y ait une limite finie) et d'autre part que $B_3 = B_4$ (pour que les limites à gauche et à droite coïncident).

Il est clair que la fonction $[x \mapsto Bx]$ est solution sur $]0, +\infty[$.

Idem pour le raccordement autour de $x = -1$.

Pour le raccordement en $x = 0$, il faut que $A_2 = A_3$ (égalité de la limite à gauche et de la limite à droite pour la continuité) et que $B_2 = B_3$ (égalité de la dérivée à gauche et de la dérivée à droite pour la dérivabilité).

Réciproquement, quelles que soient les constantes A et B , sur l'intervalle $] -1, 1[$, les solutions de la forme

$$Ax + B \left[1 + \frac{x}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right],$$

sont clairement développables en série entières sur $] -1, 1[$: on aurait donc pu trouver ces solutions en cherchant les solutions développables en série entière (ce qui aurait masqué la singularité en $x = 0$).

Avec

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

on obtient la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n-1}{n+1} \cdot a_n.$$

Pour les indices impairs, le coefficient a_1 peut être choisi arbitrairement et comme $a_3 = 0 \times a_1$, tous les autres termes d'indice impair sont nuls.

Pour les indices pairs, on trouve

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \frac{-a_0}{2p-1}$$

donc

$$y(x) = a_1 x + a_0 \left(1 - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{2^p - 1} \right),$$

ce qui est conforme aux résultats trouvés plus haut.

☞ *Enfin, pour l'anecdote, les solutions sur \mathbb{R} sont les fonctions $[x \mapsto Ax]$ (pour $A \in \mathbb{R}$ quelconque).*

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = & y - z \\ y' = -x & + z \\ z' = x - y \end{cases} \quad (S)$$

avec les conditions $x(0) = 1$ et $y(0) = z(0) = 0$.

[1.] Discuter l'existence et l'unicité des solutions de (S).

[2.] On suppose que (x, y, z) est une solution de (S). Démontrer que les fonctions $x + y + z$ et $x^2 + y^2 + z^2$ sont constantes. Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?

[3.] Résoudre le système (S).

[1.] Le système (S) peut aussi s'écrire sous la forme d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants sous forme résoluble :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A \cdot X(t) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $I = \mathbb{R}$ est un intervalle, la Théorie de Cauchy-Lipschitz nous assure que, pour la condition initiale particulière

$$(t = 0, X(0) = (1, 0, 0)),$$

le système (S) admet une, et une seule, solution.

[2.] En tant que fonctions polynomiales des fonctions x, y et z (qui sont de classe \mathcal{C}^1 sur I), les fonctions $f = x + y + z$ et $g = x^2 + y^2 + z^2$ sont de classe \mathcal{C}^1 et, d'après (S),

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) &= x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0 \\ g'(t) &= 2(x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)) = 0 \end{aligned}$$

donc les fonctions f et g sont constantes sur l'intervalle I .

D'après la condition initiale, $f(0) = g(0) = 1$.

La trajectoire

$$\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in \mathbb{R}\}$$

est donc contenue dans l'intersection du plan affine d'équation $[x + y + z = 1]$ et de la sphère d'équation $[x^2 + y^2 + z^2 = 1]$: elle est donc contenue dans un cercle.

REMARQUE.— Il est trop tôt pour établir que l'inclusion réciproque est vraie.

Variantes

Si $AX = \lambda X$, alors $A^n X = \lambda^n X$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^N \frac{t^n A^n}{n!} \cdot X = \sum_{n=0}^N \frac{(t\lambda)^n}{n!} \cdot X.$$

Il est clair que le second membre tend vers $e^{\lambda t} \cdot X$. Comme l'application

$$[M \mapsto MX]$$

est continue (application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie), on déduit du théorème de composition des limites que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (M_n \cdot X) = \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} M_n \right) \cdot X$$

et donc, par unicité de la limite, que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) \cdot X = e^{\lambda t} \cdot X.$$

Ce qui vaut pour les colonnes vaut aussi pour les lignes : comme

$$(1 \ 1 \ 1) \cdot A = (0 \ 0 \ 0) = 0 \cdot (1 \ 1 \ 1),$$

alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (1 \ 1 \ 1) \cdot X(t) = (1 \ 1 \ 1) \cdot \exp(tA) \cdot X(0) = e^{0 \cdot t} \cdot (1 \ 1 \ 1) \cdot X(0) = f(0) = 1.$$

☛ On peut aussi remarquer que $g(t) = X(t)^\top \cdot X(t)$.

► On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) &= [X'(t)]^\top \cdot X(t) + X(t)^\top \cdot X'(t) \\ &= [A \cdot X(t)]^\top \cdot X(t) + X(t)^\top \cdot A \cdot X(t) \\ &= X(t)^\top \cdot (-A) \cdot X(t) + X(t)^\top \cdot A \cdot X(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque la matrice A est anti-symétrique.

► Mais on peut procéder d'une autre manière! Comme $X(t) = \exp(tA) \cdot X(0)$, alors

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t)^\top \cdot X(t) &= X(0)^\top \cdot [\exp(tA)]^\top \cdot \exp(tA) \cdot X(0) \\ &= X(0)^\top \cdot \exp(tA^\top) \cdot \exp(tA) \cdot X(0) \\ &= X(0)^\top \cdot \exp(0_n) \cdot X(0) \\ &= X(0)^\top \cdot X(0) \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'expression $g(t) = X(t)^\top \cdot X(t)$ est bien indépendante de t .

[3.] La matrice A étant anti-symétrique, elle n'est pas diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ mais elle l'est dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ (un peu de culture mathématique ne peut pas nuire).

Comme je n'ai pas envie de calculer dans \mathbb{C} , je vais calculer le polynôme minimal de A pour en déduire l'expression générale des puissances de A .

► On vérifie sans peine que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad A^3 = -3A.$$

On en déduit (de proche en proche, par tâtonnements) que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^{2p+1} = (-3)^p A \quad \text{et que} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^{2p} = (-3)^{p-1} A^2.$$

☛ Le polynôme $X^3 + 3X = X(X^2 + 3)$ est un polynôme annulateur de A , c'est même son polynôme minimal et son polynôme caractéristique — mais c'est inutile de le savoir, ça ne simplifierait pas nos calculs.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) &= I_3 + \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{p-1} t^{2p}}{(2p)!} \right) \cdot A^2 + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-3)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) \cdot A \\ &= I_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (\sqrt{3} t)^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) \cdot A - \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p (\sqrt{3} t)^{2p}}{(2p)!} \right) \cdot A^2 \\ &= \left[I_3 - \frac{1}{3} A^2 \right] + \frac{\sin \sqrt{3} t}{\sqrt{3}} \cdot A + \frac{\cos \sqrt{3} t}{3} \cdot A^2. \end{aligned}$$

En tenant compte de la condition initiale,

$$X(t) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left[\cos \sqrt{3} t \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin \sqrt{3} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Comme les deux vecteurs qui apparaissent dans le crochet sont unitaires et orthogonaux, on reconnaît bien le paramétrage d'un cercle de rayon $\sqrt{2/3}$ et de centre $\frac{1}{3} \cdot (5, -1, -1)$.

On vérifie sans peine que ce cercle est contenu dans le plan $[x + y + z = 1]$.

Soient X et Y , deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} , définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi. On suppose que X admet un moment d'ordre deux et que la variable aléatoire

$$Z = X + Y + 1$$

suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

[1.] Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$ en fonction de p .

[2.a.] Calculer la fonction génératrice de X .

[2.b.] En déduire la loi de X .

[1.] Comme Z suit la loi $\mathcal{G}(p)$, alors $\mathbf{E}(Z) = 1/p$ et $\mathbf{V}(Z) = q/p^2$.

• Comme X et Y ont même loi et par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) + 1 = 1 + 2\mathbf{E}(X)$$

et donc

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1-p}{2p} = \frac{q}{2p}.$$

• Par ailleurs, comme X et Y sont indépendantes,

$$\mathbf{V}(Z) = \mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = 2\mathbf{V}(X)$$

et donc $\mathbf{V}(X) = \frac{q}{2p^2}$.

[2.a.] Comme Z suit la loi $\mathcal{G}(p)$, alors

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_Z(t) = \frac{pt}{1-qt}.$$

Or $Z = X + Y + 1$ et comme X et Y sont indépendantes,

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_Z(t) = \mathbf{E}(t^Z) = \mathbf{E}(t^X \cdot t^Y \cdot t^1) = \mathbf{E}(t^X) \cdot \mathbf{E}(t^Y) \cdot t = t[G_X(t)]^2.$$

Or $G_X(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ (somme de termes positifs), donc

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_X(t) = \sqrt{\frac{pt}{1-qt}}.$$

[2.b.] On sait que

$$\forall u \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2) \cdots [-(2k-1)/2]}{k!} u^k.$$

Par conséquent, avec $u = -qt$ (où $0 < q < 1$),

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_X(t) = \sqrt{p} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \cdot \frac{q^k}{4^k} \cdot t^k \right].$$

Comme le rayon de convergence d'une série génératrice est au moins égal à 1, on peut identifier les coefficients terme à terme. On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\sqrt{p} q^k}{4^k} \binom{2k}{k}.$$

Soient u et v , deux endomorphismes de E , espace vectoriel complexe de dimension finie. Démontrer que toute valeur propre λ de $u \circ v$ est aussi une valeur propre de $v \circ u$.

Indication : on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$.

• **Cas $\lambda = 0$**

Puisque E est un espace de dimension finie, le réel 0 est une valeur propre de $u \circ v$ si, et seulement si, $\det(u \circ v) = 0$. Or

$$\det(v \circ u) = \det v \cdot \det u = \det(u \circ v) = 0$$

donc 0 est aussi une valeur propre de $v \circ u$.

• **Variante sans déterminant.**

Si 0 n'est pas une valeur propre de $v \circ u$, alors $v \circ u$ est injectif, donc u est injectif, donc (Théorème du rang, puisque u est un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension finie) u est inversible. De ce fait, l'endomorphisme

$$v = (v \circ u) \circ u^{-1}$$

est injectif comme composé d'endomorphismes injectifs et $u \circ v$ est alors injectif (pour la même raison).

• **Cas $\lambda \neq 0$**

Soit $x \in E$, un vecteur propre de $u \circ v$ associé à $\lambda \neq 0$:

$$u(v(x)) = \lambda \cdot x \neq 0_E$$

(puisque $\lambda \neq 0$ par hypothèse et $x \neq 0_E$ en tant que vecteur propre). Par conséquent, $v(x) \neq 0_E$ et en composant par v l'égalité précédente, on obtient

$$v[u(v(x))] = v(\lambda \cdot x)$$

c'est-à-dire

$$(v \circ u)(v(x)) = \lambda \cdot v(x).$$

Comme $v(x) \neq 0_E$, on en déduit que $v(x)$ est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à λ .

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit $T(f)$ en posant $T(f)(0) = f(0)$ et

$$\forall x \neq 0, \quad T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

[1.] Démontrer que $T(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et que

$$\forall x > 0, \quad x[T(f)]'(x) + T(f)(x) = f(x).$$

[2.] Démontrer que $T(f)$ est continue en 0. En déduire que T est bien un endomorphisme de E .

[3.] Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de T .

[3.a.] Démontrer que $\lambda \neq 0$.

[3.b.] Démontrer qu'un vecteur propre de T associé à une valeur propre λ est une solution de l'équation différentielle suivante.

$$\forall x > 0, \quad y'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda x} y(x)$$

En déduire que le spectre de T est contenu dans $]0, 1]$.

[1.] Comme f est continue sur \mathbb{R} , on déduit du Théorème fondamental que $T(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et que

$$\forall x \neq 0, \quad [T(f)]'(x) = \frac{-1}{x^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} f(x) = \frac{-T(f)(x) + f(x)}{x}.$$

[2.] On recommence avec le Théorème fondamental!

En notant F , une primitive de f sur \mathbb{R} ,

$$\forall x \neq 0, \quad T(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}.$$

Comme F est une primitive de f , on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} T(f)(x) = F'(0) = f(0) = T(f)(0),$$

ce qui prouve que $T(f)$ est continue en 0.

• On a déjà démontré que $T(f)$ était continue sur \mathbb{R}^* , donc $T(f)$ est bien continue sur \mathbb{R} et T est bien une application de E dans E .

• La linéarité de l'intégrale permet de vérifier facilement que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(\lambda f + g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$$

quelles que soient les fonctions f et g dans E . Par conséquent, T est bien un endomorphisme de E .

[3.a.] Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de T . Il existe donc une fonction $f \in E$ non identiquement nulle telle que $T(f) = \lambda f$. D'après la première question,

$$\forall x \neq 0, \quad \lambda x f'(x) + \lambda f(x) = f(x). \quad (*)$$

Si $\lambda = 0$, alors f doit être identiquement nulle sur \mathbb{R}^* et comme f est continue sur \mathbb{R} , il faudrait que f soit identiquement nulle sur \mathbb{R} : c'est impossible par définition des vecteurs propres.

Donc 0 n'est pas valeur propre de T et l'application linéaire T est injective.

[3.b.] On reprend les calculs précédents. Comme $\lambda \neq 0$, l'équation différentielle (*) donne :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda x} \cdot f(x) = a \cdot \frac{f(x)}{x} \quad \text{avec} \quad a = \frac{1-\lambda}{\lambda}.$$

Une fonction f est solution de l'équation différentielle $y'(x) = \frac{a}{x} y(x)$ sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = Kx^a$ pour tout $x > 0$. On impose ici $f \in E$, donc il faut que f ait une limite finie au voisinage de 0 et donc que $a \in \mathbb{R}_+$.

L'étude du signe de $a = \frac{1-\lambda}{\lambda}$ montre que : si λ est une valeur propre de T , alors $0 < \lambda \leq 1$.

• Il est facile de vérifier la réciproque : pour tout réel $0 < \lambda \leq 1$, le paramètre $a = \frac{1-\lambda}{\lambda}$ est positif et on déduit de l'équation différentielle (*) que f est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ si, et seulement si, il existe deux constantes K_+ et K_- telles que

$$\forall x \leq 0, \quad f(x) = K_- |x|^a \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0, \quad f(x) = K_+ x^a.$$

La continuité de f n'impose aucune contrainte sur les constantes K_- et K_+ , donc le sous-espace propre de T associé à λ est un plan.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $(x, y) \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on pose

$$f(x, y) = \varphi(y/x).$$

- [1.] Démontrer que \mathcal{U} est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
 [2.] Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{U} .
 [3.] Calculer le laplacien de f .
 [4.] On suppose que f est harmonique sur \mathcal{U} (soit $\Delta f(M) = 0$ pour tout $M \in \mathcal{U}$). Que dire de φ ?

[1.] L'ensemble \mathcal{U} est le complémentaire de la droite vectorielle $[x = 0]$. Un sous-espace de dimension finie est toujours fermé, donc \mathcal{U} est ouvert (en tant que complémentaire d'une partie fermée).

Variantes

Si une suite $u_n = (x_n, y_n)$ de points dans \mathcal{U}^c converge vers un point $\ell = (\ell_x, \ell_y)$, alors en particulier y_n converge vers ℓ_y . Or $y_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par définition de \mathcal{U}^c), donc $\ell_y = 0$ et par conséquent $\ell \in \mathcal{U}^c$. Ainsi, la partie \mathcal{U}^c est fermée (car stable par passage à la limite) et son complémentaire \mathcal{U} est donc ouvert.

On peut aussi interpréter \mathcal{U} comme l'image réciproque de \mathbb{R}^* par l'application

$$\pi = [(x, y) \mapsto x] : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est ouvert (en tant qu'union de deux ouverts de \mathbb{R}) et l'application π est continue (application linéaire définie sur un espace de dimension finie), donc \mathcal{U} est ouvert (image réciproque d'un ouvert par une application continue).

Autre variante

On peut aussi représenter graphiquement \mathcal{U} (c'est le complémentaire de l'axe des ordonnées) et constater l'évidence : on voit bien que \mathcal{U} est un voisinage de chacun de ses points (à montrer sur la figure!).

[2.] Analysons la définition de f :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y/x & \longmapsto & f(x, y) \end{array}$$

la fonction f est la composée d'une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'ouvert \mathcal{U} par la fonction φ : c'est donc la composée d'une application de classe \mathcal{C}^∞ par une application de classe \mathcal{C}^2 , donc f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{U} .

[3.] On applique la formule de dérivation des fonctions composées.

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2} \cdot \varphi' \left(\frac{y}{x} \right) & \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \varphi' \left(\frac{y}{x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3} \cdot \varphi' \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{y^2}{x^4} \cdot \varphi'' \left(\frac{y}{x} \right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \varphi'' \left(\frac{y}{x} \right) \end{array}$$

et par conséquent

$$\Delta f(x, y) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) = \frac{2y}{x^3} \cdot \varphi' \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{x^2 + y^2}{x^4} \cdot \varphi'' \left(\frac{y}{x} \right)$$

pour tout $M = (x, y) \in \mathcal{U}$.

La règle de la chaîne est inutile ici, car la fonction φ est une fonction d'une seule variable réelle.

[4.] Sur \mathcal{U} , on a toujours $x \neq 0$, donc f est harmonique si, et seulement si,

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad x^2 \Delta f(x, y) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \left[1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right] \cdot f'' \left(\frac{y}{x} \right) + 2 \cdot \left(\frac{y}{x} \right) \cdot f' \left(\frac{y}{x} \right) = 0.$$

Comme l'application $(x, y) \mapsto y/x$ est surjective de \mathcal{U} dans \mathbb{R} , on en déduit que f est harmonique sur \mathcal{U} si, et seulement si,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (1 + t^2) \varphi''(t) + 2t \varphi'(t) = 0. \quad (\text{E})$$

Il s'agit en fait d'une équation du premier ordre en φ' , donc sa résolution se fait en deux étapes.

L'application φ est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = K_1 + K_2 \operatorname{Arctan} t.$$

Par conséquent, la fonction $f(x, y) = \varphi(y/x)$ est harmonique sur U si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = K_1 + K_2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}.$$

Soit X , une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

[1.] Calculer la probabilité pour que X soit paire et la probabilité pour que X soit un multiple de 3.

[2.] Ces événements sont-ils indépendants ?

[1.] Comme X est, par hypothèse, une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} et définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, [X = n] \in \mathcal{A}.$$

Par conséquent,

$$A = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = 2k] \quad \text{et} \quad B = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = 3k]$$

sont deux événements (= des éléments de la tribu \mathcal{A}).

Par σ -additivité de \mathbf{P} , on en déduit que

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{2k-1} = p(1-p) \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p},$$

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 3k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{3k-1} = p(1-p)^2 \cdot \frac{1}{1-(1-p)^3} = \frac{(1-p)^2}{3-3p+p^2}.$$

[2.] Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, X est simultanément multiple de 2 et multiple de 3 si, et seulement si, X est multiple de 6 :

$$A \cap B = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = 6k]$$

et, comme précédemment,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 6k) = p(1-p)^5 \cdot \frac{1}{1-(1-p)^6}.$$

Or

$$1 - q^6 = (1 - q^3)(1 + q^3) = (1 - q^3)(1 + q)(1 - q + q^2).$$

↳ C'est toujours utile de bien connaître les racines sixièmes de l'unité...

Donc

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{(1-p)^5}{(3-3p+p^2)(2-p)(1-p+p^2)} = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B) \cdot \frac{(1-p)^2}{1-p+p^2}.$$

Comme $(1-p)^2 = 1-2p+p^2 \neq 1-p+p^2$ pour tout $p \in]0, 1[$, on en déduit que $\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$ et donc que ces deux événements ne sont pas indépendants.

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $0 < u_0 < \pi/2$ et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin u_n.$$

[1.] Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Préciser sa limite.

[2.] Étudier la nature de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$. En déduire la nature de la série $\sum u_n^3$.

[3.] Étudier la nature de la série

$$\sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.

[1.] Par hypothèse, $0 < u_0 < \pi/2$ et on sait que

$$\forall x \in [0, \pi/2], \quad 0 \leq \sin x \leq \min\{x, 1\}.$$

Par conséquent, $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_{n+1} = \sin u_n \leq u_n.$$

En tant que suite décroissante et positive, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

La suite extraite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge elle aussi, vers la même limite. Or $u_{n+1} = \sin u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et \sin est continue sur \mathbb{R} , donc la limite ℓ vérifie $\sin \ell = \ell$, c'est-à-dire $\ell = 0$.

☞ On doit connaître quelques propriétés de \sin .

[2.] La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est une série télescopique. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

Le terme général de cette série est négatif (puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante), donc cette série est en fait *absolument* convergente.

☛ Comme u_n tend vers 0, on déduit du développement limité de \sin au voisinage de 0 que

$$u_{n+1} = \sin u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$$

et donc

$$u_n^3 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -6(u_{n+1} - u_n).$$

Comme la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente, on en déduit que la série $\sum u_n^3$ est absolument convergente.

☞ On ne peut appliquer AUCUN théorème de comparaison à une série semi-convergente.

[3.] Comme u_n tend vers 0 par valeurs strictement supérieures, la suite de terme général $\ln u_n$ tend vers $-\infty$. Or

$$\forall n \geq 1, \quad \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln u_{n+1} - \ln u_n.$$

Il s'agit à nouveau d'une série télescopique, mais elle est divergente.

☛ On sait que

$$\frac{\sin x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

et donc que

$$\ln \frac{\sin x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Par conséquent, comme u_n tend vers 0,

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-u_n^2}{6}$$

c'est-à-dire

$$u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -6 \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Le second membre est le terme général *positif* d'une série *divergente*, donc la série $\sum u_n^2$ est divergente.

☞ On peut démontrer à l'aide du Théorème de Cesaro que $u_n \sim \sqrt[3]{3/n}$. Cet équivalent explique les résultats précédents.