Mardi 9 juin

Référence	Origine	Thèmes
135-1449	IMT MP	Suite définie implicitement
135-1451	"	Série numérique
135-1498	"	Série génératrice
135-1526	CCINP PSI	Projecteurs orthogonaux
135-1530	IMT PSI	Matrices de rang 1
135-1532	CCINP PSI	Matrice symétrique
135-1575	"	Équation différentielle
135-1579	Navale PSI	Loi de probabilité discrète
135-1583	CCINP PSI	Couple de variables aléatoires

Exercice 1 — rms135-1449

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$g_n(t) = \ell n\, t - \operatorname{Arctan} t - n\pi.$$

[**1.**] Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g_n(x_n) = 0$.
[**2.**] Démontrer que $e^{n\pi} < x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la nature de la série $\sum 1/x_n$.

Exercice 2 — rms135-1451

On considère la suite u définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

[**1.**] Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
[**2.**] Quelle est la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$?

Exercice 3 — rms135-1498

On pose

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}\, t^n.$$

[**1.**] Calculer le rayon de convergence de cette série entière.
[**2.**] Expliciter $S(t)$ pour $t \in \left]-R, R\right[$.
[**3.**] Soit X, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall\, t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = \lambda S(t).$$

[**3. a.**] Que vaut λ ?
[**3. b.**] Calculer $\mathbf{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
[**3. c.**] Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 4 — rms135-1526

Soient $(E, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$, un espace euclidien ; $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, une base orthonormée de E et $p \in L(E)$, un projecteur orthogonal.
[**1.**] Pour tout $x \in E$,

$$\langle\, p(x)\,|\,x\,\rangle = \|p(x)\|^2.$$

[**2.**] Démontrer que

$$\operatorname{rg} p = \sum_{k=1}^{n} \|p(e_k)\|^2.$$

Exercice 5 rms135-1530

Soient $U \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (avec $n \geqslant 2$) et $A = U.U^\top$.
[1.] La matrice A est-elle diagonalisable ?
[2.] Déterminer le rang de A. Quel est le spectre de A ?
[3.] Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 6 rms135-1532

[1.] Rappeler l'inégalité de Schwarz.
[2.] Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant r} \in \mathbb{R}^r$,

$$\left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k\right)^2 \leqslant r \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^2.$$

[3.] Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$(\operatorname{tr} B)^2 \leqslant \operatorname{rg} B \cdot \operatorname{tr}(B^2).$$

[4.] Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad b_{i,i} = 1$$

et que

$$\forall\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \quad |b_{i,j}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

[4. a.] Exprimer $\operatorname{tr}(B^2)$ et vérifier que $\operatorname{tr}(B^2) \leqslant 2n$.
[4. b.] Démontrer que $\operatorname{rg} B \geqslant n/2$.

Exercice 7 rms135-1575

On considère l'équation différentielle suivante.

$$\forall\, t \in I =]0, +\infty[, \quad t^2 x''(t) + t x'(t) + x(t) = \frac{1}{t} + t \tag{E}$$

[1.] Que prévoit le Théorème de Cauchy-Lipschitz pour l'équation (E) ?
[2.] Soient $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $g = [x \mapsto f(e^x)]$. Démontrer que f est solution de (E) sur I si, et seulement si, g est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle du second ordre (qu'on déterminera).
[3.] Résoudre l'équation (E).

Exercice 8 rms135-1579

Soit X, une variable aléatoire telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

[1.] Vérifier que l'énoncé a un sens.
[2.] Calculer la fonction génératrice de X.
[3.] Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 9 rms135-1583

Soient X et Y, deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et que la loi conditionnelle de Y sachant $[X = m]$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(m, p)$ (avec $0 < p < 1$).
[1.] Déterminer la loi de (X, Y).
[2.] En déduire la loi de Y.
[3.] Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
[4.] Déterminer la loi de $Z = X - Y$. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?