LUNDI 8 JUIN

Référence	Origine	Thèmes
135-144	ENS Ulm MP	Probabilités et groupe fini
135-208	ENS PC	Endomorphisme auto-adjoint
135-314	X MPI	Intérieur et adhérence
135-342	X MP	Intégrale (ou probabilités)
135-489	Mines MP	Sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
135-492	"	Ordre d'un élément
135-505	"	Endomorphisme nilpotent
135-769	"	Équation différentielle et série entière
135-809	"	Calcul de probabilité
135-810	"	Calcul de probabilité
135-811	"	Modèle probabiliste
135-838	"	Fonction génératrice

Exercice 1 — rms135-144

Soient G, un groupe fini de cardinal N et $A : \Omega \to \mathfrak{P}(G)$, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathfrak{P}(G)$. On suppose qu'il existe un réel $0 < p < 1$ tel que

$$\forall\, x \in G, \quad \mathbf{P}(x \in A) = p$$

et que la famille $([x \in A])_{x \in G}$ est une famille d'évènements indépendants.

On définit la variable aléatoire $B : \Omega \to \mathfrak{P}(G)$ en posant

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad B(\omega) = \{xy,\ (x,y) \in A(\omega) \times A(\omega)\}.$$

[**1.**] Démontrer que

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbf{P}(1 \in B) = 1.$$

[**2.**] Démontrer que

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbf{P}(B = G) = 1.$$

Exercice 2 — rms135-208

Soient E, un espace euclidien et a, un endomorphisme auto-adjoint de E.

Pour un vecteur $u \in E$ *non nul*, on considère le sous-espace

$$V = \mathrm{Vect}(a^k(u),\ k \in \mathbb{N}).$$

Démontrer que les valeurs propres de l'endomorphisme induit par restriction de a à V sont simples.

Exercice 3 — rms135-314

Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les ensembles

$$A, \quad \overset{\circ}{A}, \quad \bar{A}, \quad \overset{\circ}{\bar{A}}, \quad \bar{\overset{\circ}{A}}$$

soient deux à deux distincts.

Exercice 4 — rms135-342

Soient a et b, deux réels positifs et $f : [0,1] \to [-a,b]$, une fonction continue. On suppose que

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 0.$$

Démontrer que

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt \leqslant ab.$$

Variante

Soit X, une variable aléatoire admettant un moment d'ordre deux. On suppose que X est centrée et que $\mathbf{P}(-a \leqslant X \leqslant b) = 1$. Démontrer que

$$\mathbf{V}(X) \leqslant ab.$$

Exercice 5 — rms135-489

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer et dénombrer les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 6 — rms135-492

Soit $(G, \cdot)$, un groupe abélien. On considère deux éléments x et y de G en supposant que l'ordre $a \in \mathbb{N}^*$ de x et l'ordre $b \in \mathbb{N}^*$ de y sont premiers entre eux.

[**1.**] Démontrer que l'ordre de xy est égal à ab.

[**2.**] Démontrer que le sous-groupe $\langle xy \rangle$ engendré par le produit xy est l'ensemble

$$H = \left\{x^m \cdot y^n,\ 0 \leqslant m < a, 0 \leqslant n < b\right\}.$$

Exercice 7 — rms135-505

Soit f, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = \omega$. On suppose que F est un plan vectoriel stable par f. Démontrer que $\operatorname{Im} f \subset F$.

Exercice 8 — rms135-769

On considère l'équation différentielle

$$2xy''(x) + y'(x) - y(x) = 0 \tag{E}$$

[**1.**] Démontrer que (E) possède une, et une seule, solution f sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et qui soit la somme d'une série entière.

[**2.**] Donner l'expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

[**3.**] Résoudre l'équation (E) à l'aide du changement d'inconnue $y(x) = z(x)f(x)$.

Exercice 9 — rms135-809

Un magasin dispose d'un stock de N produits. Le nombre de clients qui passent dans une journée suit la loi de Poisson de paramètre λ et chaque client a une probabilité p d'acheter le produit. Quelle est la probabilité pour que le magasin soit en rupture de stock avant la fin de la journée ?

Exercice 10 — rms135-810

On dispose de N dés identiques à six faces. On lance ces dés et, après chaque lancer, on relance ceux qui n'ont pas donné ⚅. On note S_n, le nombre total de dés ayant donné ⚅ après le n-ième lancer.

[**1.**] Proposer un modèle probabiliste pour lequel S_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.

[**2.**] Déduire de ce modèle que, presque sûrement, les N dés donnent ⚅ après un nombre fini de lancers :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n = N]\right) = 1.$$

[**3.**] Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$T(\omega) = \inf\left(\left\{n \in \mathbb{N}^* : S_n(\omega) = N\right\} \cup \{+\infty\}\right).$$

[**3. a.**] Démontrer que T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et préciser sa loi.

[**3. b.**] Démontrer que T est une variable aléatoire d'espérance finie et calculer cette espérance.

Exercice 11 rms135-811

Un péage autoroutier comporte trois files et n véhicules se présentent, en choisissant aléatoirement une voie. Pour $i \in [\![1, 3]\!]$, on note X_i, le nombre de véhicules qui passent par la file i.

[**1.**] Proposer un modèle probabiliste dans lequel X_1, X_2 et X_3 sont des variables aléatoires.

[**2.**] Déduire de ce modèle $\mathbf{V}(X_1)$, $\mathbf{V}(X_2)$ et $\mathbf{V}(X_1 + X_2)$. En déduire $\mathbf{Cov}(X_1, X_2)$.

[**3.**] Les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont-elles indépendantes ?

Exercice 12 rms135-838

[**1.**] Rappeler (sans démonstration) le développement en série entière au voisinage de 0 de

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

[**2.**] Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel r pour qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{(2n)!}{2^{3n}(n!)^2} \cdot r.$$

[**3.**] Calculer alors l'espérance et la variance de X.