

---

## MARDI 9 JUIN

---

Référence	Origine	Thèmes
135-1449	IMT MP	Suite définie implicitement
135-1451	"	Série numérique
135-1498	"	Série génératrice
135-1526	CCINP PSI	Projecteurs orthogonaux
135-1530	IMT PSI	Matrices de rang 1
135-1532	CCINP PSI	Matrice symétrique
135-1575	"	Équation différentielle
135-1579	Navale PSI	Loi de probabilité discrète
135-1583	CCINP PSI	Couple de variables aléatoires

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$g_n(t) = \ln t - \operatorname{Arctan} t - n\pi.$$

[ 1. ] Démontrer que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un, et un seul,  $x_n \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $g_n(x_n) = 0$ .

[ 2. ] Démontrer que  $e^{n\pi} < x_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En déduire la nature de la série  $\sum 1/x_n$ .

[ 1. ] Considérons la fonction  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall t > 0, \quad g(t) = \ln t - \operatorname{Arctan} t.$$

Il est clair que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , qu'elle tend vers  $-\infty$  au voisinage de 0 et vers  $+\infty$  au voisinage de  $+\infty$ .

☞ La fonction  $\operatorname{Arctan}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , c'est donc la fonction  $\ln$  qui impose les limites de  $g$ .

De plus,

$$\forall t > 0, \quad g(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2 - t + 1}{t(1+t^2)} > 0.$$

☞ Le discriminant du numérateur est strictement négatif (égal à  $-3$ ), donc le numérateur est de signe constant et il est strictement positif pour  $t = 1$ .

Par conséquent, la fonction  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  et on déduit du Théorème de la bijection monotone que  $g$  réalise une bijection (strictement croissante) de l'intervalle  $]0, +\infty[$  sur l'intervalle

$$]\lim_{t \rightarrow 0} g(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)[ = ]-\infty, +\infty[.$$

Par conséquent, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un, et un seul, réel  $x_n \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $g(x_n) = n\pi$ .

☞ En définissant les fonctions  $g_n$ , l'énoncé offre une fausse piste : il n'y a ici qu'une seule fonction à étudier !

[ 2. ] Il est clair que

$$\forall n \geq 1, \quad g(e^{n\pi}) = n\pi - \operatorname{Arctan}(n\pi) < n\pi = g(x_n).$$

Comme la fonction  $g$  est croissante, on en déduit que  $e^{n\pi} < x_n$ .

☛ Comme  $e^{n\pi} > 0$ , on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad 0 < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{e^{n\pi}} = (e^{-\pi})^n.$$

Comme  $-\pi < 0$ , on a donc  $0 < e^{-\pi} < 1$ , ce qui prouve que la série géométrique  $\sum (e^{-\pi})^n$  est convergente et, par comparaison de série de termes généraux positifs, la série  $\sum 1/x_n$  est (absolument) convergente.

On considère la suite  $u$  définie par la donnée de  $u_0 \in \mathbb{R}$  et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

[ 1. ] Quelle est la nature de la série  $\sum u_n$  ?

[ 2. ] Quelle est la nature de la série  $\sum (-1)^n u_n$  ?

[ 1. ] Il est clair que  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \geq 1$  (on ne connaît pas le signe de  $u_0$ ). On en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1},$$

ce qui prouve que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0. Par conséquent,  $u_{n+1} \sim 1/n$  et comme la série harmonique  $\sum 1/n$  est une série divergente de terme général positif, la série  $\sum u_n$  est divergente.

[ 2. ] En reprenant la relation de récurrence, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{e^{-u_n}}{n+1} = \frac{1 - u_n + o(u_n)}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o(1/n)\right) \left(1 - \frac{1}{n} + o(1/n)\right) \\ &= \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(-1)^n u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}(1/n^2).$$

• La série harmonique alternée  $\sum (-1)^n/n$  est convergente (Critère spécial des séries alternées). Comme la série de Riemann  $\sum 1/n^2$  est absolument convergente, toute série dont le terme général est  $\mathcal{O}(1/n^2)$  est elle-même (absolument) convergente.

Ainsi, la série  $\sum (-1)^n u_n$  est convergente (comme somme de deux séries convergentes).

On pose

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} t^n.$$

- [ 1. ] Calculer le rayon de convergence de cette série entière.
- [ 2. ] Expliciter  $S(t)$  pour  $t \in ]-\mathbb{R}, \mathbb{R}[$ .
- [ 3. ] Soit  $X$ , une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = \lambda S(t).$$

- [ 3.a. ] Que vaut  $\lambda$ ?
- [ 3.b. ] Calculer  $\mathbf{P}(X = n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- [ 3.c. ] Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

[ 1. ] Par croissances comparées, il est clair que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} \cdot t^n = 0.$$

Puisque le terme général de la série entière reste borné quel que soit  $t \in \mathbb{R}$ , le rayon de convergence de la série entière est infini.

[ 2. ] Remarquons que  $n^2 + n + 1 = n(n-1) + 2n + 1$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad S(t) &= t^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)t^{n-2}}{n!} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= (t^2 + 2t + 1)e^t = (t+1)^2 e^t. \end{aligned}$$

☞ Ce n'est pas une astuce, c'est une méthode!

La présence de la factorielle au dénominateur doit nous conduire à interpréter la série entière comme une série de Taylor et donc à penser en termes de dérivée.

Il faut donc raisonner, non pas sur la base canonique  $(1, X, X^2, \dots)$  de  $\mathbb{R}[X]$ , mais sur la base de Newton

$$(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3), \dots)$$

qui nous a rendu de grands services dans l'étude des séries génératrices.

☞ Il est bon de retenir que, pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$ , il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)t^n}{n!} = Q(t)e^t.$$

La réciproque est vraie : quel que soit le polynôme  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$ , il existe une suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t)e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

et (formule du produit de Cauchy)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \frac{1}{(n-k)!}$$

donc

$$\forall n \geq d, \quad c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^d a_k \cdot n(n-1) \cdots (n-k+1).$$

Cette formule est encore vraie pour  $0 \leq n < d$  (les derniers termes de la somme sont nuls puisqu'un facteur est nul) et on reconnaît ici une expression de la forme  $P(n)/n!$  avec  $P \in \mathbb{K}[X]$  (donné par sa décomposition dans la base de Newton).

[ 3.a. ] Par définition,  $G_X(1) = 1$ , donc  $\lambda S(1) = 4\lambda e = 1$ . On a donc nécessairement  $\lambda = 1/4e$ .

[ 3.b. ] Pour tout  $t \in [-1, 1]$ , on a

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda(n^2 + n + 1)}{n!} \cdot t^n.$$

Par unicité du développement en série entière (le rayon de convergence est strictement positif), on peut identifier terme à terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{n^2 + n + 1}{4n!e}.$$

[ 3.c. ] Puisque le rayon de convergence est strictement supérieur à 1, la fonction génératrice  $G_X$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle ouvert qui contient le segment  $[-1, 1]$  et la variable aléatoire  $X$  admet des moments de tout ordre.

• En particulier,

$$\mathbf{E}(X) = G'_X(1) = 8\lambda e = 2$$

puisque  $S'(t) = (t^2 + 4t + 3)e^t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

De même,

$$\mathbf{E}(X(X-1)) = G''_X(1) = 14\lambda e = 7/2$$

puisque  $S''(t) = (t^2 + 6t + 7)e^t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) - [\mathbf{E}(X)]^2 = 3/2.$$

Soient  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ , un espace euclidien ;  $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ , une base orthonormée de  $E$  et  $p \in L(E)$ , un projecteur orthogonal.

[ 1. ] Pour tout  $x \in E$ ,

$$\langle p(x) | x \rangle = \|p(x)\|^2.$$

[ 2. ] Démontrer que

$$\text{rg } p = \sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2.$$

[ 1. ] Pour tout  $x \in E$ , le vecteur  $p(x)$  appartient à  $\text{Im } p$  et, comme  $p$  est un projecteur, le vecteur  $x - p(x)$  appartient à  $\text{Ker } p$ . Comme  $p$  est un projecteur orthogonal, les deux sous-espaces vectoriels  $\text{Ker } p$  et  $\text{Im } p$  sont orthogonaux, donc

$$\langle p(x) | x \rangle = \langle p(x) | x - p(x) + p(x) \rangle = \langle p(x) | x - p(x) \rangle + \langle p(x) | p(x) \rangle = \|p(x)\|^2.$$

[ 2. ] Pour tout projecteur, le rang est égal à la trace.

Soit  $P$ , la matrice de  $p$  relative à la base orthonormée  $\mathcal{B}$ . La  $j$ -ième colonne de  $P$  contient les coordonnées du vecteur  $p(e_j)$  relatives à la base  $\mathcal{B}$  et comme cette base est orthonormée, on sait que

$$p(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle e_i | p(e_j) \rangle \cdot e_i$$

(décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée).

Pour  $1 \leq j \leq n$ , le  $j$ -ième coefficient diagonal de la matrice  $P$  est donc égal à

$$\langle e_j | p(e_j) \rangle = \|p(e_j)\|^2$$

et finalement

$$\text{rg } p = \text{tr } p = \sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2.$$

Soient  $U \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  (avec  $n \geq 2$ ) et  $A = U \cdot U^T$ .

- [ 1. ] La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
- [ 2. ] Déterminer le rang de  $A$ . Quel est le spectre de  $A$  ?
- [ 3. ] Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$ .

[ 1. ] La matrice  $A$  est symétrique réelle, donc diagonalisable (Théorème spectral).

[ 2. ] Si la colonne  $U$  est nulle, alors  $A = 0_n$ , donc le rang de  $A$  est nul et son spectre est réduit à  $\{0\}$ .

☛ Si la colonne  $U$  n'est pas nulle, alors les colonnes de  $A$  sont toutes proportionnelles à  $U$  et l'une d'elles n'est pas nulle, donc le rang de  $A$  est égal à 1. Comme  $1 < n$ , la matrice  $A$  n'est pas inversible et 0 est donc une valeur propre. En particulier, le polynôme minimal de  $A$  est divisible par  $X$ .

Comme  $A$  n'est pas nulle, son polynôme minimal n'est pas égal à  $X$ .

De plus,

$$A^2 = U \cdot (U^T \cdot U) \cdot U^T = \|U\|^2 \cdot (U \cdot U^T) = \|U\|^2 \cdot A.$$

Donc  $X^2 - \|U\|^2 X = X(X - \|U\|^2)$  est un polynôme annulateur unitaire de  $A$ .

Comme le polynôme minimal de  $A$  est unitaire ; divisible par  $X$  ; distinct de  $X$  et divise  $X(X - \|U\|^2)$ , on conclut que

$$\mu_A = X(X - \|U\|^2).$$

☛ Comme  $U \neq 0$ , le scalaire  $\|U\|^2$  est strictement positif. Le polynôme minimal de  $A$  est donc scindé à racines simples — mais on le savait déjà, puisque  $A$  est diagonalisable.

Les valeurs propres de  $A$  sont les racines du polynôme minimal, donc  $\text{Sp}(A) = \{0; \|U\|^2\}$ .

[ 3. ] Comme  $A$  est diagonalisable, la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.

Comme  $\text{rg } A = 1$ , le noyau de  $A$  est un hyperplan, donc la multiplicité de la valeur propre 0 est égale à  $(n - 1)$ .

De ce fait, la multiplicité de l'autre valeur propre  $\|U\|^2$  est égale à 1.

☛ La multiplicité d'une valeur propre est **comprise** entre 1 et la dimension du sous-espace propre. La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre non nulle étant égale à 1 (= la codimension de l'hyperplan propre  $\text{Ker } A$ ), la multiplicité est donc égale à 1 aussi.

Comme  $A$  est diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé ; ses racines sont les valeurs propres de  $A$  et leurs multiplicités sont connues. Enfin, par convention, le polynôme caractéristique est unitaire, donc

$$\chi_A = X^{n-1}(X - \|U\|^2).$$

[ 1. ] Rappeler l'inégalité de Schwarz.

[ 2. ] Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq r} \in \mathbb{R}^r$ ,

$$\left( \sum_{k=1}^r \lambda_k \right)^2 \leq r \sum_{k=1}^r \lambda_k^2.$$

[ 3. ] Soit  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Alors

$$(\operatorname{tr} B)^2 \leq \operatorname{rg} B \cdot \operatorname{tr}(B^2).$$

[ 4. ] Soit  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad b_{i,i} = 1$$

et que

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, \quad |b_{i,j}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

[ 4.a. ] Exprimer  $\operatorname{tr}(B^2)$  et vérifier que  $\operatorname{tr}(B^2) \leq 2n$ .

[ 4.b. ] Démontrer que  $\operatorname{rg} B \geq n/2$ .

[ 1. ] Quel que soit le produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  sur  $E$ ,

$$\forall x, y \in E, \quad (\langle x | y \rangle)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

[ 2. ] On considère le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^r$  et les vecteurs

$$x = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r, \quad y = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^r$$

et on applique l'inégalité de Schwarz.

[ 3. ] D'après le Théorème spectral, la matrice  $B$  est diagonalisable. En notant  $r$ , son rang et  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ses valeurs propres *non nulles*, la matrice  $B$  est semblable à la matrice

$$D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0).$$

La matrice  $B^2$  est donc semblable à la matrice

$$D^2 = \operatorname{Diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_r^2, 0, \dots, 0)$$

et comme deux matrices semblables ont même trace, l'inégalité cherchée revient à

$$\left( \sum_{k=1}^r \lambda_k \right)^2 \leq r \sum_{k=1}^r \lambda_k^2,$$

ce qui a été établi à la question précédente.

[ 4.a. ] On munit l'espace  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  de son produit scalaire canonique. Comme la matrice  $B$  est symétrique,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(B^2) &= \operatorname{tr}(B^T \cdot B) = \|B\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j}^2 \\ &= \sum_{k=1}^n b_{k,k}^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} b_{i,j}^2 \\ &\leq n + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \frac{1}{n} = n + \frac{n(n-1)}{n} = 2n - 1 \leq 2n. \end{aligned}$$

[ 4.b. ] Comme  $\operatorname{tr} B = n$ , on déduit de ce qui précède que

$$n^2 = (\operatorname{tr} B)^2 \leq r \operatorname{tr}(B^2) \leq 2nr.$$

Par conséquent,  $\operatorname{rg} B \geq n/2$ .

☞ On obtient ainsi une variante du Lemme d'Hadamard sur les matrices à diagonale fortement dominante (la matrice  $B$  n'est pas nécessairement une matrice à diagonale fortement dominante).

On considère l'équation différentielle suivante.

$$\forall t \in I = ]0, +\infty[, \quad t^2 x''(t) + tx'(t) + x(t) = \frac{1}{t} + t \quad (E)$$

- [ 1. ] Que prévoit le Théorème de Cauchy-Lipschitz pour l'équation (E) ?
- [ 2. ] Soient  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  et  $g = [x \mapsto f(e^x)]$ . Démontrer que  $f$  est solution de (E) sur  $I$  si, et seulement si,  $g$  est solution sur  $\mathbb{R}$  d'une équation différentielle du second ordre (qu'on déterminera).
- [ 3. ] Résoudre l'équation (E).

[ 1. ] Sur l'intervalle  $I$ , l'équation (E) peut être mise sous la forme canonique

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad (C)$$

avec

$$A(t) = \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

où les deux applications  $A : I \rightarrow \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$  et  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  sont continues **car**  $0 \notin I$ .

Par conséquent, pour toute condition initiale  $(t_0, (x_0, v_0)) \in I \times \mathbb{R}^2$ , il existe une, et une seule, solution  $F$  de (C) sur  $I$  telle que  $F(t_0) = (x_0, v_0)$ .

Comme  $x \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$  est solution de (E) si, et seulement si,  $X = (x, x') \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$  est solution de (C), on en déduit que, pour tout triplet  $(t_0, x_0, v_0) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , il existe une, et une seule, solution  $f$  de (E) sur  $I$  telle que  $f(t_0) = x_0$  et  $f'(t_0) = v_0$ .

[ 2. ] Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  et que

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \longmapsto g(x) = f(e^x) \end{aligned}$$

l'application  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^x f'(e^x) \quad \text{et} \quad g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x).$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) + g(x) = (e^x)^2 f''(e^x) + e^x f'(e^x) + f(e^x).$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , le réel  $t = e^x$  appartient à l'intervalle  $I$  et comme  $f$  est une solution de (E), alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^x)^2 f''(e^x) + e^x f'(e^x) + f(e^x) = \frac{1}{e^x} + e^x = 2 \operatorname{ch} x.$$

La fonction  $g$  est donc une solution de l'équation différentielle à coefficients constants

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = e^x + e^{-x}. \quad (E_0)$$

☞ On a raisonné par condition nécessaire ("si  $f$  est solution de (E), alors  $g$  est solution de  $(E_0)$ "), il faudra étudier la réciproque à un moment ou un autre. Il n'est pas utile d'attendre !

Le changement de variable  $t = e^x$  peut aussi s'écrire  $x = \ln t$ , c'est donc aussi une bijection de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . De ce fait, en reprenant les calculs qui viennent d'être faits : si  $g(x)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  qui vérifie l'équation  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f(t) = g(\ln t)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  qui vérifie l'équation (E) sur  $I$ .

[ 3. ] On reconnaît l'équation du pendule harmonique. Donc une fonction  $y_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est solution de l'équation homogène associée à  $(E_0)$  si, et seulement si, il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_0(x) = a \cos x + b \sin x.$$

L'équation  $y''(x) + y(x) = e^x$  admet une solution particulière de la forme  $y_1(x) = be^x$ . Après substitution et simplification, on trouve que  $b = 1/2$ .

De même, l'équation  $y''(x) + y(x) = e^{-x}$  admet une solution particulière de la forme  $y_2(x) = ce^{-x}$ . On trouve que  $c = 1/2$ .

Finalement, une fonction  $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est solution de  $(E_0)$  si, et seulement si, il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = a \cos x + b \sin x + cx.$$

• On a justifié plus haut qu'on pouvait en déduire les solutions de  $(E)$  : une fonction  $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$  est solution de  $(E)$  si, et seulement si, il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que

$$\forall t > 0, \quad f(t) = a \cos \ln t + b \sin \ln t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2t}.$$

Soit  $X$ , une variable aléatoire telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

[ 1. ] Vérifier que l'énoncé a un sens.

[ 2. ] Calculer la fonction génératrice de  $X$ .

[ 3. ] Calculer  $\mathbf{E}(X)$  et  $\mathbf{V}(X)$ .

[ 1. ]

↳ **Rappel.** Il existe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  et une variable aléatoire  $X$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  telle que  $\mathbf{P}(X = k) = p_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  si, et seulement si, la série  $\sum p_k$  est une série convergente de terme général positif dont la somme est égale à 1.

On sait que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}. \quad (*)$$

↳ On obtient ce résultat en dérivant terme à terme la série entière  $\sum x^n$ .

Comme  $x = 1/2 \in ]-1, 1[$  et que

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4} \cdot (k-1) \cdot (1/2)^{k-2},$$

la série  $\sum (k-1)2^{-k}$  est une série convergente de terme général positif et sa somme est égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)(1/2)^{k-2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k(1/2)^{k-1} = \frac{1}{4} \cdot (1 - 1/2)^{-2} = \frac{1}{4} \cdot 4,$$

ce qui prouve qu'il existe bien une variable aléatoire  $X$  telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

[ 2. ] D'après (\*),

$$\forall t \in [0, 1], \quad G(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)t^k = \frac{t^2}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k(t/2)^{k-1} = \frac{t^2}{(2-t)^2}.$$

[ 3. ] Le rayon de convergence de la série entière  $\sum k(t/2)^{k-1}$  est égal à 2, donc la fonction génératrice est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'intervalle ouvert  $]-2, 2[$ .

↳ Le terme général tend vers 0 pour  $|t| < 2$  et vers  $+\infty$  pour  $t = 2$ , donc le rayon de convergence est égal à 2.

En particulier, la fonction génératrice  $G$  est deux fois dérivable en  $t = 1$ , donc

$$\mathbf{E}(X) = G'(1) = 4 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X(X-1)) = G''(1) = 16$$

car

$$\forall t \in [0, 1], \quad G'(t) = \frac{4t}{(2-t)^3} \quad \text{et} \quad G''(t) = \frac{8(1+t)}{(2-t)^3}.$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) - [\mathbf{E}(X)]^2 = 4.$$

Soient  $X$  et  $Y$ , deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . On suppose que  $X$  suit la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$  et que la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = m]$  est la loi binomiale  $\mathcal{B}(m, p)$  (avec  $0 < p < 1$ ).

[ 1. ] Déterminer la loi de  $(X, Y)$ .

[ 2. ] En déduire la loi de  $Y$ .

[ 3. ] Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

[ 4. ] Déterminer la loi de  $Z = X - Y$ . Les variables aléatoires  $Y$  et  $Z$  sont-elles indépendantes ?

[ 1. ] Par hypothèse, quels que soient les entiers naturels  $m$  et  $n$ ,

$$\mathbf{P}(X = m, Y = n) = \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(Y = n | X = m).$$

Si  $n > m$ , le second facteur est nul (la loi binomiale  $\mathcal{B}(m, p)$  est portée par l'intervalle  $\llbracket 0, m \rrbracket$ ), donc  $\mathbf{P}(X = m, Y = n) = 0$ . Et si  $0 \leq n \leq m$ , alors

$$\mathbf{P}(X = m, Y = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \cdot \binom{m}{n} p^n q^{m-n} = e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!} \cdot \frac{(\lambda q)^{m-n}}{(m-n)!}.$$

[ 2. ] Comme  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , la famille  $([X = m])_{m \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'évènements et par conséquent

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Y = n) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m, Y = n) = \sum_{m=n}^{+\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!} \cdot \frac{(\lambda q)^{m-n}}{(m-n)!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^k}{k!} = e^{-\lambda + \lambda q} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!}. \end{aligned}$$

On reconnaît ici la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda p)$ .

[ 3. ] Comme  $X$  et  $Y$  suivent une loi de Poisson, on sait que  $\mathbf{P}(X = 0) > 0$  et que  $\mathbf{P}(Y = 1) > 0$ . Mais la loi conjointe nous dit que  $\mathbf{P}(Y \leq X) = 1$  et comme  $[X = 0, Y = 1] \subset [Y \leq X]^c$ , alors

$$\mathbf{P}(X = 0, Y = 1) = 0 \neq \mathbf{P}(X = 0) \mathbf{P}(Y = 1).$$

Donc les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

☞ Pour arriver à cette conclusion, on s'est appuyé sur une propriété remarquable ( $\mathbf{P}(Y \leq X) = 1$ ) qui nous a permis de mettre en évidence un évènement négligeable.

Attention, si une propriété comme  $\mathbf{P}(Y \leq X) = 1$  indique qu'une contrainte relie  $X$  et  $Y$ , elle n'empêche pas que les variables aléatoires soient indépendantes. Par exemple, si  $U$  et  $V$  sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli, alors  $U$  et  $V + 1$  sont encore des variables aléatoires indépendantes et ces deux variables aléatoires vérifient  $\mathbf{P}(U \leq V + 1) = 1$ .

[ 4. ] L'application  $Z$  est une variable aléatoire comme combinaison linéaire de deux variables aléatoires. On décompose l'évènement  $[Z = k]$  avec le système complet d'évènements lié à la variable aléatoire  $X$  :

$$[Z = k] = \bigsqcup_{m=0}^{+\infty} [X = m, X - Y = k] = \bigsqcup_{m=0}^{+\infty} [X = m, Y = m - k].$$

Comme  $\mathbf{P}(Y \geq 0) = 1$  (loi de Poisson),

$$\forall 0 \leq m < k, \quad 0 \leq \mathbf{P}(X = m, Y = m - k) \leq \mathbf{P}(Y = m - k) = 0,$$

il ne reste donc que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Z = k) = \sum_{m=k}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m, Y = m - k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda q)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^n}{n!} = e^{-\lambda + \lambda p} \cdot \frac{(\lambda q)^k}{k!}.$$

La variable aléatoire  $Z$  suit donc la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda q)$ .

☞ On peut vérifier que les variables aléatoires  $Y$  et  $Z$  sont indépendantes et relier les calculs qui précèdent à la stabilité de la loi de Poisson pour l'addition.