Vendredi 12 juin

Certains énoncés ont été transmis par des candidats aux concours en 2025 - merci à eux.
Autant que possible, j'ai veillé à établir des énoncés mathématiquement corrects, faites-moi signe si vous rencontrez des points litigieux.

Thèmes abordés	
136-py-27	Espérance d'un quotient
136-py-35	Théorème de Perron-Frobenius
136-py-37	Critère de Raabe-Duhamel
136-py-46	Série génératrice
136-py-50	Chaîne de Markov
135-py-37	Équation différentielle
135-py-42	Estimation d'un reste de série convergente

Exercice 1 — 136-py-27

[**1.**] Soient X et Y, deux variables aléatoires de même loi, à valeurs strictement positives. On veut établir l'inégalité

$$\mathbf{E}(X/Y) \geqslant 1. \qquad (\star)$$

[**1. a.**] Tester la propriété $(\star)$ avec des lois discrètes usuelles.
[**1. b.**] Démontrer la propriété $(\star)$ en supposant que X et Y sont indépendantes.
☞ *On pourra utiliser l'inégalité de Schwarz.*

[**1. c.**] En supposant que la variable aléatoire $\ell n\, X$ est d'espérance finie mais sans supposer que X et Y soient indépendantes, démontrer la propriété $(\star)$.
☞ *On commencera par démontrer que $\ell n\, x \leqslant x - 1$.*

[**1. d.**] Soient a et b, deux réels strictement positifs. Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \ell n\, \frac{b}{a}.$$

[**1. e.**] Démontrer la propriété $(\star)$.
[**2.**] Soient U et V, deux variables aléatoires aléatoires indépendantes et de même loi, à valeurs réelles. On veut établir l'inégalité

$$\mathbf{E}\big(|U - V|\big) \leqslant \mathbf{E}\big(|U + V|\big). \qquad (\star\star)$$

[**2. a.**] Tester la propriété $(\star\star)$ avec des lois discrètes usuelles.
[**2. b.**] Tracer le graphe de la fonction

$$x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2}\, dt$$

sur l'intervalle $[-3, 3]$. Quelle conjecture peut-on en déduire ?
[**2. c.**] Démontrer cette conjecture.
[**2. d.**] Démontrer l'inégalité $(\star\star)$.

Exercice 2 **136-py-35**

Soit $\mathscr{E}_n$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont strictement positifs.

[**1.**] Écrire une fonction `creer_matrice(n, a, b)` qui renvoie une matrice $A \in \mathscr{E}_n$ dont les coefficients sont des entiers pris au hasard dans l'intervalle $[\![a, b[\![$.

[**2.**] Une matrice de $\mathscr{E}_n$ peut-elle avoir des valeurs propres négatives ? strictement négatives ?

[**3.**] Soit $A \in \mathscr{E}_n$. On note

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$

ses valeurs propres et $(X_1, \dots, X_n)$, une base orthonormée telle que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad AX_k = \lambda_k X_k.$$

[**3. a.**] Démontrer que

$$\forall\, Y \in \mathbb{R}^n, \qquad Y^\top.A.Y \leqslant \lambda_n \|Y\|^2.$$

[**3. b.**] Conjecturer le signe des coefficients du vecteur propre X_n.

[**3. c.**] Étudier le cas d'égalité dans **[3.a.]**.

[**3. d.**] Démontrer la conjecture avancée en **[3.b.]**

Exercice 3 **136-py-37**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite de termes strictement positifs (u_n) vérifie la propriété (F_λ) lorsque

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{=} 1 - \frac{\lambda}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = {}^1/_{n^\beta}$ (où β est un réel donné quelconque) et pour $n \geqslant 2$, on pose

$$y_n = \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

[**1.**] À l'aide de Python, conjecturer le réel λ tel que la suite (v_n) vérifie la propriété (F_λ). Étudier la convergence de la série $\sum v_n$ et démontrer la conjecture sur λ.

[**2.**] Mêmes questions sur (y_n).

[**3.**] Dans cette question, on considère une suite strictement positive (u_n) qui vérifie la propriété (F_λ).

[**3. a.**] On suppose que $\lambda < 0$. Démontrer que la série $\sum u_n$ diverge.

[**3. b.**] On suppose que $\lambda > \beta > 1$. Démontrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

[**3. c.**] On suppose que $0 \leqslant \lambda < 1$. Démontrer que la série $\sum u_n$ diverge. Que dire dans le cas $\lambda = 1$?

[**4.**] Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$w_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

Exercice 4 **136-py-46**

On considère la fonction $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \qquad f(x) = \frac{1}{(1-x^3)(1-x^5)}.$$

[**1.**] Démontrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. Préciser son rayon de convergence.

Dans la suite de cet énoncé, on notera

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

le développement en série entière au voisinage de 0 de l'application f.

[**2.**] Écrire une fonction qui calcule c_n.

[**3.**] Calculer c_n pour $n \in [\![0, 199]\!]$, puis en déduire la valeur de

$$c_{n+15} - c_n$$

pour $n \in [\![0, 185]\!]$.

[**4. a.**] Démontrer que le polynôme $(1 - X^{15})(1 - X)$ est divisible par $(1 - X^3)(1 - X^5)$.

[**4. b.**] On note Q, le quotient de cette division euclidienne. Quel est le degré de Q ? Que vaut $Q(1)$?

[**5.**] Démontrer que la fonction g définie par

$$g(x) = (1 - x^{15})f(x) - \frac{1}{1 - x}$$

est polynomiale.

[**6.**] En déduire une relation entre c_n et c_{n+15}.

[**7.**] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note D_n, l'ensemble des couples $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$3u + 5v = n.$$

On note d_n, le cardinal de l'ensemble D_n.

[**7. a.**] Écrire une fonction qui calcule d_n.

[**7. b.**] En déduire une relation entre c_n et d_n.

Exercice 5 — 136-py-50

On considère une marche aléatoire sur quatre emplacements numérotés de 1 à 4 :

- Initialement (= pour $n = 0$), on est sur l'emplacement 1.
- Si, à l'instant n, on est sur l'emplacement 1, alors on rejoint à l'instant $(n + 1)$ de manière équiprobable un des quatre emplacements possible. Il est donc possible de ne pas bouger.
- Si, à l'instant n, on est sur un emplacement $i \geqslant 2$, alors on rejoint l'emplacement $(i - 1)$ à l'instant $(n + 1)$.

On suppose connue une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que X_k indique le numéro de l'emplacement occupé à l'instant k.

La loi de chaque variable aléatoire X_k est représentée par la colonne

$$U_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_k = 1) \\ \mathbf{P}(X_k = 2) \\ \mathbf{P}(X_k = 3) \\ \mathbf{P}(X_k = 4) \end{pmatrix}.$$

[**1.**] Écrire une fonction `trajectoire(n)` qui renvoie la liste $(X_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ des numéros d'emplacements où on est passé entre l'instant initial et l'instant n.

[**2.**] Écrire une fonction `loi_position(k)` qui renvoie une approximation de la colonne U_k. Tester cette fonction pour $k \in \{10, 50, 100\}$. Quelle conjecture peut-on en déduire ?

[**3. a.**] Déterminer une matrice A telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad U_{n+1} = AU_n.$$

[**3. b.**] Démontrer que 1 est une valeur propre de A et donner un vecteur propre associé à cette valeur propre.

[**3. c.**] On *admet* que la matrice A possède trois autres valeurs propres distinctes, toutes de module strictement inférieur à 1, deux d'entre elles étant complexes (et donc conjuguées).

Démontrer que la suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

[**4.**] On note $Y_k(i)$, le nombre de passages sur l'emplacement i entre l'instant initial et l'instant k (inclus).

[**4. a.**] Écrire une fonction `Y(n)` qui renvoie les valeurs de $Y_n(1)$, $Y_n(2)$, $Y_n(3)$ et $Y_n(4)$, puis une fonction `esperance_Y100()` qui renvoie les valeurs de $\mathbf{E}(Y_{100}(i))$ pour $i \in [\![1, 4]\!]$.

[**4. b.**] Quelle conjecture peut-on faire ?

Exercice 6 **135-py-37**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x^3 + x$.

[**1.**] Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Tracer f et f^{-1} sur $[-2, 2]$.

[**2.**] On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $a_0 = 0$ et de $a_1 = 1$ et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+2} = \frac{-27n^2 + 3}{4(n+2)(n+1)}\, a_n$$

On pose alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Tracer f^{-1}, S_5 et S_{10} sur $[-1/2, 1/2]$.

[**3.**] Démontrer qu'il existe une, et une seule, fonction g telle que $g(0) = 0$ et que $g'(0) = 1$, et qui vérifie l'équation différentielle suivante.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad (27x^2 + 4)y''(x) + 27xy'(x) - 3y(x) = 0$$

Tracer le graphe de cette fonction g et comparer à f^{-1}. Quelle conjecture peut-on faire ?

[**4.**] Démontrer cette conjecture.

Exercice 7 **135-py-42**

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

et on rappelle que $R_1 = \pi^2/6$. On cherche les réels C et D optimaux tels que

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad \frac{1}{n - C} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n - D}.$$

[**1. a.**] Écrire une fonction `Reste(N)` qui renvoie une valeur approchée de R_N.

[**1. b.**] Écrire une fonction `RechercheC(N)` qui renvoie le réel C optimal tel que

$$\forall\, 1 \leqslant n \leqslant N, \qquad \frac{1}{n - C} \leqslant R_n.$$

[**1. c.**] Écrire une fonction `RechercheD(N)` qui renvoie le réel D optimal tel que

$$\forall\, 1 \leqslant n \leqslant N, \qquad R_n \leqslant \frac{1}{n - D}.$$

[**1. d.**] Représenter graphiquement ces deux fonctions. Quelle conjecture peut-on formuler ?

[**2. a.**] Démontrer que R_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

[**2. b.**] Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad \frac{1}{n} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

[**2. c.**] Démontrer que $C \geqslant 0$.

[**3.**] Démontrer que la fonction ψ définie par

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

[**4.**] On pose

$$F(x) = x - \frac{1}{\psi(x)} \qquad \text{et} \qquad G(x) = \psi^2(x) + \psi'(x).$$

[**4. a.**] Déterminer la limite de G au voisinage de $+\infty$.

[**4. b.**] Étudier la fonction F.

[**4. c.**] En déduire la valeur de C.