

---

# JEUDI 11 JUIN

---

Référence	Origine	Thèmes
135-143	ENS PSLR MP	Calcul de probabilités
135-350	X MPI	Rayon de convergence
135-485	Mines MP	Extremas d'une somme
135-487	"	Variante du Théorème de Bézout
135-493	"	Axiomes de groupe
135-784	"	Équation différentielle à coefficients périodiques
135-823	"	Vecteurs propres aléatoires
135-842	"	Fonction génératrice
135-962	Mines PSI	Équation différentielle avec singularité
135-964	"	Système différentiel linéaire
136-1416	CCINP MP	Intégrale fonction d'un paramètre
136-1417	IMT MP	Développement asymptotique d'une suite d'intégrales
136-1425	"	Fonction définie par une intégrale
136-1426	CCINP MP	Intégrale fonction d'un paramètre
136-1428	IMT MP	Intégrale fonction d'un paramètre
136-1429	"	Intégrale fonction d'un paramètre
136-1435	CCINP MP	Calcul différentiel dans un espace euclidien
136-1574	CCINP PSI	Intégrale fonction d'un paramètre (Python)
136-1576	IMT PSI	Intégrale fonction d'un paramètre (Python)
136-1585	"	Plan tangent à une surface

## Exercice 1

rms135-143

Soient  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $0 < p < 1$ . On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , à valeurs dans  $\mathfrak{F}(E)$ , indépendantes et de même loi. On suppose que

$$\forall i \in E, \quad \mathbf{P}(i \in X) = p$$

et que, pour  $i \neq j$  dans  $E$ , les deux événements  $[i \in X]$  et  $[j \in X]$  sont indépendants.

Calculer l'espérance de  $\#(X \Delta Y)$ .

## Exercice 2

rms135-350

Soit  $\sum a_n z^n$ , une série entière dont le rayon de convergence est un réel strictement positif. Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum a_n z^{n^2}.$$

## Exercice 3

rms135-485

Soient  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $(b_1, \dots, b_n)$ , deux listes de réels. On considère l'application

$$f : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad f(\sigma) = \sum_{k=1}^n a_k b_{\sigma(k)}.$$

Démontrer que  $f$  atteint un maximum et un minimum. Expliciter ces deux extrema.

## Exercice 4

rms135-487

Deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si, et seulement si, pour tout entier  $n \geq ab$ , il existe deux entiers naturels  $u$  et  $v$  tels que

$$au + bv = n.$$

**Exercice 5****rms135-493**

Soit  $G$ , un ensemble muni d'une loi de composition interne associative  $*$ . On suppose qu'il existe un élément  $e \in G$  tel que

$$\forall x \in G, \quad x * e = x$$

et que

$$\forall x \in G, \exists x' \in G, \quad x * x' = e.$$

Démontrer que  $(G, *)$  est un groupe.

**Exercice 6****rms135-784**

Soit  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ , une application continue de période  $T > 0$ . Démontrer qu'il existe un nombre complexe  $\lambda \neq 0$  et une application  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et non identiquement nulle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t) \quad \text{et} \quad X(t+T) = \lambda X(t).$$

**Exercice 7****rms135-823**

Soient  $X, Y$  et  $Z$ , trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . On suppose que

$$X \stackrel{d}{=} Z \stackrel{d}{=} \mathcal{G}(p) \quad \text{et que} \quad Y \stackrel{d}{=} \mathcal{P}(\lambda).$$

Calculer la probabilité pour que le vecteur aléatoire

$$u = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

soit un vecteur propre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 8****rms135-842**

Démontrer qu'il existe une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  dont la fonction génératrice vérifie

$$\forall t \in [0, 1], \quad G(t) = \frac{e^{t-1}}{\sqrt{2-t}}.$$

Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

**Exercice 9****rms135-962**

On considère l'équation différentielle

$$x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x) = 0 \tag{E}$$

- [ 1. ] Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
- [ 2. ] Résoudre (E) sur un intervalle  $I$  sans singularité.
- [ 3. ] Peut-on raccorder les solutions de part et d'autre d'une singularité ?

**Exercice 10****rms135-964**

[ 1. ] On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = Ax(t) \tag{H}$$

où  $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ .

Démontrer que  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur propre de  $A$  si, et seulement si, il existe un vecteur *non nul*  $x_\lambda \in \mathbb{R}^3$  tel que la fonction

$$f_\lambda = [t \mapsto e^{\lambda t} x_\lambda]$$

soit une solution de l'équation (H).

[ 2. ] Pour  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix}$$

et  $F = \{f_{a,b,c}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$ .

[ 2.a. ] Démontrer que  $F$  est un espace vectoriel. Préciser sa dimension.

[ 2.b. ] Déterminer une matrice  $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall f \in F, \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = Mf(t).$$

Quel est le spectre de  $M$ ?

### Exercice 11

rms136-1416

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt^2) e^{-t} dt.$$

[ 1. ] Démontrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Expliciter la valeur de  $F^{(k)}(0)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

[ 2. ] La fonction  $F$  est-elle développable en série entière au voisinage de 0?

### Exercice 12

rms136-1417

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$I_n = \int_1^e \ln^n t dt.$$

[ 1. ] Déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

[ 2. ] Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

[ 3. ] Donner un développement asymptotique à deux termes de  $I_n$ .

### Exercice 13

rms136-1425

On pose

$$f(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

[ 1. ] Démontrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

[ 2. ] Déterminer une équation différentielle vérifiée par  $f$ .

[ 3. ] Démontrer que  $f$  est développable en série entière et calculer son développement.

### Exercice 14

rms136-1426

On pose

$$\varphi(x, t) = e^{-t^2} \operatorname{ch}(xt).$$

[ 1. ] Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Démontrer que l'application  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

[ 2. ] L'application  $F$  définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(xt) dt$$

est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$ ?

[ 3. ] Déterminer une équation différentielle vérifiée par  $F$ . En déduire une expression simple de  $F$ .

☞ On admettra que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

**Exercice 15****rms136-1428**

Pour  $x > -1$ , on pose

$$f(x) = \int_0^1 (1-t^2)^x dt.$$

Démontrer que  $f$  est bien définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-1, +\infty[$ .

**Exercice 16****rms136-1429**

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin xt}{t} dt.$$

- [ 1. ] Démontrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- [ 2. ] Exprimer  $F$  à l'aide des fonctions usuelles.

**Exercice 17****rms136-1435**

On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique.

Soit  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . On considère les applications  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \langle u(x) | x \rangle \quad \text{et} \quad g(x) = \|x\|^2 - 1.$$

- [ 1. ] Soit  $K$ , l'image réciproque de  $\{0\}$  par  $g$ . Démontrer que  $K$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}^n$ .
- [ 2. ] Démontrer que la restriction de  $f$  à  $K$  atteint un maximum en un point qui sera noté  $a$ .
- [ 3. ] Démontrer que  $g$  est différentiable. Calculer l'expression de sa différentielle.
- [ 4. ] Démontrer que  $f$  est différentiable. Calculer l'expression de sa différentielle.
- [ 5. ] Démontrer que  $a$  est un vecteur propre de  $u$ .

**Exercice 18****rms136-1574**

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{(1+t^2)^2} dt.$$

- [ 1. ] Démontrer que  $f$  est bien définie. L'application  $f$  est-elle paire? continue?
- [ 2. ] Démontrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
- [ 3. ] Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{-x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt.$$

- [ 4. ] Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par  $f$ .

**Exercice 19****rms136-1576**

On pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + e^{tx} + e^{-t}}.$$

- [ 1. ] Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $f$ .
- [ 2. ] Démontrer que  $f$  est continue sur  $D$ .
- [ 3. ] Déterminer des équivalents de  $f$  aux bornes de  $D$ .

**Exercice 20****rms136-1585**

On considère la surface  $S \subset \mathbb{R}^3$  d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z = 1.$$

Déterminer les plans tangents à  $S$  qui sont parallèles au plan  $P$  d'équation

$$x + y + z = 1.$$