LUNDI 8 JUIN

Certains énoncés ont été transmis par des candidats aux concours en 2025 - merci à eux.

Autant que possible, j'ai veillé à établir des énoncés mathématiquement corrects, faites-moi signe si vous rencontrez des points litigieux.

	Thèmes abordés
135-34	Convergence uniforme
135-36	Dénombrement
135-38	Développement eulérien
135-44	Intégrale fonction d'un paramètre
135-45	Diviseurs d'un entier

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$P_n(x) = x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{k}\right).$$

[1.a.] *Écrire une fonction qui prend n et x comme arguments et qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.*
[1.b.] *Tracer le graphe de P_n sur $[0,1]$ pour $n \in [\![1,10]\!]$ sur une même figure. En déduire une conjecture sur la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$.*
[2.a.] *Démontrer que P_n atteint un maximum sur $[0,1]$.*
[2.b.] *Écrire une fonction Max(n, eps) qui renvoie une valeur approchée à ε près d'un réel x_n tel que*

$$P_n(x_n) = \max_{x\in[0,1]} P_n(x).$$

[2.c.] *Calculer une liste avec les valeurs de x_n $\ln n$ pour $n = 10^i$ avec $i \in [\![1,5]\!]$.*
[3.a.] *Démontrer que*

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

[3.b.] *En déduire un équivalent de x_n.*
[3.c.] *Que peut-on en déduire ?*

[1.a.] On peut modifier légèrement la définition

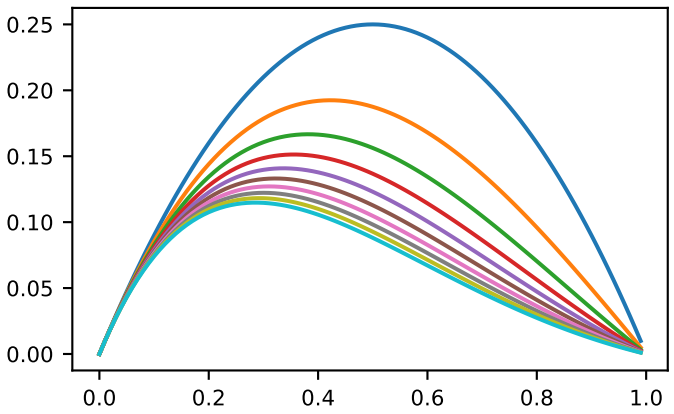
$$P_0(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, 0 \leqslant k < n, \quad P_{k+1}(x) = P_k(x) \times \left(1-\frac{x}{k+1}\right)$$

pour que le code devienne immédiat.

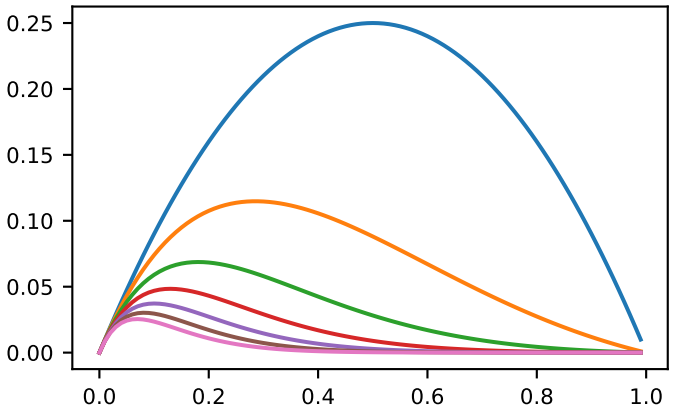
```
def P(n, x):
    y = x
    for k in range(n):
        y = y*(1-x/(k+1))
    return y
```

[1.b.] Code sans difficulté, mais la figure produite n'est pas simple à interpréter.

```
X = np.arange(0, 1, 0.01)
for n in range(1, 11):
    Y = P(n, X)
    plt.plot(X, Y)
```



❧ La figure suivante montre les graphes de P_{10^k} pour $0 \leqslant k \leqslant 6$ et laisse mieux deviner que la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.



[**2. a.**] La fonction P_n est continue (polynomiale) sur le segment $[0,1]$, donc elle atteint un maximum.

✍ *Comme $P_n(x) \geqslant 0$ (produit de facteurs positifs), ce maximum est en fait $\|P_n\|_\infty$.*

[**2. b.**] Le comportement des fonctions P_n étant très régulier, on peut se contenter de considérer une liste d'abscisses $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$ en progression arithmétique de raison ε et de chercher pour quel indice k la valeur de $P_n(x_k)$ est maximale.

```
def Max(n, eps):
    X = np.arange(0, 1, eps/2)
    Y = P(n, X)
    x0, y0 = X[0], Y[0]
    for (x,y) in zip(X, Y):
        if y>y0:
            x0, y0 = x, y
    return x0
```

[**2. c.**] On choisit $\varepsilon = 5.10^{-3}$ pour avoir une précision satisfaisante.

```
eps = 0.005
N = [10**i for i in range(1, 6)]
L = [Max(n, eps)*np.log(n) for n in N]
```

Le code précédent nous donne : `[0.656, 0.829, 0.898, 0.921, 0.950]` ce qui suggère que $x_n \ln n$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

[**3. a.**] La fonction P_n est nulle en $x = 0$ et en $x = 1$ (quel que soit $n \geqslant 2$). Sur l'intervalle ouvert $]0,1[$, la fonction P_n est strictement positive (produit de facteurs strictement positifs), donc la fonction P_n atteint son maximum exactement au point où la fonction $\ln P_n$ atteint son maximum.

✍ *La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.*

❧ Calculons la dérivée logarithmique de P_n :

$$\forall\, 0 < x < 1, \qquad \frac{P_n'(x)}{P_n(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1-x/k} = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-x}.$$

Comme $P_n(0) = P_n(1) = 0$, alors P_n est maximal en $x_n \in]0,1[$ et comme P_n est de classe $\mathscr{C}^1$, il faut que $P_n'(x_n) = 0$. On en déduit que

$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-x_n} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{x_n} = \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-x_n}.$$

❧ Comme $0 < x_n < 1$, on a $k-1 < k-x_n < k$ pour tout $k \geqslant 1$, donc

$$\frac{1}{x_n} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et aussi} \quad \frac{1}{x_n} < \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} = \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Ainsi, en notant comme d'habitude H_n la n-ième somme partielle de la série harmonique,

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant \frac{1}{x_n} - H_n \leqslant \frac{x_n}{1-x_n}.$$

[**3. b.**] On sait que H_n tend vers $+\infty$, donc la minoration montre que x_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Par conséquent, le majorant tend vers 0 et l'encadrement précédent montre que

$$\frac{1}{x_n} - H_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$$

et on en déduit que

$$\frac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{=} H_n + o(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.$$

[**3. c.**] Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant P_n(x) = x(1-x)\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{x}{k}\right) \leqslant x(1-x)$$

(puisque les facteurs sont compris entre 0 et 1 pour tout $k \geqslant 2$). Par conséquent,

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant \|P_n\|_\infty = P_n(x_n) \leqslant x_n(1-x_n)$$

et comme x_n tend vers 0, on en déduit que $\|P_n\|_\infty$ tend vers 0.

On a ainsi démontré que la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ convergeait uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_{0,m} = 0$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_{n,m}$, le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m]\!]$. On pose également

$$S_m(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n,m} \frac{z^n}{n!}.$$

[**1.**] *Calculer $S_{n,m}$ pour $m = 1$, pour $n = m$ et pour $n < m$.*
[**2.**] *En majorant simplement $S_{n,m}$, démontrer que la somme S_m est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$.*
[**3. a.**] *Démontrer que*

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad S_{n,m+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k,m}.$$

[**3. b.**] *En déduire que*

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, z \in \mathbb{C},\qquad S_m(z) = (e^z - 1)^m.$$

[**4.**] *Calculer les valeurs de $S_{10,m}$ pour $1 \leqslant m \leqslant 10$.*
[**5.**] *Démontrer que*

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad S_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k}.$$

[**1.**] Si $m = 1$, une seule application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m]\!]$ existe, c'est une application constante et elle est surjective. Donc $S_{n,1} = 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

❧ Pour $n = m$, l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont des ensembles *finis*, de *même cardinal*. Donc une application est surjective si, et seulement si, elle est bijective et on cherche à dénombrer les permutations d'un ensemble de n éléments. Donc $S_{n,n} = n!$ pour tout $n \geqslant 1$.

❧ Si $n < m$, alors le cardinale de l'ensemble de départ est strictement inférieur au cardinal de l'ensemble d'arrivée. Par conséquent, l'image de toute fonction est une partie stricte de l'ensemble d'arrivée et aucune fonction n'est surjective. Donc $S_{n,m} = 0$ pour tous $n < m$.

[**2.**] Le nombre d'applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m]\!]$ est égal à m^n, donc $0 \leqslant S_{n,m} \leqslant m^n$, quels que soient m et n.

Quel que soit le réel positif t,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\qquad 0 \leqslant S_{n,m} \cdot \frac{t^n}{n!} \leqslant \frac{(mt)^n}{n!}.$$

Par croissances comparées, le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc la suite de terme général ${S_{n,m}}^{t^n}/_{n!}$ est bornée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Dans ces conditions, le rayon de convergence de la série entière est infini et la somme est définie sur $\mathbb{C}$.

[**3. a.**] L'entier $S_{n,m+1}$ est le cardinal de l'ensemble $\Sigma_{n,m+1}$ des surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m+1]\!]$.

Pour toute application $f \in \Sigma_{n,m+1}$, l'élément $(m+1)$ admet au moins un antécédent (puisque f est surjective) et au plus n antécédents (puisqu'il y a n éléments dans l'ensemble de départ).

✍ *On pourrait être plus précis : puisque chacun des m autres éléments de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent, l'élément $(m+1)$ admet au plus $(n-m)$ antécédents. C'est sans importance pour la suite du raisonnement.*

On peut définir une partition de l'ensemble $\Sigma_{n,m+1}$ en discutant sur le cardinal de l'image réciproque de $\{m+1\}$: nous noterons $\Sigma^k_{n,m+1}$, l'ensemble des applications surjectives de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m+1]\!]$ pour lesquelles $(m+1)$ admet exactement k antécédents. Puisqu'on a défini une partition,

$$\#(\Sigma_{n,m+1}) = \sum_{k=1}^{n} \#(\Sigma^k_{n,m+1}).$$

❧ Il reste à compter le nombre d'éléments de $\Sigma^k_{n,m+1}$.

Pour déterminer une application $f \in \Sigma^k_{n,m+1}$, il faut d'abord connaître les k antécédents de l'élément $(m+1)$, ce qui nous fait $\binom{n}{k}$ possibilités.

L'image réciproque de $(m+1)$ étant connue, il faut ensuite déterminer la restriction de f à $[\![1,n]\!] \setminus f^*(\{m+1\})$. Cette restriction est une application surjective d'un ensemble de cardinal $(n-k)$ à valeurs dans $[\![1,m]\!]$, donc il y a (par définition !) $S_{n-k,m}$ restrictions possibles.

Par principe multiplicatif,

$$\#(\Sigma^k_{n,m+1}) = \binom{n}{k} \cdot S_{n-k,m}$$

et finalement

$$S_{n,m+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot S_{n-k,m}. \qquad (\star)$$

✍ *On a remarqué plus haut que $1 \leqslant k \leqslant n-m$. Si $k > n-m$, alors $n-k < m$ et, d'après la première question, $S_{n-k,m}$ est alors nul.*

[**3. b.**] Pour $m = 1$, on sait que $S_{0,m} = 0$ et que $S_{n,1} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n,1} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z - 1.$$

❧ Supposons que, pour un certain entier $m \in \mathbb{N}^*$, on ait démontré que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n,m} \frac{z^n}{n!} = (e^z-1)^m.$$

Alors le calcul précédent nous assure que

$$\begin{aligned}
(e^z-1)^{m+1} = (e^z-1)^m(e^z-1) &= \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n,m}\frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n,1}\frac{z^n}{n!}\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{S_{n-k,m}}{(n-k)!}\cdot\frac{S_{k,1}}{k!}\Big)z^n \qquad \text{(produit de Cauchy de deux séries entières)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big[\sum_{k=1}^{n} S_{n-k,m}\binom{n}{k}\Big]\frac{z^n}{n!} \qquad \text{(la somme commence avec } k=1 \text{ car } S_{0,1}=0) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n,m+1}\frac{z^n}{n!}
\end{aligned}$$

d'après la relation de récurrence établie ci-dessus. Le résultat voulu est ainsi établi par récurrence.

✍ *Si les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont infinis, alors le rayon de convergence du produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ défini par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

est infini lui aussi.

[**4.**] Il est étrange de demander à calculer les valeurs de $S_{10,m}$ après avoir établi une relation de récurrence qui laisse deviner un calcul long, alors qu'une formule sensiblement plus simple est démontrée ensuite.

❧ Quoi qu'il en soit, on retrouve ici le calcul des coefficients binomiaux. Le plus économique consiste à calculer dès le début tous les coefficients binomiaux dont on aura besoin.

```
def triangle_Pascal(n):
    L, T = np.zeros(n+1), np.zeros((n+1, n+1), dtype=int)
    L[0] = 1
    T[0] = L
    for k in range(n):
        L[1:] = L[1:]+L[:-1]
        T[k+1] = L
    return T

T = triangle_Pascal(10)
```

❧ La relation de récurrence ($\star$) nous fait calculer les $S_{\ell,m}$ pour $1 \leqslant \ell \leqslant 10$ et $1 \leqslant m \leqslant 10$, ainsi que les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant n \leqslant 10$. Il reste à récupérer les valeurs $S_{10,m}$ au terme des calculs.

```
S = np.zeros((11, 11), dtype=int)
S[1:,1] = 1
for m in range(1, 10):
    for n in range(1, 11):
        s = 0
        for k in range(1, n+1):
            s += T[n,k]*S[n-k,m]
        S[n,m+1] = s
print(S[10,1:])
```

❧ Le code est plus simple en utilisant l'expression obtenue à la question suivante.

```
S = []
for m in range(1, 11):
    s = 0
    for k in range(m+1):
        s += T[m,k]*k**10*(-1)**(m+k)
    S.append(s)
```

[5.] Comme le rayon de convergence de la série entière est strictement positif (il est infini !), la formule de Taylor nous dit que

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad S_{n,m} = S_m^{(n)}(0)$$

et la formule du binôme permet de développer l'expression de la somme :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, z \in \mathbb{C}, \qquad S_m(z) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (e^z)^k (-1)^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} e^{kz} (-1)^{m-k}.$$

Par conséquent,

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad S_m^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} k^n e^{k\times 0} (-1)^{m-k},$$

ce qui donne la relation attendue.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-x)^2} \quad \textit{et} \quad g(x) = f(x) - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

[**1.a.**] *Démontrer que f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.*
[**1.b.**] *Démontrer que f est 1-périodique.*
[**1.c.**] *Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.*
[**1.d.**] *Tracer l'allure du graphe de f sur l'intervalle $[10,1; 10,9]$.*
[**2.**] *Démontrer que la fonction g admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$.*
[**3.**] *Tracer le graphe de g. Quelle conjecture peut-on faire sur f ?*

[**1.a.**] Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{(n-x)^2}.$$

On remarque tout de suite que

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \qquad u_{-n}(x) = u_n(-x) \tag{†}$$
$$\text{et que} \quad u_n(x+1) = u_{n-1}(x). \tag{‡}$$

❧ Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $(n-x)^2 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc tous les $u_n(x)$ sont bien définis (pas de division par zéro).

❧ De plus, la série de Riemann $\sum 1/n^2$ est absolument convergente et

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \qquad u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est absolument convergente.

❧ Avec (†) et le fait que $-x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on en déduit que la série $\sum_{n\leqslant 0} u_n(x)$ est aussi absolument convergente et donc que $f(x)$ est bien définie (en tant que somme des sommes de deux séries absolument convergentes).

✍ *La définition présente $f(x)$ comme la somme de la famille $\big((n-x)^2\big)_{n\in\mathbb{Z}}$, il s'agissait donc ici de justifier que cette famille était* ***sommable****.*

*On s'est appuyé ici sur le résultat suivant : si $I = I_1 \cup I_2$, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, les deux sous-familles $(u_i)_{i\in I_1}$ et $(u_i)_{i\in I_2}$ sont sommables (*sommation par paquets*, version élémentaire du Théorème de Fubini).*

❧ *Le même raisonnement avec (†) et le fait que $[n \mapsto -n]$ soit une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$ montre que f est une fonction paire.*

[**1.b.**] Si $x+1 \in \mathbb{Z}$, alors $x = (x+1) - 1 \in \mathbb{Z}$. Par contraposée : si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $x+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

❧ Sachant que la famille $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et que l'application $[n \mapsto n-1]$ est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$, on conclut que la famille $\big(u_{n-1}(x)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et que

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_{n-1}(x) \overset{(‡)}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(x+1) = f(x+1)$$

[**1.c.**] Par périodicité, il suffit de démontrer que f est continue sur l'intervalle ouvert $]0,1[$.

❧ Comme la continuité est une propriété locale et que

$$]0,1[= \bigcup_{0<a<1/2} [a, 1-a],$$

il suffit de démontrer que f est continue sur tout segment $[a, 1-a]$ pour tout $0 < a < 1/2$.

❧ Soit $0 < a < 1/2$. Pour tout $x \in [a, 1-a]$, on a

$$a \leqslant 1-x \leqslant 1-a \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad n+a-1 \leqslant n-x \leqslant n-a.$$

Si $n \geqslant 1$, alors $n + a - 1 = (n-1) + a > 0$ et si $n \leqslant 0$, alors $n - a \leqslant -a < 0$, donc

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{1}{(n+a-1)^2} \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \leqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{1}{(n-a)^2}.$$

Tous les majorants trouvés sont indépendants de x et les deux familles

$$\left(\frac{1}{(n+a-1)^2}\right)_{n\geqslant 1} \qquad \left(\frac{1}{(n-a)^2}\right)_{n\leqslant 0}$$

sont sommables, donc on a prouvé que la convergence était normale sur $[a, 1-a]$.

❧ En tant que somme des sommes de deux séries de fonctions continues qui convergent normalement sur $[a, 1-a]$, la fonction f est continue sur $[a, 1-a]$, quel que soit $0 < a < 1/2$, et donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

[**1.d.**] On sait que le reste d'ordre n de la série de Riemann $\sum 1/k^2$ est équivalent à $1/n$. L'encadrement obtenu à la question précédente nous assure donc que l'approximation

$$f(x) \approx \sum_{n=-N}^{N} u_n(x)$$

conduit à une erreur sur $f(x)$ qui est de l'ordre de $1/N$.

En choisissant $N = 10$, on a une précision largement suffisante pour tracer une courbe à l'écran.

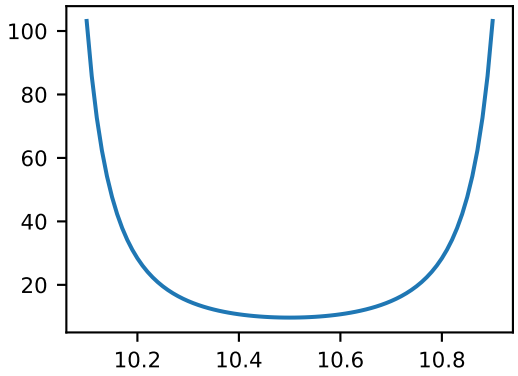
❧ La périodicité de f nous assure que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \qquad f(x) = f(x - \lfloor x \rfloor).$$

En évaluant toujours f sur l'intervalle $]0,1[$, on n'a pas à faire varier en fonction de x les indices n retenus pour calculer la somme partielle.

```
def f(x, N):
    u = x - np.floor(x)
    y = np.zeros_like(u)
    for n in range(-N, N+1):
        y += (u-n)**(-2)
    return y

X = np.arange(10.1, 10.9, 0.01)
Y = f(X, 10)
plt.plot(X, Y)
```



[**2.**] La fonction g est, comme la fonction f, définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, continue sur son ensemble de définition, paire et périodique, de période 1. Par conséquent, il suffit de vérifier que g tend vers une limite finie en 0 pour en déduire que g est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

❧ Pour x non nul proche de 0,

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \pi^2 \left(\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3)\right)^{-2} = \frac{\pi^2}{\pi^2 x^2}\left(1 - \frac{\pi^3 x^2}{6} + o(x^2)\right)^{-2} = \frac{1}{x^2} + \frac{\pi^2}{3} + o(1).$$

❧ Reprenons l'étude de la continuité de f. En remarquant que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\qquad f(x)=\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-x)^2}+\frac{1}{(-n-x)^2}\right)=\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-x)^2}+\frac{1}{(n+x)^2}\right),$$

on est conduit à considérer la série de fonctions $\sum v_n$ où

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\qquad v_n(x)=\frac{1}{(n-x)^2}+\frac{1}{(n+x)^2}.$$

Il est clair que

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, 0<a<1,\ \forall\, x\in[-a,a],\quad 0\leqslant v_n(x)\leqslant\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n-a)^2}.$$

Le majorant est indépendant de x et c'est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $[-a,a]$ et comme les fonctions v_n sont toutes continues sur $[-a,a]$, on en déduit que la somme de cette série est une fonction continue sur $[-a,a]$.

❧ En particulier, cela prouve que

$$f(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(0)+o(1)$$

et donc que

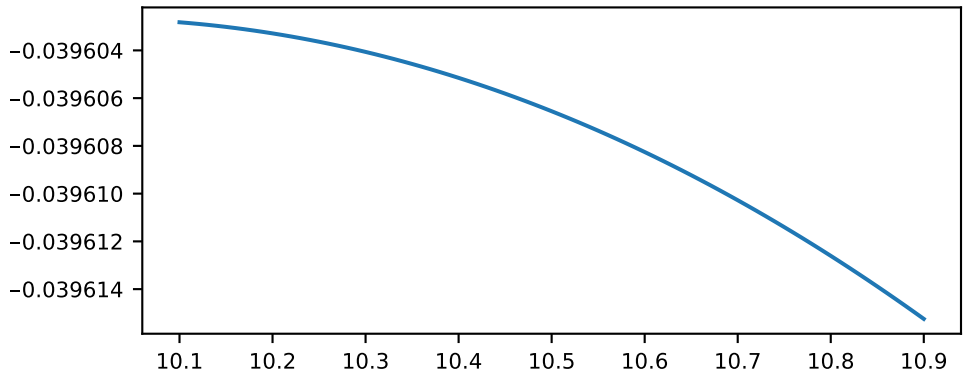
$$\lim_{x\to 0} g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(0)-\frac{\pi^2}{3}.$$

✍ *Si on sait que $\zeta(2)=\pi^2/6$, alors on peut en déduire que g tend vers 0 au voisinage de l'origine. Mais si on sait démontrer (cf question suivante) que g est prolongeable en une fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, alors on a démontré aussi que $\zeta(2)=\pi^2/6$.*

[3.] Le tracé de g ne pose aucune difficulté.

```
def g(x, n):
    return f(x, n)-np.pi**2/np.sin(np.pi*x)**2
plt.plot(X, g(X, 50))
```

❧ Il faut ensuite prendre soin de comparer les légendes du graphe ainsi produit avec le graphe de f obtenu précédemment.



Les valeurs prises par g sont extrèmement faibles par rapport aux valeurs prises par f. On peut donc conjecturer que g est en fait identiquement nulle et donc que

$$\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\quad f(x)=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi x}.$$

Soit E, *l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur* $\mathbb{R}$. *Pour* $f \in E$, *on pose*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(tx)\frac{f(t)}{1+t^2}\,dt.$$

[**1.**] *Démontrer que* Φ *est un endomorphisme de* E.
[**2.**] *Soit* $f \in E$. *Démontrer que* $\Phi(f)$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]0,+\infty[$.
[**3.**] *Soit* f_0, *la fonction constante, égale à* 1. *On pose* $g = \Phi(f_0)$.
[**3.a.**] *Tracer l'allure du graphe de* g *sur* $[0,5]$. *Conjecturer la limite de* g *au voisinage de* $+\infty$.
[**3.b.**] *Déterminer la limite de* g *au voisinage de* $+\infty$.
[**3.c.**] *Simplifier l'expression* $g(x) + g(1/x)$. *(On pourra s'aider d'un graphe tracé à l'ordinateur.)*

[**1.**] Pour $f \in E$ fixée, posons

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \quad \varphi(x,t) = \operatorname{Arctan}(tx)\frac{f(t)}{1+t^2}.$$

❧ **Intégrabilité** — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il est clair que la fonction $[t \mapsto \varphi(x,t)]$ est continue sur l'intervalle $I = [0,+\infty[$ et comme la fonction f est bornée (par définition de E),

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}\times I, \qquad \big|\varphi(x,t)\big| \leqslant \frac{\pi\|f\|_\infty}{2(1+t^2)}. \tag{$\star$}$$

Le majorant est une fonction de t intégrable au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve que $[t \mapsto \varphi(x,t)]$ est intégrable sur I.

La fonction $\Phi(f)$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

❧ **Régularité** — Pour tout $t \in \mathbb{R}$, il est clair que la fonction $[x \mapsto \varphi(x,t)]$ est continue sur $\Omega = \mathbb{R}$.

❧ **Domination** — L'encadrement $(\star)$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in I$; le majorant est indépendant du paramètre $x \in \mathbb{R}$ et il est intégrable sur I en tant que fonction de t.

Par conséquent, la fonction $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

❧ On déduit également de $(\star)$ que $\Phi(f)$ est bornée :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \big|\Phi(x)\big| \leqslant \int_0^{+\infty} \big|\varphi(x,t)\big|\,dt \leqslant \frac{\pi\|f\|_\infty}{2}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi^2\|f\|_\infty}{4}.$$

Par conséquent, $\Phi(f) \in E$ pour toute fonction $f \in E$.

❧ On a prouvé l'intégrabilité de $[t \mapsto \varphi(x,t)]$ pour toute fonction $f \in E$ et tout paramètre $x \in \mathbb{R}$, la linéarité de Φ découle alors directement de la linéarité de l'intégrale.

Ainsi Φ est bien un endomorphisme de E.

[**2.**] (On reprend les notations précédentes.)

❧ **Régularité** — Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto \varphi(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}\times I, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = \frac{tf(t)}{[1+(xt)^2](1+t^2)}.$$

❧ **Intégrabilité** — Comme f est bornée,

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}\times I, \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{t\|f\|_\infty}{[1+(xt)^2](1+t^2)}.$$

La majorant est une fonction continue de t sur I et si $x \neq 0$, cette fonction est $\mathcal{O}(1/t^3)$ au voisinage de $+\infty$, donc c'est une fonction intégrable sur I. Par comparaison, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right]$$

est intégrable sur I.

✍ *Pour* $x = 0$, *le majorant est seulement* $\mathcal{O}(1/t)$ *et l'intégrabilité n'est pas garantie au voisinage de* $+\infty$. *(La conclusion dépend alors de la fonction* f *choisie.)*

❧ **Domination** — Soit $a > 0$. Par monotonie en fonction de x (pour $t \in I$ fixé),

$$\forall\,(x,t) \in [a,+\infty[\times I, \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,t)\right|$$

et ce majorant est intégrable sur I d'après l'encadrement précédent. Comme ce majorant est indépendant du paramètre $x \in [a,+\infty[$, on a établi la propriété de domination.

❧ D'après le Théorème de dérivation sous le signe $\int$, la fonction $\Phi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$$]0,+\infty[= \bigcup_{a>0} [a,+\infty[$$

et de plus

$$\forall\, x > 0, \quad [\Phi(f)]'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{[1+(xt)^2](1+t^2)}\,dt.$$

✍ *Il est clair que la fonction $\Phi(f)$ est impaire, donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (et l'expression de sa dérivée est encore vraie pour $x < 0$).*

[**3. a.**] On commence par définir la fonction g. (Il suffit de suivre les indications données dans le Vademecum.)

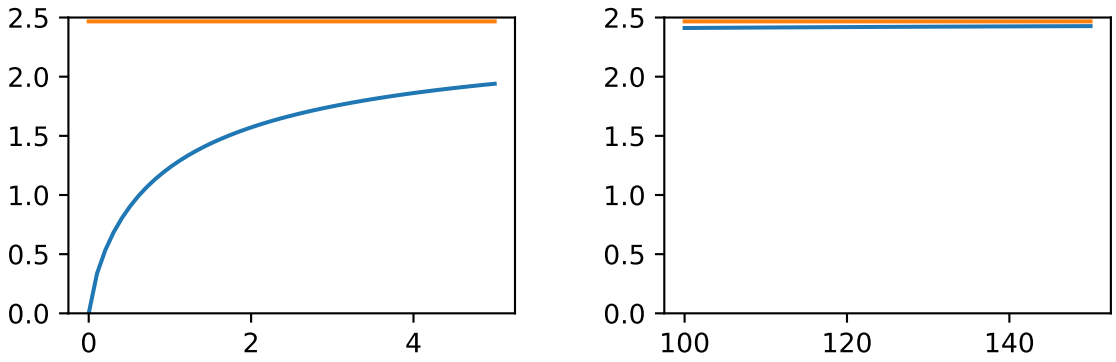
```
import scipy.integrate as integr

def g(x):
    def f(t):
        return np.arctan(t*x)/(1+t**2)
    return integr.quad(f, 0, np.inf)[0]
```

Le tracé de la courbe est ensuite classique (figure de gauche).

```
X = np.linspace(0, 5)
Y = [g(x) for x in X]
plt.plot(X, Y)
asptt = (np.pi/2)**2
plt.plot([X[0],X[-1]], [asptt,asptt])
plt.ylim(0, 2.5)
```

Le résultat apparaît plus clairement sur l'intervalle $[100, 150]$ (figure de droite).



[**3. b.**] Il est clair que

$$\forall\, t > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(tx)}{1+t^2} = \frac{\pi}{2(1+t^2)}.$$

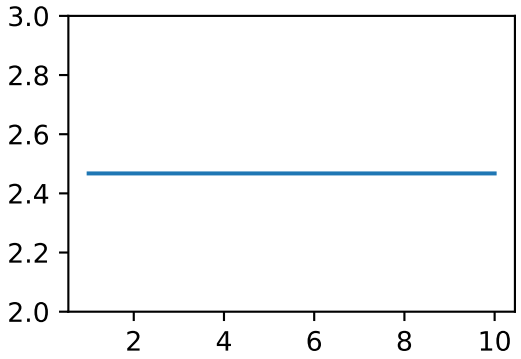
✍ *Attention, si $t = 0$, cette limite est nulle — mais c'est sans importance pour la suite.*

La domination $(\star)$ est établie au voisinage de $+\infty$ pour x (puisque $\mathbb{R}$ est en particulier un voisinage de $+\infty$), ce qui permet de passer à la limite sous le signe $\int$. Ainsi, la fonction g tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(tx)}{1+t^2}\,dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

[3.c.] Commencer par tracer l'allure du graphe de $G = [x \mapsto g(x) + g(1/x)]$.

```
X = np.linspace(1, 10)
Z = [g(x)+g(1/x) for x in X]
plt.plot(X, Z)
plt.ylim(2, 3)
```



Cela ressemble beaucoup à une fonction constante !

❧ On a démontré plus haut que la fonction g était de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que

$$\forall\, x > 0, \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{[1+(xt)^2](1+t^2)}.$$

Par conséquent, la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall\, x > 0, \quad G'(x) = g'(x) - \frac{1}{x^2} g'(1/x).$$

Avec le changement de variable usuel $u = 1/t$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2} g'(1/x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{x^2[1+(t/x)^2](1+t^2)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(u/u^2)\cdot(\,du/u^2)}{x^2[1+1/(xu)^2][1+(1/u)^2]} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u\,du}{[1+(xu)^2](1+u^2)} = g'(x).\end{aligned}$$

Comme sa dérivée est nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$, la fonction G est constante sur $]0,+\infty[$.

✍ *La fonction g est impaire, donc la fonction G est impaire elle aussi, elle n'est donc pas constante sur $\mathbb{R}^*$:*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad G(x) = -G(-x).$$

Comme la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle tend vers $(\pi/2)^2$ au voisinage de $+\infty$, on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad G(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) + g(1/x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) + g(0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

✍ *On pourrait aussi remarquer que*

$$\forall\, A \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^A \frac{\operatorname{Arctan} t}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{(\operatorname{Arctan} t)^2}{2}\right]_0^A = \frac{1}{2}(\operatorname{Arctan} A)^2$$

et en déduire la valeur de $G(x)$ en faisant tendre A vers $+\infty$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n, le nombre de diviseurs de n (en comptant 1 et n) et on pose

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k \qquad \text{et} \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

[1.] *Écrire des fonctions prenant un entier $n \geqslant 1$ pour argument et renvoyant respectivement D_n et H_n.*
[2. a.] *Dénombrer les couples d'entiers naturels* non nuls *(k, ℓ) se situant sous la courbe d'équation $xy = n$.*
[2. b.] *En déduire que $D_n = nH_n + \mathcal{O}(n)$, puis un équivalent de D_n.*
[3.] *Pour $x \in]-1, 1[$, calculer les sommes suivantes.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} nH_n x^n$$

[4.] *En déduire un équivalent de la somme*

$$\sum d_n x^n$$

lorsque x tend vers 1.
[5.] *Démontrer que la série de fonctions*

$$\sum \frac{x^n}{1 - x^n}$$

converge simplement sur $]-1, 1[$ et que sa somme est une fonction continue sur cet intervalle.

[1.] Pour écrire la fonction qui calcule D_n, on peut utiliser la méthode classique (qui est simple et raisonnablement efficace, même si elle n'est pas optimale).

```
def diviseurs(n):
    L = []
    for i in range(1, n+1):
        if n%i==0:
            L.append(i)
    return L

def D(n):
    s = 0
    for n in range(1, n+1):
        s += len(diviseurs(n))
    return s
```

❧ Le calcul de H_n ne pose aucune difficulté apparente.

```
def H(n):
    s = 0
    for k in range(1, n+1):
        s += 1/k
    return s
```

✍ *En fait, le calcul des nombres harmoniques pose un problème réellement difficile !*
On sait que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$ mais si on travaille en virgule flottante, le code précédent affirme que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est stationnaire !
Ce comportement paradoxal apparaît quelle que soit la précision retenue pour mener les calculs. Si on refait les calculs avec une précision plus élevée, la "limite apparente" de la suite sera plus élevée, mais la suite paraîtra toujours stationnaire.

[2. a.] On peut effectuer ce dénombrement de deux manières.

❧ Un couple (x, x') d'entiers non nuls est situé sous la courbe $xy = n$ si, et seulement si, le produit xx' est un entier $k \in [\![1, n]\!]$ et $xx' = k$ si, et seulement si, x est un diviseur de k. Par conséquent, le nombre de couples (x, x') est égal à

$$\sum_{k=1}^{n} d_k = D_n.$$

❧ L'autre méthode consiste à discuter sur l'abscisse x et non plus sur le produit xy.

Pour chaque $x \in [\![1, n]\!]$, le couple (x, x') est situé sous la courbe $xy = n$ si, et seulement si, le produit xx' est inférieur à n. Or x' est un entier non nul, donc on cherche le nombre de multiples (entiers !) de x qui sont inférieurs à n. Par définition, ce nombre est égal à $\lfloor n/x \rfloor$ et donc le nombre de couples cherché est égal à

$$\sum_{x=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor.$$

✍ *On devine (et on peut le constater expérimentalement...) que le code suivant est beaucoup plus efficace pour calculer D_n que le code précédent.*

```
def D_var(n):
    s = 0
    for x in range(1, n+1):
        s += n//x
    return s
```

[**2. b.**] Par définition de la partie entière, $\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$, donc, d'après la question précédente,

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = nH_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1 \right) = D_n + n.$$

Autrement dit,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant nH_n - D_n \leqslant n \tag{$\star$}$$

ce qu'on peut résumer sous la forme $nH_n = D_n + \mathcal{O}(n)$.

❧ Il est bien connu que $H_n \sim \ln n$ (comparaison somme/intégrale pour une fonction monotone), donc

$$D_n \underset{n\to+\infty}{=} \left[n \ln n + o(n \ln n) \right] + \mathcal{O}(n) = n \ln n + o(n \ln n)$$

et donc $D_n \sim n \ln n$.

✍ *Il s'agit ici d'une simple factorisation : comme $\frac{1}{\ln n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$,*

$$n = \frac{1}{\ln n} \cdot (n \ln n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n \ln n)$$

et on a bien $\mathcal{O}(n) = o(n \ln n)$.

[**3.**] D'après le cours,

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1 - x).$$

❧ Les rayons de convergence des séries $\sum x^n$ et $\sum x^n/n$ sont tous les deux égaux à 1, donc le rayon de convergence de leur produit de Cauchy est au moins égal à 1.

La formule générale du produit de Cauchy nous donne

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Dans notre cas, on a $a_0 = 0$ et $a_k = 1/k$ pour tout $k \geqslant 1$ et $b_\ell = 1$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, donc

$$c_0 = a_0 b_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = 0 \times 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \times 1 = H_n.$$

D'après le cours sur le produit de Cauchy,

$$\forall\, x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\Big) = \frac{-\ell n(1-x)}{1-x}.$$

❧ Comme le rayon de convergence de la série entière précédente est strictement positif, on peut dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, ce qui nous donne

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n H_n x^{n-1} = \frac{1-\ell n(1-x)}{(1-x)^2}$$

et finalement, par une simple multiplication,

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n H_n x^n = x\frac{1-\ell n(1-x)}{(1-x)^2}.$$

[4.] Pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre d_n de diviseurs de n est évidemment compris entre 2 et n. Par conséquent, la suite de terme général $d_n x^n$ est bornée pour tout $0 \leqslant x < 1$ et elle tend vers $+\infty$ pour tout $x > 1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum d_n x^n$ est donc égal à 1.

La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$$

est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

❧ Comme précédemment, la série $\sum D_n x^n$ peut s'interpréter comme un produit de Cauchy, ce qui nous donne

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} D_n x^n = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\Big) = \frac{S(x)}{1-x}.$$

On a encadré plus haut D_n à l'aide de H_n $(\star)$, ce qui nous donne

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} D_n x^n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} n H_n x^n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} D_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n.$$

✍ *Attention, cet encadrement n'a aucune raison d'être vrai pour $-1 < x < 0$!*

Le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est strictement positif, donc on peut dériver terme à terme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = x \cdot \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

❧ On a donc démontré que

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \quad 0 \leqslant x\frac{1-\ell n(1-x)}{(1-x)^2} - \frac{S(x)}{1-x} \leqslant \frac{x}{(1-x)^2}.$$

On en déduit que

$$S(x) \underset{x\to 1}{=} x\frac{1-\ell n(1-x)}{1-x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{1-x}\Big)$$

et plus simplement que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n \underset{x\to 1}{\sim} \frac{-\ell n(1-x)}{1-x}.$$

✍ *Comme la série $\sum d_n$ est grossièrement divergente, il est logique de trouver un équivalent infiniment grand.*

Comme d_n oscille indéfiniment entre 2 (cas où n est premier) et de grandes valeurs (pour les entiers n qui ont "beaucoup" de diviseurs), il est logique de trouver un équivalent qui est intermédiaire entre la somme de la série entière $\sum x^n$ et celle de la série entière $\sum n x^n$.

[5.] Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n définie par $u_n(x) = x^n/(1-x^n)$ est clairement continue sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $0 < a < 1$,

$$\forall\, x \in [-a,a], \qquad \left|u_n(x)\right| \leqslant \frac{|x|^n}{1-a^n} \leqslant \frac{a^n}{1-a^n}.$$

✍ *Si $|x| \leqslant a$, alors $x^n \leqslant |x|^n \leqslant a^n < 1$ et par conséquent*

$$1 - x^n \leqslant 1 - |x|^n \leqslant 1 - a^n > 0.$$

Il faut toujours chercher un encadrement simple avant de se lancer dans l'étude des variations d'une fonction !

Comme $0 < a < 1$, le majorant est équivalent à a^n lorsque n tend vers $+\infty$. On a donc trouvé un majorant indépendant de $x \in [-a,a]$ et qui est le terme général d'une série convergente. On a donc prouvé que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur $[-a,a]$ pour tout $0 < a < 1$ et comme les fonctions u_n sont continues, on en déduit que la somme de cette série de fonctions est continue sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ (qui est l'union des segments $[-a,a]$ lorsque a varie entre 0 et 1).

✍ *On peut démontrer (Théorème de Fubini) que*

$$\forall\, x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k x^k.$$

Il y a donc bien un rapport entre les deux dernières questions !