Lundi 8 juin

Certains énoncés ont été transmis par des candidats aux concours en 2025 - merci à eux.
Autant que possible, j'ai veillé à établir des énoncés mathématiquement corrects, faites-moi signe si vous rencontrez des points litigieux.

Thèmes abordés	
135-34	Convergence uniforme
135-36	Dénombrement
135-38	Développement eulérien
135-44	Intégrale fonction d'un paramètre
135-45	Diviseurs d'un entier

Exercice 1 — 135-py-34

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$P_n(x) = x \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{k}\right).$$

[**1. a.**] Écrire une fonction qui prend n et x comme arguments et qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.
[**1. b.**] Tracer le graphe de P_n sur $[0,1]$ pour $n \in [\![1,10]\!]$ sur une même figure. En déduire une conjecture sur la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$.
[**2. a.**] Démontrer que P_n atteint un maximum sur $[0,1]$.
[**2. b.**] Écrire une fonction Max(n, eps) qui renvoie une valeur approchée à ε près d'un réel x_n tel que

$$P_n(x_n) = \max_{x\in[0,1]} P_n(x).$$

[**2. c.**] Calculer une liste avec les valeurs de $x_n \ell n\, n$ pour $n = 10^i$ avec $i \in [\![1,5]\!]$.
[**3. a.**] Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

[**3. b.**] En déduire un équivalent de x_n.
[**3. c.**] Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 — 135-py-36

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_{0,m} = 0$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_{n,m}$, le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m]\!]$. On pose également

$$S_m(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n,m} \frac{z^n}{n!}.$$

[**1.**] Calculer $S_{n,m}$ pour $m = 1$, pour $n = m$ et pour $n < m$.
[**2.**] En majorant simplement $S_{n,m}$, démontrer que la somme S_m est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$.
[**3. a.**] Démontrer que

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_{n,m+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k,m}.$$

[**3.b.**] En déduire que

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, z \in \mathbb{C}, \qquad S_m(z) = (e^z - 1)^m.$$

[**4.**] Calculer les valeurs de $S_{10,m}$ pour $1 \leqslant m \leqslant 10$.

[**5.**] Démontrer que

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k}.$$

Exercice 3 — 135-py-38

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n-x)^2} \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

[**1.a.**] Démontrer que f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

[**1.b.**] Démontrer que f est 1-périodique.

[**1.c.**] Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

[**1.d.**] Tracer l'allure du graphe de f sur l'intervalle $[10,1; 10,9]$.

[**2.**] Démontrer que la fonction g admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$.

[**3.**] Tracer le graphe de g. Quelle conjecture peut-on faire sur f ?

Exercice 4 — 135-py-44

Soit E, l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(tx) \frac{f(t)}{1+t^2}\, dt.$$

[**1.**] Démontrer que Φ est un endomorphisme de E.

[**2.**] Soit $f \in E$. Démontrer que $\Phi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

[**3.**] Soit f_0, la fonction constante, égale à 1. On pose $g = \Phi(f_0)$.

[**3.a.**] Tracer l'allure du graphe de g sur $[0, 5]$. Conjecturer la limite de g au voisinage de $+\infty$.

[**3.b.**] Déterminer la limite de g au voisinage de $+\infty$.

[**3.c.**] Simplifier l'expression $g(x) + g(1/x)$. (On pourra s'aider d'un graphe tracé à l'ordinateur.)

Exercice 5 — 135-py-45

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n, le nombre de diviseurs de n (en comptant 1 et n) et on pose

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k \qquad \text{et} \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

[**1.**] Écrire des fonctions prenant un entier $n \geqslant 1$ pour argument et renvoyant respectivement D_n et H_n.

[**2.a.**] Dénombrer les couples d'entiers naturels *non nuls* (k, ℓ) se situant sous la courbe d'équation $xy = n$.

[**2.b.**] En déduire que $D_n = nH_n + \mathcal{O}(n)$, puis un équivalent de D_n.

[**3.**] Pour $x \in]-1, 1[$, calculer les sommes suivantes.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} nH_n x^n$$

[**4.**] En déduire un équivalent de la somme

$$\sum d_n x^n$$

lorsque x tend vers 1.

[**5.**] Démontrer que la série de fonctions

$$\sum \frac{x^n}{1-x^n}$$

converge simplement sur $]-1, 1[$ et que sa somme est une fonction continue sur cet intervalle.