Mercredi 10 juin

Référence	Origine	Thèmes
130-319	X MP	Équivalent de la somme d'une série entière
130-469	Mines MP	Décomposition d'une permutation
130-470	"	Morphismes de groupes
130-471	"	Groupe cyclique
130-483	"	Vers l'application det
130-498	"	Réduction d'un endomorphisme
130-511	"	Vers la co-trigonalisation
130-516	"	Sous-espaces stables par un endomorphisme
130-529	"	Matrices symétriques et polynômes
130-532	"	Similitude de A et de $A^\top$
130-541	"	Classe de similitude d'une matrice
130-544	"	Compacité et point fixe
130-566	"	Zéros des solutions d'une équation différentielle
130-574	"	Calcul d'une intégrale (archi-classique)
130-600	"	Inégalité de Gronwall
130-601	"	Étude qualitative d'une équation différentielle
130-624	"	Variables aléatoires indépendantes
130-630	"	Cardinal d'un ensemble aléatoire

Exercice 1 rms130-319

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite complexe de limite nulle. On pose

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n.$$

[**1.**] Démontrer que f est définie sur $]-1,1[$.
[**2.**] Démontrer que

$$\lim_{t\to 1^-} (1-t)f(t) = 0.$$

Exercice 2 rms130-469

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma \in \mathfrak{S}_n$, un cycle. Écrire γ comme un produit de transpositions.

Exercice 3 rms130-470

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les morphismes de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 4 rms130-471

Soit G, un sous-groupe fini de $GL_2(\mathbb{C})$ tel que $G \cap SL_2(\mathbb{C}) = \{I_2\}$. Démontrer que G est cyclique.

Exercice 5 rms130-483

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$, un corps. On considère une application non constante

$$f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

telle que

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad f(AB) = f(A).f(B).$$

Démontrer que $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $f(M) \neq 0$.

Exercice 6 rms130-498

Soient E, un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$ et f, un endomorphisme de E tel que f^2 soit un projecteur.

[**1.**] Démontrer que f est trigonalisable.

[**2.**] Démontrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.

Exercice 7 rms130-511

Soient E, un espace vectoriel complexe de dimension finie (non nulle) et u, v, deux endomorphismes de E. Démontrer que u et v admettent un vecteur propre commun dans chacun des trois cas suivants.

[**1.**] $u \circ v = 0$

[**2.**] $u \circ v \in \mathbb{C} \cdot u$

[**3.**] $u \circ v \in \mathrm{Vect}(u, v)$

Exercice 8 rms130-516

Soient E, un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$ et u, un endomorphisme de E. On suppose que les seuls sous-espaces vectoriels stables par u sont $\{0_E\}$ et E. Démontrer que $n = 2$.

Exercice 9 rms130-529

Soient $A_1, \dots, A_p$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant p, \quad A_i \in \mathbb{R}[A].$$

Exercice 10 rms130-532

[**1.**] La matrice S est symétrique et définie positive si, et seulement si, il existe une matrice inversible P telle que $S = P.P^\top$.

[**2.**] Quelles que soient $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la matrice ST est diagonalisable.

[**3.**] Si A est diagonalisable, alors il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$A^\top = S^{-1}.A.S.$$

Étudier la réciproque.

Exercice 11 rms130-541

On considère deux suites $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui convergent respectivement vers les matrices A et B.

[**1.**] On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les matrices A_k et B_k sont semblables. Les matrices A et B sont-elles semblables ?

[**2.**] Même question en supposant cette fois que les matrices A et B sont orthosemblables ?

Exercice 12 rms130-544

Soit $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé réel. On considère un compact K (non vide) de E et une application $f : K \to K$ telle que

$$\forall\, x \neq y, \qquad \big\|f(x) - f(y)\big\| < \|x - y\|.$$

[**1.**] Démontrer que l'application f admet un unique point fixe, qu'on notera ω.

[**2.**] On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = f(x_n).$$

Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ω.

Exercice 13 rms130-566

[**1.**] Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, une application dérivable. On suppose que

$$\forall\, x \in [0, 1], \qquad \big(f(x), f'(x)\big) \neq (0, 0).$$

Démontrer que l'ensemble des zéros de f est fini.

[**2.**] Soit $q : [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction continue. On considère une fonction $f \in \mathscr{C}^2([0,1])$, non identiquement nulle, qui vérifie l'équation différentielle

$$\forall\, x \in [0,1], \quad y''(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Démontrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros.

Exercice 14 — rms130-574

Soient a et b, deux réels strictement positifs. Existence et calcul de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt.$$

Exercice 15 — rms130-600

Soit $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère une solution f de l'équation différentielle

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad y''(x) + \big(1 + u(x)\big)y(x) = 0$$

et on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t)\, dt.$$

[**1.**] Former une équation différentielle linéaire vérifiée par g.

[**2.**] Démontrer qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \big|f(x)\big| \leqslant x + \int_0^x \big|u(t)f(t)\big|\, dt.$$

[**3.**] Démontrer que la fonction f est bornée.

Exercice 16 — rms130-601

Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad y''(x) + q(x)y(x) = 0. \qquad \text{(E)}$$

[**1.**] On suppose que f est une solution bornée de (E). Démontrer que sa dérivée f' tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

[**2.**] Démontrer que (E) admet des solutions non bornées.

Exercice 17 — rms130-624

Soient X et Y, deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$. Que dire de Y ?

Exercice 18 — rms130-630

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur un même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui suivent toutes la même loi. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $R_n(\omega)$, le cardinal de l'ensemble aléatoire

$$\big\{X_k(\omega),\ 1 \leqslant k \leqslant n\big\}.$$

[**1.**] Démontrer que

$$\forall\, a \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(R_n) \leqslant a + n\,\mathbf{P}(X_1 \geqslant a).$$

[**2.**] En déduire que $\mathbf{E}(R_n) = o(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

[**3.**] On suppose que les X_n sont des variables d'espérance finie. Démontrer que $\mathbf{E}(R_n) = o(\sqrt{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.