VENDREDI 12 JUIN

Référence	Origine	Thèmes
132-174	ENS PSI	Espace euclidien et probabilités
132-464	Mines MP	Sous-espaces stables d'un endomorphisme
132-466	"	Inverse d'une matrice
132-494	"	Diagonalisation
132-497	"	Endomorphisme diagonalisable
132-498	"	Réduction
132-523	"	Norme multiplicative
132-524	"	Sous-groupes fermés de $\mathbb{C}^*$
132-527	"	Normes équivalentes
132-531	"	Frontière d'une partie
132-535	"	Développement asymptotique
132-571	"	Fonction définie par une intégrale
132-599	"	Série de fonctions
132-610	"	Fonction génératrices
132-617	"	Limite d'une intégrale
132-628	"	Valeur finale d'une transformée de Laplace
132-633	"	Wronskien
132-636	"	Équation différentielle et matrice antisymétrique
132-642	"	Résolution d'une EDP
132-644	"	Ensemble tangent à une partie de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$
132-648, 649 & 651	"	Probabilités
132-652	"	Probabilités
132-654	"	Probabilités
132-655	"	Espérance d'une variable aléatoire
132-656	"	Variance d'une variable aléatoire
132-661, 669	"	Inégalité de Paley-Zygmund
132-668	"	Des boules dans une urne
132-755	Mines PC	Calcul matriciel
132-759	"	Caractérisation de la trace
132-800	"	Comparaison de normes
132-801	"	Une norme sur l'espace des suites sommables
132-823	"	Une équation fonctionnelle
132-825	"	Un problème de point fixe
132-940	Centrale MP	Topologie sur un espace de suites
132-984	"	Encore des boules dans une urne
132-1028	Centrale PSI	Équation différentielle matricielle
132-1111	CCINP MP	Racines carrées d'un endomorphisme
132-1119	"	Série de fonctions
136-1420	IMT MP	Équivalent d'une intégrale
136-1431	"	Équation différentielle

rms132-174

Soit $n \geqslant 5$. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, on considère un sous-espace V de dimension $k \leqslant n-4$. La projection orthogonale sur V est notée π_V et la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de cette projection est notée P.
On note A, la matrice P privée de sa diagonale et $D = P - A$.
On considère un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Les coordonnées $X_1, \dots, X_n$ sont supposées indépendantes et de même loi :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(X_k = \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

On étudie ici la variable aléatoire

$$R = d(X, V) = \min_{v \in V} \|X - v\|.$$

[**1.**] *Démontrer que $R(\omega) \leqslant \sqrt{n}$ pour tout $\omega \in \Omega$.*
[**2.**] *Démontrer que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, V)^2 = \langle\, x \,|\, x - \pi_V(x) \,\rangle\,.$$

[**3.**] *En déduire que*

$$R^2 = n - k - X^\top.A.X.$$

Calculer $\mathbf{E}(R^2)$.
[**4.**] *Démontrer que $\operatorname{tr} D^2 \geqslant k^2/n$.*
[**5.**] *Démontrer que*

$$\mathbf{E}\big[(X^\top.A.X)^2\big] \leqslant \frac{2k(n-k)}{n}.$$

[**6.**] *Démontrer que*

$$\mathbf{P}(R \geqslant \sqrt{n-k} + 2) \leqslant \frac{k}{8n}.$$

[**1.**] D'après le cours,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, V)^2 = \|x - \pi_V(x)\|^2.$$

Par conséquent, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$R(\omega)^2 = \big\|X(\omega) - \pi_V\big(X(\omega)\big)\big\|^2 = \big\|(I - \pi_V)\big(X(\omega)\big)\big\|^2 \leqslant \big\|X(\omega)\big\|^2$$

puisque $I - \pi_V$ est une projection orthogonale (la projection orthogonale sur $V^\perp$).
Comme les coordonnées de X sont des variables aléatoires de Rademacher,

$$\big\|X(\omega)\big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2(\omega) = n$$

et on a donc

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad 0 \leqslant R(\omega) \leqslant \sqrt{n}.$$

[**2.**] Cf cours.
[**3.**] (Dorénavant, la variable ω sera sous-entendue.)
Pour le produit scalaire canonique, la base canonique est une base orthonormée. Par conséquent, d'après la première question,

$$\begin{aligned} R^2 &= X^\top.(I - P).X \\ &= X^\top.(I - D - A).X \\ &= X^\top.(I - D).X - X^\top.A.X. \end{aligned}$$

En notant $c_1, \dots, c_n$, les coefficients diagonaux de la matrice D,

$$\begin{aligned} R^2 &= \sum_{i=1}^{n} (1 - c_i) X_i^2 - X^\top.A.X \\ &= \sum_{i=1}^{n} (1 - c_i) - X^\top.A.X && \text{(car } X_i^2 = 1\text{)} \\ &= (n - \operatorname{tr} D) - X^\top.A.X. \end{aligned}$$

Par définition, les coefficients diagonaux de D sont aussi les coefficients diagonaux de P, donc $\operatorname{tr} D = \operatorname{tr} P = \operatorname{rg} P$ (puisque la trace de toute projection est aussi le rang de cette projection). Comme π_V est la projection sur un sous-espace de dimension k, le rang de P est égal à k et on a donc bien

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad R^2(\omega) = n - k - X^\top(\omega).A.X(\omega).$$

❧ Comme R^2 est une variable aléatoire bornée, c'est une variable aléatoire d'espérance finie.
En notant $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a $a_{i,i} = 0$ (par construction de A) et d'après la formule du produit matriciel,

$$X^\top.A.X = \sum_{i \neq j} X_i.a_{i,j}.X_j.$$

Il s'agit d'une combinaison linéaire de variables aléatoires bornées. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X^\top.A.X) = \sum_{i \neq j} a_{i,j}\, \mathbf{E}(X_i X_j).$$

Or X_i et X_j sont des variables aléatoires indépendantes (puisque $i \neq j$) et centrées, donc

$$\forall\, i \neq j, \quad \mathbf{E}(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i)\, \mathbf{E}(X_j) = 0$$

donc $\mathbf{E}(X^\top.A.X) = 0$ et finalement

$$\mathbf{E}(R^2) = n - k.$$

[4.] Avec les notations utilisées plus haut,

$$\operatorname{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

On a déjà remarqué que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \operatorname{tr} D = \operatorname{tr} P = k.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$k = \sum_{i=1}^{n} c_i.1 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{n} 1^2\Big)^{1/2} = \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr}(D^2)}$$

et par conséquent

$$\operatorname{tr}(D^2) \geqslant \frac{k^2}{n}.$$

[5.] On a justifié précédemment que

$$X^\top.A.X = \sum_{i \neq j} a_{i,j} X_i X_j$$

était une combinaison linéaire de variables aléatoires centrées. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\big[(X^\top.A.X)^2\big] &= \mathbf{V}\Big(\sum_{i \neq j} a_{i,j} X_i X_j\Big) \\ &= \sum_{i \neq j} a_{i,j}^2\, \mathbf{V}(X_i X_j) + \sum_{\substack{(i,j) \neq (p,q) \\ \text{avec } i \neq j,\, p \neq q}} a_{i,j} a_{p,q}\, \mathbf{Cov}(X_i X_j, X_p X_q). \end{aligned}$$

❧ Pour $i \neq j$, le produit $X_i X_j$ est une variable aléatoire centrée, donc

$$\mathbf{V}(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i^2 X_j^2) = \mathbf{E}(1) = 1.$$

❧ Pour $(i,j) \neq (p,q)$ avec $i \neq j$ et $p \neq q$, il faut distinguer plusieurs cas.
► Si $\{i,j\} \cap \{p,q\} = \varnothing$, alors $X_i X_j$ et $X_p X_q$ sont indépendantes (lemme des coalitions), donc leur covariance est nulle.

► Si $\{i,j\}\cap\{p,q\}$ est un singleton, on peut supposer que $i=p$ et $j\neq q$ (puisque $i\neq j$ et $p\neq q$). Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(X_iX_j,X_iX_q) &= \mathbf{E}(X_i^2X_jX_q)-\mathbf{E}(X_iX_j)\,\mathbf{E}(X_iX_q)\\ &= \mathbf{E}(X_jX_q)=0\end{aligned}$$

puisque $X_i^2=1$ et que les trois variables aléatoires X_iX_j, X_iX_q et X_jX_q sont centrées (les indices sont distincts).

► Enfin, si $\{i,j\}=\{p,q\}$, alors $i=q$ et $j=p$ (puisque les couples (i,j) et (p,q) sont distincts), donc

$$\mathbf{Cov}(X_iX_j,X_jX_i)=\mathbf{V}(X_iX_j)=1.$$

Ainsi,

$$\mathbf{V}\Big(\sum_{i\neq j}a_{i,j}X_iX_j\Big)=\sum_{i\neq j}a_{i,j}^2+\sum_{i\neq j}a_{i,j}a_{j,i}.$$

Comme elle représente une projection orthogonale dans une base orthonormée, la matrice P est symétrique (réelle) et la matrice A est symétrique elle aussi, donc

$$\mathbf{E}\big[(X^\top.A.X)^2\big]=\mathbf{V}\Big(\sum_{i\neq j}a_{i,j}X_iX_j\Big)=2\sum_{i\neq j}a_{i,j}^2.$$

❧ Il est temps de se souvenir de l'expression du produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[(X^\top.A.X)^2\big] &= 2\Big[\sum_{i,j}a_{i,j}^2-\sum_{i=1}^n a_{i,i}^2\Big]\\ &= 2\big[\mathrm{tr}(P^\top.P)-\mathrm{tr}(D^\top.D)\big]\\ &= 2\big[\mathrm{tr}\,P-\mathrm{tr}(D^2)\big]\end{aligned}$$

puisque $P^\top.P=P^2=P$ (matrice de projection orthogonale relative à une base orthonormée) et $D^\top.D=D^2$ (matrice diagonale, donc symétrique).

On a vu plus haut que $\mathrm{tr}\,P=k$ et d'après la minoration de la question précédente,

$$\mathbf{E}\big[(X^\top.A.X)^2\big]=2\big[k-\mathrm{tr}(D^2)\big]\leqslant 2\Big[k-\frac{k^2}{n}\Big]=\frac{2(n-k)k}{n}.$$

[6.] Comme R est une variable aléatoire positive,

$$\begin{aligned}[R\geqslant\sqrt{n-k}+2] &= \big[R^2\geqslant n-k+4+4\sqrt{n-k}\big]\\ &= \big[-X^\top.A.X\geqslant 4+4\sqrt{n-k}\big]\\ &\subset \big[(X^\top.A.X)^2\geqslant 16(1+\sqrt{n-k})^2\big].\end{aligned}$$

On déduit alors de l'inégalité de Markov et de la majoration précédente que

$$\mathbf{P}\big(R\geqslant\sqrt{n-k}+2\big)\leqslant\frac{\mathbf{E}\big((X^\top.A.X)^2\big)}{16(1+\sqrt{n-k})^2}\leqslant\frac{k}{8n}\cdot\frac{(n-k)}{(1+\sqrt{n-k})^2}\leqslant\frac{k}{8n}.$$

rms132-464

Soient E*, un espace vectoriel et* $\mathcal{A}$*, une sous-algèbre de* $L(E)$*. On suppose que les seuls sous-espaces vectoriels de* E *qui sont stables par* tous *les éléments de* $\mathcal{A}$ *sont* $\{0_E\}$ *et* E*.*
Démontrer que, quels que soient les vecteurs $x \neq 0$ *et* y *dans* E*, il existe un endomorphisme* $u \in \mathcal{A}$ *tel que* $u(x) = y$*.*

❧ Il est clair que l'ensemble

$$F = \{u(x),\ u \in \mathcal{A}\}$$

est contenu dans l'espace vectoriel E.

❧ Comme $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $L(E)$, alors l'application nulle ω_E appartient à $\mathcal{A}$ et par conséquent

$$0_E = \omega_E(x) \in F.$$

Quels que soient le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et les vecteurs a et b dans F, il existe deux endomorphismes u et v dans $\mathcal{A}$ tels que

$$a = u(x) \qquad \text{et} \qquad b = v(x).$$

Par conséquent,

$$\lambda a + b = (\lambda u + v)(x).$$

Or $\lambda u + v \in \mathcal{A}$ (une algèbre est stable par combinaison linéaire), donc

$$\lambda a + b \in F.$$

Ainsi, l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E.

❧ Une algèbre est, par définition, unitaire, donc $I_E \in \mathcal{A}$ et donc

$$x = I_E(x) \in F.$$

Comme $x \neq 0_E$ par hypothèse, le sous-espace F n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

❧ Soit $a \in F$: il existe donc $v \in \mathcal{A}$ tel que $a = v(x)$.

Pour tout $u \in \mathcal{A}$, la composée $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ (stable par $\circ$, qui est la multiplication interne), donc

$$u(a) = (u \circ v)(x) \in F.$$

Le sous-espace F est donc stable par $\mathcal{A}$. Comme il n'est pas réduit à $\{0_E\}$, il est par hypothèse égal à E.

❧ Pour tout $y \in E$, on a donc $y \in F$ et, par construction de F, il existe donc $u \in \mathcal{A}$ tel que $y = u(x)$.

rms132-466

> [**1.**] *Démontrer que, pour toute matrice* $M \in GL_n(\mathbb{K})$*, il existe un polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tel que*
> $$M^{-1} = P(M).$$
> [**2.**] *Existe-t-il un polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tel que*
> $$M^{-1} = P(M)$$
> *pour toute matrice* $M \in GL_n(\mathbb{K})$ *?*

[**1.**] Toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ admet un polynôme minimal $P_0 \in \mathbb{K}[X]$. Or les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres et M est inversible, donc 0 n'est pas racine du polynôme minimal. Ainsi, le coefficient constant du polynôme minimal n'est pas nul :

$$P_0 = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \quad \text{avec} \quad a_0 \neq 0.$$

Comme P_0 est un polynôme annulateur de M, on en déduit que

$$M^d + a_{d-1}M^{d-1} + \cdots + a_1 M + a_0 I_n = 0_n$$

et donc que

$$M\Big(M^{d-1} + a_{d-1}M^{d-2} + \cdots + a_2 M + a_1 I_n\Big) = -a_0 I_n,$$

ce qui prouve que le polynôme

$$P = \frac{-1}{a_0}\Big(X^{d-1} + a_{d-1}X^{d-2} + \cdots + a_2 X + a_1\Big)$$

vérifie $M^{-1} = P(M)$.

[**2.**] Le polynôme P qu'on vient d'exhiber dépend de la matrice M.

S'il existait un polynôme P indépendant de la matrice M (entre les deux questions, seule la position des quantificateurs est modifiée), alors il faudrait en particulier que

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad P(\lambda I_n) = \frac{1}{\lambda} I_n$$

et donc que

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad P(\lambda) = \frac{1}{\lambda}.$$

► Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la propriété précédente est impossible (limite à l'origine ou à l'infini !). Il n'existe donc pas de polynôme universel !

► Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad \lambda^{-1} = \lambda$$

et le polynôme $P = X$ vérifie la condition nécessaire.

Il y a $16 = 2^4$ matrices dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$, parmi lesquelles six sont inversibles.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que ces six matrices vérifient $A^2 = I_2$, c'est-à-dire $A^{-1} = A$. Autrement dit, le polynôme X convient pour toutes les matrices de $GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

► Ce n'est pas vrai dans $GL_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ puisque les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont distinctes.

✍ *Cela prouve que le polynôme X n'est pas universel, cela ne prouve pas qu'il n'existe pas de polynôme universel !*

► Quels que soient l'entier $n \geqslant 1$ et le nombre premier p, l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ne contient que p^{n^2} matrices, donc le groupe $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est fini.

En parcourant l'ensemble des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, on n'a donc qu'un nombre *fini* de polynômes minimaux.

Le ppcm de ces polynômes est donc un polynôme annulateur commun à toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et le raisonnement de la première question permet d'en déduire qu'il existe un polynôme universel P tel que

$$\forall\, M \in GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \quad P(M) = M^{-1}.$$

rms132-494

Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, deux matrices telles que AB soit diagonalisable et inversible. Alors BA est aussi diagonalisable.

✍ *On propose une première solution en supposant que les deux matrices A et B sont carrées. On traitera dans un second temps le cas général.*

❧ Par hypothèse,

$$\det(A).\det(B) = \det(AB) \neq 0$$

donc A et B sont inversibles.

On en déduit que

$$B(AB)B^{-1} = BA$$

ce qui prouve que les matrices AB et BA sont semblables.

Comme AB est diagonalisable, on en déduit que BA est aussi diagonalisable.

✍ *On en déduit également que les matrices AB et BA ont même polynôme minimal, même polynôme annulateur, mêmes valeurs propres...*

❧ On suppose ici que $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, si bien que $AB \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $BA \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$.

Comme AB est diagonalisable, son polynôme minimal P_0 est scindé, à racines simples et comme AB est inversible, 0 n'est pas racine de P_0. Il existe donc un entier $d \geqslant 2$ et des scalaires λ_1, …, λ_d deux à deux distincts et non nuls tels que

$$P_0 = \prod_{k=1}^{d}(X - \lambda_k) \tag{$\star$}$$

mais aussi des scalaires $a_0 \neq 0$, a_1, …, a_{d-1} tels que

$$P_0 = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

et donc tels que

$$P_0(AB) = 0_n = (AB)^d + a_{d-1}(AB)^{d-1} + \cdots + a_1(AB) + a_0I_n$$

En multipliant à gauche par B et à droite par A, on en déduit que

$$0_n = B(AB)^dA + a_{d-1}B(AB)^{d-1}A + \cdots + a_1B(AB)A + a_0BA$$

et comme $B(AB)^kA = (BA)^{k+1}$, on en déduit que

$$P_1 = XP_0 = X\prod_{k=1}^{d}(X - \lambda_k)$$

est un polynôme annulateur de BA.

Comme P_0 est scindé, à racines simples et n'admet pas 0 parmi ses racines, le polynôme P_1 est lui aussi scindé, à racines simples, ce qui prouve que BA est diagonalisable.

✍ *Le rang d'une matrice est toujours inférieur au nombre de lignes et au nombre de colonnes de cette matrice.*

En supposant que $AB \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, on fait l'hypothèse que le rang de AB est égal à n. Or le rang de AB est inférieur au rang de A et donc au nombre de colonnes de A, donc $n \leqslant p$.

Si $n \neq p$, alors $n < p$. Comme le rang de $BA \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ est majoré par le rang de B et donc par le nombre n de lignes de B, le rang de BA est inférieur à n et donc strictement inférieur à p : en aucun cas, la matrice BA ne peut être inversible.

rms132-497

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$ et $\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = AM + MA.$$

[**1.**] *Démontrer que Φ est diagonalisable.*
[**2.**] *Exprimer la trace de Φ en fonction du rang de A.*

[**1.**] Comme $A^2 = A$,

$$\begin{aligned} \forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi \circ \Phi(M) &= \Phi(AM + MA) \\ &= \Phi(M) + 2AMA, \\ \Phi^3(M) &= \Phi(M) + 6AMA. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\Phi^3 - 3\Phi^2 = -2\Phi$$

et donc que

$$X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$$

est un polynôme annulateur de Φ. Comme ce polynôme est scindé à racines simples, on en déduit que Φ est diagonalisable.

[**2.**] Comme A est une matrice de projection, il existe une matrice inversible P et un entier $0 \leqslant r \leqslant n$ (le rang de A) tels que

$$P^{-1}AP = J_r \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$P^{-1}\Phi(M)P = J_r P^{-1}MP + P^{-1}MPJ_r = \Psi(P^{-1}MP) \tag{1}$$

où Ψ est l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall\, Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \Psi(Q) = J_rQ + QJ_r.$$

La relation (1) montre que la matrice M est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ si, et seulement si, la matrice $N = P^{-1}MP$ est un vecteur propre de Ψ associé à λ. Comme la **conjugaison** $[M \mapsto P^{-1}MP]$ est un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que Φ et Ψ ont même spectre et que leurs sous-espaces propres ont mêmes dimensions.

❧ On sait donc déjà que les valeurs propres de Ψ sont 0, 1 et 2. On effectue les calculs par blocs : avec

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix},$$

on a

$$J_rQ = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad QJ_r = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \Psi(Q) = \begin{pmatrix} 2Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

- $\Psi(Q) = 2Q$ si, et seulement si, $Q_2 = 0$ $Q_3 = 0$ et $Q_4 = 0$, le bloc Q_1 étant quelconque ;
- $\Psi(Q) = Q$ si, et seulement si, $Q_1 = 0$ et $Q_4 = 0$, les blocs Q_2 et Q_3 étant quelconques ;
- $\Psi(Q) = 0_n$ si, et seulement si, $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ et $Q_3 = 0$, le bloc Q_4 étant quelconque.

❧ On en déduit que

$$\dim \operatorname{Ker}(\Phi - 2I) = r^2, \qquad \dim \operatorname{Ker}(\Phi - I) = 2r(n-r) \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker} \Phi = (n-r)^2.$$

On a ainsi retrouvé par un calcul direct que Φ était diagonalisable et on en déduit la trace de Φ.

$$\operatorname{tr} \Phi = 2r^2 + 2r(n-r) = 2rn$$

✍ *On peut faire semblant d'éviter les calculs par blocs (mais la démarche qui suit revient précisément à faire du calcul par blocs) en considérant un projecteur p.*

On sait que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ *(propriété de tous les projecteurs) et on va appliquer un certain nombre de fois le Théorème de caractérisation des applications linéaires : si* $E = F \oplus G$, *quelles que soient les applications linéaires* $f \in L(F, E)$ *et* $g \in L(G, E)$, *il existe un, et un seul, endomorphisme* $u \in L(E)$ *tel que*

$$\forall\, x \in F, \quad u(x) = f(x) \qquad \textit{et} \qquad \forall\, x \in G, \quad u(x) = g(x).$$

▶ *Considérons l'application identiquement nulle* $f : \operatorname{Ker} p \to E$, *une application linéaire* $g : \operatorname{Im} p \to E$ *telle que* $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} p$ *et l'endomorphisme* u *caractérisé par* f *et* g.

On peut vérifier sans peine que

$$\begin{aligned} &\forall x \in F, \quad u \circ p(x) = 0_E = u(x) && \forall\, x \in G, \quad u \circ p(x) = u(x) \\ &\forall\, x \in F, \quad p \circ u(x) = 0_E && \forall\, x \in G, \quad p \circ u(x) = 0_E \end{aligned}$$

ce qui prouve que $u \circ p = u$ *et* $p \circ u = \omega$ *et donc que* $\Phi(u) = u$.

Le sous-espace propre de Φ *associé à* 1 *contient donc un sous-espace vectoriel isomorphe à* $L(\operatorname{Im} p, \operatorname{Ker} p)$.

▶ *Considérons une application linéaire quelconque* $f : \operatorname{Ker} p \to E$ *telle que* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p$, *l'application identiquement nulle* $g : \operatorname{Im} p \to E$ *et l'endomorphisme* u *caractérisé par* f *et* g.

On vérifie cette fois que

$$\begin{aligned} &\forall x \in F, \quad u \circ p(x) = 0_E && \forall\, x \in G, \quad u \circ p(x) = 0_E \\ &\forall\, x \in F, \quad p \circ u(x) = u(x) && \forall\, x \in G, \quad p \circ u(x) = 0_E = u(x) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $u \circ p = \omega$ *et* $p \circ u = u$ *et donc que* $\Phi(u) = u$.

Le sous-espace propre de Φ *associé à* 1 *contient donc un sous-espace vectoriel isomorphe à* $L(\operatorname{Im} p, \operatorname{Ker} p)$.

Ces deux sous-espaces vectoriels sont clairement en somme directe (leur intersection est réduite à l'endomorphisme nul), donc le sous-espace propre de Φ *associé à* 1 *contient un sous-espace de dimension* $2r(n-r)$.

▶ *Considérons une application linéaire quelconque* $f : \operatorname{Ker} p \to E$ *telle que* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} p$, *l'application identiquement nulle* $g : \operatorname{Im} p \to E$ *et l'endomorphisme* u *caractérisé par* f *et* g.

On vérifie cette fois que

$$\begin{aligned} &\forall x \in F, \quad u \circ p(x) = 0_E && \forall\, x \in G, \quad u \circ p(x) = 0_E \\ &\forall\, x \in F, \quad p \circ u(x) = 0_E && \forall\, x \in G, \quad p \circ u(x) = 0_E \end{aligned}$$

ce qui prouve que $u \circ p = p \circ u = \omega$ *et donc que* $\Phi(u) = \omega$.

Le noyau de Φ *(= le sous-espace propre associé à* 0*) contient donc un sous-espace vectoriel isomorphe à* $L(\operatorname{Ker} p, \operatorname{Ker} p)$. *La dimension du noyau de* Φ *est donc au moins égale à* $(n-r)^2$.

▶ *Considérons l'application identiquement nulle* $f : \operatorname{Ker} p \to E$ *et une application linéaire quelconque* $g : \operatorname{Im} p \to E$ *telle que* $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} p$, *ainsi que l'endomorphisme* u *caractérisé par* f *et* g.

On vérifie cette fois que

$$\begin{aligned} &\forall x \in F, \quad u \circ p(x) = 0_E = u(x) && \forall\, x \in G, \quad u \circ p(x) = u(x) \\ &\forall\, x \in F, \quad p \circ u(x) = 0_E = u(x) && \forall\, x \in G, \quad p \circ u(x) = u(x) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $u \circ p = p \circ u = u$ *et donc que* $\Phi(u) = 2u$.

Le sous-espace propre de Φ *associé à* 2 *contient donc un sous-espace vectoriel isomorphe à* $L(\operatorname{Im} p, \operatorname{Im} p)$. *La dimension de ce sous-espace propre est donc au moins égale à* r^2.

▶ *Comme* $2(n-r)r + (n-r)^2 + r^2 = n^2$, *ces inclusions sont en fait des égalités et on a caractérisé les vecteurs propres de* Φ.

rms132-498

> *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*. On considère l'application* $f_A : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *définie par*
>
> $$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad f_A(M) = AM.$$
>
> *Démontrer que* A *et* f_A *ont même spectre.*

Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors

$$AX = \lambda X$$

donc la matrice

$$M = \begin{pmatrix} X & \cdots & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

n'est pas la matrice nulle (puisque X n'est pas la colonne nulle) et

$$f_A(M) = AM = \begin{pmatrix} AX & \cdots & AX \end{pmatrix} = \lambda M$$

donc M est un vecteur propre de f_A associé à λ.

✍ *Les matrices*

$$\begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & X & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & X & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & X \end{pmatrix}$$

forment une famille libre de n *vecteurs propres de* f_A *associés à* λ*. Si la matrice* A *est diagonalisable, alors on peut définir une base de* $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *constituée de vecteurs propres de* A *et en déduire une base de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *constituée de vecteurs propres de* f_A *: cela prouve que* f_A *est diagonalisable.*

❧ Réciproquement, s'il existe une matrice carrée

$$M = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \neq 0_n$$

telle que

$$f_A(M) = \lambda M,$$

alors

$$\begin{pmatrix} AC_1 & AC_2 & \cdots & AC_n \end{pmatrix} = AM = \lambda M = \begin{pmatrix} \lambda C_1 & \lambda C_2 & \cdots & \lambda C_n \end{pmatrix}.$$

Comme $M \neq 0_n$, il existe au moins une colonne C_j *non nulle* et comme

$$AC_j = \lambda C_j,$$

on en déduit que λ est aussi une valeur propre de A.

rms132-523

Sur l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il n'existe pas de norme N telle que

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad N(A.B) = N(A).N(B).$$

Si la norme N vérifie l'identité

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad N(A.B) = N(A).N(B),$$

alors en particulier

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad N(A^2) = N(A)^2.$$

❧ Considérons la matrice $A = E_{1,2}$. Comme $A \neq 0_n$, alors $N(A) \neq 0$. Mais $A^2 = 0_n$, donc $N(A^2) = 0$. La contradiction est établie !

rms132-524

Déterminer les nombres complexes z pour lesquels l'ensemble

$$G = \{\exp(izt),\ t \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-groupe fermé de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

On sait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'application $[t \mapsto \exp(izt)]$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. Par conséquent, son image G est bien un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

❧ Si z a pour représentation cartésienne $a + ib$, alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |\exp(izt)| = \exp(-bt).$$

Par conséquent, si $b \neq 0$, alors $\exp(izt)$ tend vers $0 \notin G$ lorsque t tend vers $+\infty$ (pour $b > 0$) ou lorsque t tend vers $-\infty$ (pour $b < 0$). Cela contredit le fait que G est supposé fermé.

❧ Supposons réciproquement que z soit réel. Dans ce cas, l'application $\left[t \mapsto e^{izt}\right]$ est $\frac{2\pi}{z}$-périodique. De ce fait, l'ensemble G est l'image du compact $[0, \frac{2\pi}{z}]$ par une fonction continue, donc G est compact et en particulier fermé.

❧ On a donc démontré que G était fermé si, et seulement si, z était réel (c'est-à-dire $\operatorname{Im} z = 0$). Dans ce cas, G est en fait égal au cercle unité $\mathbb{U}$.

rms132-527

Soit E, l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty.$$

[**1.**] *Démontrer que N est une norme sur E.*
[**2.**] *Soit $f \in E$. Exprimer f en fonction de $g = f + 2f' + f''$.*
[**3.**] *Démontrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que*

$$\forall\, f \in E, \quad \|f\|_\infty \leqslant aN(f).$$

[**4.**] *Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?*

[**1.**] Il est clair que N est bien définie sur E (norme infinie d'une fonction continue sur un segment) ; qu'elle est positive ; qu'elle est positivement homogène et qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire (linéarité de la dérivation).

Enfin, si $N(f) = 0$, alors f est une solution de l'équation différentielle linéaire homogène

$$x'' + 2x' + x = 0$$

qui vérifie en outre $x(0) = x'(0) = 0$, donc f est la fonction nulle (soit par un calcul explicite sachant que $f(t) = (at+b)e^{-t}$, soit en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz).

Donc N est bien une norme sur E.

✍ *Bien entendu, N n'est pas une norme sur $\mathscr{C}^2([0,1])$.*

[**2.**] La fonction $f \in E$ considérée est *la* solution du problème de Cauchy :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad x''(t) + 2x'(t) + x(t) = g(t), \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x_H(t) = (at+b)e^{-t}$ et la méthode de variation des constantes nous donne une solution particulière :

$$x_0(t) = e^{-t} \int_0^t e^s (t-s) g(s)\, ds$$

et en même temps (puisqu'on raisonne sur le couple (x, x') en faisant varier les constantes)

$$x_0'(t) = e^{-t} \int_0^t e^s (1+s-t) g(s)\, ds.$$

✍ *On pourrait dériver et simplifier l'expression de $x_0(t)$: ce n'est pas compliqué, mais c'est un peu long. L'avantage de la méthode de variation des constantes est de nous donner directement une expression* simple *de la dérivée — et de ne la donner que si nous en avons réellement besoin.*

Il apparaît que $x_0(0) = x_0'(0) = 0$, donc $f = x_0$!

[**3.**] On déduit de l'inégalité triangulaire que :

$$\begin{aligned} \forall\, t \in [0,1], \quad |f(t)| &\leqslant \int_0^t \underbrace{e^{s-t}(t-s)}_{\geqslant 0} \|g\|_\infty\, ds \\ &\leqslant N(f) e^{-t} \int_0^t e^s (t-s)\, ds. \end{aligned}$$

(Les bornes de l'intégrale sont rangées dans l'ordre croissant.)

Or, pour tout $t \in [0,1]$,

$$0 \leqslant e^{-t} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \forall\, 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 \leqslant e^s(t-s) \leqslant e \cdot 1$$

donc

$$\forall\, t \in [0,1], \quad 0 \leqslant e^{-t} \int_0^t e^s(t-s)\, ds \leqslant e.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $t \in [0, 1]$, donc on peut passer au sup :

$$\forall\, f \in E, \qquad \|f\|_\infty \leqslant e\, N(f).$$

✍ *On vient de démontrer que la norme $\|\cdot\|_\infty$ est dominée par la norme N.*

Mais la norme N prend en compte les variations de f (présence de f' et de f''), alors que la norme $\|\cdot\|_\infty$ ne tient compte que de l'amplitude de f et pas de ses variations. Pour démontrer que les deux normes ne sont pas équivalentes, on va chercher des fonctions dont l'amplitude est limitée et dont les variations sont de plus en plus rapides.

[4.] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad f_n(t) = t \sin nt.$$

Il est clair que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, 1]$, que $f_n(0) = f_n'(0) = 0$ et que $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$.

Mais

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad f_n(t) + 2f_n'(t) + f_n''(t) = [2 + (1 - n^2)t] \sin nt + n(2 + t) \cos nt$$

et en particulier $f_n(0) + 2f_n'(0) + f_n''(0) = 2n$, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad N(f_n) \geqslant 2n.$$

Le quotient $N(f_n)/\|f_n\|_\infty$ tend vers $+\infty$, donc la norme N n'est pas dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

rms132-531

Soit A, une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.
[**1.**] *On considère une fonction continue $f : [0,1] \to E$ telle que $f(0) \in A$ et $f(1) \notin A$. Démontrer qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $f(t_0)$ appartienne à la frontière ∂A de A.*

✍ *On rappelle que $\overline{A} = A^\circ \sqcup \partial A$ (par définition de la frontière) et que*

$$A = \overset{\circ}{A} \sqcup \partial A \sqcup B$$

où B est le complémentaire de l'adhérence de A (B est donc ouvert).

[**2.**] *Démontrer que : si A est distinct de E et de l'ensemble vide, alors sa frontière n'est pas vide.*

[**1.**] Comme $f(1) \in A^c$, alors deux cas se présentent : ou bien $f(1) \in \partial A$ (et dans ce cas, il n'y a plus rien à démontrer), ou bien $f(1) \in B$. Dans la suite, on peut donc supposer que $f(1) \in B$.

❧ On considère l'ensemble

$$X = \{t \in [0,1] : f(t) \in A\}.$$

Il s'agit d'une partie de $[0,1]$, donc d'une partie bornée de $\mathbb{R}$.

Par hypothèse, $f(0) \in A$, donc $0 \in X$: c'est une partie non vide.

D'après l'axiome de la borne supérieure, l'ensemble X admet une borne supérieure t_0 et nous allons démontrer que $f(t_0)$ appartient à la frontière de A, c'est-à-dire (par définition de l'adhérence) que $f(t_0)$ appartient à l'adhérence de A sans appartenir à l'intérieur de A.

❧ Par hypothèse, $f(1) \in B$ et comme B est ouvert, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \|x - f(1)\| \leqslant r \implies x \in B \subset A^c.$$

Comme f est continue, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [1-\alpha, 1], \quad \|f(t) - f(1)\| \leqslant r.$$

Par conséquent

$$\forall\, t \in [1-\alpha, 1], \quad f(t) \in A^c.$$

On en déduit que $0 \leqslant t_0 \leqslant 1 - \alpha < 1$.

❧ Comme t_0 est la borne supérieure de X, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers t_0, c'est-à-dire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) \in A \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = t_0.$$

Par continuité de f,

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(t_0) \in \overline{A}.$$

❧ Si $f(t_0)$ appartenait à l'intérieur de A, alors il existerait un réel $r > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \|x - f(t_0)\| \leqslant r \implies x \in \overset{\circ}{A}.$$

Par continuité de f et comme $t_0 < 1$, il existerait alors $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [t_0, t_0+\alpha], \quad \|f(t) - f(t_0)\| \leqslant r$$

et par conséquent

$$\forall\, t \in [t_0, t_0+\alpha], \quad f(t) \in \overset{\circ}{A} \subset A.$$

Cela signifierait que $[t_0, t_0+\alpha] \subset X$ et contredirait donc la définition de t_0 comme borne supérieure de X.

Par conséquent, $f(t_0)$ n'appartient pas à l'intérieur de A et appartient bien à la frontière de A.

[**2.**] Si $A \neq \varnothing$ et $A \neq E$, alors il existe $x \in A$ et $y \in A^c$. Comme E est un espace vectoriel, il est convexe et la fonction affine (donc continue)

$$f = [t \mapsto (1-t)x + ty] : [0,1] \to E$$

vérifie

$$f(0) \in A \quad \text{et} \quad f(1) \notin A.$$

D'après la question précédente, la frontière de A possède au moins un point.

rms132-535

Déterminer deux réels a et b tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n + an + b + o(1).$$

Tout d'abord,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) = n\ln n + \sum_{k=0}^{n-1} \ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big).$$

❧ Ensuite, comme la fonction $f = [t \mapsto \ln(1+t)]$ est continue sur le segment $[0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 \ln(1+t)\,dt = 2\ln 2 - 1 > 0$$

(théorème sur les sommes de Riemann). Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) - n\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} (2\ln 2 - 1)n$$

et par suite $a = 2\ln 2 - 1$.

❧ Enfin, on s'intéresse à la différence

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big) - n\int_0^1 \ln(1+t)\,dt$$

qui peut aussi s'écrire (relation de Chasles)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} n\big[f(k/n) - f(t)\big]\,dt.$$

► La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f'(t) = \frac{1}{1+t}, \qquad \big|f''(t)\big| = \frac{1}{(1+t)^2} \leqslant 1.$$

Alors, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout entier $0 \leqslant k < n$,

$$\forall\, t \in \Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big], \quad \Big|f(k/n) - f(t) - \frac{k/n - t}{1+k/n}\Big| \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{k}{n} - t\Big)^2 \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

On peut alors borner chaque intégrale de la manière la plus classique qui soit : pour tout entier $0 \leqslant k < n$,

$$\Big|\int_{k/n}^{(k+1)/n} n\Big(f(k/n) - f(t) - \frac{k/n - t}{1+k/n}\Big)\,dt\Big| \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} n\Big|f(k/n) - f(t) - \frac{k/n - t}{1+k/n}\Big|\,dt \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

et par inégalité triangulaire, la quantité

$$\Big|\sum_{k=0}^{n-1} \ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big) - n\int_0^1 \ln(1+t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} n\cdot\frac{t - k/n}{1+k/n}\,dt\Big|$$

est majorée par $1/2n$ (il y a n termes dans la somme).

► Il reste à calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} n\cdot\frac{t-k/n}{1+k/n}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} n\cdot\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{1}{1+k/n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+k/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \frac{\ln 2}{2}.$$

❧ Finalement, on a trouvé

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n + (2\ln 2 - 1)n - \frac{\ln 2}{2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

(ce qui est même un peu plus précis que prévu).

rms132-571

> *Pour $x > 1$, on pose*
> $$F(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^t}{t}\,dt.$$
> [**1.**] *Déterminer la limite de* F *au voisinage droit de* 1.
> [**2.**] *Démontrer que* F *est injective.*

Tout d'abord, la fonction
$$f = \left[t \mapsto \frac{e^t}{t}\right]$$
est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 1$, le segment $[\ln x, 2\ln x]$ est contenu dans $]0, +\infty[$. Par conséquent, l'expression $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 1$ (intégrale d'une fonction continue sur un segment).

[**1.**] Soit $x > 1$. Par croissance de la fonction exp,
$$\forall\, t \in [\ln x, 2\ln x], \quad \frac{x}{t} = \frac{e^{\ln x}}{t} \leqslant \frac{e^t}{t} \leqslant \frac{e^{2\ln x}}{t} = \frac{x^2}{t}.$$
Par positivité de l'intégrale,
$$\forall\, x > 1, \quad x\int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{dt}{t} \leqslant f(x) \leqslant x^2 \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{dt}{t}$$
c'est-à-dire
$$\forall\, x > 1, \qquad x\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x^2 \ln 2.$$
On peut conclure par encadrement :
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \ln 2.$$

✍ *Variante plus compliquée, qui permet néanmoins de réviser plusieurs idées intéressantes...*
On peut aussi utiliser le développement en série entière de la fonction exp.
Si le rayon de convergence d'une série entière est infini, il y a convergence normale sur le segment $[\ln x, 2\ln x]$ *(quel que soit* $x > 1$*) et par conséquent*

$$\begin{aligned} f(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{k!}\,dt &= \ln 2 + \int_{\ln x}^{2\ln x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{k!}\,dt && \text{(linéarité)}\\ &= \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{t^{k-1}}{k!}\,dt && \text{(intégration terme à terme)}\\ &= \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2^k - 1)\ln^k x}{k.k!} \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que le rayon de convergence de la série entière
$$\sum \frac{(2^k-1)u^k}{k.k!}$$
est infini. Sa somme est donc continue sur $\mathbb{R}$ *et par composition de limites,*
$$\lim_{x\to 1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2^k-1)\ln^k x}{k.k!} = \lim_{u\to 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2^k-1)u^k}{k.k!} = 0.$$
On a ainsi redémontré que $f(x)$ *tendait vers* $\ln 2$ *au voisinage de* 1.

[**2.**] D'après le Théorème fondamental, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et
$$\forall\, x > 1, \quad F'(x) = \frac{2}{x}\cdot\frac{e^{2\ln x}}{2\ln x} - \frac{1}{x}\cdot\frac{e^{\ln x}}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x} > 0.$$
Comme F est strictement croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$, elle est injective.

rms132-599

Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

[**1.**] *Étudier la continuité de* f.
[**2.**] *Calculer un équivalent de* f *au voisinage de* $+\infty$.
[**3.**] *Calculer un équivalent de* f *au voisinage de* 0.

Une remarque préalable : pour tout $x \neq 0$, le terme général de la série est $\mathcal{O}(1/n^2)$ et pour $x = 0$, le terme général ne tend pas vers 0, donc f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

Comme elle est évidemment paire, il suffit de l'étudier sur $]0, +\infty[$.

[**1.**] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n définie par

$$\forall\, x > 0, \quad u_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$$

est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, par monotonie de u_n, pour tout $a > 0$,

$$\forall\, x \geqslant a, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(a)$$

ce qui prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$. La somme f est donc continue sur

$$\bigcup_{a>0} [a, +\infty[=]0, +\infty[.$$

[**2.**] Essayons de deviner l'équivalent de $f(x)$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$$

on peut imaginer que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}.$$

Il reste à vérifier cette conjecture : pour tout $x > 0$,

$$\frac{\pi^2}{6x^2} - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n^2x^2} - \frac{1}{1+n^2x^2}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x^2(1+n^2x^2)}$$

et on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant \frac{\pi^2}{6x^2} - f(x) \leqslant \frac{\zeta(4)}{x^4}.$$

Par conséquent, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{\pi^2}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{\pi^2}{6x^2}.$$

✍ *Variante : pour tout* $x > 0$,

$$x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$$

et cette nouvelle série de fonctions converge normalement sur $]0, +\infty[$ *puisque*

$$\forall\, x > 0, \qquad 0 \leqslant \frac{x^2}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{x^2}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2}.$$

On peut alors appliquer le théorème d'interversion des limites :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

et retrouver ainsi l'équivalent calculé ci-dessus.

[**3.**] Lorsque x tend vers 0, le terme général de la série tend vers 1 : cela permet de deviner que f tend vers $+\infty$ mais pas de deviner son ordre de grandeur...

Il est temps de remarquer que la fonction φ définie par

$$\forall\,(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \varphi(t,x) = \frac{1}{1+t^2x^2}$$

est une fonction continue, positive et décroissante de t pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Comme on a démontré que la série $\sum \varphi(n,x)$ était convergente pour tout $x > 0$, on en déduit que $[t \mapsto \varphi(t,x)]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $x > 0$ et nous allons pouvoir comparer cette intégrale à la somme $f(x)$.

En s'aidant d'une figure, on arrive à

$$\forall\, x > 0, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2}.$$

Avec le changement de variable $u = xt$, on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right) \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{2x}.$$

Cet encadrement prouve que

$$f(x) \underset{x\to 0+}{\sim} \frac{\pi}{2x}$$

et en particulier que f tend vers $+\infty$ au voisinage droit de 0.

✍ *Comme f est une fonction* paire*, on en déduit que*

$$f(x) \underset{x\to 0-}{\sim} \frac{\pi}{2|x|}.$$

rms132-610

Soit A, une partie de $\mathbb{N}$. On considère la fonction f définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n \in A} \frac{x^n}{n!}$$

et on suppose que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}.$$

[**1.**] *Soit I, une partie finie de A. Calculer*

$$\sum_{n \in I} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!}\, dx$$

et en déduire que A est une partie finie.
[**2.**] *Que peut-on en conclure ?*

Tout d'abord, la série de Poisson $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. Toute sous-famille d'une famille sommable étant elle-même sommable, on en déduit que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
[**1.**] On sait (cours sur la fonction Γ) que $[x \mapsto x^n e^{-x}]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!}\, dx = 1.$$

Par linéarité de l'intégrale (puisque I est un ensemble **fini**, il est permis d'invoquer la linéarité !), on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n \in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!}\, dx = \sum_{n \in I} 1 = \#(I).$$

Or $I \subset A$ et le terme général est positif, donc

$$\forall\, x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant \sum_{n \in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!} \leqslant e^{-x} f(x)$$

et par hypothèse, la fonction $[x \mapsto e^{-x} f(x)]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. On en déduit que

$$\#(I) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\, dx.$$

Le majorant ne dépendant pas de I, on peut en conclure que la partie A est finie.

✍ *Par définition, le cardinal d'une partie A est infini si, et seulement si, on peut extraire de A une partie finie de cardinal arbitrairement grand.*

[**2.**] Puisque A est un ensemble fini d'indices, la fonction f est en fait polynomiale. Par conséquent, l'équivalent proposé est impossible !

rms132-617

Soit f, *une fonction continue et bornée sur* $\mathbb{R}_+$. *Démontrer que*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx=\frac{\pi f(0)}{2}.$$

Transformons l'intégrale avec le changement de variable linéaire $u=nx$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{f(u/n)}{1+u^2}\,du.$$

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on pose alors

$$\forall\,u\in\mathbb{R}_+,\quad \varphi_n(u)=\frac{f(u/n)}{1+u^2}.$$

❧ **Intégrabilité** — Comme f est continue et bornée, chaque fonction φ_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ $\varphi_n(u)=\mathcal{O}(1/u^2)$ lorsque u tend vers $+\infty$, donc chaque fonction φ_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

❧ **Convergence simple** — Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est en particulier continue en 0. Par composition de limites, on en déduit que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$\varphi=\left[u\mapsto\frac{f(0)}{1+u^2}\right].$$

❧ **Domination** — Par ailleurs, comme f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\forall\,n\geqslant 1,\ \forall\,x\geqslant 0,\quad \left|\varphi_n(u)\right|\leqslant\frac{\|f\|_\infty}{1+u^2}.$$

Le majorant est indépendant de n et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc la convergence est dominée.

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\varphi_n(u)\,du=\int_0^{+\infty}\varphi(u)\,du=f(0)\big[\operatorname{Arctan}u\big]_0^{+\infty}$$

et donc que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot f(0).$$

rms132-628

> *Soit $a > 0$. On considère une fonction g, continue sur $[0, a]$ et telle que $g(0) \neq 0$, et la fonction F définie par*
> $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^a g(t)e^{-xt}\,dt.$$
> *Démontrer que*
> $$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{x}.$$

Tout d'abord, l'intégrale $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

❧ Pour $x > 0$ (ce qui n'est pas une restriction, puisqu'on étudie $x \to +\infty$), on peut effectuer le changement de variable linéaire $u = tx$:

$$xF(x) = \int_0^{xa} g\Big(\frac{u}{x}\Big)e^{-u}\,du.$$

❧ On considère donc la fonction φ définie par

$$\forall\, 0 \leqslant u \leqslant xa, \quad \varphi(x, u) = g\Big(\frac{u}{x}\Big)e^{-u} \quad \text{et} \quad \forall\, u > xa, \quad \varphi(x, u) = 0.$$

▶ **Intégrabilité** — On a déjà justifié que, pour tout $x > 0$, la fonction

$$[u \mapsto \varphi(x, u)]$$

était intégrable sur $I = [0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x, u)\,du = xF(x).$$

▶ **Convergence simple** — Comme g est continue en 0,

$$\forall\, u \in I, \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x, u) = g(0)e^{-u}$$

et la fonction $[u \mapsto g(0)e^{-u}]$ est continue sur I (et bien entendu intégrable sur cet intervalle).

▶ **Domination** — Comme g est continue sur le compact $[0, a]$, elle est bornée. Par conséquent,

$$\forall\, u \in I,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \big|\varphi(x, u)\big| \leqslant \|g\|_\infty\, e^{-u}.$$

La majorant trouvé est indépendant de $x > 0$ et intégrable sur I en tant que fonction de u.

Par conséquent, d'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_I \varphi(x, u)\,du = \int_I g(0)e^{-u}\,du = g(0).$$

Comme $g(0) \neq 0$, on peut en déduire que

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{x}.$$

✍ *Si $g(0) = 0$, on a seulement démontré que $F(x) = o(1/x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, on n'a pas trouvé d'équivalent.*

rms132-633

Soit f, une fonction à valeurs réelles, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On note S, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + f(x)y(x) = 0.$$

[**1.**] *Pour y_1 et y_2 dans S, on pose*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Que dire de w ?

[**2.**] *Démontrer que S contient des fonctions non bornées.*

[**1.**] La fonction w est constante.

▶ Première méthode : comme y_1 et y_2 sont de classe $\mathscr{C}^2$, la fonction w est dérivable et

$$w' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = y_1(-fy_2) - (fy_1)y_2 \equiv 0.$$

La fonction w est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

▶ Deuxième méthode : la fonction w est un wronskien de l'équation différentielle. Sous forme résoluble du premier ordre, l'équation s'écrit

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad Y'(x) = AY(x) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque wronskien W (et en particulier pour w), il existe donc une constante $K \in R$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = K.\exp[x \operatorname{tr} A].$$

Comme la trace de A est nulle, on en déduit que tous les wronskiens sont constants.

[**2.**] Si une fonction y est de classe $\mathscr{C}^2$ et bornée, alors le produit fy est intégrable (produit d'une fonction intégrable par une fonction continue et bornée).

Si y est une solution de l'équation différentielle, alors en fait $y'' = -fy$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le Théorème fondamental de l'Analyse, on en déduit que la dérivée y' tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$.

Comme la fonction y est supposée bornée, la limite de y' est nécessairement nulle.

Ainsi, si y_1 et y_2 sont deux solutions bornées, alors le wronskien w est constant et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ (chaque terme est le produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle). Cela prouve que w est en fait la fonction nulle et donc que y_1 et y_2 sont proportionnelles.

Or S est un plan vectoriel (ensemble des solutions d'une équation différentielle scalaire, linéaire et homogène du second ordre), donc il existe des vecteurs non proportionnels dans S.

Il existe donc des fonctions non bornées dans S.

rms132-636

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
[**1.**] *Démontrer que la matrice A est antisymétrique si, et seulement si,*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle\, Ax \,|\, x \,\rangle = 0.$$

[**2.**] *Démontrer que la matrice A est antisymétrique si, et seulement si, pour* toute *solution de l'équation différentielle $X' = AX$, l'application $[t \mapsto \|X(t)\|]$ est constante.*

[**1.**] Supposons que la matrice A soit antisymétrique.
En choisissant une **base orthonormée** de $\mathbb{R}^n$,

$$\langle\, Ax \,|\, x \,\rangle = (AX)^\top.X = X^\top.A^\top.X = -X^\top.A.X = -\langle\, x \,|\, Ax \,\rangle.$$

Par symétrie du produit scalaire, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle\, Ax \,|\, x \,\rangle = 0.$$

❧ Réciproquement, supposons que $\langle\, Ax \,|\, x \,\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle\, A(x+y) \,|\, x+y \,\rangle = 0.$$

En développant, on en déduit que

$$\underbrace{\langle\, Ax \,|\, x \,\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle\, Ay \,|\, y \,\rangle}_{=0} + \langle\, Ax \,|\, y \,\rangle + \langle\, Ay \,|\, x \,\rangle = 0.$$

Par symétrie du produit scalaire,

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle\, y \,|\, Ax \,\rangle + \langle\, Ay \,|\, x \,\rangle = 0.$$

En choisissant à nouveau une **BON** de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que

$$0 = Y^\top.(AX) + (AY)^\top.X = Y^\top.[(A + A^\top)X] = 0.$$

Cette propriété étant vraie quelles que soient les colonnes X et Y, on peut en déduire que

$$A + A^\top = 0_n$$

c'est-à-dire que A est antisymétrique.
[**2.**] Considérons maintenant la fonction définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \|X(t)\|^2 = \langle\, X(t) \,|\, X(t) \,\rangle$$

où X est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
Le produit scalaire étant bilinéaire et symétrique, la fonction f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 2\,\langle\, X'(t) \,|\, X(t) \,\rangle.$$

► Si X est une solution de l'équation différentielle, alors $X'(t) = A.X(t)$ et comme A est antisymétrique,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 2\,\langle\, AX(t) \,|\, X(t) \,\rangle = 0.$$

La dérivée de la fonction f étant identiquement nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on en déduit que f est constante et par conséquent que $\|X(t)\|$ ne dépend pas de t.
► Réciproquement, si f est constante pour chaque solution de l'équation différentielle, alors en particulier, quelle que soit la condition initiale $(t = 0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

$$0 = f'(0) = 2\,\langle\, AX(0) \,|\, X(0) \,\rangle = 2\,\langle\, Ax_0 \,|\, x_0 \,\rangle.$$

D'après le lemme initial, on en déduit que la matrice A est antisymétrique.

✍ *On peut aussi remarquer que la solution générale de l'équation différentielle peut s'écrire*

$$X(t) = \exp(tA).x_0$$

et donc, dans une base orthonormée,

$$\begin{aligned}\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \|X(t)\|^2 &= x_0^\top.[\exp(tA)]^\top.\exp(tA).x_0 \\ &= x_0^\top.\exp(tA^\top).\exp(tA).x_0 \\ &= x_0^\top.\exp(-tA).\exp(tA).x_0 = x_0^\top.x_0 = \|X(0)\|^2\end{aligned}$$

puisque $\exp(-M) = [\exp(M)]^{-1}$ *pour toute matrice* M.

rms132-642

Démontrer qu'une fonction f *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *est une solution de l'équation aux dérivées partielles*

$$\forall\, M = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2xy\frac{\partial f}{\partial x}(M) + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0$$

si, et seulement si, il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g\Big(\frac{x}{1+y^2}\Big).$$

Notons $U = \mathbb{R}^2$, l'ouvert sur lequel la fonction f est définie et considérons le changement de variables défini par

$$\forall\, (x, y) \in U, \quad (u, v) = \varphi(x, y) = \Big(\frac{x}{1+y^2}, y\Big).$$

Il est clair que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$(u, v) = \varphi(x, y) \iff (x, y) = \big(u(1+v^2), v\big).$$

Cela prouve que φ réalise une bijection de l'ouvert U sur l'ouvert $V = \mathbb{R}^2$. En outre, il est clair que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U (sa première composante est une fonction rationnelle sans pôle sur U, sa deuxième composante est polynomiale) et que la bijection réciproque est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V (ses deux composantes sont polynomiales).

Par conséquent, la fonction $f(x, y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si, et seulement si, la composée $g(u, v) = (f \circ \varphi^{-1})(u, v)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.

❧ D'après la règle de la chaîne, quel que soit $M = (u, v) \in V$,

$$\frac{\partial g}{\partial v}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}[\varphi^{-1}(M)] \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(M) + \frac{\partial f}{\partial y}[\varphi^{-1}(M)] \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(M) = 2uv \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{1+y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

✍ *Dans les deux dernières lignes, les dérivées partielles de* f *sont évaluées au point de coordonnées* $\varphi^{-1}(M)$ *; les coordonnées* x *et* y *sont considérées comme des fonctions de* u *et* v.

Comme φ^{-1} réalise une bijection de V sur U, on en déduit que

$$\forall\, (u, v) \in V, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 0 \iff \forall\, (x, y) \in U, \quad 2xy \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (1+y^2) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

et on rappelle que, par construction, les fonctions f et g sont liées par la relation :

$$\forall\, (x, y) \in U, \quad f(x, y) = (g \circ \varphi)(x, y).$$

❧ D'après le cours, une fonction $g(u, v)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $V = \mathbb{R}^2$ est solution de l'EDP

$$\frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

si, et seulement si, il existe une fonction G de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, (u, v) \in V, \quad g(u, v) = G(u).$$

Par conséquent, une fonction $f(x, y)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^2$ est solution de l'EDP

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2xy\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

si, et seulement si, il existe une fonction G de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, (x, y) \in U, \quad f(x, y) = G\Big(\frac{x}{1+y^2}\Big).$$

rms132-644

Soit $n \geqslant 2$. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à l'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

✍ *On rappelle que $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\det M = 1$.*

❧ On rappelle également que det est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est une application polynomiale). Déterminons l'application linéaire tangente à det en I_n : pour toute matrice $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\det(I_n + H) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = (1 + h_{1,1}) \cdots (1 + h_{n,n}) + o(H) \qquad (\star)$$

$$= 1 + \operatorname{tr} H + o(H). \qquad (\star\star)$$

On rappelle avant d'aller plus loin que $h_{i,j} = \mathcal{O}(\|H\|_\infty)$ lorsque H tend vers la matrice nulle 0_n, quels que soient les indices i et j.

Lorsque $\sigma \neq I$, *au moins deux* facteurs $a_{i,\sigma(i)}$ sont situés hors de la diagonale de $I_n + H$: le produit est donc $\mathcal{O}(\|H\|_\infty^2)$ et par conséquent $o(H)$ lorsque H tend vers 0_n.

En développant le terme qui correspond à $\sigma = I$, on trouve un terme constant (égal à 1), les termes $h_{1,1}, \ldots, h_{n,n}$ et des termes qui contiennent *au moins deux* facteurs $h_{i,j}$.

Le développement limité ainsi obtenu nous dit que l'application linéaire tangente à det en I_n est l'application tr.

❧ On considère une application f définie sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ (avec $\alpha > 0$), de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle, à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall\, t \in]-\alpha, \alpha[, \quad \det f(t) = 1$$

et telle que $f(0) = I_n$.

On a donc

$$f(t) \underset{t \to 0}{=} I_n + t f'(0) + o(t)$$

et d'après le développement limité de det

$$1 = \det f(t) \underset{t \to 0}{=} 1 + t \operatorname{tr}[f'(0)] + o(t).$$

On en déduit que $\operatorname{tr}[f'(0)] = 0$. Chaque vecteur tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n est donc une matrice de trace nulle.

❧ Réciproquement, si H est une matrice de trace nulle, alors on pose :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \exp(tH).$$

Il est clair que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (ses n^2 composantes sont des séries entières dont le rayon de convergence est infini), que

$$f(0) = \exp(0_n) = I_n,$$

que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = H.\exp(tH)$$

(cours sur les équations différentielles !) et donc que $f'(0) = H$.

Enfin, toujours d'après le cours sur les équations différentielles,

$$\det[f(t)] = \exp(t \operatorname{tr} H) = \exp(0) = 1,$$

donc f est bien une fonction qui prend ses valeurs sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, H est bien un vecteur tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

✍ *En l'état actuel (juin 2026) du programme, on peut conclure très rapidement en appliquant un théorème prévu à cet effet.*

La partie $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est caractérisée par l'équation $\det(M) = 1$ où det est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

On l'a vu, la matrice I_n appartient à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et l'application linéaire tangente à l'application det est une forme linéaire surjective sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est la trace).

De ce fait, l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ au point I_n est un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$: c'est le noyau de l'application tr, c'est-à-dire l'hyperplan des matrices de trace nulle.

rms132-648-649-651

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
[**1.**] *Soient $m < n$, deux entiers strictement positifs. On note E, l'ensemble $\mathfrak{P}_m([\![1,n]\!])$ des parties de $[\![1,n]\!]$ dont le cardinal est égal à m et on considère une variable aléatoire $A : \Omega \to E$:*

$$\forall\, F \in \mathfrak{P}_m([\![1,n]\!]), \quad [A = F] \in \mathcal{A}$$

dont la loi est uniforme :

$$\forall\, F,\ G \in \mathfrak{P}_m([\![1,n]\!]), \quad \mathbf{P}(A = F) = \mathbf{P}(A = G).$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire

$$X = \max A - \min A$$

et son espérance.
[**2.**] ***Première variante***
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On extrait m boules de l'urne et on note M, le plus grand des numéros tirés. Calculer l'espérance et la variance de M.
[**3.**] ***Deuxième variante***
On répartit aléatoirement m boules parmi n cases numérotées de 1 à n (chaque case pouvant contenir au plus une boule). Soit Δ, la différence entre le plus grand numéro et le plus petit numéro des cases occupées. Calculer la loi et l'espérance de Δ.

[**1.**] Comme $\#(E) = \binom{n}{m}$, on a $\mathbf{P}(A = F) = \frac{1}{\binom{n}{m}}$ pour toute partie $F \in E$.

❧ Pour toute partie $F \in E$, on a

$$1 \leqslant \min F \leqslant n - m + 1 \quad \text{et} \quad m \leqslant \max F \leqslant n.$$

Par conséquent, $\min A$ et $M = \max A$ sont des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[\![1, n - m + 1]\!]$ et $[\![m, n]\!]$ respectivement.

✍ *Il est fastidieux, mais pas difficile de prouver que $\min A$ et $\max A$ sont effectivement des variables aléatoires discrètes : on peut écrire $[\min A = k]$ et $[\max A = k]$ comme des unions finies disjointes d'ensembles de la forme $[A = F] \in \mathcal{A}$.*

❧ Soit $m \leqslant k \leqslant n$. Le maximum de $F \in E$ est égal à k si, et seulement si, l'entier k appartient à F et si les $(m-1)$ autres éléments de F sont choisis dans le sous-intervalle $[\![1, k-1]\!]$.
Comme la loi de A est uniforme sur E,

$$\forall\, m \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(M = k) = \mathbf{P}(\max A = k) = \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}.$$

❧ Soit $1 \leqslant k \leqslant n - m + 1$. Le minimum de $F \in E$ est égal à k si, et seulement si, l'entier k appartient à F et si les $(m-1)$ autres éléments de F sont choisis dans le sous-intervalle $[\![k+1, n]\!]$. Par conséquent,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n - m + 1, \quad \mathbf{P}(\min A = k) = \frac{\binom{n-k}{m-1}}{\binom{n}{m}}.$$

✍ ***Remarque en passant***
Comme $[\max A = m] = \big[A = \{1, \dots, m\}\big] \subset [\min A = 1]$, alors

$$[\max A = m] \cap [\min A = 1] = [\max A = m]$$

et par conséquent

$$\mathbf{P}(\min A = 1, \max A = m) = \mathbf{P}(\max A = m) = \frac{1}{\binom{n}{m}} > 0.$$

Or la loi de $\min A$ est connue et comme $1 \leqslant m < n$,

$$\mathbf{P}(\min A = 1) = \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \frac{m}{n} < 1.$$

Donc $\mathbf{P}(\min A = 1, \max A = m) \neq \mathbf{P}(\min A = 1)\,\mathbf{P}(\max A = m)$ *et les deux variables* $\min A$ *et* $\max A$ *ne sont pas indépendantes.*

❧ Passons à la loi du couple $(\min A, \max A)$.

▶ Comme la partie $A(\omega)$ compte m éléments, alors nécessairement

$$\max A(\omega) - \min A(\omega) \geqslant m - 1.$$

D'autre part, $\max A(\omega) \leqslant n$ et $\min A(\omega) \geqslant 1$, donc

$$\max A(\omega) - \min A(\omega) \leqslant n - 1.$$

Ainsi X est une variable aléatoire discrète (en tant que différence de deux variables aléatoires discrètes) à valeurs dans $[\![m-1, n-1]\!]$.

▶ Soient donc deux entiers k et ℓ tels que

$$1 \leqslant k \leqslant n - m + 1, \qquad m \leqslant \ell \leqslant n \qquad \text{et} \qquad m - 1 \leqslant \ell - k \leqslant n - 1.$$

Le minimum de $F \in E$ est égal à k et son maximum est égal à ℓ si, et seulement si, la partie F contient k et ℓ et si les $(m-2)$ éléments restants de F sont choisis dans le sous-intervalle $[\![k+1, \ell-1]\!]$. L'astuce taupinale nous permet de dénombrer en toute sérénité :

$$\ell - 1 = k + (\ell - k - 1).$$

Il y a donc $(\ell - k - 1)$ entiers dans $[\![k+1, \ell-1]\!]$ et par conséquent,

$$\mathbf{P}(\min A = k, \max A = \ell) = \frac{\binom{\ell-k-1}{m-2}}{\binom{n}{m}}.$$

❧ On peut en déduire la loi de X.
Soit $m - 1 \leqslant q \leqslant n - 1$. D'après la Formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = q) = \sum_{k=1}^{n-m+1} \mathbf{P}(X = q, \min A = k) &= \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n-m+1 \\ k+q \leqslant n}} \mathbf{P}(\min A = k, \max A = k + q) \\ &= \sum_{k=1}^{n-q} \frac{\binom{q-1}{m-2}}{\binom{n}{m}} = (n-q)\frac{\binom{q-1}{m-2}}{\binom{n}{m}}\end{aligned}$$

(puisque les termes de la somme sont tous égaux).

✍ *Pour calculer les espérances de* M *et de* X*, il faut se souvenir que*

$$\forall\, 1 \leqslant m < n, \quad \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Cette propriété peut se démontrer
→ par récurrence sur n *(à partir de la formule dite du triangle de Pascal) ;*
→ de manière combinatoire : choisir $(m+1)$ *entiers dans* $[\![1, n+1]\!]$ *consiste à choisir d'abord le plus grand de ces entiers (on choisit* K *entre* $(m+1)$ *et* $(n+1)$*) et à choisir ensuite* m *entiers dans le sous-intervalle* $[\![1, K-1]\!]$ *— on prend* $k = K - 1$ *pour écrire la somme) ;*
→ en se fondant sur le fait que M *est une variable aléatoire à valeurs dans* $[\![m, n]\!]$ *et donc que*

$$\sum_{k=m}^{n} \mathbf{P}(M = k) = 1.$$

(Il convient ici de décaler les valeurs de m *et* n*.)*

❧ L'espérance de M est, par définition, égale à

$$\sum_{k=m}^{n} k\,\mathbf{P}(M = k) = \sum_{k=m}^{n} k \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \sum_{k=m}^{n} m \frac{\binom{k}{m}}{\binom{n}{m}} = \frac{m(n+1)}{m+1}.$$

❧ On peut calculer de manière analogue

$$\mathbf{E}(\min A) = \sum_{k=1}^{n-m+1} k\frac{\binom{n-k}{m-1}}{\binom{n}{m}} = (n+1) - \mathbf{E}(M).$$

(Il y a quelques astuces classiques en route.) Mais un tel résultat est surprenant et mérite d'être expliqué.

Comme l'application $\sigma : E \to E$ définie par

$$\forall\, F \in E, \quad \sigma(F) = \{n - x + 1,\ x \in F\}$$

est une bijection de E dans E (c'est même une sorte de symétrie, puisque $\sigma \circ \sigma = I_E$) et comme la loi de A est uniforme sur E, on en déduit que la loi de $B = \sigma(A)$ est aussi la loi uniforme sur E :

$$\forall\, F \in E, \quad \mathbf{P}(B = F) = \mathbf{P}\big(\sigma(A) = F\big) = \mathbf{P}\big(A = \sigma^{-1}(F)\big) = \frac{1}{\#(E)}.$$

Comme A et B ont même loi, les variables aléatoires $\min A$ et $\min B$ ont également même loi et en particulier

$$\mathbf{E}(\min A) = \mathbf{E}(\min B).$$

Par définition de σ,

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad y \in B(\omega) \iff (n+1) - y \in A(\omega)$$

donc

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \min B(\omega) = (n+1) - \max A(\omega).$$

Donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(\min A) = \mathbf{E}(\min B) = (n+1) - \mathbf{E}(\max A) = \frac{n+1}{m+1}.$$

✍ *Il est intéressant de noter que*

$$\min A \overset{\textit{loi}}{=} (n+1) - \max A$$

alors que ces deux variables ne sont certainement pas égales en tant que fonctions de Ω dans $[\![1, n]\!]$.

❧ Par linéarité de l'espérance, on trouve enfin

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\max A) - \mathbf{E}(\min A) = \frac{(m-1)(n+1)}{m+1}.$$

[**2.**] Avec le modèle probabiliste précédent, $M = \max A$.
[**3.**] Avec le modèle probabiliste précédent, $\Delta = X$.

rms132-652

Soit $r > 0$. On pose

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \int_0^1 r x^{k-1}(1-x)^r \, dx.$$

[**1.**] *Démontrer que $(p_k)_{k \geqslant 1}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.*
[**2.**] *Soit X, une variable aléatoire discrète telle que*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{P}(X = k) = p_k.$$

Pour quelles valeurs de r la variable X est-elle une variable aléatoire d'espérance finie ? Calculer $\mathbf{E}(X)$ dans ce cas.

[**1.**] Il est clair que tous les p_k sont positifs. Il reste donc à prouver d'une part que la série $\sum p_k$ est convergente et d'autre part que la somme de cette série est égale à 1.

❧ Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f_k(x) = r x^{k-1}(1-x)^r.$$

► Il est clair que les fonctions f_k sont continues sur le segment $[0,1]$ (puisque $r > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$). Elles sont donc intégrables sur cet intervalle.

► La série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $[0,1]$ (série géométrique de raison x pour $0 \leqslant x < 1$; de terme général nul pour $x = 1$).

► La somme S_0 de cette série de fonctions est continue et intégrable sur $[0,1[$ puisque

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \quad S_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = r(1-x)^{r-1} \quad \text{et} \quad S_0(1) = 0.$$

✍ *La somme S_0 n'est continue sur $[0,1]$ que pour $r > 1$.*

► Comme les fonctions f_k sont positives, on a donc

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [0,1], \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant S_0(x).$$

Le majorant est indépendant de n et intégrable sur $[0,1[$, donc la convergence est dominée.

❧ On peut donc intégrer terme à terme : la série $\sum p_k$ est convergente et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \int_0^1 r(1-x)^{r-1} \, dt = 1.$$

[**2.**] Pour étudier l'espérance de X, on reprend la même étude avec la série de fonctions $\sum k f_k$.

❧ Pour tout $x \in [0,1[$,

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k f_k(x) = r(1-x)^r \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = r(1-x)^{r-2}.$$

► Si $r > 1$, alors la somme S_1 est intégrable sur $[0,1[$ et le même raisonnement que le précédent montre que la série $\sum k p_k$ est convergente (ce qui prouve que X est une variable d'espérance finie) et que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k = \int_0^1 r(1-x)^{r-2} \, dx = \frac{r}{r-1}.$$

► Si $0 < r \leqslant 1$, alors la somme S_1 n'est pas intégrable sur $[0,1[$.

Si la série $\sum k p_k$ était convergente, alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad k p_k = \int_0^1 k f_k(x) \, dx = \int_0^1 \left|k f_k(x)\right| dx$$

et on pourrait donc appliquer le Théorème d'intégration terme à terme à la série $\sum kf_k$. Dans ce cas, la somme S_1 serait une fonction intégrable sur $[0, 1[$, ce qui est faux.

❧ La série $\sum kp_k$ est donc convergente si, et seulement si, $r > 1$.
La variable X est donc une variable aléatoire d'espérance finie si, et seulement si, $r > 1$ et

$$\forall\, r > 1, \quad \mathbf{E}(X) = \frac{r}{r-1}.$$

rms132-654

> *Soient X_1 et X_2, deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement les lois géométriques $\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathcal{G}(p_2)$. Calculer l'espérance de $U = \min\{X_1, X_2\}$ et de $V = \max\{X_1, X_2\}$.*

Comme de coutume, on notera $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.

- ❧ Il est clair que U et V sont des applications de Ω dans $\mathbb{N}$.
- ❧ Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, par définition du minimum,

$$[U > k] = [X_1 > k] \cap [X_2 > k] \in \mathcal{A}.$$

► On en déduit que

$$[U = 0] = [U > 0]^c \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant 1, \quad [U = k] = [U > k-1] \cap [U > k]^c \in \mathcal{A}$$

et donc que U est bien une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

► Par indépendance de X_1 et X_2,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(U > k) = \mathbf{P}(X_1 > k)\,\mathbf{P}(X_2 > k) = (q_1 q_2)^k$$

et par additivité de $\mathbf{P}$,

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(U = k) = \mathbf{P}(U > k-1) - \mathbf{P}(U > k) = (q_1 q_2)^{k-1}\big[1 - q_1 q_2\big],$$

ce qui montre que U suit la loi géométrique de paramètre

$$p_0 = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2.$$

(Il n'est pas nécessaire de s'assurer que $\mathbf{P}(U = 0) = 0$.)

- ❧ Par définition du maximum,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad [V \leqslant k] = [X_1 \leqslant k] \cap [X_2 \leqslant k].$$

► Comme plus haut, on en déduit que V est bien une variable aléatoire :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad [V = k] \in \mathcal{A}.$$

► De même, par indépendance de X_1 et X_2,

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(V \leqslant k) = (1 - q_1^k)(1 - q_2^k)$$

et donc

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(V = k) = \mathbf{P}(V \leqslant k) - \mathbf{P}(V \leqslant k-1) = q_1^{k-1} p_1 + q_2^{k-1} p_2 - (q_1 q_2)^{k-1}(1 - q_1 q_2).$$

rms132-655

> *Soient* X *et* Y*, deux variables aléatoires indépendantes, de même loi, strictement positives. On suppose que* X *et* $1/X$ *sont des variables aléatoires d'espérance finie. Démontrer que* X/Y *est une variable aléatoire d'espérance finie et que*
> $$\mathbf{E}(X/Y) \geqslant 1.$$

Comme Y est strictement positive, le quotient X/Y est une variable aléatoire réelle.

Comme X et Y ont même loi, les variables aléatoires $\sqrt{Y}$ et $\frac{1}{\sqrt{Y}}$ admettent des moments d'ordre deux et on déduit de l'inégalité de Schwarz que

$$1 = \mathbf{E}(1)^2 = \mathbf{E}\Big(\sqrt{Y} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y}}\Big)^2 \leqslant \mathbf{E}(Y) \cdot \mathbf{E}\Big(\frac{1}{Y}\Big).$$

Comme X et Y ont même loi, on en déduit que

$$1 \leqslant \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}\Big(\frac{1}{Y}\Big).$$

Comme X et $1/Y$ sont indépendantes et d'espérance finie, le produit $X \cdot \frac{1}{Y}$ est une variable aléatoire d'espérance finie et

$$\mathbf{E}\Big(\frac{X}{Y}\Big) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}\Big(\frac{1}{Y}\Big) \geqslant 1.$$

rms132-656

Soit X*, une variable aléatoire réelle à valeurs dans* $[a,b]$*. Démontrer que*

$$\mathbf{V}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Comme X est bornée, elle admet un moment d'ordre deux et donc une variance.

❧ Si $\mathbf{P}(X=a) = \mathbf{P}(X=b) = 1/2$, alors $\mathbf{E}(X) = (a+b)/2$ et

$$\mathbf{V}(X) = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{4}.$$

La majorant indiqué est donc la variance de la variable aléatoire qui prend les valeurs extrêmes avec équiprobabilité.

❧ La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[a,b]$ si, et seulement si, la variable aléatoire

$$X - \frac{a+b}{2}$$

prend ses valeurs dans le segment $[-\alpha,\alpha]$ avec $\alpha = \frac{b-a}{2}$. De plus,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}\Big(X - \frac{a+b}{2}\Big).$$

Pour résoudre le problème posé, on peut donc supposer que X prend ses valeurs dans $[-\alpha,\alpha]$.

❧ Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $[-\alpha,\alpha]$, alors il existe une variable aléatoire Y, indépendante de X et de même loi que $-X$. Par symétrie du segment, Y prend aussi ses valeurs dans $[-\alpha,\alpha]$ et

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(-X) = \mathbf{V}(X).$$

La combinaison convexe

$$Z = \frac{X+Y}{2}$$

prend aussi ses valeurs dans $[-\alpha,\alpha]$ et, par indépendance de X et Y,

$$\mathbf{V}(Z) = \frac{\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)}{2} = \mathbf{V}(X).$$

En outre, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{\mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(Y)}{2} = \frac{\mathbf{E}(X)-\mathbf{E}(X)}{2} = 0.$$

On peut donc se restreindre aux variables aléatoires à valeurs dans $[-\alpha,\alpha]$ qui sont *centrées* pour majorer la variance.

❧ Comme X est centrée et prend ses valeurs dans $[-\alpha,\alpha]$,

$$\forall\,\omega\in\Omega,\quad \big(X(\omega)-\mathbf{E}(X)\big)^2 = X^2(\omega) \leqslant \alpha^2$$

et par conséquent

$$\mathbf{V}(X) \leqslant \alpha^2 = \Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2.$$

✍ *Voir aussi* **[135-342]**.

Soit X, une variable aléatoire réelle positive admettant un moment d'ordre deux. On suppose aussi que X n'est pas presque sûrement nulle.

[**1.**] *Démontrer que, pour tout $\lambda > 0$,*

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \leqslant \lambda\, \mathbf{E}(X) + X(\omega)\, \mathbb{1}_{[X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)]}.$$

[**2.**] *Démontrer que, pour tout $0 < \lambda < 1$,*

$$\mathbf{P}\big(X \leqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)\big) \geqslant \frac{(1-\lambda)^2 \cdot \mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}.$$

✍ *L'intérêt de cet exercice est de présenter une variante de l'inégalité de Markov.*

[**1.**] Comme X est positive et admet un moment d'ordre deux, alors elle est d'espérance finie et $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$.

De plus, $\mathbf{P}(X = 0) < 1$ par hypothèse, donc $\mathbf{E}(X) > 0$ et (même raisonnement pour X^2) $\mathbf{E}(X^2) > 0$.

Comme $\lambda > 0$, on en déduit que le seuil $\lambda\, \mathbf{E}(X)$ est strictement positif.

❧ Pour tout $\omega \in \Omega$, on distingue deux cas :

▶ Si $X(\omega) < \lambda\, \mathbf{E}(X)$, alors $\mathbb{1}_{[X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)]} = 0$ et donc

$$X(\omega) < \lambda\, \mathbf{E}(X) = \lambda\, \mathbf{E}(X) + X(\omega)\mathbb{1}_{[X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)]}.$$

▶ Si au contraire $X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)$, alors $\mathbb{1}_{[X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)]} = 1$ et donc

$$X(\omega) = X(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)]} \leqslant X(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)]} + \lambda\, \mathbf{E}(X)$$

car $\lambda\, \mathbf{E}(X) > 0$.

▶ Dans tous les cas, on a bien

$$X \leqslant \lambda\, \mathbf{E}(X) + X\mathbb{1}_{A_\lambda}$$

où la variable de Bernoulli $\mathbb{1}_{A_\lambda}$ est définie par

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_{A_\lambda}(\omega) = \mathbb{1}_{[X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)]}.$$

[**2.**] D'après cette inégalité,

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda}(\omega) \geqslant X(\omega) - \lambda\, \mathbf{E}(X).$$

L'espérance est linéaire et conserve les inégalités, donc

$$\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda}) \geqslant \mathbf{E}(X) - \lambda\, \mathbf{E}(X) = (1-\lambda) \cdot \mathbf{E}(X).$$

Or $\mathbf{E}(X) > 0$ et $0 < \lambda < 1$, donc $(1-\lambda)\, \mathbf{E}(X) > 0$ et donc

$$\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda})^2 \geqslant \big[(1-\lambda) \cdot \mathbf{E}(X)\big]^2.$$

Par hypothèse, la variable aléatoire X admet un moment d'ordre deux et toute variable aléatoire de Bernoulli admet également un moment d'ordre deux : on peut donc appliquer l'inégalité de Schwarz.

$$\big[\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda})\big]^2 \leqslant \mathbf{E}(X^2) \cdot \mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_\lambda}^2) = \mathbf{E}(X^2) \cdot \mathbf{P}(A_\lambda)$$

On en déduit finalement que

$$\mathbf{E}(X^2) \cdot \mathbf{P}(A_\lambda) \geqslant \big[\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda})\big]^2 \geqslant \big[(1-\lambda) \cdot \mathbf{E}(X)\big]^2.$$

rms132-668

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On procède à des tirages sans remise : après chaque tirage, on enlève de l'urne les boules qui ont un numéro supérieur à celui de la boule tirée.
On note X_n, le nombre aléatoire de tirages nécessaires pour vider l'urne.
[**1.**] *Calculer* $\mathbf{E}(X_1)$ *et* $\mathbf{E}(X_2)$.
[**2.**] *Démontrer que*

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \mathbf{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{E}(X_k).$$

[**3.**] *Calculer* $\mathbf{E}(X_n)$ *et en déduire un équivalent lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

[**1.**]

✍ *Exercice infaisable dans le cadre du programme : il s'appuie d'une part sur la formule de l'espérance totale (une variante de la formule des probabilités totales) et d'autre part sur la propriété de Markov...*
Allons-y comme d'habitude — à la one-again.

❧ Comme on retire au moins une boule à chaque tirage et que l'urne contient initialement n boules, les valeurs de X_n sont comprises entre 1 et n. Par conséquent, X_n est bornée et donc d'espérance finie (s'il s'agit bien d'une variable aléatoire).

❧ Pour $n = 1$, il n'y a qu'une seule boule dans l'urne, qu'on enlève au premier tirage. Par conséquent, la variable aléatoire X_1 est constante, égale à 1, et $\mathbf{E}(X_1) = 1$.

❧ Pour $n = 2$, il y a deux boules dans l'urne.

Pour $i \in \{1, 2\}$, notons $[B_1 = i]$ le fait que la première boule tirée soit la boule numérotée i et admettons que

$$\mathbf{P}(B_1 = 1) = \mathbf{P}(B_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

► Si la première boule tirée est la boule 1, alors l'urne est vidée du premier coup : $X_2 = 1$.

► Sinon, il ne reste plus que la boule 1 et l'urne est nécessairement vidée au second coup : $X_2 = 2$.

► On en déduit que

$$[X_2 = 1] = [B_1 = 1] \quad \text{et} \quad [X_2 = 2] = [B_2 = 2]$$

donc $X_2 = B_2$ et par conséquent

$$\mathbf{E}(X_2) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

[**2.**] Si l'urne contient initialement n boules, alors on dispose d'un système complet d'événements :

$$[B_1 = 1], \quad [B_1 = 2], \quad \dots, \quad [B_1 = n]$$

qui sont tous de probabilité $^1/_n$. (Ces événements nous indiquent quelle est la première boule tirée.)

Comme X_n est une variable aléatoire d'espérance finie, on peut appliquer la formule de l'espérance totale :

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}_{B_1=k}(X_n)\cdot \mathbf{P}(B_1 = k).$$

► Si la première boule tirée est la boule 1, alors X_n prend nécessairement la valeur 1, donc

$$\mathbf{E}_{B_1=1}(X_n) = 1.$$

► Pour $2 \leqslant k \leqslant n$, si la première boule tirée est la boule k, alors *après avoir tiré cette première boule,* on continue pour vider une urne qui contient $(k-1)$ boules. "Donc" (rires nerveux dans l'assistance qui connaît la théorie des chaînes de Markov)

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{E}_{B_1=k}(X_n) = \underbrace{1}_{\text{premier tirage}} + \underbrace{\mathbf{E}(X_{k-1})}_{\text{tirages suivants}}.$$

► Bref :

$$\mathbf{E}(X_n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n}\mathbf{E}(X_{k-1}) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{E}(X_k).$$

[3.] En posant $u_k = \mathbf{E}(X_k)$, on dispose de la relation de récurrence suivante :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} u_k.$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k = n(u_n - 1)$$

et donc que

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \big[n(u_n - 1) + u_n \big] = 1 - \frac{n}{n+1} + u_n.$$

Ainsi

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $u_1 = 1$,

$$u_n = u_1 + \sum_{k=2}^{n} (u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n.$$

rms132-755

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$. *On suppose que*

$$\forall\, k \in [\![0, 2n]\!], \quad \det(A + kB) = \pm 1.$$

[**1.**] *Démontrer que la matrice* A *est inversible.*
[**2.**] *Démontrer que* $\det B = 0$.

[**1.**] Pour $k = 0$, on a $\det A = \pm 1$, donc A est inversible en tant qu'élément de (l'algèbre) $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Cela dit, d'après les formules de Cramer,

$$A.\mathrm{Com}(A)^\top = \det A.I_n = \pm I_n.$$

Puisque les coefficients de la comatrice sont des déterminants de matrices extraites de A (et donc de matrices *à coefficients entiers*), la comatrice appartient à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$ et la matrice A est donc inversible dans l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$.

[**2.**] Supposons que $\det B \neq 0$. D'après la propriété de morphisme de det et l'hypothèse,

$$\forall\, k \in [\![0, 2n]\!], \quad \det(AB^{-1} + kI_n) = \frac{\pm 1}{\det B}.$$

Dans cette identité, le paramètre k prend $(2n+1)$ valeurs et l'expression $\det(AB^{-1} + kI_n)$ prend au plus deux valeurs : cette expression prend donc l'une des valeurs au moins $(n+1)$ fois.

Or l'application

$$\left[\lambda \mapsto \det(\lambda I_n + AB^{-1})\right]$$

est une application polynomiale de degré n : c'est le polynôme caractéristique de la matrice $-AB^{-1}$.

Si une application polynomiale prend $(n+1)$ fois la même valeur, il n'y a que deux possibilités : ou bien elle est constante, ou bien son degré est au moins égal à $(n+1)$. Quoi qu'il en soit, son degré ne peut pas être égal à n. Notre hypothèse est donc absurde, on a démontré que $\det B = 0$.

rms132-759

Soit φ, une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall\, P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A).$$

Démontrer qu'il existe un réel λ tel que $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{tr}$.

✍ *Pour se lancer dans la démonstration qui suit, il faut commencer par traduire l'énoncé : deux matrices semblables ont toujours même image par φ.*

On note, comme de coutume, $E_{i,j}$ (pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$) les matrices de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

❧ Soit $D = \mathrm{Diag}(1, 2, \dots, n)$. Pour $i \neq j$, la matrice $D + E_{i,j}$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Cette matrice est donc diagonalisable et semblable à la matrice diagonale D (mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités).

Par hypothèse, $\varphi(D + E_{i,j}) = \varphi(D)$ et par linéarité de φ,

$$\forall\, i \neq j, \quad \varphi(E_{i,j}) = 0.$$

❧ Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, les matrices $E_{1,1}$ et $E_{i,i}$ sont semblables : la matrice de permutation

$$P_{1,i} = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie $P_{1,i}^{-1} E_{i,i} P_{1,i} = E_{1,1}$ et par conséquent, $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{1,1})$.

✍ *Autre point de vue : la matrice $E_{1,1}$ représente l'application linéaire*

$$[(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, 0, \dots, 0)]$$

dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ et la matrice $E_{i,i}$ représente cette même application linéaire dans la base

$$(e_i, e_2, \dots, e_{i-1}, e_1, e_{i+1}, \dots, e_n).$$

En posant $\lambda = \varphi(E_{1,1})$, on a donc

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \varphi(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \lambda = \lambda \,\mathrm{tr}\, A$$

pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

rms132-800

> *Soient* N_1 *et* N_2*, deux normes sur un espace vectoriel réel* E*. On note* B_k*, la boule unité ouverte de* E *relative à la norme* N_k *(pour* $k = 1$ *ou 2). Les deux normes* N_1 *et* N_2 *sont égales si, et seulement si, les boules* B_1 *et* B_2 *sont égales.*

Si les normes N_1 et N_2 sont égales, il est clair que les boules B_1 et B_2 sont égales.

❧ Réciproquement, supposons que $B_1 = B_2$. Pour tout vecteur $x \in E$ *non nul*,

$$\frac{x}{N_1(x)} \in B_1 = B_2,$$

donc

$$1 = \mathbb{N}_2\Big(\frac{x}{N_1(x)}\Big) = \frac{N_2(x)}{N_1(x)}.$$

Par conséquent,

$$\forall\, x \in E, \quad N_1(x) = N_2(x).$$

✍ *On a démontré cette égalité pour* $x \neq 0_E$ *et elle est par ailleurs évidente pour* $x = 0_E$*.*

On a ainsi démontré que $N_1 = N_2$.

rms132-801

Pour quelles suites réelles $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'application N définie sur l'espace vectoriel E des suites réelles sommables par

$$\forall\, u \in E, \qquad N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |u_n|$$

est-elle une norme sur E ?

S'il existe un rang n_0 tel que $\alpha_{n_0} < 0$, alors l'application N prend au moins une valeur strictement négative : c'est impossible.

✍ *Il suffit de considérer la suite $u = \varepsilon_{n_0}$, dont tous les termes sont nuls sauf le terme de rang n_0 qui est égal à 1.*

Dans ces conditions, $N(\varepsilon_{n_0}) = \alpha_{n_0} < 0$.

❧ S'il existe un rang n_0 tel que $\alpha_{n_0} = 0$, alors l'application N ne sépare pas les points : c'est impossible.

✍ *Même chose : $N(\varepsilon_{n_0}) = 0$ alors que $\varepsilon_{n_0} \neq 0_E$.*

❧ Si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive sans être bornée, alors il existe une suite extraite $(\alpha_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_{\varphi(k)} \geqslant 2^k.$$

✍ *D'une manière générale, une suite réelle n'est pas bornée si, et seulement si, on peut en extraire une suite qui tend vers $+\infty$.*

On peut reprendre le principe de la démonstration pour obtenir le résultat plus précis que nous venons d'énoncer.

Supposons connus des entiers

$$0 \leqslant \varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(k)$$

tels que $\alpha_{\varphi(j)} \geqslant 2^j$ pour tout $0 \leqslant j \leqslant k$. L'ensemble des valeurs

$$\{\alpha_n,\ 0 \leqslant n \leqslant \varphi(k)\}$$

est fini, donc borné. Comme la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on en déduit que l'ensemble

$$\{\alpha_n,\ n > \varphi(k)\}$$

n'est pas borné : il contient donc au moins un élément supérieur à 2^{k+1}.

Considérons alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad u_{\varphi(k)} = \frac{1}{2^k}$$

et $u_n = 0$ si $n \notin \varphi_*(\mathbb{N})$. Il est clair que cette famille est sommable (de somme 1) et que

$$N(u) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{\varphi(k)} u_{\varphi(k)} = +\infty.$$

❧ Il faut donc que la famille $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une famille bornée de réels strictement positifs pour que l'application N soit une norme sur l'espace vectoriel des suites sommables.

❧ Réciproquement, supposons que la famille $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une famille bornée de réels strictement positifs.

Tout d'abord,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \alpha_n |u_n| = |\alpha_n u_n| \leqslant \|\alpha\|_\infty |u_n|$$

et comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, on en déduit que la suite $(\alpha_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable (par comparaison). Ainsi, N est bien une application de E dans $\mathbb{R}_+$.

❧ Par linéarité de la somme, l'application N est homogène.

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, u \in E, \quad N(\lambda u) = |\lambda|\, N(u)$$

❧ L'application N sépare les points : si $N(u) = 0$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n\, |u_n| = 0.$$

✍ *Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul.*

Et comme les α_n sont tous *strictement* positifs,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 0.$$

❧ Enfin, l'application N vérifie l'inégalité triangulaire. On sait que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|.$$

Comme les α_n sont des réels positifs, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n\, |u_n + v_n| \leqslant \alpha_n\, |u_n| + \alpha_n\, |v_n|$$

et en sommant (puisque les trois familles sont sommables)

$$N(u + v) \leqslant N(u) + N(v).$$

❧ L'application N est donc une norme sur E si, et seulement si, la famille $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable de réels strictement positifs.

rms132-823

Déterminer toutes les fonctions continues

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

telles que

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad f\big(f(x)\big) = x.$$

Une telle fonction réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et est sa propre réciproque. L'identité $[x \mapsto x]$ est une telle fonction. Y en a-t-il d'autres ?

❧ Comme f est continue et injective, il faut que f soit (strictement) monotone.
Supposons qu'il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que $y_0 = f(x_0) \neq x_0$. On a aussi

$$f(y_0) = (f \circ f)(x_0) = x_0$$

et comme x_0 et y_0 jouent des rôles symétriques, on peut supposer que $x_0 < y_0$. On a donc

$$x_0 < y_0 \quad \text{et} \quad y_0 = f(x_0) > f(y_0) = x_0.$$

Comme f est monotone, il faudrait que f fût décroissante.

Mais comme f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, il existe un réel $z_0 \geqslant 0$ tel que $f(z_0) = 0$. Comme f est strictement décroissante et positive, on aurait donc

$$\forall\, x > z_0, \quad 0 \leqslant f(x) < f(z_0) = 0$$

ce qui est absurde.

❧ Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = x$.

✍ *Si on cherchait f continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, alors la fonction inverse $[x \mapsto 1/x]$ serait une solution.*

rms132-825

Soient f *et* g*, deux applications continues de* $[0,1]$ *dans* $[0,1]$*, telles que*

$$f \circ g = g \circ f.$$

On note f^n *et* g^n *les itérées* n*-ièmes de* f *et* g *:*

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} \qquad g^n = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ fois}}.$$

[**1.**] *On suppose que*

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) < g(x).$$

Démontrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ *tel que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad g^n(x) \geqslant f^n(x) + n\alpha.$$

[**2.**] *En déduire qu'il existe* $c \in [0,1]$ *tel que* $f(c) = g(c)$*.*

[**1.**] Comme f et g sont continues sur le segment $[0,1]$, la différence $g - f$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle atteint son minimum en un point $x_0 \in [0,1]$. Avec l'hypothèse qui est faite, ce minimum est strictement positif : on pose donc

$$\alpha = g(x_0) - f(x_0) = \min_{x\in[0,1]} g(x) - f(x) > 0.$$

- On a donc, par définition de α,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad g(x) \geqslant f(x) + \alpha \tag{2}$$

et la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

- Cette propriété est vérifiée pour $n = 0$, puisque $f^0(x) = g^0(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.
- Supposons pour terminer la démonstration par récurrence qu'il existe un rang $n \geqslant 1$ tel que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad g^n(x) \geqslant f^n(x) + n\alpha. \tag{3}$$

En appliquant (1) avec $x \leftarrow g^n(x)$, on obtient

$$g^{n+1}(x) = g\big(g^n(x)\big) \geqslant f\big(g^n(x)\big) + \alpha.$$

Comme f et g commutent, alors f et g^n commutent aussi et donc

$$f\big(g^n(x)\big) + \alpha = g^n\big(f(x)\big) + \alpha \geqslant \big[f^n\big(f(x)\big) + n\alpha\big] + \alpha$$

par hypothèse de récurrence (avec cette fois $x \leftarrow f(x)$). On a ainsi démontré que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad g^{n+1}(x) \geqslant f^{n+1}(x) + (n+1)\alpha$$

et donc que la propriété étudiée était héréditaire.

- On a donc démontré par récurrence que la propriété (2) était vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[**2.**] Par hypothèse, f et g prennent leurs valeurs dans $[0,1]$. Il en va donc de même pour f^n et g^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1], \quad \underbrace{g^n(x) - f^n(x)}_{\leqslant 1} \geqslant n\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

ce qui est absurde.

L'hypothèse

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) < g(x)$$

est donc fausse, donc il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) \geqslant g(a)$.

Par symétrie, l'assertion suivante est fausse également :

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) > g(x).$$

Donc, parmi tous les $a \in [0,1]$ tels que $f(a) \geqslant g(a)$, il en existe au moins un pour lequel $f(a) = g(a)$.

rms132-940

Soit E, l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Pour toute suite $u \in E$, on pose

$$\|u\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k| \quad \textit{et} \quad N(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|u_k|}{2^k}.$$

[**1.**] *Les applications N et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E. La norme N est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais ces deux normes ne sont pas équivalentes.*

On suppose dorénavant que E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

[**2.**] *Démontrer que le sous-espace C des suites convergentes est une partie fermée de E. (NB : Cette question ne figure pas dans l'énoncé original.)*

[**3.**] *L'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est une partie d'intérieur vide de E. Quelle est son adhérence ?*

[**4.**] *Déterminer l'intérieur et l'adhérence du sous-ensemble des suites strictement positives.*

[**1.**] Comme la suite $u \in E$ est (par hypothèse) bornée,

$$\frac{u_k}{2^k} \underset{k\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{2^k}\Big)$$

et comme la série géométrique $\sum {}^1\!/_{2^k}$ est absolument convergente, la série $\sum {}^{|u_k|}\!/_{2^k}$ est convergente et sa somme est évidemment un réel positif. Par conséquent, N est bien une application définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

- L'application N est homogène par linéarité de la somme :

$$N(\lambda u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\lambda u_k|}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda| \frac{|u_k|}{2^k} = |\lambda|\, N(u).$$

- L'application N sépare les points : si $N(u) = 0$, alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{|u_k|}{2^k} = 0$$

donc u est la suite nulle.

- D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \frac{|u_k + v_k|}{2^k} \leqslant \frac{|u_k|}{2^k} + \frac{|v_k|}{2^k}$$

donc l'application N vérifie l'inégalité triangulaire :

$$N(u+v) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|u_k + v_k|}{2^k} \leqslant N(u) + N(v).$$

- Donc N est bien une norme sur E.
- ✍ *Voir le cours pour $\|\cdot\|_\infty$.*

- La borne supérieure est un majorant, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{|u_k|}{2^k} \leqslant \frac{\|u\|_\infty}{2^k}$$

et en sommant ces inégalités, on obtient

$$\forall\, u \in E, \qquad N(u) \leqslant \|u\|_\infty \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2\|u\|_\infty.$$

Cette inégalité montre que la norme $\|\cdot\|_\infty$ domine la norme N.

- Pour démontrer que les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E telle que

$$\lim_{n\to+\infty} N(\varepsilon_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|\varepsilon_n\|_\infty \neq 0.$$

À cette fin, on considère la suite

$$\varepsilon_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) = (\delta_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \|\varepsilon_n\|_\infty = 1$$

et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad N(\varepsilon_n) = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par conséquent, la norme N ne domine pas la norme $\|\cdot\|_\infty$.

[**2.**] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de vecteurs de C qui converge (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) vers le vecteur $\ell \in E$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\|_\infty = 0. \tag{4}$$

Chaque vecteur u_n appartient à C, donc il existe un réel λ_n tel que

$$\lim_{k\to+\infty} u_n(k) = \lambda_n. \tag{5}$$

✍ *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait une "suite de suites" puisque les vecteurs de E sont des suites. Ça facilite les confusions, méfiance !*

Il faut en particulier bien distinguer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur E) de la convergence de chaque suite $u_n \in C$ (pour la norme usuelle sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire pour $|\cdot|$).

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe donc un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon,\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \big|u_n(k) - \ell(k)\big| \leqslant \varepsilon. \tag{6}$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, n, p \geqslant N_\varepsilon,\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \big|u_n(k) - u_p(k)\big| \leqslant 2\varepsilon. \tag{7}$$

On peut faire tendre k vers $+\infty$ dans (7) et déduire de (5) que

$$\forall\, n, p \geqslant N_\varepsilon, \qquad \big|\lambda_n - \lambda_p\big| \leqslant 2\varepsilon, \tag{8}$$

ce qui prouve que la suite (réelle) $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

✍ *La relation (8) montre que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le* ***critère de Cauchy*** *et il est bon de savoir (même si ce n'est pas au programme) que, dans tout espace vectoriel de dimension finie, le critère de Cauchy est une condition suffisante de convergence.*

❧ *Si on veut rester prudemment dans le cadre du programme, on peut déduire du critère de Cauchy (8) qu'il existe une suite extraite $(\lambda_{\varphi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \qquad \big|\lambda_{\varphi(m+1)} - \lambda_{\varphi(m)}\big| \leqslant 1/2^m.$$

Cet encadrement prouve que la série (télescopique) $\sum(\lambda_{\varphi(m+1)} - \lambda_{\varphi(m)})$ est absolument convergente et donc que la suite extraite $(\lambda_{\varphi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ est convergente. On déduit facilement du critère de Cauchy (8) que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au plus une *valeur d'adhérence, donc on a démontré que cette suite était convergente.*

❧ *Par définition, un espace vectoriel normé E est dit* ***complet****, ou* ***espace de Banach****, si, et seulement si, toute suite qui vérifie le critère de Cauchy converge vers un vecteur de E.*

On peut démontrer qu'un espace vectoriel E est un espace de Banach si, et seulement si, toute série absolument convergente est en fait une série convergente.

❧ Notons donc $\lambda \in \mathbb{N}$, la limite de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En combinant l'astuce taupinale et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall\, k, n \in \mathbb{N}, \qquad |\ell(k) - \lambda| \leqslant |\ell(k) - u_n(k)| + |u_n(k) - \lambda_n| + |\lambda_n - \lambda|. \tag{9}$$

D'après (8) (en faisant tendre p vers $+\infty$),

$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon, \qquad |\lambda_n - \lambda| \leqslant \varepsilon. \tag{10}$$

En prenant $n = N_\varepsilon$ dans (6), on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \left|\ell(k) - u_{N_\varepsilon}(k)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{11}$$

Toujours en prenant $n = N_\varepsilon$ dans (5), il existe un entier $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geqslant K_\varepsilon, \qquad \left|u_{N_\varepsilon}(k) - \lambda_{N_\varepsilon}\right| \leqslant \varepsilon. \tag{12}$$

En combinant (10) [avec $n = N_\varepsilon$], (11) et (12), on déduit de (9) que

$$\forall\, k \geqslant K_\varepsilon, \qquad |\ell(k) - \lambda| \leqslant 3\varepsilon.$$

On a ainsi démontré que le vecteur $\ell \in E$ (= la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) était bien une suite convergente et donc que le sous-espace C des suites convergentes était une partie fermée de E.

✍ *Cette démonstration est une adaptation du Théorème d'interversion des limites (ou Théorème de la double limite) : au lieu d'étudier des fonctions qui ont une limite finie au voisinage de $+\infty$ et qui convergent uniformément au voisinage de $+\infty$, on étudie des suites convergentes (= des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ qui ont une limite finie au voisinage de $+\infty$) et qui convergent uniformément au voisinage de $+\infty$ (uniformément sur $\mathbb{N}$ en fait).*

[**3.**] Notons F, l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

✍ ***Rappels***
Un point u_0 est à l'intérieur d'une partie F si, et seulement si,

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0, \quad B(u_0, \varepsilon_0) \subset F.$$

Par conséquent, une partie F d'un espace vectoriel E est d'intérieur vide si, et seulement si,

$$\forall\, u \in F,\ \forall\, \varepsilon > 0, \quad B(u, \varepsilon) \cap F^c \neq \varnothing.$$

(Les boules considérées ici peuvent être ouvertes ou fermées, c'est sans importance.)

❧ Soit $u \in E$, une suite nulle à partir d'un certain rang :

$$\forall\, k \geqslant K_0, \qquad u_k = 0.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, la suite v_ε définie par

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad v_\varepsilon(k) = u_k + \varepsilon$$

vérifie $\|u - v_\varepsilon\|_\infty = \varepsilon$ et

$$\forall\, k \geqslant K_0, \qquad v_\varepsilon(k) = \varepsilon > 0.$$

L'ensemble F des suites nulles à partir d'un certain rang est donc une partie d'intérieur vide.

✍ ***Variante savante.***
On peut aussi vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et se rappeler qu'un sous-espace vectoriel strict de E est toujours une partie d'intérieur vide.

❧ Toute suite $u \in F$ tend vers 0 (suite stationnaire), donc $F \subset C$ et comme C est fermé, l'adhérence de F est contenue dans C.

✍ *L'adhérence de F est le plus petit fermé qui contienne F et C est une partie fermée qui contient F.*

❧ L'application $[u \mapsto \lim u]$, définie sur le sous-espace C des suites convergentes et cette application est linéaire et continue :

$$\forall\, u \in C, \qquad \left|\lim_{k\to+\infty} u_k\right| \leqslant \|u\|_\infty.$$

Le sous-espace C_0 des suites convergentes de limite nulle est donc une partie fermée de C (image réciproque du singleton $\{0\}$ par une application définie et continue sur C). Comme C est une partie fermée de E, on en déduit que C_0 est aussi une partie fermée de E et que, par conséquent, l'adhérence de F est contenue dans C_0.

❧ Réciproquement, soit $u \in C_0$, une suite convergente de limite nulle. Pour tout indice $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite v_n définie en tronquant la suite u après l'indice n :

$$v_n = (u_0, \dots, u_n, 0, \dots).$$

Il est clair que $v_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \|u - v_n\|_\infty = \sup_{k>n} |u_k|.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la suite u converge vers 0, alors il existe un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geqslant N_\varepsilon, \qquad |u_k| \leqslant \varepsilon$$

et par conséquent

$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon, \qquad \|u - v_n\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de F qui converge (pour $\|\cdot\|_\infty$) vers le vecteur $u \in C_0$.

❧ On a ainsi démontré que tout vecteur $u \in C_0$ était adhérent à F et donc que l'adhérence du sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang était le sous-espace des suites convergentes de limite nulle.

[4.] Notons G, l'ensemble des suites réelles bornées et strictement positives.

❧ Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de G qui converge vers le vecteur $\ell \in E$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n(k) - \ell_k| \leqslant \|u_n - \ell\|_\infty$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \ell_k = \lim_{n\to+\infty} u_n(k).$$

Comme les $u_n(k)$ sont tous (strictement) positifs, on en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \ell_k \geqslant 0.$$

✍ *Ici encore, nous retrouvons un énoncé classique du cours : la convergence uniforme implique la convergence simple.*

Réciproquement, considérons une suite bornée $\ell \in E$ dont tous les termes sont positifs (au sens large). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit alors le vecteur $u_n \in E$ en posant

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad u_n(k) = \ell(k) + 2^{-n}.$$

Il est clair que le vecteur u_n est une suite réelle bornée (somme de la suite bornée ℓ et d'une suite constante) et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \|\ell - u_n\|_\infty = 2^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par conséquent, toute suite réelle bornée et positive est limite (pour $\|\cdot\|_\infty$) d'une suite de suites réelles bornées et strictement positives.

❧ On a donc démontré (par double inclusion) que l'adhérence du sous-ensemble G des suites réelles strictement positives était le sous-ensemble des suites réelles positives.

✍ *Ni G, ni son adhérence ne sont des sous-espaces vectoriels de E, mais ce sont tous les deux des parties convexes de E.*

✍ ***Variante savante.***

Pour démontrer que l'ensemble G_0 des suites réelles positives est un fermé, on pouvait aussi remarquer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $\varphi_k = [u \mapsto u(k)]$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et que cette application linéaire est continue :

$$\forall\, u \in E, \qquad \big|\varphi_k(u)\big| = |u(k)| \leqslant \|u\|_\infty.$$

L'image d'une partie fermée de $\mathbb{R}$ par une application continue de E dans $\mathbb{R}$ est une partie fermée de E, donc

$$\varphi_k^*([0, +\infty[)$$

est une partie fermée de E pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par conséquent

$$G_0 = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k^*([0, +\infty[)$$

est une partie fermée de E (en tant qu'intersection d'une famille de parties fermées).

❧ Considérons un vecteur u appartenant à l'intérieur de la partie G.

✍ *Comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, toutes les valeurs d'adhérence de u (s'il en existe...) sont des réels positifs (au sens large).*

Par définition, il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(u, \varepsilon)$ soit tout entière contenue dans G. En particulier, la suite $u - \varepsilon$ est dans G, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad u(k) - \varepsilon > 0.$$

On en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad u(k) > \varepsilon$$

ce qui prouve que 0 n'est pas une valeur d'adhérence de la suite u.

❧ Réciproquement, considérons une suite $u \in G$ bornée et strictement positive et supposons qu'elle admette 0 pour valeur d'adhérence. Il existe donc une suite extraite $\big(u[\varphi(m)]\big)_{m \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0.

Pour tout $\varepsilon > 0$, le réel ${}^{\varepsilon}/_{2}$ est strictement positif et il existe donc un rang $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, m \geqslant M_\varepsilon, \qquad \big|u[\varphi(m)] - 0\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dans ces conditions,

$$u[\varphi(M_\varepsilon)] - \varepsilon < 0$$

et cette inégalité prouve que la boule (fermée) de centre u et de rayon ε n'est pas contenue dans le sous-ensemble G des suites strictement positives. Autrement dit, le vecteur u n'est pas un point intérieur à G.

❧ Nous avons démontré (par double inclusion) que l'intérieur du sous-ensemble des suites réelles bornées et strictement positives était l'ensemble des suites réelles bornées strictement positives qui n'admettait pas 0 pour valeur d'adhérence.

rms132-984

[**1.**] *Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue des tirages sans remise (une boule à la fois) jusqu'à ce que les boules restant dans l'urne soient toutes de la même couleur.*
Modéliser la loi du nombre X_n de boules qui restent dans l'urne à l'issue des tirages.
[**2.**] *On considère deux urnes contenant chacune n boules. On effectue des tirages sans remise (une boule à la fois), en choisissant à chaque fois l'une des deux urnes de manière équiprobable jusqu'à ce que l'on constate que l'urne choisie soit vide.*
Modéliser la loi du nombre Y_n de boules qui restent dans l'autre urne à ce moment-là. Calculer un équivalent de l'espérance de Y_n.

[**1.**] On modélise les tirages par une famille $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant 2n}$ de variables aléatoires de Bernoulli définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, en faisant l'hypothèse que

$$\forall\,(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{0,1\}^k,\quad \mathbf{P}(U_{k+1}=1\mid U_1=\varepsilon_1,\dots,U_k=\varepsilon_k)=\frac{n-\sigma_k}{2n-k}$$

où $\sigma_k=(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k)$.

✍ *Ce modèle est raisonnable : si l'événement $[U_1=\varepsilon_1,\dots,U_k=\varepsilon_k]$ est réalisé, cela signifie qu'on a obtenu $\sigma_k=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k$ fois "1". On a donc obtenu $k-\sigma_k$ fois "0". Comme l'urne contient initialement n boules de type "1" et n boules de type "0", il reste donc $(2n-k)$ boules, parmi lesquelles on compte $(n-\sigma_k)$ boules de type "1" et (donc) $(n-k+\sigma_k)$ boules de type "0". Le quotient $(n-\sigma_k)/(2n-k)$ peut donc s'interpréter comme une hypothèse d'équiprobabilité sur le résultat du $(k+1)$-ième tirage.*

En supposant de plus que

$$\mathbf{P}(U_1=1)=\frac{1}{2}\left(=\frac{n}{2n}\right),$$

ce modèle est complet, puisque les hypothèses qu'on vient de poser permettent de calculer

$$\mathbf{P}(U_1=\varepsilon_1,\dots,U_{2n}=\varepsilon_{2n})$$

quel que soit $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n})\in\{0,1\}^{2n}$ par l'intermédiaire de la Formule des probabilités composées.
❧ On peut en particulier vérifier que

$$\mathbf{P}(U_1=\varepsilon_1,\dots,U_{2n}=\varepsilon_{2n})=\frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

pour toute famille $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant 2n}$ telle que $\sigma_{2n}=n$ (= les familles qui constituent le support de la loi du vecteur $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant 2n}$).

Cette forme d'équiprobabilité va nous permettre de ramener le calcul de la loi de X_n à du dénombrement.

► L'événement $[X_n=k]$ signifie qu'il ne reste k boules, toutes du même type, dans l'urne. On a donc effectué $(2n-k)$ tirages, qui ont amené les n boules d'un premier type et $(n-k)$ du second type :

$$[X_n=k]=[X_n=k,U_{2n}=1]\sqcup[X_n=k,U_{2n}=0]$$

et par équiprobabilité

$$\mathbf{P}(X_n=k)=2\,\mathbf{P}(X_n=k,U_{2n}=0).$$

► D'après la règle du jeu, l'événement $[X_n=k,U_{2n}=0]$ est égal à

$$[X_n=k,\underbrace{U_{2n-k}=1}_{\text{dernière boule de type "1"}},\underbrace{U_{(2n-k)+1}=U_{(2n-k)+2}=\cdots=U_{(2n-k)+k}=0}_{\text{les }k\text{ derniers tirages}}].$$

C'est donc la réunion de tous les événements

$$[U_1=\varepsilon_1,\dots,U_n=\varepsilon_n]$$

tels que $\varepsilon_{2n-k}=1$ et $\varepsilon_{2n-k+1}=\varepsilon_{2n-k+2}=\cdots=\varepsilon_{2n}=0$.

Comme il existe exactement $\binom{2n-k-1}{n-1}$ événements de ce genre (on place les $(n-1)$ boules de type "1" qui ont précédé la dernière boule de type "1" parmi les $(2n-k-1)$ premiers tirages), on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{2\binom{2n-k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}.$$

✍ *Il n'est pas inutile de vérifier la cohérence de ce résultat ! Comme*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \binom{2n-k-1}{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{(n-1)+(n-k)}{n-1} &= \sum_{k=n-1}^{2n-2} \binom{k}{n-1} && (k \leftarrow 2n-k-1)\\ &= \binom{2n-1}{n} && \text{(triangle de Pascal)}\\ &= \frac{n}{2n}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2}\cdot\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

on a bien $\mathbf{P}(X_n = 1) + \cdots + \mathbf{P}(X_n = n) = 1$.

[**2.**] On modélise la seconde expérience par une famille $(V_k)_{1\leqslant k\leqslant 2n+2}$ de variables aléatoires de Bernoulli définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ en supposant que la probabilité

$$\mathbf{P}(V_1 = \varepsilon_1, \cdots, V_{2n+2} = \varepsilon_{2n+2})$$

est la même pour tout vecteur $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant 2n+2} \in \{0,1\}^{2n+2}$ tel que

$$\sigma_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2} \varepsilon_k = n+1.$$

Cela revient à dire qu'on effectue de manière équiprobable $(2n+2)$ tirages successifs, tantôt dans l'urne "1", tantôt dans l'urne "0", et qu'on effectue exactement $(n+1)$ tirages dans chacune des urnes.

Le cardinal de l'ensemble E_{n+1} des vecteurs ε tels que $\sigma_{2n+2} = n+1$ est égal à $\binom{2n+2}{n+1}$ (on choisit les positions de n éléments égaux à "0" parmi $(2n+2)$ positions possibles, les n éléments égaux à "1" occuperont les positions restées libres).

▶ Ce modèle est évidemment complet, puisque la loi du vecteur aléatoire $(V_k)_{1\leqslant k\leqslant 2n+2}$ est parfaitement définie.

▶ Ce modèle est aussi raisonnable au regard de la situation étudiée.

En effet, dans l'énoncé, chaque urne contient n boules et après avoir tiré les n boules de l'urne, il faut un $(n+1)$-ième tirage pour constater que l'urne est vide.

On peut aussi bien imaginer que chaque urne contient en fait $(n+1)$ boules et que la procédure s'arrête lors du tirage de cette $(n+1)$-ième boule fictive : cet artifice permet de ramener cette nouvelle situation à la situation précédente.

▶ Il reste cependant à vérifier que ce modèle est cohérent avec l'énoncé qui exige que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant 2n+2, \qquad \mathbf{P}(V_k = 1) = \frac{1}{2}.$$

Or

$$[V_k = 1] = \bigsqcup_{\substack{\varepsilon\in E_{n+1}\\ \text{t.q. } \varepsilon_k = 1}} [V_1 = \varepsilon_1, \ldots, V_{2n+2} = \varepsilon_{2n+2}].$$

Ces événements sont tous équiprobables et leur nombre est égal à $\binom{2n+1}{n}$ (il faut placer n "1", la position k est occupée par un "1" et on choisit n positions parmi les $(2n+1)$ autres positions pour placer les n autres "1"). Donc

$$\mathbf{P}(V_k = 1) = \frac{\binom{2n+1}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}\cdot\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}.$$

Jusqu'ici, tout va bien...

▶ La valeur prise par la variable aléatoire Y_n est comprise entre 0 (lorsqu'on vide la seconde urne avant de constater que la première urne vidée est bien vide) et n (lorsqu'on constate qu'une urne est vide avant de tirer la première boule de l'autre urne).

► Comme dans le premier cas,

$$[Y_n = k] = [Y_n = k, V_{2n+2} = 0] \sqcup [Y_n = k, V_{2n+2} = 1]$$

et par équiprobabilité,

$$\mathbf{P}(Y_n = k) = 2\,\mathbf{P}(Y_n = k, V_{2n+2} = 0).$$

L'événement $[V_{2n+2} = 0]$ signifie que le dernier tirage a lieu dans l'urne "0" et donc qu'on a déjà constaté que l'urne "1" a été vidée.

La contrainte $[Y_n = k]$ signifie alors qu'on a tiré k fois de suite dans l'urne "0" avant d'effectuer le $(2n+2)$-ième et dernier tirage (également dans l'urne "0"). Autrement dit, on s'intéresse aux événements

$$[(V_1, \dots, V_{2n+2}) = \varepsilon]$$

tels que

$$V_{2n+1-k} = 1, \quad V_{(2n+1-k)+1} = \dots = V_{(2n+1-k)+k} = 0, \quad V_{2n+2} = 0$$

(on constate que l'urne "1" est vide ; on tire encore k boules dans l'urne "0" et on constate pour finir que l'urne "0" est vide elle aussi).

Le nombre de ces événements est égal à $\binom{2n-k}{n}$ (on choisit la place des n boules "1" parmi les $(2n-k)$ positions libres) et par conséquent

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad \mathbf{P}(Y_n = k) = \frac{2\binom{2n-k}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}}.$$

✍ *On constate que les variables aléatoires Y_n et $X_{n+1} - 1$ suivent la même loi : les encadrements $1 \leqslant k \leqslant n+1$ et $0 \leqslant k-1 \leqslant n$ sont équivalents et*

$$\mathbf{P}(X_{n+1} - 1 = k-1) = \mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \frac{2\binom{2(n+1)-k-1}{(n+1)-1}}{\binom{2(n+1)}{n+1}} = \frac{2\binom{2n-(k-1)}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}} = \mathbf{P}(Y_n = k-1).$$

Si on veut traiter l'exercice dans le temps imparti, il serait judicieux de partir de cette remarque, en la fondant par un argument combinatoire (sans entrer dans les détails).

❧ Comme Y_n est bornée, c'est bien une variable aléatoire d'espérance finie et, par définition de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}(Y_n = k) = \frac{2}{\binom{2n+2}{n+1}} \sum_{k=0}^{n} k\binom{2n-k}{n} = \frac{2}{\binom{2n+2}{n+1}}\left[2n\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n} - \sum_{k=n}^{2n} k\binom{k}{n}\right].$$

$$(k \leftarrow 2n-k)$$

D'après la formule du triangle de Pascal (généralisée),

$$\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n} = \binom{2n+1}{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=n}^{2n} k\binom{k}{n} = (n+1)\binom{2n+2}{n+2} - \binom{2n+1}{n+1}$$

donc

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad \mathbf{E}(Y_n) = \frac{2}{\binom{2n+2}{n+1}} \cdot \left[(2n+1)\binom{2n+1}{n+1} - (n+1)\binom{2n+2}{n+2}\right].$$

Après quelques simplifications,

$$\mathbf{E}(Y_n) = \frac{n}{n+2}$$

qui tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

rms132-1028

Soit $A : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*, une application de classe* $\mathscr{C}^1$*. (Pour alléger les notations, on notera* A_t *au lieu de* $A(t)$*.)*

[**1.**] *On suppose qu'il existe une application*

$$S : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$$

de classe $\mathscr{C}^1$ *telle que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad S_t^{-1} A_t S_t = A_0.$$

Démontrer qu'il existe une application continue

$$B : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad A'_t = B_t A_t - A_t B_t.$$

[**2.**] *Réciproquement, on suppose qu'il existe une application continue* $B : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad A'_t = B_t A_t - A_t B_t.$$

Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$*, la matrice* $A(t)$ *est semblable à* $A(0)$*.*

[**1.**] On part de l'hypothèse habilement réécrite :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad A_t S_t = S_t A_0$$

et on dérive en appliquant la formule de Leibniz :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad A'_t S_t + A_t S'_t = S'_t A_0.$$

Comme la matrice S_t est inversible, on en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad A'_t = B_t A_t - A_t B_t \quad \text{avec} \quad B_t = S'_t S_t^{-1}.$$

✍ *Comme* S *est de classe* $\mathscr{C}^1$*, l'application* $[t \mapsto S'_t]$ *est continue et comme* $S_t \in GL_n(\mathbb{R})$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, l'application* $\left[t \mapsto S_t^{-1}\right]$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$*. (Inutile de se fatiguer à calculer la dérivée !)*

[**2.**] Réciproquement, on s'appuie sur le calcul précédent pour deviner ce que vaut S_t. On a en effet démontré que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad S'_t = B_t S_t.$$

Autrement dit, S est une solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre : rien de plus simple à résoudre !

❧ Comme $[t \mapsto B_t]$ est continue, elle admet une primitive $[t \mapsto C_t]$ (de classe $\mathscr{C}^1$...) telle que $C_0 = 0_n$ et on pose

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad S_t = \exp C_t.$$

On a ainsi défini une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$S_0 = \exp 0_n = I_n$$

et on sait que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad S'_t = C'_t(\exp C_t) = (\exp C_t)C'_t = B_t S_t = S_t B_t.$$

On sait aussi que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad S_t^{-1} = \exp(-C_t)$$

et donc que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d[S_t^{-1}]}{dt} = -C'_t.\exp(-C_t) = -B_t.\exp(-C_t) = -\exp(-C_t).B_t.$$

❧ On considère maintenant l'application $F : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = S_t^{-1} A_t S_t = \exp(-C_t).A_t.\exp(C_t).$$

En particulier,

$$F(0) = I_n^{-1} A_0 I_n = A_0.$$

En tant que produit de trois applications de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ et on calcule sa dérivée : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\big[\exp(-C_t).B_t\big].A_t.\exp(C_t) + \exp(-C_t).A_t'.\exp(C_t) + \exp(-C_t).A_t.\big[B_t.\exp(C_t)\big] \\ &= \exp(-C_t).\big(A_t.B_t - B_t.A_t + A_t'\big).\exp(C_t) = O_n \end{aligned}$$

par hypothèse sur B_t.

La fonction F est donc constante :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad S_t^{-1}.A_t.S_t = F(0) = A_0.$$

rms132-1111

> *Soient* E*, un espace vectoriel réel de dimension* n *et* u*, un endomorphisme de* E *ayant* n *valeurs propres deux à deux distinctes. Déterminer le nombre d'endomorphismes* v *tels que* $v^2 = u$*.*

Comme u admet $n = \dim E$ valeurs propres distinctes, cet endomorphisme est diagonalisable :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{Ker}(u - \lambda_k I)$$

et ses sous-espaces propres sont des droites :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_k I) = 1.$$

Si $v^2 = u$, alors u et v commutent (ce sont deux polynômes en v) et par conséquent, tout sous-espace propre de u est aussi stable par v. Comme les sous-espaces propres de u sont des droites, leurs vecteurs directeurs respectifs (qui sont par construction des vecteurs propres de u) sont donc des vecteurs propres de v.

Autrement dit, quelle que soit la base

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

constituée de vecteurs propres $\boxed{\text{pour } u}$ considérée,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \operatorname{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \Delta.$$

Mais $u = v^2$, donc $D = \Delta^2$ et par conséquent

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mu_k^2 = \lambda_k.$$

❧ On distingue alors les cas suivants.

▶ Si l'un des λ_k au moins est strictement négatif, le problème posé n'a pas de solution. (On travaille sur un espace vectoriel réel, donc les μ_k doivent être réels).

▶ Si tous les λ_k sont strictement positifs, alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mu_k = \pm\sqrt{\lambda_k}.$$

Il y a donc 2^n choix possibles pour la famille $(\mu_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et donc 2^n endomorphismes v tels que $v^2 = u$.

▶ Si l'un des λ_k est nul ($\lambda_1 = 0$ par exemple), alors les $(n-1)$ autres sont strictement positifs (puisqu'ils sont deux à deux distincts) et il y a cette fois seulement 2^{n-1} choix possibles pour la famille $(\mu_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ (puisqu'on a nécessairement $\mu_1 = 0$) et donc seulement 2^{n-1} endomorphismes v tels que $v^2 = u$.

rms132-1119

On étudie

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln n}.$$

[**1.**] *Étudier la convergence simple et la convergence normale sur* $\mathbb{R}_+$ *de cette série de fonctions.*
[**2.**] *Soit* $A > 0$. *Démontrer qu'il existe une constante* M *telle que*

$$\forall\, x \in [0, A], \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln k}\right| \leqslant \frac{M}{\ln n}.$$

Que peut-on en déduire ?
[**3.**] *Démontrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
[**4.**] *Démontrer que*

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \forall\, x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} \geqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{\ln k}.$$

La fonction f *est-elle dérivable à droite en* 0 *?*

[**1.**] Pour tout $k \geqslant 2$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$u_k(x) = \frac{xe^{-kx}}{\ln k}.$$

Il est clair que les fonctions u_k sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

❧ Pour $x = 0$, on a $u_k(x) = 0$ pour tout $k \geqslant 2$ et la série $\sum u_k(x)$ converge évidemment.
Pour $x > 0$, on a

$$u_k(x) = \frac{x}{\ln k} \cdot e^{-kx} \underset{k\to+\infty}{=} o\big((e^{-x})^n\big)$$

et comme $0 < e^{-x} < 1$, on déduit du Théorème de comparaison que la série $\sum u_k(x)$ converge absolument.

La série de fonctions $\sum u_k$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$.

✍ *La fonction* f *est donc définie sur* $\mathbb{R}_+$ *au moins. Comme la série* $\sum u_n(x)$ *diverge grossièrement pour* $x < 0$, *la fonction* f *est donc définie sur* $\mathbb{R}_+$ *et seulement sur* $\mathbb{R}_+$.

❧ Chaque fonction u_k est positive et comme

$$\forall\, x > 0, \quad u_k'(x) = \frac{e^{-kx}}{\ln k}\,(1 - kx),$$

on en déduit que

$$\|u_k\|_\infty = u_k(1/k) = \frac{1}{e\,k \ln k}.$$

Comme la série $\sum \|u_k\|_\infty$ diverge, la série de fonctions $\sum u_k$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

✍ *Les séries de Bertrand n'étant pas au programme, pour justifier la divergence de la série* $\sum \frac{1}{k \ln k}$, *il faut prétendre qu'on a pris soin de comparer les sommes partielles de cette série aux intégrales*

$$\int_2^n \frac{dt}{t \ln t} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln \ln n.$$

De cette manière, les apparences sont sauves...

[**2.**] Comme les $u_k(x)$ sont positifs,

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{\ln n} \sum_{k=n}^{+\infty} xe^{-kx} \leqslant \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{x}{1 - e^{-x}}.$$

La fonction

$$\varphi = \left[x \mapsto \frac{x}{1 - e^{-x}}\right]$$

est évidemment continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers 1 au voisinage de 0. Elle admet donc un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$ et comme toute fonction continue sur un segment est bornée, quel que soit $A > 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall\, x \in\,]0, A]\,, \quad 0 \leqslant \frac{x}{1-e^{-x}} \leqslant M.$$

Les inégalités larges étant conservées par passage à la limite, on en déduit que

$$\forall\, x \in [0, A], \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ell n\, k}\right| \leqslant \frac{M}{\ell n\, n}.$$

Cet encadrement prouve que la série de fonctions $\sum u_k$ converge uniformément sur $[0, A]$.
[3.] Comme les fonctions u_k sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et que A est quelconque, on en déduit que la somme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ (= l'union des segments $[0, A]$ lorsque A parcourt $\mathbb{R}_+^*$).

❧ Fixons maintenant $\alpha > 0$.

▶ Si l'entier k est assez grand pour que $k\alpha > 1$, on déduit de l'étude des variations de u_k que

$$\forall\, x \geqslant \alpha, \quad 0 \leqslant u_k(x) \leqslant u_k(\alpha).$$

Le majorant est indépendant de $x \in [\alpha, +\infty[$ et la série $\sum u_k(\alpha)$ est convergente, donc la série $\sum u_k$ converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$.

✍ *Pour l'instant, cette étude ne nous apprend rien de nouveau. Patience...*

▶ Par inégalité triangulaire, pour tout $k \geqslant 2$,

$$\forall\, x > 0, \quad \left|u_k'(x)\right| \leqslant \frac{e^{-kx}}{\ell n\, k} + k u_k(x).$$

D'après ce qui précède, pour tout k assez grand,

$$\forall\, x \geqslant \alpha, \quad \left|u_k'(x)\right| \leqslant (e^{-\alpha})^k + k u_k(\alpha).$$

Le majorant ne dépend pas de x et

$$(e^{-\alpha})^k + k u_k(\alpha) \underset{k\to+\infty}{=} o(ke^{-k\alpha}).$$

Comme la série $\sum k(e^{-\alpha})^k$ converge absolument pour $\alpha > 0$ (puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum kx^k$ est égal à 1 et que $0 < e^{-\alpha} < 1$). Donc la série des dérivées $\sum u_k'$ converge normalement sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$.

D'après le Théorème de dérivation terme à terme, la somme f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$$]0, +\infty[\, = \bigcup_{\alpha>0} [\alpha, +\infty[$$

et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k'(x).$$

[4.] Comme tous les termes sont positifs,

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ell n\, n} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{-kx}}{\ell n\, k}.$$

❧ Comme $\ell n\, k \underset{k\to+\infty}{=} o(k)$, la série $\sum \frac{1}{\ell n\, k}$ est divergente par comparaison à la série harmonique (Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif).

Soit $A > 0$. Puisque la série de terme général positif $\sum \frac{1}{\ell n\, k}$ est divergente, il existe $n_A \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=2}^{n_A} \frac{1}{\ell n\, k} \geqslant 2A.$$

Comme

$$\lim_{x\to 0} \sum_{k=2}^{n_A} \frac{e^{-kx}}{\ell n\, k} = \sum_{k=2}^{n_A} \frac{1}{\ell n\, k} \geqslant 2A$$

et que $0 < A < 2A$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, 0 < x \leqslant \alpha, \quad \sum_{k=2}^{n_A} \frac{e^{-kx}}{\ell n\, k} \geqslant A.$$

Par conséquent,

$$\forall\, 0 < x \leqslant \alpha, \quad \frac{f(x)}{x} \geqslant A.$$

Comme A est arbitrairement grand, on en déduit que ${}^{f(x)}/_{x}$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et donc que f n'est pas dérivable en 0.

✍ *On a démontré que le taux d'accroissement* $[f(x) - f(0)]/(x - 0)$ *tendait vers* $+\infty$ *et donc que le graphe de* f *admettait une tangente verticale (vers le haut !) à l'origine.*

rms136-1420

[**1.**] *Justifier l'existence de l'intégrale généralisée*

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}\,dx$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

[**2.**] *Démontrer que*

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du.$$

[**1.**] La fonction f_n définie par

$$\forall\, x \in \left]0, \pi/2\right], \qquad f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}$$

est continue sur l'intervalle $]0, \pi/2]$ et comme elle tend vers une limite finie au voisinage de 0 :

$$f_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sin^2 nx}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} n^2,$$

elle est intégrable au voisinage de 0. Par conséquent, l'intégrale I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

[**2.**] Le changement de variable affine $u = nx$ nous donne

$$\frac{1}{n} I_n = \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 u}{n^2 \sin^2(u/n)}\,du.$$

❧ Considérons maintenant les fonctions g_n définies par

$$\forall\, u \in \left]0, n\pi/2\right], \quad g_n(u) = \frac{\sin^2 u}{n^2 \sin^2(u/n)} \qquad \text{et} \qquad \forall\, u > \frac{n\pi}{2}, \quad g_n(u) = 0.$$

D'après la question précédente, chaque fonction g_n est intégrable sur $]0, +\infty[$. Comme $n\pi/2$ tend vers $+\infty$ et que $\sin\theta \sim \theta$ quand θ tend vers 0, la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction φ définie par

$$\forall\, u > 0, \qquad \varphi(u) = \frac{\sin^2 u}{u^2}.$$

❧ La fonction φ est continue sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, elle tend vers une limite finie (égale à 1) au voisinage de 0 et est dominée par $u \mapsto 1/u^2$ au voisinage de $+\infty$, donc cette fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

❧ Sur $[0, \pi/2]$, la fonction sin est concave, donc

$$\forall\, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant \frac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin\theta.$$

Par conséquent,

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, u \in \left]0, n\pi/2\right], \qquad 0 \leqslant \frac{\sin^2 u}{n^2 \sin(u/n)} \leqslant \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\sin^2 u}{n(u/n)^2} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \varphi(u).$$

Comme g_n est nulle et que φ est positive sur $]n\pi/2, +\infty[$, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, u > 0, \qquad 0 \leqslant g_n(u) \leqslant \frac{\pi^2}{4} \cdot \varphi(u).$$

Comme φ est intégrable sur $]0, +\infty[$, on a ainsi établi que la convergence était dominée.

❧ D'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} I_n = \int_0^{+\infty} \varphi(u)\,du$$

c'est-à-dire

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du.$$

rms136-1431

On considère l'équation différentielle

$$xy'(x) + y(x) = \frac{\exp(-1/x^2)}{x^3}. \tag{E}$$

[**1.**] *Soit $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, une solution de cette équation différentielle. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de y au voisinage de $x = 0$.*
[**2.**] *Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}^*$.*
[**3.**] *Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.*

[**1.**] Comme la fonction y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0, elle admet un développement limité à l'ordre 3 et sa dérivée admet un développement limité à l'ordre 2 qui s'en déduit (formule de Taylor-Young)

$$y(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$$
$$y'(x) \underset{x\to 0}{=} a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + o(x^2)$$

✍ *On ne peut pas dériver un développement limité car on ne sait pas, en général, ce qui se cache dans le reste $o(x^n)$.*

Mais si on sait que la fonction y est de classe $\mathscr{C}^n$, alors la formule de Taylor-Young nous assure que le développement limité de y' à l'ordre $(n-1)$ peut se déduire du développement limité de y à l'ordre n comme si on dérivait terme à terme.

On en déduit que

$$xy'(x) + y(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + 2a_1x + 3a_2x^2 + 4a_3x^3 + o(x^3).$$

Par croissances comparées,

$$\frac{\exp(-1/x^2)}{x^3} \underset{x\to 0}{=} o(x^3)$$

et par unicité du développement limité à l'ordre 3,

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Ainsi, $y(x) = o(x^3)$ au voisinage de $x = 0$.

✍ *On peut mener ce raisonnement à l'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pas seulement pour $n = 3$. On en déduit que : si y est une solution de (E) de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, alors*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad y^{(k)}(0) = 0.$$

Par conséquent, la série de Taylor de y est identiquement nulle et si y était développable en série entière, alors y serait identiquement nulle.

Comme la fonction nulle n'est pas solution de (E), on en déduit que cette équation n'a pas de solution développable en série entière.

[**2.**] On résout ici une équation différentielle du premier ordre. L'ensemble $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. On va donc travailler sur les deux intervalles $I_- =]-\infty, 0[$ et $I_+ =]0, +\infty[$.

✍ *Le cours sur les équations différentielles ne s'applique que sur un **intervalle**.*

Si on travaille sur une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle, il faut autant de constantes d'intégration que d'intervalles. (Attention ! Pour une équation du second ordre, une "constante" d'intégration, c'est un vecteur de $\mathbb{R}^2$.)

❧ La solution générale de l'équation homogène (sur I_+ ou sur I_-) est $x \mapsto K/x$.
❧ On trouve une solution particulière en faisant varier la constante : $y(x) = K(x)/x$ est solution sur $I = I_+$ ou sur $I = I_-$ si, et seulement si,

$$\forall\, x \in I, \qquad x\frac{K'(x)}{x} = \frac{\exp(-1/x^2)}{x^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x^3}\cdot\exp\frac{-1}{x^2}.$$

On reconnaît ici la dérivée de
$$\frac{1}{2}\cdot\exp\frac{-1}{x^2}.$$
Par conséquent, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$ si, et seulement si, il existe deux constantes K_- et K_+ telles que
$$\forall\,x\in I_-,\quad y(x)=\frac{K_-}{x}+\frac{1}{2x}\cdot\exp\frac{-1}{x^2}\qquad\text{et}\qquad\forall\,x\in I_+,\quad y(x)=\frac{K_+}{x}+\frac{1}{2x}\cdot\exp\frac{-1}{x^2}.$$
[**3.**] Si y est une solution de (E) de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, alors en particulier y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$: on peut donc se servir des expressions précédentes.

Comme y doit être continue en $x=0$, il faut donc que $K_-=K_+=0$.

Il existe donc au plus une solution de (E) de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ définie par $y_0(0)=0$ et par
$$\forall\,x\neq 0,\qquad y_0(x)=\frac{1}{2x}\cdot\exp\frac{-1}{x^2}.$$

✍ *Il est facile de vérifier que y_0 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (en appliquant le Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$). Il est assez fastidieux de vérifier que y_0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (la même chose en procédant par récurrence — il faut avoir une bonne intuition de l'hypothèse de récurrence).*

Il existe donc en fait une, et une seule, solution de (E) de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et son expression confirme que
$$\forall\,n\geqslant 1,\qquad y_0(x)\underset{x\to 0}{=}\mathcal{o}(x^n)$$
par croissances comparées.