
JEUDI 11 JUIN

Référence	Origine	Thèmes
135-143	ENS PSLR MP	Calcul de probabilités
135-350	X MPI	Rayon de convergence
135-485	Mines MP	Extremas d'une somme
135-487	"	Variante du Théorème de Bézout
135-493	"	Axiomes de groupe
135-784	"	Équation différentielle à coefficients périodiques
135-823	"	Vecteurs propres aléatoires
135-842	"	Fonction génératrice
135-962	Mines PSI	Équation différentielle avec singularité
135-964	"	Système différentiel linéaire
136-1416	CCINP MP	Intégrale fonction d'un paramètre
136-1417	IMT MP	Développement asymptotique d'une suite d'intégrales
136-1425	"	Fonction définie par une intégrale
136-1426	CCINP MP	Intégrale fonction d'un paramètre
136-1428	IMT MP	Intégrale fonction d'un paramètre
136-1429	"	Intégrale fonction d'un paramètre
136-1435	CCINP MP	Calcul différentiel dans un espace euclidien
136-1574	CCINP PSI	Intégrale fonction d'un paramètre (Python)
136-1576	IMT PSI	Intégrale fonction d'un paramètre (Python)
136-1585	"	Plan tangent à une surface

Soient $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $0 < p < 1$. On considère deux variables aléatoires X et Y , définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathfrak{P}(E)$, indépendantes et de même loi. On suppose que

$$\forall i \in E, \quad \mathbf{P}(i \in X) = p$$

et que, pour $i \neq j$ dans E , les deux évènements $[i \in X]$ et $[j \in X]$ sont indépendants.

Calculer l'espérance de $\#(X \Delta Y)$.

Pour tout $i \in E$, on note X_i , la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_i(\omega) = 1 \iff i \in X(\omega)$$

c'est-à-dire par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_i(\omega) = \mathbb{1}_{[i \in X(\omega)]}.$$

En tant que fonction d'une variable aléatoire discrète, X_i est bien une variable aléatoire discrète. Elle prend ses valeurs dans $\{0; 1\}$, donc c'est bien une variable aléatoire de Bernoulli et son paramètre est égal à

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(i \in X) = p.$$

Par hypothèse, les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont "deux à deux indépendantes" et nous retiendrons seulement qu'elles sont deux à deux décorrélées :

$$\forall 1 \leq i < j \leq n, \quad \mathbf{Cov}(X_i, X_j) = 0.$$

☞ On peut ainsi justifier l'existence d'une variable aléatoire X telle que la décrit l'énoncé : on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel est défini un vecteur $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et on pose alors

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = \{1 \leq i \leq n : X_i(\omega) = 1\}.$$

On doit cependant remarquer que la loi de X n'est pas complètement définie par l'énoncé. En effet, dans le modèle qu'on vient de présenter, les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont globalement indépendantes alors que, selon l'énoncé, elles sont seulement deux à deux indépendantes.

C'est sans conséquence pour la suite.

☛ Par définition de la **différence symétrique**,

$$\forall A, B \in \mathfrak{P}(E), \quad A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

et par conséquent

$$\forall A, B \in \mathfrak{P}(E), \quad \#(A \Delta B) = \#(A) + \#(B) - 2\#(A \cap B). \quad (\dagger)$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(\#(X \cap Y)) = \mathbf{E}[\#(X)] + \mathbf{E}[\#(Y)] - 2\mathbf{E}[\#(X \cap Y)] = 2\mathbf{E}[\#(X)] - 2\mathbf{E}[\#(X \cap Y)]$$

puisque X et Y ont même loi.

☛ Une variable aléatoire de Bernoulli indique un "succès", une somme de variables aléatoires de Bernoulli dénombre donc le nombre total de "succès". Ainsi,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \#(X(\omega)) = \sum_{i=1}^n X_i(\omega) \quad \text{et} \quad \#(X(\omega) \cap Y(\omega)) = \sum_{i=1}^n X_i(\omega)Y_i(\omega).$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[\#(X)] = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i) = np \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[\#(X \cap Y)] = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i Y_i) \stackrel{(\star)}{=} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i) \mathbf{E}(Y_i) = np^2,$$

l'égalité (\star) découlant de l'indépendance de X et de Y .

☞ Comme X et Y sont supposées indépendantes, toute fonction de X est indépendante de toute fonction de Y (lemme des coalitions) et en particulier X_i est indépendante de Y_i .

En conclusion,

$$\mathbf{E}[\#(X\Delta Y)] = 2np(1-p).$$

↪ On n'a même pas utilisé l'hypothèse de décorrélation des X_i ! Cette hypothèse nous serait utile pour calculer la variance de $\#(X\Delta Y)$. En effet, d'après (†),

$$\begin{aligned} \mathbf{V}[\#(X\Delta Y)] &= \mathbf{V}[\#(X)] + \mathbf{V}[\#(Y)] + 4\mathbf{V}[\#(X\cap Y)] \\ &\quad + 2\mathbf{Cov}[\#(X), \#(Y)] - 4\mathbf{Cov}[\#(X), \#(X\cap Y)] - 4\mathbf{Cov}[\#(Y), \#(X\cap Y)] \\ &= 2\mathbf{V}[\#(X)] + 4\mathbf{V}[\#(X\cap Y)] - 8\mathbf{Cov}[\#(X), \#(X\cap Y)] \end{aligned}$$

car X et Y sont indépendantes et de même loi et, de ce fait, les couples $(\#(X), \#(X\cap Y))$ et $(\#(Y), \#(X\cap Y))$ ont même loi.

On a vu que $\#(X)$ et $\#(X\cap Y)$ étaient des sommes de variables aléatoires de Bernoulli deux à deux décorrélées. D'après le Théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}[\#(X)] &= \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i) = np(1-p), \\ \mathbf{V}[\#(X\cap Y)] &= \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i Y_i) = np^2(1-p^2). \end{aligned}$$

Le même principe s'applique pour le dernier terme, mais il convient de le développer prudemment :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\#(X)\#(X\cap Y)] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{E}[X_i(X_j Y_j)] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(X_i X_j) \mathbf{E}(Y_j) && \text{(indépendance de } X \text{ et de } Y) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i^2) \mathbf{E}(Y_j) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{E}(X_i) \mathbf{E}(X_j) \mathbf{E}(Y_j) && \text{(décorrélation des } X_k) \\ &= np^2 + n(n-1)p^3 \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\mathbf{Cov}[\#(X), \#(X\cap Y)] = [np^2 + n(n-1)p^3] - (np)(np^2) = np^2(1-p).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}[\#(X\Delta Y)] &= 2np(1-p) + 4np^2(1-p^2) - 8np^2(1-p) + 2p(1-p^2) - 4p \\ &= 1 + 2p - 2p^3 - 4p = 1 - 2p - 2p^3 = 1 - 2p(1-p^2) = 1 - 2pq(1+p) \\ &= 2np(1-p)[1 - 2p(1-p)(1+p)]. \end{aligned}$$

Bien entendu, le dernier facteur est bien positif, c'est la moindre des choses.

Soit $\sum a_n z^n$, une série entière dont le rayon de convergence est un réel strictement positif. Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum a_n z^{n^2}.$$

Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$, le rayon de convergence. Comme $R > 0$, il existe deux réels r_1 et r_2 tels que $0 < r_1 < R < r_2$ et

- d'une part, la suite de terme général $a_n r_1^n$ est bornée;
 - d'autre part, la suite de terme général $a_n r_2^n$ n'est pas bornée.
- Considérons un réel $0 < r < 1$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n r^{n^2} = a_n r_1^n \cdot \frac{r^{n^2}}{r_1^n} = a_n r_1^n \cdot \exp(n^2 \ln r - n \ln r_1).$$

Par croissances comparées de n^2 et de n , l'argument de l'exponentielle tend vers $-\infty$ (puisque $\ln r < 0$) donc la suite de terme général $a_n r^{n^2}$ tend vers 0 (produit de deux facteurs de limite nulle).

Nous avons ainsi démontré que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{n^2}$ est au moins égal à 1.

- Considérons maintenant un réel $r > 1$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n r^{n^2} = a_n r_2^n \cdot \exp(n^2 \ln r - n \ln r_2).$$

Cette fois, nous avons le produit d'un facteur non borné (le premier) par un cofacteur qui tend vers $+\infty$ (le second, toujours en comparant les croissances de n^2 et de n). Ce produit n'est donc pas borné et nous avons ainsi prouvé que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{n^2}$ est au plus égal à 1.

Par double inégalité, nous avons démontré que le rayon de convergence de la $\sum a_n z^{n^2}$ était égal à 1.

• ... quel que soit le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, pourvu qu'il ne soit ni nul, ni infini.

On devra se souvenir de la manière dont on a utilisé cette hypothèse — il n'y a pas vraiment d'autre possibilité.

Soient (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) , deux listes de réels. On considère l'application

$$f : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad f(\sigma) = \sum_{k=1}^n a_k b_{\sigma(k)}.$$

Démontrer que f atteint un maximum et un minimum. Expliciter ces deux extrema.

Comme le groupe symétrique \mathfrak{S}_n est un ensemble fini, la fonction f prend un nombre fini de valeurs réelles : elle atteint donc un maximum et un minimum.

☞ En passant un concours, un candidat a eu des notes variées a_1, \dots, a_n . Imaginons que les coefficients imposés soient b_1, \dots, b_n mais que le candidat puisse choisir d'affecter arbitrairement ces coefficients aux notes qu'il a reçues... C'est en pondérant les meilleures notes avec les plus forts coefficients et les pires notes avec les plus faibles coefficients qu'il aura la meilleure moyenne générale.

L'exercice est terminé!

☛ Pour simplifier la démonstration, nous allons supposer que les réels a_k sont déjà rangés dans l'ordre croissant :

$$\forall 1 \leq k < d, \quad a_k \leq a_{k+1}.$$

☛ Considérons quatre réels $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$. Le produit

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = x_2y_2 + x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1$$

est clairement positif, donc

$$x_1y_1 + x_2y_2 \geq x_1y_2 + x_2y_1.$$

☛ Considérons une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et, pour deux entiers $k \neq \ell$, la transposition $\tau = (k \ \ell)$. Alors

$$\begin{aligned} f(\tau \circ \sigma) - f(\sigma) &= \sum_{i=1}^n a_i b_{\tau(\sigma(i))} - \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{\sigma^{-1}(j)} b_{\tau(j)} - a_{\sigma^{-1}(j)} b_j \\ &= a_{\sigma^{-1}(k)} (b_{\tau(k)} - b_k) + a_{\sigma^{-1}(\ell)} (b_{\tau(\ell)} - b_\ell) \\ &= (a_{\sigma^{-1}(k)} - a_{\sigma^{-1}(\ell)}) (b_\ell - b_k). \end{aligned}$$

La valeur $f(\sigma)$ est donc maximale si, et seulement si,

$$\forall 1 \leq k, \ell \leq n, \quad (a_{\sigma^{-1}(k)} - a_{\sigma^{-1}(\ell)}) (b_\ell - b_k) \leq 0$$

c'est-à-dire

$$\forall 1 \leq k, \ell \leq n, \quad (a_k - a_\ell) (b_{\sigma(k)} - b_{\sigma(\ell)}) \geq 0.$$

Par hypothèse, les a_k sont rangés dans l'ordre croissant :

$$\forall 1 \leq k < \ell \leq n, \quad a_k \leq a_\ell,$$

donc la valeur $f(\sigma)$ est maximale si, et seulement si,

$$\forall 1 \leq k < \ell \leq n, \quad b_{\sigma(k)} - b_{\sigma(\ell)} \geq 0$$

c'est-à-dire si les réels $b_{\sigma(k)}$ sont rangés dans l'ordre croissant :

$$b_{\sigma(1)} \leq b_{\sigma(2)} \leq \dots \leq b_{\sigma(k)} \leq b_{\sigma(k+1)} \leq \dots \leq b_{\sigma(n)}.$$

☛ Par symétrie, la valeur $f(\sigma)$ est minimale si, et seulement si, les réels $b_{\sigma(k)}$ sont rangés dans l'ordre décroissant :

$$b_{\sigma(1)} \geq b_{\sigma(2)} \geq \dots \geq b_{\sigma(k)} \geq b_{\sigma(k+1)} \geq \dots \geq b_{\sigma(n)}.$$

Deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, pour tout entier $n \geq ab$, il existe deux entiers naturels u et v tels que

$$au + bv = n.$$

☞ Pour apprécier l'exercice, il faut le comparer à la caractérisation de Bézout des entiers premiers entre eux : deux entiers a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, pour tout entier relatif n , il existe deux entiers relatifs u et v tels que

$$au + bv = n.$$

☛ Choisissons un entier $n \geq ab$. Par hypothèse, il existe des entiers naturels u_0, v_0, u_1 et v_1 tels que

$$au_0 + bv_0 = n \quad \text{et} \quad au_1 + bv_1 = (n + 1).$$

Par différence, il existe deux entiers relatifs $u = u_1 - u_0$ et $v = v_1 - v_0$ tels que

$$au + bv = 1$$

et par conséquent u et v sont premiers entre eux.

☛ Réciproquement, supposons que a et b soient premiers entre eux et considérons un entier $n \geq ab$.

D'après la caractérisation de Bézout, il existe deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que

$$au_0 + bv_0 = n. \quad (*)$$

Comme a, b et n sont des entiers naturels non nuls, on ne peut pas avoir $u_0 \leq 0$ et $v_0 \leq 0$.

Supposons donc que $u_0 > 0$ et $v_0 < 0$. D'après (*), pour tout entier naturel k ,

$$a(u_0 - kb) + b(v_0 + ka) = n.$$

Choisissons en particulier l'entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq v_0 + ka < a$.

☞ Comme $a \geq 1$, cette contrainte sur k peut aussi s'écrire sous la forme

$$\frac{-v_0}{a} \leq k < \frac{-v_0}{a} + 1,$$

ce qui nous donne $k = \lceil -v_0/a \rceil$ (partie entière supérieure) et cet entier est bien un entier naturel puisque $v_0 < 0$.

On a donc

$$a(u_0 - kb) = au_0 - kab \stackrel{(*)}{=} (n - bv_0) - kab = n - (v_0 + ka)b.$$

Par choix de k , le facteur $(v_0 + ka)$ est strictement inférieur à a , donc le produit $(v_0 + ka)b$ est strictement inférieur à ab et par conséquent $a(u_0 - kb) \in \mathbb{N}$. Comme a est un entier naturel non nul, on en déduit que $(u_0 - kb) \in \mathbb{N}$. En posant

$$u = u_0 - kb \quad \text{et} \quad v = v_0 + ka,$$

on a donc deux entiers naturels u et v tels que $au + bv = n$.

☞ Une démonstration analogue est possible dans l'autre cas à étudier : $u_0 < 0$ et $v_0 > 0$.

Soit G , un ensemble muni d'une loi de composition interne associative $*$. On suppose qu'il existe un élément $e \in G$ tel que

$$\forall x \in G, \quad x * e = x$$

et que

$$\forall x \in G, \exists x' \in G, \quad x * x' = e.$$

Démontrer que $(G, *)$ est un groupe.

☞ Il faut bien connaître les axiomes des groupes pour savoir ce qu'il convient de démontrer ! Il suffit de vérifier que l'élément e donné par l'énoncé vérifie en fait les propriétés suivantes.

$$\forall x \in G, \quad x * e = e * x = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G, \exists x' \in G, \quad x' * x = x * x' = e.$$

Considérons l'élément e donné par l'énoncé et choisissons un élément $x \in G$. D'après l'énoncé, il existe un élément $x' \in G$ tel que $x * x' = e$ et $x * e = x$. Toujours d'après l'énoncé, $x' * e = x'$.

☛ Considérons alors l'élément $x' * x \in G$. Par hypothèse, il existe un élément de G , que nous noterons $(x' * x)'$, tel que $(x' * x) * (x' * x)' = e$.

☛ Par associativité de $*$, on déduit des relations précédentes que

$$x' = x' * e = x' * (x * x') = (x' * x) * x'$$

et donc (en multipliant à droite par x) que

$$x' * x = [(x' * x) * x'] * x = (x' * x) * (x' * x).$$

En multipliant à droite par l'élément $(x' * x)'$ introduit ci-dessus, on en déduit que

$$\begin{aligned} e &= (x' * x) * (x' * x)' \\ &= [(x' * x) * (x' * x)] * (x' * x)' = (x' * x) * [(x' * x) * (x' * x)'] = (x' * x) * e \\ &= (x' * x). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré que

$$\forall x \in G, \exists x' \in G, \quad x' * x = x * x' = e.$$

☛ Par conséquent, pour tout $x \in G$, il existe un élément $x' \in G$ tel que

$$e * x = (x * x') * x = x * (x' * x) = x * e = x$$

et nous avons enfin démontré que $(G, *)$ était bien un groupe.

Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, une application continue de période $T > 0$. Démontrer qu'il existe un nombre complexe $\lambda \neq 0$ et une application $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ de classe \mathcal{C}^1 et non identiquement nulle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t) \quad \text{et} \quad X(t+T) = \lambda X(t).$$

Comme A est une application continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$, on déduit de la Théorie de Cauchy-Lipschitz que l'ensemble S_H des solutions $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$ de l'équation différentielle linéaire et homogène

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t)$$

est un espace vectoriel de dimension n .

• Soit $X \in S_H$ et posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(X)(t) = X(t+T).$$

Il est clair que $\Phi(X)$ est une application de classe \mathcal{C}^1 de I dans \mathbb{C}^n . De plus, comme A est périodique de période T ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad [\Phi(X)]'(t) = X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)[\Phi(X)](t),$$

ce qui prouve que $\Phi(X) \in S_H$.

• On vérifie sans peine que Φ est une application linéaire.

Ainsi, Φ est un endomorphisme de S_H , espace vectoriel **complexe de dimension finie**, donc Φ admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe donc $X_\lambda \in S_H$, non identiquement nulle (**un valeur propre n'est jamais nul**).

Enfin, par définition de Φ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X_\lambda(t+T) = \lambda X_\lambda(t).$$

Si la valeur propre λ était nulle, on pourrait en déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X_\lambda(t) = \lambda X_\lambda(t-T) = 0,$$

ce qui est absurde puisque X_λ est un **vecteur propre**.

Soient X, Y et Z , trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que

$$X \stackrel{d}{=} Z \stackrel{d}{=} \mathcal{G}(p) \quad \text{et que} \quad Y \stackrel{d}{=} \mathcal{P}(\lambda).$$

Calculer la probabilité pour que le vecteur aléatoire

$$U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

soit un vecteur propre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A n'est pas inversible (les colonnes C_1 et C_3 sont proportionnelles), donc 0 est une valeur propre évidente et nous n'aurons donc aucune difficulté à factoriser son polynôme caractéristique. On se lance et on trouve :

$$\chi_A = X(X-1)(X+1).$$

La matrice A est donc diagonalisable et ses trois sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

On a déjà remarqué que $C_1 + C_3 = 0$, donc le vecteur $(1, 0, 1)$ appartient au sous-espace propre $\text{Ker}(A - 0I_3)$ et comme ce sous-espace propre est une droite vectorielle, on sait donc que

$$\text{Ker } A = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• Par ailleurs, on voit sur la matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

que $C_1 - C_2 + C_3 = 0$. Pour les raisons qu'on a données précédemment,

$$\text{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• De même, on voit sur la matrice

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que $C_1 + C_3 = 0$ et donc que

$$\text{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

• Comme X, Y et Z sont des variables aléatoires à valeurs entières et que X n'est jamais nulle (loi géométrique), le vecteur aléatoire (X, Y, Z) n'est jamais nul : c'est donc un vecteur propre si, et seulement si, il appartient à l'un des sous-espaces propres propres.

Il est clair que (X, Y, Z) ne peut jamais appartenir au sous-espace propre $\text{Ker}(A - I_3)$ (puisque ses trois coordonnées sont positives).

L'évènement étudié est donc

$$B = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \right] \sqcup \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 2k \end{pmatrix} \right]$$

c'est-à-dire

$$B = \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = k, Y = 0, Z = k] \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = k, Y = k, Z = 2k] \right).$$

↳ Il est clair que ces évènements sont deux à deux disjoints : on a exprimé B au moyen d'évènements extraits du système complet d'évènements associé au vecteur aléatoire (X, Y, Z) et chaque évènement de ce système complet apparaît au plus une fois.

On a exprimé B comme une union dénombrable d'évènements deux à deux disjoints, donc

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = 0, Z = k) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = k, Z = 2k)$$

par σ -additivité de \mathbf{P} . Les trois variables aléatoires étant supposées indépendantes, on en déduit que

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = 0) \mathbf{P}(Z = k) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = k) \mathbf{P}(Z = 2k)$$

et comme les lois de X, Y et Z sont connues, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} \cdot e^{-\lambda} \cdot pq^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot pq^{2k-1} \\ &= e^{-\lambda} p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} + p^2 q^{-2} e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(q^3 \lambda)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \left[\frac{p}{1+q} + \frac{p^2}{q^2} (e^{q^3 \lambda} - 1) \right]. \end{aligned}$$

Démontrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} dont la fonction génératrice vérifie

$$\forall t \in [0, 1], \quad G(t) = \frac{e^{t-1}}{\sqrt{2-t}}.$$

Calculer l'espérance et la variance de X .

☞ **Rappels**

Si la somme G de la série entière $\sum a_n t^n$ est la fonction génératrice d'une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \mathbf{P}(X = n),$$

donc la famille $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille sommable de réels positifs dont la somme est égale à 1.

☛ Réciproquement, si la famille $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille sommable de réels positifs dont la somme est égale à 1, alors cette famille est une distribution de probabilité et par conséquent (résultat – admis – du cours) il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire $X : \mathbb{N} \rightarrow \Omega$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \mathbf{P}(X = n).$$

Comme

$$\forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{\sqrt{2-t}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 - t/2)^{-1/2},$$

la fonction G est le produit de deux fonctions développables en série entière, donc elle est développable en série entière (Théorème du produit de Cauchy).

Le rayon de convergence du numérateur est infini, le rayon de convergence du cofacteur est égal à 2, donc G est en fait développable en série entière sur $] -2, 2[$. Il existe donc des réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\forall t \in [0, 1], \quad G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

☛ En pratique, comme le rayon de convergence de la série entière est strictement supérieur à 1, la série $\sum a_n = \sum a_n \cdot 1^n$ est absolument convergente et sa somme est bien égale à 1 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = G(1) = \frac{e^{1-1}}{\sqrt{2-1}} = 1.$$

Il suffit donc de vérifier que les coefficients a_n du développement en série entière sont tous positifs pour conclure.

☛ Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{t-1} = e^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{n!} t^n$$

et pour ce facteur, tous les coefficients sont positifs.

☞ On aura reconnu la fonction génératrice de la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

Pour tout $|t| < 2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2-t}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 - t/2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2) \cdots (-1/2 - [n-1])}{n!} \cdot \frac{(-t)^n}{2^n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \cdot \frac{t^n}{2^n}. \end{aligned}$$

Il apparaît que les coefficients de ce développement en série entière sont tous positifs.

Comme on l'a observé en commençant, la fonction G est le produit de ces deux séries entières :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{n!} t^n \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} \cdot \frac{t^n}{2^n} \right).$$

La formule du produit de Cauchy :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

nous montre que si tous les u_n et tous les v_n sont positifs, alors tous les a_n sont positifs.

On a ainsi démontré que G était bien la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} .

• On sait que X est d'espérance finie si, et seulement si, sa fonction génératrice G est dérivable en $t = 1$.

Comme le rayon de convergence de la série entière est égal à 2 et donc strictement supérieur à 1, la variable aléatoire X admet des moments de tout ordre et

$$\mathbf{E}(X) = G'(1) = 3/2, \quad \mathbf{E}(X(X-1)) = G''(1) = 11/4.$$

On en déduit la variance de X :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X(X-1)] + \mathbf{E}(X) - [\mathbf{E}(X)]^2 = 2.$$



Remarque

Si on a déjà traité l'exercice **135-838**, tout est plus simple. On sait que e^{t-1} est l'expression de la fonction génératrice de la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$:

$$\forall t \in [0, 1], \quad e^{t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-1} \frac{1}{n!} t^n$$

et que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{\sqrt{2-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n t^n \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{(2n)!}{2^{3n} (n!)^2} t^n. \quad (*)$$

La famille $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une famille sommable de réels positifs dont la somme est égale à 1.

Il existe donc un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel sont définies deux variables aléatoires indépendantes Y , de loi $\mathcal{P}(1)$, et Z , dont la loi est caractérisée par $(*)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Z = n) = \frac{(2n)!}{2^{3n} (n!)^2}.$$

On pose alors

$$X = Y + Z$$

(ce qui définit bien une variable aléatoire de Ω dans \mathbb{N}). Comme Y et Z sont indépendantes, on sait que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \mathbf{E}(t^X) = \mathbf{E}(t^Y) \mathbf{E}(t^Z) = e^{t-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-t}}.$$

• Plus généralement, tout produit de fonctions génératrices est la fonction génératrice d'une somme des variables aléatoires indépendantes.

• Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}(Z) = 1 + 1/2 = 3/2.$$

Par indépendance des variables aléatoires,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y) + \mathbf{V}(Z) = 1 + 1 = 2.$$

On considère l'équation différentielle

$$x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x) = 0 \quad (E)$$

- [1.] Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
- [2.] Résoudre (E) sur un intervalle I sans singularité.
- [3.] Peut-on raccorder les solutions de part et d'autre d'une singularité?

[1.] Soit y , une fonction développable en série entière : il existe un réel $r > 0$ et une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\forall x \in]-r, r[, \quad y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

Comme $r > 0$, la fonction y est de classe \mathcal{C}^∞ et (indéfiniment) dérivable terme à terme sur l'intervalle ouvert $]-r, r[$, donc

$$\begin{aligned} \forall x \in]-r, r[, \quad y'(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1}x^k, & 3xy'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} 3ka_kx^k, \\ xy''(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)ka_{k+1}x^k, & x^2y''(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_kx^k. \end{aligned}$$

Il faut d'abord effectuer tous les changements d'indice nécessaire pour obtenir des sommes dont le terme général est toujours de la forme $b_k x^k$.

Il faut ensuite penser à ajouter, autant que possible, de termes nuls pour que les index des différentes sommes soient analogues, voire, dans le meilleur des cas, égaux.

Par conséquent, pour tout $x \in]-r, r[$, l'expression $x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x)$ est égale à

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)ka_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)a_kx^k + \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} 3ka_kx^k + \sum_{k=0}^{+\infty} a_kx^k.$$

Après simplification, la fonction y est solution de l'équation (E) si, et seulement si,

$$\forall x \in]-r, r[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^2(a_{k+1} - a_k)x^k = 0.$$

Comme $r > 0$ et que les deux membres de l'égalité sont développables en série entière, on peut identifier les deux sommes terme à terme :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = a_k.$$

On a ainsi démontré que toute solution développable en série entière de (E) est proportionnelle à la fonction $[x \mapsto 1/(1-x)]$.

On a raisonné par condition nécessaire en commençant par **supposer** que y était une solution développable en série entière.

Il faut maintenant vérifier que les fonctions trouvées (qui sont les seules possibles) sont effectivement des solutions de (E).

Au lieu de raisonner sur la série entière (ce qui nous obligerait à rester sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1, 1[$), nous allons calculer sur la somme et donc sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

• Réciproquement, avec

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \text{on a} \quad f_1'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad f_1''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

On en déduit facilement que f_1 est solution de (E) sur les deux intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

↳ L'équation différentielle homogène (E) peut être écrite sous la forme canonique

$$\forall x \in I, \quad Y'(x) = A(x)Y(x) \quad (C)$$

avec

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(x) = \frac{1}{(1-x)x} \begin{pmatrix} 0 & (1-x)x \\ 1 & 3x-1 \end{pmatrix}.$$

L'application A est continue sur les trois intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$. On peut donc appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz sur ces trois intervalles (et sur tout sous-intervalle d'un de ces trois intervalles).

On en déduit que, pour $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, pour tout instant $x_k \in I_k$ et toute "position initiale" $(y_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, il existe une, et une seule, solution $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ de l'équation canonique (C) sur l'intervalle I_k telle que $Y(x_k) = (y_k, v_k)$.

En remarquant que y est solution de (E) sur I si, et seulement si, Y est solution de (C) sur I , on peut reformuler les conséquences du Théorème de Cauchy-Lipschitz : pour $k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, pour tout instant $x_k \in I_k$ et pour tout couple $(y_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, il existe une, et une seule, solution $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ de l'équation (E) sur l'intervalle I_k telle que

$$y(x_k) = y_k \quad \text{et} \quad y'(x_k) = v_k.$$

Quelle que soit la formulation (canonique ou non), l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 et pour l'instant, les solutions que nous avons trouvées sont toutes proportionnelles à f_1 — nous étudions un plan et nous n'en connaissons qu'une droite.

[2.] La théorie de Cauchy nous assure que l'ensemble des solutions de (E) sur I_1 (resp. sur I_2 , resp. sur I_3) est un plan vectoriel. Nous connaissons un vecteur $f_1 \neq 0$ de ce plan et nous allons chercher un second vecteur de ce plan, non proportionnel au premier, en faisant varier la constante.

↳ Comme c'est le cas la plupart du temps, les calculs de dérivées et de primitives sont les mêmes sur les trois intervalles I_1, I_2 et I_3 . Nous allons donc rédiger la résolution sur un intervalle I_k indéterminé.

Nous cherchons donc une fonction $a \in \mathcal{C}^2(I_k, \mathbb{R})$ telle que la fonction

$$f_2 = \left[x \mapsto a(x)f_1(x) = \frac{a(x)}{1-x} \right]$$

soit une solution de (E) sur I_k . On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall x \in I_k, \quad f_2'(x) &= a'(x) \cdot f_1(x) + a(x) \cdot f_1'(x), \\ f_2''(x) &= a''(x) \cdot f_1(x) + 2a'(x)f_1'(x) + a(x)f_1''(x). \end{aligned}$$

↳ On aura bien sûr pensé à utiliser la formule de Leibniz pour calculer la dérivée seconde !

↳ On injecte ensuite ces expressions dans (E) en regroupant les termes en facteur de $a(x)$, de $a'(x)$ et de $a''(x)$. On peut se dispenser de calculer le cofacteur de $a(x)$, puisqu'il est nul : par définition, la fonction f_1 est une solution de (E) !

Ainsi,

$$\forall x \in I_k, \quad \left[\frac{a''(x)}{1-x} + \frac{2xa'(x)}{(1-x)^2} \right] + \frac{2a''(x)}{(1-x)^3} = 0$$

ou, plus simplement,

$$\forall x \in I_k, \quad xa''(x) + a'(x) = 0.$$

↳ Il ne s'agit pas vraiment d'une équation du second ordre, mais d'une équation du premier ordre en a' . Il en va toujours ainsi lorsqu'on applique la méthode de variation de la constante.

On en déduit tout d'abord que $a'(x)$ est proportionnelle à $1/x$, puis que la fonction

$$f_2 = \left[x \mapsto \frac{\ln|x|}{1-x} \right]$$

est une solution de (E) sur I_k .

• En conclusion, pour $1 \leq k \leq 3$, une fonction y est solution de (E) sur l'intervalle I_k si, et seulement si, il existe deux réels a_k et b_k tels que

$$\forall x \in I_k, \quad y(x) = a_k \cdot \frac{1}{1-x} + b_k \cdot \frac{\ln|x|}{1-x}.$$

• Il est clair que la fonction f_2 n'est pas développable en série entière au voisinage de l'origine (limite infinie en $x = 0!$). C'est pourquoi toutes les solutions développables en série entière sont proportionnelles à f_1 .

[3.] Si y est une solution de (E) autour de $x = 0$, alors il existe des réels a_1, b_1, a_2 et b_2 tels que

$$\forall x < 0, \quad y(x) = \frac{a_1 + b_1 \ln|x|}{1-x} \quad \text{et} \quad \forall 0 < x < 1, \quad y(x) = \frac{a_2 + b_2 \ln x}{1-x}.$$

Comme $\ln|x|$ tend vers 0 au voisinage de 0, il faut que $b_1 = b_2 = 0$ pour que y soit bornée au voisinage de 0. Il faut de plus que $a_1 = a_2$ pour que y soit continue en 0.

Réciproquement, on sait déjà que la fonction f_1 est une solution de (E) sur $]-\infty, 1[$.

• Si y est une solution de (E) autour de $x = 1$, alors il existe des réels a_2, b_2, a_3 et b_3 tels que

$$\forall 0 < x < 1, \quad y(x) = \frac{a_2 + b_2 \ln x}{1-x} \quad \text{et} \quad \forall x > 1, \quad y(x) = \frac{a_3 + b_3 \ln x}{1-x}.$$

On sait que $\ln x \sim (x-1)$ pour x voisin de 1, donc

$$y(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{a_k}{1-x} - b_k + o(1).$$

Pour que y soit continue en 1, il faut donc que $a_2 = a_3 = 0$ et que $b_2 = b_3$.

Réciproquement, la fonction f_2 est évidemment de classe \mathcal{C}^∞ sur $I_2 \cup I_3$. En posant $f_2(1) = -1$, on définit un prolongement de f_2 qui est même développable en série entière au voisinage de 1 : comme

$$\forall h \in]-1, 1[\setminus \{0\}, \quad \frac{\ln(1+h)}{-h} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} h^n}{n+1},$$

on a

$$f_2(x) = f_2(1 + (x-1)) \underset{x \rightarrow 1}{=} -1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{3} + \mathcal{O}((x-1)^3).$$

Cela nous montre que $f_2'(1) = 1/2$ et donc que la fonction f_2 ainsi prolongée vérifie (E) pour $x = 1$ également.

• La formule de Taylor donne le développement en série entière et le développement limité de f_2 : inutile de se fatiguer pour calculer un développement limité si on connaît un développement en série entière !

• Enfin, les discussions précédentes montrent que la seule solution de (E) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ est la fonction nulle.

[1.] On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = Ax(t) \quad (\text{H})$$

où $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Démontrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A si, et seulement si, il existe un vecteur non nul $x_\lambda \in \mathbb{R}^3$ tel que la fonction

$$f_\lambda = [t \mapsto e^{\lambda t} x_\lambda]$$

soit une solution de l'équation (H).

[2.] Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix}$$

et $F = \{f_{a,b,c}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

[2.a.] Démontrer que F est un espace vectoriel. Préciser sa dimension.

[2.b.] Déterminer une matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall f \in F, \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = Mf(t).$$

Quel est le spectre de M ?

[1.] Quels que soient le réel a et le vecteur $x \in \mathbb{R}^3$, il est clair que la fonction $f = [t \mapsto e^{at}x]$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = ae^{at}x.$$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de la matrice A . Il existe donc un vecteur propre $x_\lambda \in \mathbb{R}^3$ de A associé à λ et, par définition, ce vecteur n'est pas nul.

La fonction $f_\lambda = [t \mapsto e^{\lambda t}x_\lambda]$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'_\lambda(t) = \lambda e^{\lambda t}x_\lambda = e^{\lambda t} \cdot Ax_\lambda = A \cdot f_\lambda(t).$$

• Réciproquement, si f_λ est une solution de (H), alors en particulier

$$\lambda \cdot x_\lambda = \lambda e^{\lambda \times 0} \cdot x_\lambda = f'_\lambda(0) = Af_\lambda(0) = A \cdot (e^{\lambda \times 0} \cdot x_\lambda) = Ax_\lambda$$

et comme le vecteur x_λ est supposé non nul, on en déduit qu'il s'agit d'un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

[2.a.] Comme

$$f_{a,b,c}(t) = a \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + be^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + ce^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

il est clair que F est le sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les trois fonctions $f_{1,0,0}$, $f_{0,1,0}$ et $f_{0,0,1}$. C'est donc un espace vectoriel et sa dimension est inférieure à 3.

On peut rapidement vérifier que le rang de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 3, donc cette matrice est inversible, ce qui prouve que les trois vecteurs $f_{1,0,0}(0)$, $f_{0,1,0}(0)$ et $f_{0,0,1}(0)$ sont linéairement indépendants et donc que la famille $(f_{1,0,0}, f_{0,1,0}, f_{0,0,1})$ est une base de F et $\dim F = 3$.

• Si trois fonctions f , g et h de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^3 forment une famille liée, alors il existe un triplet de scalaires $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad af(t) + bg(t) + ch(t) = 0$$

et en particulier $af(0) + bg(0) + ch(0) = 0$, ce qui prouve que les trois vecteurs $f(0)$, $g(0)$ et $h(0)$ forment une famille liée (puisqu'ils sont linéairement dépendants).

[2.b.] Quels que soient a, b, c et t ,

$$f'_{a,b,c}(t) = be^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - ce^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La relation $f'(t) = Mf(t)$ est vérifiée pour toute fonction $f \in F$ si, et seulement si, elle est vérifiée pour les trois fonctions $f_{1,0,0}, f_{0,1,0}, f_{0,0,1}$ (qui constituent une sorte de base canonique de F). On cherche donc une matrice M telle que

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\dagger)$$

On obtient rapidement

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on en déduit que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est la seule matrice qui convienne.

• En remarquant que l'équation (\dagger) peut aussi s'écrire

$$MP = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$M = P \text{Diag}(0, 1, -1)P^{-1}.$$

Par conséquent, la matrice M est diagonalisable et $\text{Sp}(M) = \{0, -1, 1\}$.

↳ Le cours sur les systèmes différentiels à coefficients constants montre que les solutions de l'équation $x'(t) = Mx(t)$ sont les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^3)$ de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \exp(tM).f(0).$$

Ici,

$$f_{a,b,c}(0) = \begin{pmatrix} b+c \\ 2a-b \\ a+c \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_{a,b,c}(t) = P \begin{pmatrix} a \\ be^t \\ ce^{-t} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne

$$f_{a,b,c}(t) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} f_{a,b,c}(0)$$

et comme cette propriété est vraie pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tM) &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} = P \exp[\text{Diag}(0, t, -t)] P^{-1} \\ &= \exp[tP \text{Diag}(0, 1, -1)P^{-1}] \end{aligned}$$

(puisque $\exp(Q^{-1}AQ) = Q^{-1} \exp(A)Q$, quelles que soient la matrice A et la matrice inversible Q).

NB : L'application \exp n'est pas injective sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt^2)e^{-t} dt.$$

[1.] Démontrer que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Expliciter la valeur de $F^{(k)}(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

[2.] La fonction F est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

[1.] Soit $I = [0, +\infty[$. Pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times I$, on pose

$$\varphi(x, t) = \cos(xt^2)e^{-t}.$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction intégrande $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur l'intervalle I et est $\mathcal{O}(e^{-t})$ au voisinage de $t = +\infty$, donc intégrable sur I . La fonction F est donc bien définie sur \mathbb{R} .

• Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \varphi(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t) = (t^2)^n \cos(xt^2 + n\pi/2)e^{-t}.$$

• Astuce à retenir : le déphasage de $\pi/2$ nous épargne une discussion modulo 4 pour l'expression des dérivées successives.

• Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$t \mapsto \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t)$$

est continue sur I et $\mathcal{O}(t^{2n}e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$, donc elle est intégrable sur I .

• Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times I, \quad \left| \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq t^{2n}e^{-t}.$$

Le majorant est indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et intégrable sur I , donc la condition de domination est satisfaite.

Par conséquent, la fonction F est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad F^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{2n} \cos(xt^2 + n\pi/2)e^{-t} dt.$$

• En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F^{(n)}(0) = \cos(n\pi/2) \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t} dt = (2n)! \cos \frac{n\pi}{2}$$

ou, plus clairement,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad F^{(2k)}(0) = (-1)^k (4k)! \quad \text{et} \quad F^{(2k+1)}(0) = 0.$$

• Cette dernière valeur n'est pas une surprise, puisqu'on s'est aperçu dès le début que la fonction F était paire.

[2.] Si F était développable en série entière, les calculs précédents nous donneraient sa série de Taylor :

$$\sum \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum \frac{(-1)^k (4k)!}{(2k)!} x^{2k}.$$

Mais on se rend compte que le rayon de convergence de cette série entière est nul. Donc F n'est pas développable en série entière.

• On peut bien entendu recourir à la règle de d'Alembert pour vérifier que le rayon de convergence est nul. Mais il est aussi clair que, par croissances comparées, le terme général de cette série ne tend vers 0 que pour $x = 0$ et cela suffit pour conclure.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_1^e \ln^n t \, dt.$$

[1.] Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

[2.] Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

[3.] Donner un développement asymptotique à deux termes de I_n .

[1.] La fonction $f_n = [t \mapsto \ln^n t]$ est continue sur le segment $[1, e]$, donc elle est intégrable, donc les intégrales I_n sont bien définies.

• Pour $1 \leq t < e$, on a $0 \leq \ln t < 1$, donc $\ln^n t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [1, e], \quad 0 \leq f_n(t) \leq 1.$$

Comme la fonction constante $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[1, e]$, la convergence est dominée et par conséquent

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

[2.] Il suffit d'intégrer par parties :

$$I_{n+1} = \int_1^e 1 \cdot \ln^{n+1} t \, dt = [t(\ln t)^{n+1}]_1^e - (n+1) \int_1^e t \cdot \frac{(\ln t)^n}{t} \, dt = e - (n+1)I_n.$$

[3.] Comme I_{n+1} tend vers 0, on déduit de la relation précédente que $(n+1)I_n$ tend vers e et donc que $I_n \sim e/n$.

• En revenant à la relation de récurrence,

$$(n+1)I_{n+1} = (n+1)[e - (n+1)I_n] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$$

c'est-à-dire

$$(n+1)e - (n+1)^2 I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e + o(1).$$

On en déduit que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{e}{n+1} - \frac{e}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{e}{n} - \frac{2e}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

• Si ce dernier développement vous étonne, c'est que vous avez oublié ceci :

$$\frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On pose

$$f(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

- [1.] Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- [2.] Déterminer une équation différentielle vérifiée par f .
- [3.] Démontrer que f est développable en série entière et calculer son développement.

[1.] La fonction $t \mapsto \exp(-t^2/2)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle \mathbb{R} . D'après le Théorème fondamental, la fonction

$$x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

est aussi de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} (c'est la primitive de f qui s'annule en $x = 0$) et, par produit, la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

[2.] D'après la formule de Leibniz,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = xf(x) + 1. \quad (*)$$

[3.] On sait que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{x^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{-t^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}.$$

Lorsque le rayon de convergence d'une série entière est infini, la série converge normalement sur tout segment. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

En tant que produit de deux fonctions développables en série entière sur \mathbb{R} , la fonction f est développable en série entière sur \mathbb{R} (Théorème du produit de Cauchy).

En tant que produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire, la fonction f est impaire, donc son développement en série entière est de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}.$$

Sur l'intervalle ouvert de convergence (c'est-à-dire sur \mathbb{R}), on peut dériver terme à terme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1) a_{2k+1} x^{2k} = a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1) a_{2k+1} x^{2k}$$

et on déduit de l'équation différentielle (*) que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1) a_{2k+1} x^{2k} &= 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+2} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k-1} x^{2k}. \end{aligned}$$

Comme le rayon de convergence est strictement positif, on peut identifier les deux sommes terme à terme (unicité du développement en série entière), ce qui nous donne

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2k+1} = \frac{a_{2k-1}}{2k+1}.$$

On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3 \cdot 1} = \frac{(2k)(2k-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2k+1)!} = \frac{2^k k!}{(2k+1)!}.$$

☞ *Ayant présenté la fonction f comme un produit de deux fonctions développables en série entière, on aurait pu être tenté d'appliquer la formule du produit de Cauchy. Comme*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{2^m m!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)2^n n!} \right),$$

on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k+1} = \sum_{p=0}^{2k+1} b_p c_{2k+1-p} = \sum_{m=0}^k b_{2m} c_{2(k-m)+1} = \sum_{n=0}^k b_{2(k-n)} c_{2n+1}$$

puisque les b_p d'indice impair et les c_q d'indice pair sont nuls.

On obtient ainsi

$$a_{2k+1} = \sum_{n=0}^k \frac{1}{2^{k-n}(k-n)!} \cdot \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^n n!}$$

et on déduit du résultat obtenu plus haut l'identité suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{4^k k!}{(2k+1)!} = \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{(2n+1)(k-n)!n!}$$

qui a peut-être une utilité.

En tout cas, la formule du produit de Cauchy ne nous donne pas un résultat aussi simple que celui qu'on a obtenu plus haut.

On pose

$$\varphi(x, t) = e^{-t^2} \operatorname{ch}(xt).$$

[1.] Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'application $t \mapsto \varphi(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

[2.] L'application F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(xt) dt$$

est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?

[3.] Déterminer une équation différentielle vérifiée par F . En déduire une expression simple de F .

☞ On admettra que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

[1.] Il est clair que $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur l'intervalle fermé $[0, +\infty[$. Par croissances comparées, quel que soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$e^{-t^2} \operatorname{ch}(xt) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t^2} \cdot \frac{e^{|x|t}}{2}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-t^2} \operatorname{ch}(xt) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-t}),$$

donc $t \mapsto \varphi(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

[2.] On a démontré que F était bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction partielle $x \mapsto \varphi(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = te^{-t^2} \operatorname{sh}(xt).$$

La fonction $t \mapsto te^{-t^2} \operatorname{sh}(xt)$ est clairement continue sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, à nouveau par croissances comparées,

$$te^{-t^2} \operatorname{sh}(xt) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-t}),$$

donc l'application

$$t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

De plus, pour tout $a > 0$,

$$\forall x \in [-a, a], \quad \forall t \in [0, +\infty[, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, t).$$

Le majorant est indépendant de x et, on vient de le justifier, intégrable sur $[0, +\infty[$. Par conséquent, la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur

$$\bigcup_{a>0} [-a, a] =]-\infty, +\infty[$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \operatorname{sh}(xt) dt.$$

[3.] On peut intégrer par parties l'expression de $F'(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2F'(x) = \int_0^{+\infty} (-2te^{-t^2}) \cdot \operatorname{sh}(xt) dt = [e^{-t^2} \cdot \operatorname{sh}(xt)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cdot x \operatorname{ch}(xt) dt = -xF(x).$$

La fonction F est donc une solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2y'(x) - xy(x) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{x}{2}.$$

Par conséquent, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = Ce^{x^2/4}$$

et la valeur de $F(0)$, presque donnée par l'énoncé, détermine la constante d'intégration C . Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{x^2/4}.$$

↳ On explicite la valeur de $F(0)$ par un argument de parité, puis un changement de variable :

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = 2\sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-(t/\sqrt{2})^2} \frac{dt}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}F(0).$$

Pour $x > -1$, on pose

$$f(x) = \int_0^1 (1-t^2)^x dt.$$

Démontrer que f est bien définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $]-1, +\infty[$.

Pour $x > -1$ et $t \in [0, 1[$, on pose

$$\varphi(x, t) = (1-t^2)^x = \exp[x \ln(1-t^2)] = (1-t)^x (1+t)^x.$$

Il est clair que la fonction partielle $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$. De plus, pour tout $x > -1$,

$$\varphi(x, t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} 2^x (1-t)^x$$

et on sait que $u \mapsto u^x$ est intégrable au voisinage (droit) de $u = 0$ pour $x > -1$. Par conséquent, $t \mapsto \varphi(x, t)$ est intégrable sur $[0, 1[$ pour tout $x > -1$.

• Pour $t \in [0, 1[$, la fonction partielle $x \mapsto \varphi(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]-1, +\infty[$ et

$$\forall (x, t) \in]-1, +\infty[\times [0, 1[, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \ln(1-t^2) \cdot \exp[x \ln(1-t^2)].$$

Comme $\ln(1-t^2) < 0$, l'exponentielle est une fonction décroissante de x sur $]-1, +\infty[$. Par conséquent,

$$\forall a > -1, \forall x \geq a, \forall t \in [0, 1[, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq |\ln(1-t^2)| \cdot \exp[a \ln(1-t^2)].$$

Le majorant est indépendant de x , c'est une fonction continue de t sur $[0, 1[$ et

$$\begin{aligned} |\ln(1-t^2)| \cdot \exp[a \ln(1-t^2)] &= |\ln(1-t^2)| \cdot (1-t)^a \cdot (1+t)^a \\ &\underset{t \rightarrow 1}{\sim} 2^a \cdot |\ln(1-t)| \cdot (1-t)^a \\ &\underset{t \rightarrow 1}{=} o((1-t)^b) \end{aligned}$$

pour tout $-1 < b < a$. Par conséquent, ce majorant est bien une fonction intégrable sur $[0, 1[$. On peut donc appliquer le Théorème de dérivation sous \int : la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur

$$\bigcup_{a > -1} [a, +\infty[=]-1, +\infty[$$

et

$$\forall x > -1, \quad f'(x) = \int_0^1 (1-t^2)^x \ln(1-t^2) dt.$$

• On n'a pas besoin de savoir que f est de classe \mathcal{C}^1 pour démontrer qu'elle est décroissante, ni de vérifier qu'elle est de classe \mathcal{C}^2 pour démontrer qu'elle est convexe.

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin xt}{t} dt.$$

[1.] Démontrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

[2.] Exprimer F à l'aide des fonctions usuelles.

[1.] On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x, 0) = x \quad \text{et} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x, t) = \frac{e^{-t} \sin xt}{t}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction partielle $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur l'intervalle fermé $[0, +\infty[$. De plus, $\varphi(x, t) = o(e^{-t})$ lorsque t tend vers $+\infty$, donc la fonction $t \mapsto \varphi(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

La fonction F est donc bien définie sur \mathbb{R} .

✎ Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction partielle $x \mapsto \varphi(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = e^{-t} \cos xt.$$

✎ Cette expression est vraie aussi pour $t = 0$ – vérifiez-le!

On en déduit que

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t}.$$

Le majorant est indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et intégrable sur $[0, +\infty[$ en fonction de t . Par convergence dominée, la fonction F est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos xt dt.$$

[2.] D'après l'expression intégrale de $F'(x)$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \Re \int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t} dt = \Re \frac{1}{1-ix} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Comme $F(0) = 0$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \text{Arctan } x.$$

On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique.

Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On considère les applications $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \langle u(x) | x \rangle \quad \text{et} \quad g(x) = \|x\|^2 - 1.$$

[1.] Soit K , l'image réciproque de $\{0\}$ par g . Démontrer que K est une partie compacte de \mathbb{R}^n .

[2.] Démontrer que la restriction de f à K atteint un maximum en un point qui sera noté a .

[3.] Démontrer que g est différentiable. Calculer l'expression de sa différentielle.

[4.] Démontrer que f est différentiable. Calculer l'expression de sa différentielle.

[5.] Démontrer que a est un vecteur propre de u .

[1.] Par définition, K est la sphère unité de \mathbb{R}^n : c'est donc une partie fermée (image réciproque d'un singleton par une fonction continue) et bornée (par définition même) d'un espace vectoriel de dimension finie, donc c'est une partie compacte de \mathbb{R}^n .

[2.] Toute application linéaire définie sur \mathbb{R}^n (= espace vectoriel de dimension finie) est continue. De plus, le produit scalaire sur \mathbb{R}^n est une application continue (inégalité de Schwarz). Donc f est continue sur \mathbb{R}^n en tant que "produit" d'applications continues.

☛ La restriction à une partie compacte non vide d'une fonction continue est bornée et atteint ses bornes. La fonction f atteint donc un maximum en un point $a \in K$.

☛ Comme $\dim \mathbb{R}^n \geq 1$, la sphère unité n'est pas vide. (En revanche, pour $n = 0$, elle est vide. Mais bon.)

[3.] Pour x et h dans \mathbb{R}^n ,

$$g(x+h) = \langle x+h | x+h \rangle = g(x) + 2\langle x | h \rangle + \|h\|^2$$

par bilinéarité et symétrie du produit scalaire. Comme $\|h\|^2 = o(\|h\|)$ au voisinage de 0, on en déduit que

$$g(x+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} g(x) + \langle 2x | h \rangle + o(\|h\|)$$

et comme l'application $h \mapsto \langle 2x | h \rangle$ est linéaire, on en déduit que g est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et que

$$\nabla g(x) = 2x \quad \text{et} \quad dg(x) = [h \mapsto \langle 2x | h \rangle].$$

[4.] On fait les mêmes calculs, en prenant en compte le fait que u soit auto-adjoint.

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \langle u(x) + u(h) | x+h \rangle \\ &= f(x) + \langle u(x) | h \rangle + \langle h | u^*(x) \rangle + \langle u(h) | h \rangle \\ &= f(x) + \langle 2u(x) | h \rangle + \langle u(h) | h \rangle. \end{aligned}$$

Comme u est continue, on déduit de l'inégalité de Schwarz que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad |\langle u(h) | h \rangle| \leq \|u(h)\| \|h\| \leq \|u\| \|h\|^2$$

et on conclut comme plus haut :

$$f(x+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x) + \langle 2u(x) | h \rangle + \mathcal{O}(\|h\|^2) = f(x) + \langle 2u(x) | h \rangle + o(\|h\|).$$

Donc f est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et

$$\nabla f(x) = 2u(x), \quad df(x) = [h \mapsto \langle 2u(x) | h \rangle].$$

[5.] On étudie ici le maximum d'une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ soumise à la contrainte $[g(x) = 0]$, où g est différentiable sur \mathbb{R}^n (problème d'extremum sous contrainte).

Quel que soit le point $a \in K$ où la restriction de f à K atteint un maximum, on sait que $\nabla g(a) \neq 0$. Par conséquent, comme f atteint un extremum au point a , les gradients $\nabla f(a)$ et $\nabla g(a)$ sont proportionnels.

Il existe donc un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a), \quad \text{c'est-à-dire} \quad u(a) = \lambda \cdot a.$$

Comme $a \neq 0$, cela signifie que a est un vecteur propre de u (associé à la valeur propre λ).

↳ Comme $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, le Théorème spectral nous dit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle u(x) | x \rangle = \sum_{\alpha \in \text{Sp}(u)} \alpha \cdot \|x_\alpha\|^2$$

où $(x_\alpha)_{\alpha \in \text{Sp}(u)}$ est une famille orthogonale telle que

$$x = \sum_{\alpha \in \text{Sp}(u)} x_\alpha \quad \text{et que} \quad \forall \alpha \in \text{Sp}(u), \quad u(x_\alpha) = \alpha \cdot x_\alpha.$$

On en déduit (calcul classique) que le maximum de $f(x)$ sur K est en fait la plus grande valeur propre de u .
De même, le minimum de $f(x)$ sur K est la plus petite valeur propre de u .

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{(1+t^2)^2} dt.$$

[1.] Démontrer que f est bien définie. L'application f est-elle paire? continue?

[2.] Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ .

[3.] Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{-x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt.$$

[4.] Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f .

[1.] Pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on pose

$$\varphi(x, t) = \frac{\cos xt}{(1+t^2)^2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et

$$\varphi(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^4}\right),$$

donc $t \mapsto \varphi(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, ce qui prouve que l'intégrale généralisée $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Comme $x \mapsto \varphi(x, t)$ est paire pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction f est paire elle aussi.

• Pour tout $t \in [0, +\infty[$, l'application $x \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, +\infty[, \quad |\varphi(x, t)| \leq \frac{1}{(1+t^2)^2}.$$

Le majorant est indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et intégrable sur \mathbb{R}_+ en fonction de t . Cette inégalité de domination nous permet d'appliquer le Théorème de continuité : la fonction f est continue sur \mathbb{R} .

[2.] Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \varphi(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et

$$\forall k \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0, +\infty[, \quad \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x, t) = \frac{t^k}{(1+t^2)^2} \cdot \cos\left(xt + \frac{k\pi}{2}\right).$$

En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0, +\infty[, \quad \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{t^2}{(1+t^2)^2}.$$

Le majorant est indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et est, en tant que fonction de t , intégrable sur $[0, +\infty[$. D'après le Théorème de dérivation, la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t \sin xt}{(1+t^2)^2} dt, \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2 \cos xt}{(1+t^2)^2} dt.$$

• La domination est compromise pour les dérivées partielles d'ordre $k \geq 3$, il est donc très probable que f soit de classe \mathcal{C}^2 sans être de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R} .

[3.] Soit $x \in \mathbb{R}$. On intègre par parties :

$$\begin{aligned} 2f'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \cdot \sin xt dt = \left[\frac{1}{1+t^2} \cdot \sin xt \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \cdot x \cos xt dt \\ &= -x \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

[4.] En combinant les expressions précédentes,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f'(x) = -x \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2) \cos xt}{(1+t^2)^2} dt = -xf(x) + xf''(x)$$

donc f est une solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xy''(x) - 2y'(x) - xy(x) = 0.$$

☞ On peut vérifier numériquement les calculs qui précèdent.

```
def f(x):
    def g(t):
        return np.cos(x*t)/(1+t**2)**2
    return g

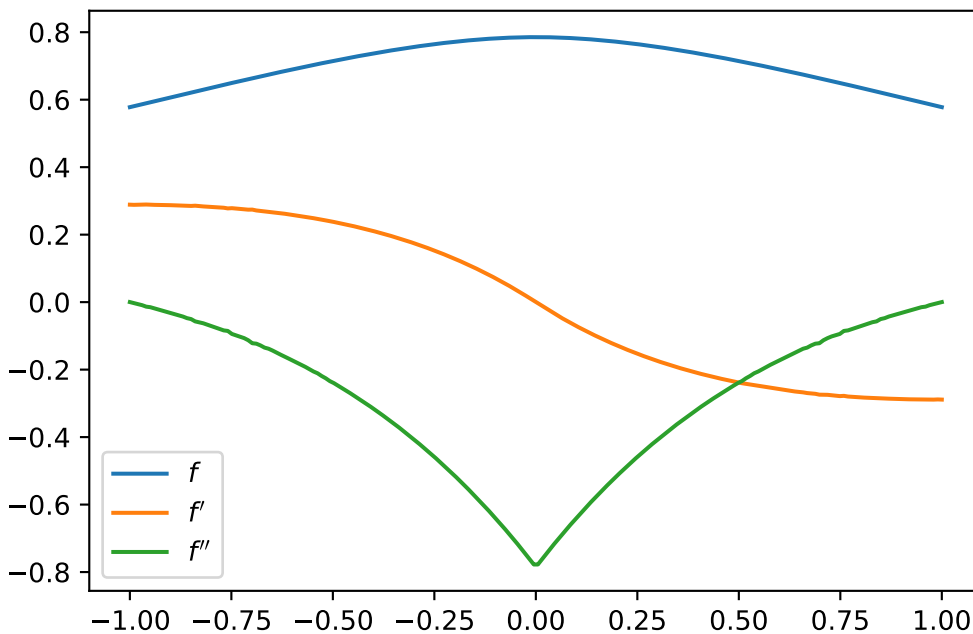
def ff(x):
    def g(t):
        return -x/2*np.cos(x*t)/(1+t**2)
    return g

def fff(x):
    def g(t):
        return -t**2*np.cos(x*t)/(1+t**2)**2
    return g

X = np.linspace(-1, 1, 200)
F = np.array([integr.quad(f(x), 0, np.inf)[0] for x in X])
F1 = np.array([integr.quad(ff(x), 0, np.inf)[0] for x in X])
F2 = np.array([integr.quad(fff(x), 0, np.inf)[0] for x in X])
Test = X*F2-2*F1-X*F      #  $xf''(x) - 2f'(x) - xf(x) = 0$  ?
nt(np.mean(abs(Test)))
```

On constate que les valeurs de la liste Test sont très faibles (la valeur moyenne affichée est de l'ordre de 2.10^{-5}), ce qui valide l'équation différentielle que nous avons trouvée.

En traçant les graphes de f , f' et f'' , on constate que la dérivée seconde f'' n'est très probablement pas dérivable en $x = 0$.



On pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + e^{tx} + e^{-t}}.$$

- [1.] Déterminer le domaine de définition D de f.
- [2.] Démontrer que f est continue sur D.
- [3.] Déterminer des équivalents de f aux bornes de D.

[1.] Pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{1 + e^{tx} + e^{-t}}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

• Pour $x < 0$, comme $\varphi(x, t)$ tend vers 1 lorsque t tend vers $+\infty$, l'intégrale généralisée $f(x)$ est divergente.

• Pour $x = 0$, la limite est égale à $1/2$, même conclusion.

• Pour $x < 0$,

$$\varphi(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-xt}$$

et comme $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ quel que soit $x > 0$, l'intégrale généralisée $f(x)$ est (absolument) convergente.

• L'ensemble de définition de la fonction f est donc l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

[2.] Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, par monotonie en fonction de la première variable,

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times [0, +\infty[, \quad 0 \leq \varphi(x, t) \leq \varphi(a, t).$$

Le majorant est indépendant de x et, d'après la question précédente, il est intégrable sur $[0, +\infty[$ en fonction de t . D'après le Théorème de continuité, la fonction f est continue sur

$$\bigcup_{a>0} [a, +\infty[=]0, +\infty[= D.$$

[3.] La monotonie de φ relativement à la première variable prouve que f est décroissante sur D.

• On devine que

$$f(0^+) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2 + e^{-t}} = +\infty \quad \text{et que} \quad f(+\infty) = \int_0^{+\infty} 0 \, dt = 0.$$

Il est donc pertinent de calculer un équivalent de $f(x)$ aux bornes de D.

• Bien entendu, à défaut de savoir calculer un équivalent, il est déjà bon de savoir justifier précisément les limites qu'on a devinées.

• Pour $x > 0$, on change de variable en posant $u = xt$:

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + e^u + e^{-u/x}}. \quad (*)$$

On considère cette fois la fonction ψ définie par

$$\forall (u, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad \psi(x, u) = \frac{1}{1 + e^u + e^{-u/x}}.$$

Il est clair que

$$\forall x > 0, \forall u \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq \psi(x, u) \leq \frac{1}{1 + e^u}$$

et le majorant que nous venons de trouver est à la fois indépendant de $x > 0$ et intégrable sur $[0, +\infty[$ en fonction de u . Cette propriété de domination nous permet de passer à la limite sous le signe \int .

On a donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \psi(x, u) \, du = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + e^u} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1 + e^{-u}} \, du = [-\ln(1 + e^{-u})]_0^{+\infty} = \ln 2$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \psi(x, u) \, du = \int_0^{+\infty} \frac{du}{2 + e^u} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2e^{-u} + 1} \, du = \left[\frac{-\ln(1 + 2e^{-u})}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\ln 3}{2}$$

et on déduit alors de (*) que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln 2}{x} \quad \text{et que} \quad f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln \sqrt{3}}{x}.$$

Au passage, nous venons de démontrer que f tend vers $+\infty$ au voisinage de 0 et vers 0 au voisinage de $+\infty$.

☞ Il est possible de vérifier numériquement les équivalents que nous venons de déterminer.

```
def f(x):
    def g(t):
        return 1/(1+np.exp(t*x)+np.exp(-t))
    return g

X = [10.0**i for i in range(5)]
for x in X:
    res = integr.quad(f(x), 0, np.inf)
    print("{:>6} {:.65f} {:.32g}".format(int(x), x*res[0], res[1]))

X = [10.0**(-i) for i in range(5)]
for x in X:
    res = integr.quad(f(x), 0, np.inf)
    print("{:<6} {:.65f} {:.32g}".format(x, x*res[0], res[1]))
```

☞ Résultats au voisinage de $x = 0$

x	xf(x)	Erreur estimée
1	0,60460	$5,8 \cdot 10^{-11}$
0,1	0,67489	$1,0 \cdot 10^{-8}$
0,01	0,69114	$3,4 \cdot 10^{-10}$
0,001	0,69294	$3,4 \cdot 10^{-8}$
0,0001	0,69313	$8,2 \cdot 10^{-6}$

Pour mémoire, $\ln 2 \approx 0,6931471805599453$.

☞ Résultats au voisinage de $+\infty$

x	xf(x)	Erreur estimée
1	0,60460	$5,8 \cdot 10^{-11}$
10	0,55735	$1,1 \cdot 10^{-9}$
100	0,55015	$4,2 \cdot 10^{-12}$
1000	0,54939	$3,2 \cdot 10^{-9}$
10000	0,00000	RuntimeWarning: overflow encountered in exp

Pour "mémoire", $\ln \sqrt{3} \approx 0,5493061443340549$.

On considère la surface $S \subset \mathbb{R}^3$ d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z = 1.$$

Déterminer les plans tangents à S qui sont parallèles au plan P d'équation

$$x + y + z = 1.$$

La surface S est l'image réciproque du singleton $\{1\}$ par l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z.$$

↳ Un singleton est fermé et f est continue (elle est polynomiale), donc la surface S est une partie fermée.

En démontrant que f tend vers $+\infty$ au voisinage de l'infini, on prouve que S est également une partie bornée et donc une partie compacte de \mathbb{R}^3 (= espace vectoriel de dimension finie). Il y a (beaucoup) mieux à dire!

• **Les yeux fermés.**

L'application f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 (elle est polynomiale) et

$$\forall M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla f(M_0) = (2x_0 + 4, 2y_0 + 6, 2z_0 - 2).$$

Par conséquent, pour $M_0 \neq (-2, -3, 1)$, le gradient $\nabla f(M_0)$ n'est pas nul et l'application linéaire tangente $df(M_0) \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ est surjective.

↳ Une forme linéaire qui n'est pas identiquement nulle est surjective, puisque la dimension de l'espace d'arrivée est égale à 1.

Dans ces conditions, l'ensemble $T_{M_0}S$ des vecteurs tangents à S au point M_0 est l'hyperplan affine issu du point M_0 et orthogonal au gradient $\nabla f(M_0)$.

• Ce plan tangent $T_{M_0}S$ est parallèle au plan d'équation $x + y + z = 1$ si, et seulement si, le gradient $\nabla f(M_0)$ est colinéaire au vecteur normal $(1, 1, 1)$.

↳ Lorsque \mathbb{R}^3 est muni de sa structure euclidienne canonique, le plan d'équation $ax + by + cz = d$ admet le vecteur $\mathbf{n} = (a, b, c)$ pour vecteur normal.

Deux plans sont parallèles si, et seulement si, ils ont des vecteurs normaux colinéaires.

On cherche donc les points $M_0 \in S$ tels que

$$x_0 + 2 = y_0 + 3 = z_0 - 1 \neq 0.$$

↳ La condition de non-nullité équivaut au fait que le gradient de f au point M_0 ne soit pas le vecteur nul.

Il est évident qu'un vecteur est colinéaire à $(1, 1, 1)$ si, et seulement si, ses trois coordonnées sont égales. On peut retrouver ce résultat par un calcul général : les deux vecteurs (u, v, w) et (a, b, c) sont colinéaires si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} v & b \\ w & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & c \\ u & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & a \\ v & b \end{vmatrix} = 0$$

ce qui revient à dire que leur produit vectoriel est nul.

Autrement dit, on cherche les réels $t \neq 0$ tels que

$$(x_0, y_0, z_0) = (-2 + t, -3 + t, 1 + t) \in S. \quad (*)$$

On trouve alors $t = \pm\sqrt{5}$ et les plans tangents cherchés sont donc les deux plans d'équation

$$(x + 2 \pm \sqrt{5}) + (y + 3 \pm \sqrt{5}) + (z - 1 \pm \sqrt{5}) = 0$$

c'est-à-dire

$$x + y + z = -4 \mp 3\sqrt{5}.$$

• Les yeux ouverts.

Si on est plus attentif, on voit qu'on peut simplifier l'équation de la surface S :

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 15.$$

Autrement dit, la surface S est la sphère de centre $O = (-2, -3, 1)$ et de rayon $\sqrt{15}$.

Le plan tangent à une sphère de centre O en un point M_0 est orthogonal au rayon OM_0 . Par conséquent, le plan tangent à S en M_0 est parallèle au plan d'équation $x + y + z = 1$ si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$OM_0 = (x_0 + 2, y_0 + 3, z_0 - 1) = t \cdot (1, 1, 1).$$

On est ainsi ramené très simplement à l'équation $(*)$.