

---

## LUNDI 8 JUIN

---

Référence	Origine	Thèmes
135-144	ENS Ulm MP	Probabilités et groupe fini
135-208	ENS PC	Endomorphisme auto-adjoint
135-314	X MPI	Intérieur et adhérence
135-342	X MP	Intégrale (ou probabilités)
135-489	Mines MP	Sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
135-492	"	Ordre d'un élément
135-505	"	Endomorphisme nilpotent
135-769	"	Équation différentielle et série entière
135-809	"	Calcul de probabilité
135-810	"	Calcul de probabilité
135-811	"	Modèle probabiliste
135-838	"	Fonction génératrice

Soient  $G$ , un groupe fini de cardinal  $N$  et  $A : \Omega \rightarrow \mathfrak{P}(G)$ , une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathfrak{P}(G)$ . On suppose qu'il existe un réel  $0 < p < 1$  tel que

$$\forall x \in G, \quad \mathbf{P}(x \in A) = p$$

et que la famille  $([x \in A])_{x \in G}$  est une famille d'évènements indépendants.

On définit la variable aléatoire  $B : \Omega \rightarrow \mathfrak{P}(G)$  en posant

$$\forall \omega \in \Omega, \quad B(\omega) = \{xy, (x, y) \in A(\omega) \times A(\omega)\}.$$

[ 1. ] Démontrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(1 \in B) = 1.$$

[ 2. ] Démontrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B = G) = 1.$$

[ 1. ] Pour tout  $x \in G$ , on pose

$$\forall \omega \in \Omega, \quad U_x(\omega) = \mathbb{1}_{[x \in A(\omega)]}.$$

Par hypothèse, la famille  $(U_x)_{x \in G}$  est une famille de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$  et

$$\forall \omega \in \Omega, \quad A(\omega) = \{x \in G : U_x(\omega) = 1\}.$$

Il faut ensuite remarquer que  $1 \in B(\omega)$  si, et seulement si, il existe  $x \in A(\omega)$  tel que  $x^{-1} \in A(\omega)$  et il reste à distinguer deux cas :

- on note  $H_0$ , l'ensemble des  $x \in G$  tels que  $x = x^{-1}$  ;
- et  $H_1$ , l'ensemble des  $x \in G$  tels que  $x \neq x^{-1}$ .

Ces deux situations étant mutuellement exclusive, on en déduit que  $G = H_0 \sqcup H_1$ .

En regroupant par paires les éléments de  $H_1$ , on peut définir une partition  $H_1 = H'_1 \sqcup H''_1$  telle que

$$\forall x \in H_1, \quad x \in H'_1 \iff x^{-1} \in H''_1.$$

On s'est bien compris ?

Il n'est donc peut-être pas nécessaire de définir une relation d'équivalence sur  $G$  en posant

$$\forall x, y \in G, \quad x \sim y \iff xy = 1_G,$$

de constater que le cardinal de chaque classe d'équivalence est égal à 1 ou à 2, puis de choisir un représentant dans chaque classe d'équivalence et enfin de définir  $H_0$  comme l'ensemble des représentants des classes de cardinal 1 et  $H'_1$  comme l'ensemble des représentants des classes de cardinal 2.

On raisonne sur l'évènement complémentaire pour y voir plus clair :

$$\begin{aligned} [1 \notin B] &= \left( \bigcap_{x \in H_0} [x \notin A] \right) \cap \left( \bigcap_{x \in H'_1} ([x \notin A] \cup [x^{-1} \notin A]) \right) \\ &= \left( \bigcap_{x \in H_0} [U_x = 0] \right) \cap \left( \bigcap_{x \in H'_1} [U_x U_{x^{-1}} = 0] \right). \end{aligned}$$

D'après le lemme des coalitions, la famille

$$(U_x)_{x \in H_0} \oplus (U_x U_{x^{-1}})_{x \in H'_1}$$

est une famille de variables aléatoires indépendantes. On en déduit que

$$0 \leq \mathbf{P}(1 \notin B) = (1 - p)^{\#(H_0)} (1 - p^2)^{\#(H'_1)} \leq (1 - p^2)^{\#(H_0) + \#(H'_1)}.$$

Or

$$N = \#(G) = \#(H_0) + \#(H_1) = \#(H_0) + 2\#(H'_1)$$

donc

$$\#(H_0) + \#(H'_1) \geq \frac{N}{2}$$

et par encadrement

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(1 \notin B) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(1 \in B) = 1.$$

[ 2. ] On démontre de même que

$$\forall x \in G, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(x \in B) = 1$$

et plus précisément que, pour tout  $x \in G$ , il existe deux entiers  $m_x$  et  $n_x$  tels que

$$N = m_x + 2n_x \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(x \notin B) = (1-p)^{m_x} (1-p^2)^{n_x} \leq (1-p^2)^{N/2}.$$

↳ On considère cette fois la relation d'équivalence définie par

$$\forall u, v \in G, \quad u \sim v \iff uv = x$$

et on distingue les classes d'équivalence de cardinal 1 (éléments de  $G$  dont le carré est égal à  $x$ ) et les classes d'équivalence de cardinal 2 (éléments  $u$  de  $G$  tels que  $u \neq xu^{-1}$ ).

Par additivité de  $\mathbf{P}$ ,

$$\mathbf{P}(B \neq G) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in G} [x \notin B]\right) \leq \sum_{x \in G} \mathbf{P}(x \notin B) \leq N(1-p^2)^{N/2}.$$

Par croissances comparées,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B \neq G) = 0$$

et par conséquent

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B = G) = 1.$$

Soient  $E$ , un espace euclidien et  $a$ , un endomorphisme auto-adjoint de  $E$ .  
 Pour un vecteur  $u \in E$  non nul, on considère le sous-espace

$$V = \text{Vect}(a^k(u), k \in \mathbb{N}).$$

Démontrer que les valeurs propres de l'endomorphisme induit par restriction de  $a$  à  $V$  sont simples.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'image de  $a^k(u)$  par  $a$  est le vecteur  $a^{k+1}(u)$ , qui appartient évidemment à  $V$ . Puisque l'image par  $a$  d'une famille génératrice de  $V$  est contenue dans  $V$ , le sous-espace  $V$  est stable par  $a$ .

• L'endomorphisme  $a$  est auto-adjoint de  $E$ , donc l'endomorphisme induit par restriction de  $a$  au sous-espace stable  $V$  est un endomorphisme auto-adjoint de  $V$ . D'après le Théorème spectral, cet endomorphisme de  $V$  est diagonalisable.

• Comme  $V$  est un sous-espace de dimension finie, l'ensemble des entiers  $n \in \mathbb{N}$  tels que la famille

$$(u, a(u), \dots, a^n(u))$$

soit libre est une partie de  $\mathbb{N}$  non vide (elle contient  $n = 0$ ) et majorée (il faut que  $n$  soit strictement inférieur à la dimension de  $E$ ), donc cet ensemble admet un plus grand élément.

Ce plus grand élément est supérieur à 1, on peut donc le noter  $d_0 - 1$  pour un certain  $d_0 \in \mathbb{N}$ .

Par définition, la famille  $(a^k(u))_{0 \leq k < d_0}$  est libre et la famille  $(a^k(u))_{0 \leq k \leq d_0}$  est liée. Par conséquent,

$$a^{d_0}(u) \in \text{Vect}(u, a(u), \dots, a^{d_0-1}(u)). \quad (*)$$

On en déduit (par récurrence) que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a^k(u) \in \text{Vect}(u, a(u), \dots, a^{d_0-1}(u))$$

et donc que la famille  $\mathcal{B}_u = (a^k(u))_{0 \leq k < d_0}$  est une base de  $V$ .

D'après (\*), il existe des scalaires  $(\gamma_k)_{0 \leq k < d_0}$  tels que

$$a^{d_0}(u) = \sum_{0 \leq k < d_0} \gamma_k a^k(u).$$

On en déduit la matrice de l'endomorphisme  $a_V$  induit par restriction de  $a$  au sous-espace stable  $V$  : c'est une matrice compagnon et il est facile de vérifier que chaque sous-espace propre est une droite vectorielle.

• Il suffit de poser le système

$$\begin{pmatrix} -\lambda & & & & \gamma_1 \\ 1 & -\lambda & & & \gamma_2 \\ 0 & & & & \\ 0 & & 0 & 1 & -\lambda & \gamma_{d_0-2} \\ 0 & & & 0 & 1 & \gamma_{d_0-1} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{d_0-2} \\ x_{d_0-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et de le résoudre en commençant par la dernière ligne : tous les  $x_k$  s'expriment en fonction de  $x_{d_0-1}$ .

Comme  $a_V$  est diagonalisable, la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre associé, donc toutes les valeurs propres sont simples.

• (Variante hors-programme)

On en déduit que

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad a^{d_0}(a^l(u)) = \sum_{0 \leq k < d_0} \gamma_k a^k(a^l(u))$$

(puisque les puissances de  $a$  commutent entre elles) et enfin que

$$\forall x \in V, \quad a^{d_0}(x) = \sum_{0 \leq k < d_0} \gamma_k a^k(x).$$

Le polynôme unitaire

$$P_0 = X^{d_0} - \sum_{0 \leq k < d_0} \gamma_k X^k$$

est donc un polynôme annulateur de l'endomorphisme  $\alpha_V$  de  $V$  induit par restriction de  $\alpha$  et la définition de  $d_0$  nous assure que la famille  $(\alpha^k)_{0 \leq k < d_0}$  est libre. Par conséquent,  $P_0$  est le polynôme minimal de  $\alpha_V$ .

Comme  $\alpha_V$  est diagonalisable, son polynôme minimal  $P_0$  est scindé à racines simples.

Dans la base  $\mathcal{B}_u$ , la matrice de  $\alpha_V$  est une matrice compagnon, donc son polynôme caractéristique est aussi son polynôme minimal.

Donc chaque valeur propre de l'endomorphisme  $\alpha_V$  induit par restriction est une racine simple du polynôme caractéristique de  $\alpha_V$ .

---

**rms135-314**

---

Trouver une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  telle que les ensembles

$$A, \overset{\circ}{A}, \bar{A}, \overset{\circ}{\bar{A}}, \overline{\overset{\circ}{A}}$$

soient deux à deux distincts.

On considère

$$A = [-1, 0[ \cup (\mathbb{Q} \cap ]0, 1]).$$

Comme  $\mathbb{Q}$  est une partie d'intérieur vide qui est dense dans  $\mathbb{R}$ ,

$$A^\circ = ]-1, 0[$$

$$\bar{A} = [-1, 1]$$

$$(\bar{A})^\circ = ]-1, 1[$$

$$\overline{(A^\circ)} = [-1, 0]$$

et on constate bien que ces cinq parties de  $\mathbb{R}$  sont deux à deux distinctes.

Soient  $a$  et  $b$ , deux réels positifs et  $f : [0, 1] \rightarrow [-a, b]$ , une fonction continue. On suppose que

$$\int_0^1 f(t) dt = 0.$$

Démontrer que

$$\int_0^1 f^2(t) dt \leq ab.$$

**Variante**

Soit  $X$ , une variable aléatoire admettant un moment d'ordre deux. On suppose que  $X$  est centrée et que  $\mathbf{P}(-a \leq X \leq b) = 1$ . Démontrer que

$$\mathbf{V}(X) \leq ab.$$

Soit  $m = \frac{b-a}{2}$ , la moyenne des valeurs extrêmes possibles pour  $f$ . Comme l'intégrale de  $f$  est nulle,

$$\int_0^1 [f(t) - m]^2 dt = \int_0^1 f^2(t) dt - 2mf(t) + m^2 dt = \int_0^1 f^2(t) dt + m^2.$$

Or  $-a \leq f(t) \leq b$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , donc

$$\forall t \in [0, 1], \quad -\frac{a+b}{2} = -a - m \leq f(t) - m \leq b - m = \frac{a+b}{2}$$

ce qui nous donne

$$\forall t \in [0, 1], \quad [f(t) - m]^2 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \text{et donc} \quad \int_0^1 [f(t) - m]^2 dt \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Finalement,

$$\int_0^1 f^2(t) dt \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - m^2 = ab.$$

• **Variante probabiliste**

Comme  $X$  admet un moment d'ordre deux, elle admet en particulier une espérance et une variance.

Pour tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} -a \leq X(\omega) \leq b &\iff -\frac{a+b}{2} \leq X(\omega) - m \leq \frac{a+b}{2} \\ &\iff [X(\omega) - m]^2 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

donc l'évènement

$$\left[ [X(\omega) - m]^2 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \right] = [-a \leq X \leq b]$$

est presque sûr. On en déduit que

$$\mathbf{E}((X - m)^2) \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

et comme la variable aléatoire  $X$  est supposée centrée,

$$\mathbf{E}((X - m)^2) \mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(X^2) - 2m \mathbf{E}(X) + m^2 = \mathbf{E}(X^2) + m^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2)$$

d'après la formule de Koenig-Huyghens. On en déduit finalement que

$$\mathbf{V}(X) \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - m^2 = ab.$$

|| Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer et dénombrer les sous-groupes de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Le groupe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  est cyclique, donc tout sous-groupe est lui-même cyclique.

• Pour tout entier  $0 \leq k < n$ , il s'agit donc d'identifier le sous-groupe de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  engendré par la classe  $\mathcal{C}(k)$ .

Soit  $d$ , le pgcd de  $k$  et  $n$ . D'après le Théorème de Bézout, il existe deux entiers  $a$  et  $b$  tels que

$$d = ak + bn$$

et donc tels que

$$\mathcal{C}(d) = a \cdot \mathcal{C}(k) + b \cdot \mathcal{C}(n) = a \cdot \mathcal{C}(k).$$

La classe  $\mathcal{C}(d)$  appartient donc au sous-groupe engendré par la classe  $\mathcal{C}(k)$ .

De plus, pour tout élément  $x$  du sous-groupe engendré par  $\mathcal{C}(k)$ , il existe un exposant  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $x = m \cdot \mathcal{C}(k)$  et comme  $d$  est un diviseur de  $k$ , il existe un entier  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $k = qd$ . Donc

$$x = m \cdot \mathcal{C}(k) = mq \cdot \mathcal{C}(d),$$

donc  $\mathcal{C}(d)$  est même un générateur de ce sous-groupe.

On a ainsi démontré que le sous-groupe de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  engendré par  $\mathcal{C}(k)$  est aussi le sous-groupe engendré par  $\mathcal{C}(d)$  où  $d = k \wedge n$ .

• Le pgcd  $d = k \wedge n$  est un diviseur de  $n$ .

Réciproquement, tout diviseur strict  $d$  de  $n$  est le pgcd de  $n$  et de l'entier  $0 \leq d < n$ . D'autre part,  $d = n$  est un diviseur de  $n$  et  $n = 0 \wedge n$ .

Par conséquent, les sous-groupes de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sont en bijection avec les diviseurs de  $n$ .

↳ Voir aussi [104-146](#).

Soit  $(G, \cdot)$ , un groupe abélien. On considère deux éléments  $x$  et  $y$  de  $G$  en supposant que l'ordre  $a \in \mathbb{N}^*$  de  $x$  et l'ordre  $b \in \mathbb{N}^*$  de  $y$  sont premiers entre eux.

[ 1. ] Démontrer que l'ordre de  $xy$  est égal à  $ab$ .

[ 2. ] Démontrer que le sous-groupe  $\langle xy \rangle$  engendré par le produit  $xy$  est l'ensemble

$$H = \{x^m \cdot y^n, 0 \leq m < a, 0 \leq n < b\}.$$

[ 1. ] Comme le groupe est commutatif,

$$(xy)^{ab} = x^{ab} \cdot y^{ab} = (x^a)^b \cdot (y^b)^a = e^b \cdot e^a = e.$$

Par conséquent, l'ordre de  $xy$  divise l'entier  $ab \in \mathbb{N}^*$ .

❖ Réciproquement, supposons qu'un entier  $m \in \mathbb{N}^*$  vérifie  $(xy)^m = e$ . On en déduit que  $x^m \cdot y^m = e$  (puisque le groupe est commutatif) et donc que  $x^m = y^{-m}$  ou, ce qui revient au même  $x^{-m} = y^m$ .

On a donc

$$y^{am} = (y^m)^a = (x^{-m})^a = (x^a)^{-m} = e^{-m} = e,$$

ce qui prouve que l'ordre  $b$  de  $y$  divise l'exposant  $am$ .

↪ L'ensemble des exposants  $k \in \mathbb{Z}$  tels que  $y^k = e$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}, +)$  et, par définition, l'ordre  $b$  de  $y$  est l'unique générateur positif de ce sous-groupe.

Par conséquent,

—  $y^k = e$  si, et seulement si, l'ordre  $b$  divise l'exposant  $k$ ;

— l'ordre  $b$  de  $y$  est le plus petit entier strictement positif  $k$  tel que  $y^k = e$ .

Par hypothèse,  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, donc  $b$  divise  $m$  (Théorème de Gauss) et donc  $y^m = e$ .

Par symétrie,  $a$  divise  $m$  et  $x^m = e$ .

On a ainsi démontré que  $m$  était divisible par  $a$  et par  $b$ , donc divisible par  $ab$  (puisque  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux).

[ 2. ] D'après la question précédente,

$$H = \{(xy)^k, 0 \leq k < ab\}.$$

↪ D'après le cours sur l'ordre d'un élément, les puissances  $(xy)^k$  sont deux à deux distinctes lorsque l'exposant  $k$  parcourt  $\llbracket 0, ab \rrbracket$ .

On a démontré plus haut que : si  $(xy)^m = e$ , alors  $x^m = y^m = e$  et  $m$  est un multiple de  $a$  et de  $b$ . On pourrait démontrer de la même manière que : si  $x^m \cdot y^n = e$ , alors  $x^m = y^n = e$ ,  $m$  est un multiple de  $a$  et  $n$  est un multiple de  $b$ .

On en déduit facilement que les produits  $x^m \cdot y^n$  sont deux à deux distincts lorsque le couple  $(m, n)$  parcourt  $\llbracket 0, a \rrbracket \times \llbracket 0, b \rrbracket$ .

❖ Soit  $0 \leq k < ab$ . Comme  $a \in \mathbb{N}^*$  et  $b \in \mathbb{N}^*$ , on peut effectuer les divisions euclidiennes de  $k$  par  $a$  et par  $b$ . Il existe donc des entiers  $q_a, q_b, r_a$  et  $r_b$  tels que

$$k = aq_a + r_a = bq_b + r_b \quad \text{avec} \quad 0 \leq r_a < a \quad \text{et} \quad 0 \leq r_b < b.$$

Alors, comme le groupe est commutatif et que  $x^a = y^b = e$ ,

$$(xy)^k = x^k y^k = (x^a)^{q_a} \cdot x^{r_a} \cdot (y^b)^{q_b} \cdot y^{r_b} = x^{r_a} \cdot y^{r_b}.$$

❖ Réciproquement, soient deux entiers  $0 \leq m < a$  et  $0 \leq n < b$ . Comme  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, on déduit du Lemme chinois qu'il existe un (unique) entier  $0 \leq p < ab$  tel que

$$p \equiv m \pmod{a} \quad \text{et} \quad p \equiv n \pmod{b}.$$

Il existe donc deux entiers relatifs  $k_a$  et  $k_b$  tels que

$$p = ak_a + m = bk_b + n$$

et on en déduit que

$$x^m \cdot y^n = e \cdot x^m \cdot e \cdot y^n = (x^a)^{k_a} \cdot x^m \cdot (y^b)^{k_b} \cdot y^n = x^{ak_a+m} \cdot y^{bk_b+n} = (xy)^p \in H.$$

❖ On a ainsi démontré l'égalité des deux ensembles par double inclusion.

|| Soit  $f$ , un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $f^2 = \omega$ . On suppose que  $F$  est un plan vectoriel stable par  $f$ .  
Démontrer que  $\text{Im } f \subset F$ .

Comme  $f^2$  est l'endomorphisme nul, l'image de  $f$  est contenue dans son noyau :

$$\text{Im } f \subset \text{Ker } f \quad \text{et en particulier} \quad \dim \text{Im } f \leq \dim \text{Ker } f.$$

Comme  $f$  est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, on déduit du Théorème du rang que

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f.$$

Par conséquent,  $\dim \text{Im } f \leq 1$ .

- Si  $\dim \text{Im } f = 0$ , alors  $\text{Im } f = \{0\} \subset F$ .
- Supposons donc que  $\dim \text{Im } f = 1$ . D'après le Théorème du rang, le noyau de  $f$  est un plan et on considère un plan  $F$  stable par  $f$  :

$$\forall x \in F, \quad f(x) \in F.$$

Deux cas se présentent :

- S'il existe un vecteur  $x_0 \in F$  tel que  $f(x_0) \neq 0$ , alors  $f(x_0)$  est un vecteur directeur de la droite  $\text{Im } f$  et comme  $f(x_0) \in F$  et que  $F$  est un sous-espace,

$$\text{Im } f = \mathbb{R} \cdot f(x_0) \subset F.$$

- Sinon,  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in F$ , donc  $F \subset \text{Ker } f$  et comme ces deux sous-espaces sont des plans, on a donc  $F = \text{Ker } f$  et finalement

$$\text{Im } f \subset \text{Ker } f = F.$$

On a démontré que, dans tous les cas, l'image de  $f$  était contenue dans le plan stable  $F$ .

On considère l'équation différentielle

$$2xy''(x) + y'(x) - y(x) = 0 \quad (E)$$

[ 1. ] Démontrer que (E) possède une, et une seule, solution  $f$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(0) = 1$  et qui soit la somme d'une série entière.

[ 2. ] Donner l'expression de  $f$  à l'aide de fonctions usuelles.

[ 3. ] Résoudre l'équation (E) à l'aide du changement d'inconnue  $y(x) = z(x)f(x)$ .

[ 1. ] La fonction  $f$  définie par

$$\forall x \in ]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est solution de (E) si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(n+1)}.$$

Cette relation de récurrence montre que les  $a_n$  sont déterminés par la valeur de  $a_0$  et que le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$  est infini.

Il existe donc une, et une seule, solution  $f$  telle que  $f(0) = 1$  et qui soit développable en série entière.

[ 2. ] On peut réécrire la relation de récurrence sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

ce qui nous donne (avec un peu d'astuce)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{a_n}{2^n}.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^n}{(2n)!}.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2x})^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} \sqrt{2x}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-2x)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-2x})^{2n}}{(2n)!} = \cos \sqrt{-2x}.$$

[ 3. ] L'énoncé incite à terminer la résolution en faisant varier la constante : on sait que  $Kf(x)$  est solution de (E) pour toute constante  $K \in \mathbb{R}$ , on cherche une solution de (E) de la forme  $K(x)f(x)$ .

• La solution trouvée précédemment étant ce qu'elle est, il serait sans doute plus malin de changer de variable et de chercher une équation différentielle vérifiée par  $z(x) = y(x^2)$  : on se doute qu'on trouvera ainsi une équation à coefficients constants.

En effet, on constate que  $y$  est solution de (E) sur  $[0, +\infty[$  si, et seulement si,  $z$  est solution de

$$\forall x \geq 0, \quad z''(x) - 2z(x) = 0.$$

• On peut aussi hardiment chercher si, *par hasard*, la fonction  $g$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \operatorname{sh} \sqrt{2x} \quad \text{ou par} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-, \quad g(x) = \sin \sqrt{-2x}$$

ne serait pas une solution de (E)...

Un magasin dispose d'un stock de  $N$  produits. Le nombre de clients qui passent dans une journée suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  et chaque client a une probabilité  $p$  d'acheter le produit. Quelle est la probabilité pour que le magasin soit en rupture de stock avant la fin de la journée ?

On considère un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  sur lequel sont définies deux variables aléatoires  $C$  et  $A$  telles que :

- la variable aléatoire  $C$  (= le nombre de clients) suit la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$  de paramètre  $\lambda > 0$ ;
- sachant l'évènement  $[C = n]$ , la loi conditionnelle de  $A$  (= le nombre d'acheteurs) est la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .

Dans ces conditions, en notant  $q = 1 - p$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(C = n, A = k) = \mathbf{P}(A = k \mid C = n) \mathbf{P}(C = n) \\ = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k > n, \quad \mathbf{P}(C = n, A = k) = 0.$$

Il est **raisonnable** de juger que la loi du couple  $(C, A)$  est un modèle probabiliste acceptable pour décrire la situation étudiée : on a utilisé les modèles habituels dans ces situations (la loi binomiale pour compter le nombre de succès lors d'un nombre déterminé de tentatives).

D'un point de vue théorique, ce modèle est consistant : on a choisi une distribution de probabilité  $\mu = (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (pour caractériser la loi de  $C$ ) et, pour chaque valeur de  $n \in \mathbb{N}$ , on a choisi une distribution de probabilité  $\nu_n = (\nu_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$  (pour caractériser la loi conditionnelle de  $A$  sachant l'évènement  $[C = n]$ ) et on a posé :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \pi_{k,n} = \mu_n \nu_{n,k}.$$

On a ainsi défini une **famille de réels positifs**  $(\pi_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$  et, par construction, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , la sous-famille

$$(\pi_{k,n})_{k \in \mathbb{N}} = \mu_n \cdot (\nu_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$$

est sommable, de somme

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu_n \cdot \nu_{n,k} = \mu_n \sum_{k=0}^{+\infty} \nu_{n,k} = \mu_n.$$

Par construction (bis !), la famille des sommes partielles  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable. Le Théorème de Fubini-Tonelli nous assure alors que la famille  $(\pi_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$  est **sommable** et que **sa somme est égale à 1** :

$$\sum_{(k,n) \in \mathbb{N}^2} \pi_{k,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n = 1.$$

On a ainsi démontré que la famille  $(\pi_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$  était une **distribution de probabilité discrète** sur  $\mathbb{N}^2$ . Par conséquent, il existe bien un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  et deux variables aléatoires  $C$  et  $A$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telles que

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}(C = n, A = k) = \pi_{k,n}.$$

Pour calculer la loi de  $A$ , on fixe  $s \in \mathbb{N}$  et on décompose l'évènement  $[A = s]$  sur le système complet  $([C = n])_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad [A = s] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [A = s, C = n].$$

On reconnaît une union dénombrable d'évènements deux à deux disjoints, donc

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(A = s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A = s, C = n)$$

par  $\sigma$ -additivité de  $\mathbf{P}$ .

☞ En décomposant un évènement sur un système complet d'évènements, on obtient **toujours** une union finie ou dénombrable d'évènements deux à deux disjoints : inutile d'y réfléchir deux fois!

Si on doit réfléchir à quelque chose, c'est au système complet d'évènements qu'il faut choisir pour écrire la décomposition. Dans la situation qui nous intéresse ici, on n'a même pas le choix...

On déduit alors du modèle choisi que

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(A = s) = \frac{e^{-\lambda}}{s!} \sum_{c=s}^{+\infty} \frac{(p\lambda)^s (q\lambda)^{c-s}}{(c-s)!} = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^s}{s!}.$$

Autrement dit, la variable aléatoire  $A$  suit la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda p)$ .

• La probabilité de connaître une rupture de stock est donc égale à

$$\mathbf{P}(A > N) = 1 - \mathbf{P}(A \leq N) = e^{-p\lambda} \left( e^{p\lambda} - \sum_{s=0}^N \frac{(p\lambda)^s}{s!} \right).$$

☞ Non simplifiable! Si on pense à la formule de Taylor avec reste intégral, on peut transformer cette expression pour obtenir

$$\mathbf{P}(A > N) = e^{-p\lambda} \int_0^{p\lambda} e^t \frac{(p\lambda - t)^N}{N!} dt = \frac{(p\lambda)^{N-1} e^{-p\lambda}}{N!} \int_0^1 e^{p\lambda u} (1-u)^N du$$

mais ce n'est pas spécialement plus simple.

#### Variante concrète

L'approche statistique ne consiste pas à estimer la probabilité  $\mathbf{P}(A > N)$  pour qu'il y ait une rupture de stock mais à déterminer une valeur de  $N$  assez grande pour que la probabilité  $\mathbf{P}(A > N)$  de rupture soit "assez faible", c'est-à-dire inférieure à un seuil donné (considéré comme acceptable).

Fixons (arbitrairement) ce seuil à 1% : comment choisir  $N$  pour qu'il y ait moins d'une chance sur cent d'avoir un stock insuffisant pour satisfaire la demande des clients?

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne des éléments de réponse : comme la moyenne de  $A$  est égale à  $\lambda p$  (loi de Poisson), il faut bien que le stock initial  $N$  soit supérieur à  $\lambda p$  et donc

$$[A > N] = [A - \lambda p > N - \lambda p] \subset [|A - \lambda p| > N - \lambda p].$$

Par conséquent,

$$\mathbf{P}(A > N) \leq \frac{\mathbf{V}(A)}{(N - \lambda p)^2} = \frac{\lambda p}{(N - \lambda p)^2}$$

et si notre commerçant choisit  $N$  assez grand pour que

$$\frac{\lambda p}{(N - \lambda p)^2} < 10^{-2},$$

c'est-à-dire

$$N > \lambda p + 10\sqrt{\lambda p},$$

il pourra dormir sur ses deux oreilles (environ 99 nuits sur 100).

Rappelons au passage qu'un stock initial trop grand n'est pas bon pour la trésorerie du commerçant : l'entreposage a un coût et c'est seulement en écoulant la marchandise qu'on dégage un bénéfice.

On dispose de  $N$  dés identiques à six faces. On lance ces dés et, après chaque lancer, on relance ceux qui n'ont pas donné  $\text{\textcircled{1}}$ . On note  $S_n$ , le nombre total de dés ayant donné  $\text{\textcircled{1}}$  après le  $n$ -ième lancer.

[ 1. ] Proposer un modèle probabiliste pour lequel  $S_n$  est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.

[ 2. ] Dédurre de ce modèle que, presque sûrement, les  $N$  dés donnent  $\text{\textcircled{1}}$  après un nombre fini de lancers :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n = N]\right) = 1.$$

[ 3. ] Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on pose

$$T(\omega) = \inf(\{n \in \mathbb{N}^* : S_n(\omega) = N\} \cup \{+\infty\}).$$

[ 3.a. ] Démontrer que  $T$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$  et préciser sa loi.

[ 3.b. ] Démontrer que  $T$  est une variable aléatoire d'espérance finie et calculer cette espérance.

[ 1. ] On considère un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  sur lequel sont définies  $N$  variables aléatoires indépendantes et de même loi  $(X_k)_{1 \leq k \leq N}$ , suivant toutes la loi géométrique  $\mathcal{G}(1/6)$ .

↳ Dans "un schéma de Bernoulli" (répétitions indépendantes d'une épreuve), le **temps d'attente du premier succès** suit la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ , où  $p$  est la probabilité de succès à chaque tentative. Il est donc raisonnable de modéliser par une variable aléatoire géométrique l'instant d'apparition du premier  $\text{\textcircled{1}}$  pour chaque dé, tout comme il est raisonnable de postuler que les résultats des différents dés arrivent indépendamment les uns des autres.

Le  $k$ -ième dé a donné un  $\text{\textcircled{1}}$  lors des  $n$  premiers lancers si, et seulement si, l'évènement  $[X_k \leq n]$  est réalisé, c'est-à-dire si l'indicatrice  $\mathbb{1}_{[X_k \leq n]}$  est égale à 1.

Par conséquent, la valeur de

$$S_n = \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{[X_k \leq n]}$$

est égale au nombre de dés qui ont amené un  $\text{\textcircled{1}}$  au cours des  $n$  premiers lancers.

Cette application  $S_n : \Omega \rightarrow \llbracket 0, N \rrbracket$  est une variable aléatoire de loi binomiale, puisque les  $N$  indicatrices  $\mathbb{1}_{[X_k \leq n]}$  sont indépendantes (lemme des coalitions) et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre

$$p_n = \mathbf{P}(X_k \leq n) = 1 - \mathbf{P}(X_k > n) = 1 - (5/6)^n.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \stackrel{d}{=} \mathcal{B}(N, p_n).$$

[ 2. ] Quels que soient  $1 \leq k \leq N$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$[X_k \leq n+1] = [X_k \leq n] \sqcup [X_k = n+1] \subset [X_k \leq n]$$

donc

$$\forall \omega \in \Omega, \forall 1 \leq k \leq N, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \mathbb{1}_{[X_k \leq n]}(\omega) \leq \mathbb{1}_{[X_k \leq n+1]}(\omega) \leq 1$$

et par conséquent, en sommant sur  $1 \leq k \leq N$ ,

$$\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq S_n(\omega) \leq S_{n+1}(\omega) \leq N.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [S_n = N] \subset [S_{n+1} = N].$$

Puisque  $([S_n = N])_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite croissante d'évènements,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n = N]\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(S_n = N)$$

(continuité monotone). On connaît la loi de  $S_n$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(S_n = N) = \binom{N}{n} p_n^n (1-p_n)^{N-n} = [1 - (5/6)^n]^N \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n = N]\right) = 1.$$

↳ Traduction littérale de cette conclusion : presque sûrement, il existe au moins un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $S_n = N$ . Autrement dit : presque sûrement, au bout d'un nombre fini de tentatives, chacun des  $N$  dés aura amené  $\text{[3]}$ .

On est donc sûr d'obtenir un "Yam", mais le nombre de tentatives nécessaires pour y parvenir risque de ne pas être conforme aux règles du jeu. C'est ce que nous allons maintenant préciser.

[ 3.a. ] Par construction,  $T$  est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ .

• La valeur de  $T(\omega)$  est égale à  $+\infty$  lorsque l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N}^* : S_n(\omega) = N\}$$

est vide. Autrement dit,

$$[T = +\infty] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [S_n = N]^c$$

et comme  $[S_n = N] \in \mathcal{A}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  (puisque  $S_n$  est une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ ), cela prouve que  $[T = +\infty] \in \mathcal{A}$ .

Enfin, par passage au complémentaire, on déduit de la question précédente que

$$\mathbf{P}(T = +\infty) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [S_n = N]\right) = 0.$$

• De même, la valeur de  $T(\omega)$  est un entier si, et seulement si, l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N}^* : S_n(\omega) = N\}$$

n'est pas vide et, plus précisément,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad [T = n] = [S_1 = N]^c \cap \dots \cap [S_{n-1} = N]^c \cap [S_n = N] \in \mathcal{A}.$$

• On a ainsi démontré que

$$\forall x \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}, \quad [T = x] \in \mathcal{A}$$

et donc que  $T$  est bien une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ .

On a déjà remarqué que  $T$  était presque sûrement à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , puisque  $\mathbf{P}(T = +\infty) = 0$ .

↳ De même que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_N$  introduites initialement, la variable aléatoire  $T$  décrit le temps d'attente avant le succès. Mais contrairement à la situation décrite par les  $X_1, \dots, X_N$ , les tentatives ne sont cette fois plus indépendantes (on ne relance pas les dés qui dont déjà amené  $\text{[3]}$ ), donc on ne sera pas surpris de constater que  $T$  ne suit pas une loi géométrique.

• On a obtenu un Yam en lançant au plus  $n$  fois les dés si, et seulement si, chaque dé a produit un  $\text{[3]}$  au plus tard à l'instant  $n$ . Traduction booléenne :

$$[T \leq n] = \bigcap_{k=1}^N [X_k \leq n]. \quad (*)$$

Comme les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_N$  sont supposées indépendantes et de loi  $\mathcal{G}(1/6)$ , on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(T \leq n) = [1 - \mathbf{P}(X_k > n)]^N = [1 - (5/6)^n]^N. \quad (\dagger)$$

↳ On doit savoir que si  $X$  suit la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ , alors  $\mathbf{P}(X > n) = q^n$ . On se sert très souvent de ce résultat parce que l'évènement  $[X > n]$  est un support du raisonnement et que l'interprétation de cet évènement ( $n$  échecs consécutifs) permet de retrouver sans hésiter la valeur de la probabilité.

On remarque que l'égalité  $(\dagger)$  est encore vraie pour  $n = 0$ . Par différence, on en déduit la loi de  $T$  en posant  $a = 5/6$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(T = n) = \mathbf{P}(T \leq n) - \mathbf{P}(T \leq n-1) = (1 - a^n)^N - (1 - a^{n-1})^N.$$

☞ On retrouve ainsi une loi connue (bien que ce ne soit pas une loi de référence). En réfléchissant un peu, on comprend que la propriété (\*) signifie en fait que  $T = \max\{X_1, \dots, X_N\}$ . C'est pour cette raison qu'on a été conduit à raisonner sur les évènements  $[T \leq n]$  — et non pas sur les évènements  $[T = n]$ .

[ 3.b. ] Les valeurs prises par la variable aléatoire  $T$  sont presque sûrement dans  $\mathbb{N}$ . Par conséquent,  $T$  est une variable aléatoire d'espérance finie si, et seulement si, la série  $\sum \mathbf{P}(T > n)$  est convergente et, le cas échéant,

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T > n).$$

D'après (†),

$$\mathbf{P}(T > n) = 1 - (1 - a^n)^N \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - [1 - Na^n + o(a^n)] \sum Na^n$$

et comme  $0 < a < 1$ , on en déduit que  $T$  est d'espérance finie (comparaison à une série géométrique convergente).

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 1 - (1 - a^n)^N \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( - \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} (-a^n)^k \right) && \text{(formule du binôme)} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} (a^k)^n && (\ddagger) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} \frac{(-a)^k}{1 - a^k} \end{aligned}$$

où l'interversion (‡) des signes  $\sum$  se justifie simplement en reconnaissant une combinaison linéaire de  $N$  séries géométriques absolument convergentes.

☞ On remarquera que la somme qui donne l'expression finale de  $\mathbf{E}(T)$  n'est pas la somme partielle d'une série (puisque le terme général dépend de  $N$ ) et ne permet donc pas de voir comment  $\mathbf{E}(T)$  varie en fonction de  $N$ .

En revanche, sur la première expression de  $\mathbf{E}(T)$ , il est clair (et conforme à l'intuition) que  $\mathbf{E}(T)$  est une fonction croissante de l'entier  $N$ .

Avec  $N = 5$  (cas du jeu de Yam), l'espérance de  $T$  est de l'ordre de 13 et  $\mathbf{P}(T \leq 3) \approx 1,3\%$ .

Un péage autoroutier comporte trois files et  $n$  véhicules se présentent, en choisissant aléatoirement une voie. Pour  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , on note  $X_i$ , le nombre de véhicules qui passent par la file  $i$ .

[ 1. ] Proposer un modèle probabiliste dans lequel  $X_1, X_2$  et  $X_3$  sont des variables aléatoires.

[ 2. ] Dédurre de ce modèle  $\mathbf{V}(X_1), \mathbf{V}(X_2)$  et  $\mathbf{V}(X_1 + X_2)$ . En déduire  $\mathbf{Cov}(X_1, X_2)$ .

[ 3. ] Les variables aléatoires  $X_1, X_2$  et  $X_3$  sont-elles indépendantes ?

[ 1. ] **Modèle incomplet**

On sait que la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  est le modèle probabiliste de référence pour compter le nombre de succès lors de  $n$  tentatives indépendantes, chaque tentative ayant une probabilité de succès égale à  $p$ .

Avec l'hypothèse d'équiprobabilité (= hypothèse par défaut), on pourrait donc modéliser les nombres  $X_1, X_2$  et  $X_3$  par des variables aléatoires de loi  $\mathcal{B}(n, 1/3)$ .

Mais ce modèle n'est pas satisfaisant : il donne une description acceptable des variables aléatoires  $X_1, X_2$  et  $X_3$  mais il ne dit rien sur la loi conjointe du vecteur  $(X_1, X_2, X_3)$ .

**Modèle complet**

Considérons une famille  $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$  de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  et supposons que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent toutes la loi uniforme sur  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ .

Il est raisonnable de considérer que la variable aléatoire  $U_k$  décrit le numéro de la voie empruntée par le  $k$ -ième véhicule.

Dans ces conditions, l'évènement  $[U_k = i]$  signifie que le  $k$ -ième véhicule emprunte la  $i$ -ième voie et l'indicatrice  $\mathbb{1}_{[U_k=i]}$  est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre  $\mathbf{P}(U_k = i) = 1/3$  qui traduit comme un "succès" le fait que le  $k$ -ième véhicule emprunte la  $i$ -ième voie.

Alors le nombre de véhicules qui empruntent la  $i$ -ième voie est donné par la variable aléatoire

$$X_i = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{[U_k=i]}.$$

D'après le lemme des coalitions, cette variable aléatoire est une somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(1/3)$ , donc  $X_i$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, 1/3)$ .

On retrouve ainsi trois variables aléatoires qui suivent la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, 1/3)$ , exactement comme dans le modèle précédent. Mais ce second modèle est meilleur car il est complet : il détermine en fait la loi du triplet  $(X_1, X_2, X_3)$  (que nous ne calculerons pas).

[ 2. ] On connaît la variance d'une loi binomiale :

$$\mathbf{V}(X_1) = \mathbf{V}(X_2) = n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2n}{9}.$$

Par ailleurs,  $X_1 + X_2 + X_3 = n$ , donc

$$\mathbf{V}(X_1 + X_2) = \mathbf{V}(n - X_3) = \mathbf{V}(X_3) = \frac{2n}{9}.$$

☞ *Le premier modèle, incomplet, ne permet pas de démontrer que  $X_1 + X_2 + X_3 = n$ , c'est une hypothèse supplémentaire qu'on doit ajouter — hypothèse qui repose seulement sur la situation concrète étudiée.*

*Le second modèle, en revanche, permet de déduire cette propriété des hypothèses qu'on a déjà faites. En effet, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la famille  $([U_k = 1], [U_k = 2], [U_k = 3])$  est un système complet d'évènements, donc*

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_{[U_k=1]}(\omega) + \mathbb{1}_{[U_k=2]}(\omega) + \mathbb{1}_{[U_k=3]}(\omega) = 1$$

(puisque chaque  $\omega$  appartient à un, et à un seul, de ces évènements). Par conséquent,

$$X_1 + X_2 + X_3 = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{[U_k=i]} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^3 \mathbb{1}_{[U_k=i]} = \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

(Un quantificateur  $\forall \omega \in \Omega$  est sous-entendu ici.)

Or on sait que

$$\mathbf{V}(X_1 + X_2) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + 2 \mathbf{Cov}(X_1, X_2)$$

donc

$$\mathbf{Cov}(X_1, X_2) = \frac{-n}{9}.$$

[ 3. ] Comme  $\mathbf{Cov}(X_1, X_2) \neq 0$ , les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes. Par conséquent, les variables aléatoires  $X_1, X_2$  et  $X_3$  ne sont pas indépendantes non plus.

[ 1. ] Rappeler (sans démonstration) le développement en série entière au voisinage de 0 de

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

[ 2. ] Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel  $r$  pour qu'il existe une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{(2n)!}{2^{3n}(n!)^2} \cdot r.$$

[ 3. ] Calculer alors l'espérance et la variance de  $X$ .

[ 1. ] On sait que cette fonction est développable en série entière sur  $] -1, 1[$  et que

$$\begin{aligned} \forall x \in ] -1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2) \cdots (-[2n-1]/2)}{n!} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^n. \end{aligned}$$

[ 2. ] Le réel  $x = 1/2$  appartient bien à l'intervalle ouvert  $] -1, 1[$ , donc la famille de terme général

$$a_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^n r = \frac{(2n)!}{8^n (n!)^2} r$$

est bien une famille sommable de réels positifs et sa somme est égale à

$$\frac{r}{\sqrt{1-1/2}} = \sqrt{2} \cdot r.$$

Par conséquent, avec  $r = 1/2$  (et seulement avec  $r = 1/2$ ), la famille  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille sommable de réels positifs dont la somme est égale à 1.

• Dans ces conditions, il existe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  et une variable aléatoire  $X$  définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{(2n)!}{8^n (n!)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et la fonction génératrice de cette variable aléatoire est

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(t/2)}} = \frac{1}{\sqrt{2-t}}.$$

• Il est clair que  $G_X(1) = 1$ . (Il est essentiel de faire cette vérification, simple et rapide.)

• Voir 135-842 pour une variante de cet exercice.

[ 3. ] La fonction génératrice de la variable aléatoire  $X$  est développable en série entière avec un rayon de convergence égal à 2.

Sa somme  $G_X$  est donc deux fois dérivable en  $t = 1$  et

$$\forall t \in ] -2, 2[, \quad G'_X(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2-t)^{3/2}}, \quad G''_X(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(2-t)^{5/2}}.$$

Par conséquent (Formule de transfert),

$$\mathbf{E}(X) = G'_X(1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[X(X-1)] = G''_X(1) = \frac{3}{4}.$$

On déduit enfin de la formule de Koenig-Huyghens que

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X(X-1)] + \mathbf{E}(X) - [\mathbf{E}(X)]^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$