
ORAUX MP2I JUIN 2026

On considère l'ensemble E des matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

1. Démontrer que E est un espace vectoriel et donner sa dimension.

2. Démontrer que

$$\forall M \in E, \quad M^3 = 0.$$

3. On pose

$$\forall M \in E, \quad \exp(M) = I + M + \frac{1}{2}M^2 \quad \text{et} \quad \ln(I + M) = M - \frac{1}{2}M^2.$$

Vérifier que les matrices $\exp(M) - I$ et $\ln(I + M)$ appartiennent toutes deux à E , puis que

$$\ln(\exp(M)) = M \quad \text{et} \quad \exp(\ln(I + M)) = I + M.$$

4. Démontrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \exp(kM) = [\exp(M)]^k.$$

Démontrer que $\exp(M)$ est inversible et que son inverse est $\exp(-M)$.

5. À quelle condition a-t-on

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) \quad ?$$

1. Une matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ appartient à E si, et seulement si, il existe trois réels a, b et c tels que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aE_{1,2} + bE_{1,3} + cE_{2,3}$$

donc

$$E = \text{Vect}(E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,3})$$

et par conséquent $\dim E = 3$.

2. Démontrons un peu plus que le résultat demandé : quels que soient les réels a_1, a_2, a_3, \dots

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

et on voit ainsi que $M^2 \in E$ et que $M^3 = 0_3$.

3. Il est clair sur les définitions que

$$\exp(M) - I \in \text{Vect}(M, M^2) \quad \text{et que} \quad \ln(I + M) \in \text{Vect}(M, M^2).$$

On a remarqué à la question précédente que $M^2 \in E$ (quelle que soit la matrice $M \in E$) et par conséquent $\text{Vect}(M, M^2)$ est un sous-espace de E . Donc

$$\forall M \in E, \quad \exp(M) - I \in E \quad \text{et} \quad \ln(I + M) \in E.$$

• Comme $M^3 = 0$,

$$\left(M \pm \frac{M^2}{2}\right)^2 = M^2.$$

Comme $\ln(I + M) \in E$, on déduit de la définition de \exp que

$$\exp(\ln(I + M)) = I + \left(M - \frac{M^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(M - \frac{M^2}{2}\right)^2 = I + M.$$

Comme $\exp(M) = I + [\exp(M) - I]$ et que $\exp(M) - I$, on déduit de la définition que

$$\ln(I + [\exp(M) - I]) = [\exp(M) - I] - \frac{1}{2}[\exp(M) - I]^2 = \left(M + \frac{M^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(M + \frac{M^2}{2}\right)^2 = M.$$

4. On procède par récurrence pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour $k = 1$, l'égalité est évidente.

On suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\exp(kM) = [\exp(M)]^k$.

Alors

$$\begin{aligned} [\exp(M)]^{k+1} &= \exp(kM) \cdot \exp(M) && \text{(HR)} \\ &= \left(I + kM + \frac{k^2}{2}M^2\right) \left(I + M + \frac{1}{2}M^2\right) \\ &= I + (k+1)M + \frac{(k+1)^2}{2}M^2 \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que $M^3 = 0_3$.

• La matrice $\exp(M)$ est inversible car elle est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls :

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} 1 & a & b + (a+c)b/2 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Par définition,

$$\exp(M) \cdot \exp(-M) = \left(I + M + \frac{1}{2}M^2\right) \left(I - M + \frac{1}{2}M^2\right) = I$$

(toujours en tenant compte de la relation $M^3 = 0_3$).

Lorsqu'un produit de deux matrices carrées est égal à la matrice I , les deux matrices sont inverses l'une de l'autre. Donc $\exp(-M)$ est bien l'inverse de $\exp(M)$.

• Il n'est pas nécessaire de vérifier que le produit $\exp(-M) \cdot \exp(M)$ est aussi égal à I (Théorème du rang!).

On sait que les puissances de M commutent entre elles (associativité du produit matriciel), donc deux polynômes en M commutent entre eux et par conséquent $\exp(M)$ et $\exp(-M)$ commutent. (On vérifie ainsi que $\exp(-M) \cdot \exp(M) = I$ sans faire aucun calcul matriciel.)

5. En développant $\exp(A+B)$ et $\exp(A)\exp(B)$, on trouve que ces deux matrices sont égales si, et seulement si,

$$BA - AB = A^2B - AB^2 + \frac{1}{2}A^2B^2.$$

• Attention en développant $(A+B)^2$, a priori les matrices A et B ne commutent pas!

Les calculs menés à la question 2. montrent que les matrices A^2B , AB^2 et A^2B^2 sont nulles, donc

$$\forall A, B \in E, \quad \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) \iff AB = BA.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k/n}}.$$

Démontrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $2(\sqrt{2}-1)$.

2. En comparant la somme à une intégrale, encadrer

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

3. En déduire que

$$u_n = 2(\sqrt{2}-1) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

1. La fonction

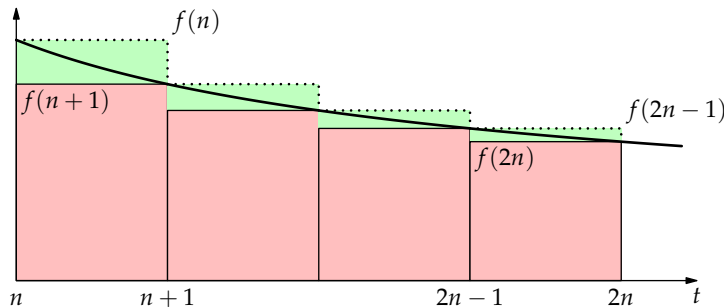
$$\left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right]$$

est continue sur le segment $[0, 1]$. Par conséquent, la somme de Riemann u_n converge vers

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = [2\sqrt{1+x}]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1).$$

2. Comme la fonction $f = [t \mapsto 1/\sqrt{t}]$ est décroissante sur le segment $[n, 2n]$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \leq \int_n^{2n} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{2n-1} f(k).$$



Autrement dit,

$$\frac{-1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \int_n^{2n} f(t) dt \leq S_n \leq \int_n^{2n} f(t) dt$$

et donc, en explicitant l'intégrale,

$$(\sqrt{2}-1) \left[2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right] \leq S_n \leq (\sqrt{2}-1) 2\sqrt{n}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

On déduit de l'encadrement de S_n que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}n} \leq u_n - 2(\sqrt{2}-1) \leq 0$$

et donc en particulier que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2(\sqrt{2}-1) + \mathcal{O}(1/n).$$

Soient p et q , deux fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que f et g sont deux fonctions de période $T > 0$, toutes deux solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

et que $f(0) = g'(0) = 1$, $f'(0) = g(0) = 0$.

1. Démontrer que la fonction $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W'(x) + p(x)W(x) = 0.$$

En déduire que la fonction W ne s'annule jamais.

2. Démontrer que

$$\int_0^T p(t) dt = 0$$

puis que p est une fonction de période T .

1. Comme f et g sont de classe \mathcal{C}^2 (en tant que solutions d'une équation différentielle du second ordre), la fonction W définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \quad (*)$$

est de classe \mathcal{C}^1 et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W'(x) = f(x)g''(x) - f''(x)g(x).$$

On exprime $f''(x)$ et $g''(x)$ au moyen de l'équation différentielle et, après simplifications, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W'(x) = -p(x)W(x).$$

• La fonction W est donc solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.

Comme la fonction p est continue, elle admet des primitives et, en notant P_0 , une primitive de p , il existe donc une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = A \exp[-P_0(x)].$$

En particulier,

$$W(0) = f(0)g'(0) - f'(0)g(0) = 1 = A \exp[-P_0(0)]$$

donc la constante A n'est pas nulle et $W(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (puisque \exp ne prend jamais la valeur 0).

2. Comme W ne s'annule jamais, on peut exprimer p en fonction de W :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \frac{-W'(x)}{W(x)} \quad (\dagger)$$

et en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x p(t) dt = \ln \frac{W(0)}{W(x)}.$$

• Reconnaitre une dérivée logarithmique, c'est bien. Savoir l'intégrer en faisant apparaître un quotient strictement positif et sans dimension, c'est mieux (et très utile en Physique).

• Comme f et g sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 et périodiques, de période T , leurs dérivées f' et g' sont aussi des fonctions périodiques, de période T et W est aussi périodique, de période T d'après (*).

Ainsi, $W(T) = W(0)$ et

$$\int_0^T p(t) dt = \ln \frac{W(0)}{W(0)} = 0.$$

• La fonction W est de classe \mathcal{C}^1 et périodique, de période T , donc sa dérivée W' est elle aussi périodique, de période T . On déduit de (\dagger) que p est périodique, de période T .

On note $\mathcal{B}_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, la base canonique de \mathbb{R}^3 et on considère l'endomorphisme u de \mathbb{R}^3 représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique \mathcal{B}_0 .

On dit qu'un sous-espace vectoriel $F \subset \mathbb{R}^3$ est **stable par** u lorsque

$$\forall \mathbf{x} \in F, \quad u(\mathbf{x}) \in F.$$

1. Montrer que la droite dirigée par le vecteur \mathbf{e}_3 :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_3$$

et le plan dirigé par les vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 :

$$\mathcal{P} = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

sont deux sous-espaces stables par u .

2. Calculer le rang de $A + I_3$ et de $A - 3I_3$.

3. Vérifier que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et, sans calculer P^{-1} , démontrer que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$. Il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{e}_3$ et par linéarité de u ,

$$u(\mathbf{x}) = \alpha \cdot u(\mathbf{e}_3) = \alpha \cdot \mathbf{e}_3 \in \mathcal{D}.$$

↳ La troisième colonne de la matrice A nous donne $u(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$.

• Soit maintenant $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. Il existe deux réels α et β tels que $\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \beta \cdot \mathbf{e}_2$ et par linéarité de u ,

$$u(\mathbf{x}) = \alpha \cdot u(\mathbf{e}_1) + \beta \cdot u(\mathbf{e}_2) \in \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \mathcal{P}.$$

↳ La première et la deuxième colonnes de A nous disent que

$$u(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 2 \cdot \mathbf{e}_2 \in \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \quad \text{et} \quad u(\mathbf{e}_2) = 2 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \in \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2).$$

• On a ainsi démontré que les deux sous-espaces vectoriels \mathcal{D} et \mathcal{P} étaient stables par u .

2. On écrit les deux matrices :

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, les deux premières colonnes sont proportionnelles (donc le rang est inférieur à 2) et la troisième colonne est linéairement indépendante des deux premières (donc le rang est supérieur à 2).

Par conséquent, $\text{rg}(A + I_3) = \text{rg}(A - 3I_3) = 2$.

↳ Pour la matrice $A + I_3$, on a $C_1 - C_2 = 0$, donc la colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

appartient au noyau de $(A + I_3)$.

Pour la matrice $A - 3I_3$, on a $C_1 + C_2 = 0$, donc la colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

appartient au noyau de $(A - 3I_3)$.

3. Les deux premières colonnes de P ne sont pas proportionnelles (donc le rang est supérieur à 2) et la troisième colonne n'est pas une combinaison linéaire des deux premières, donc $\text{rg } P = 3$ et la matrice P est inversible.

↳ Une matrice $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, son rang est égal à n .

• La matrice P est donc la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B}_0 à une nouvelle base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Plus précisément, les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 sont représentés sur les colonnes de la matrice P par leurs coordonnées relatives à la base \mathcal{B}_0 . On a donc :

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_2, \quad \varepsilon_2 = e_1 - e_2, \quad \varepsilon_3 = e_3. \quad (*)$$

D'après la formule de changement de base, la matrice $P^{-1}AP$ représente l'endomorphisme u dans la base \mathcal{B} :

$$P^{-1}AP = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\varepsilon_1), u(\varepsilon_2), u(\varepsilon_3)).$$

• D'après (*),

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u(\varepsilon_1)) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}_0}(3 \cdot \varepsilon_1)$$

et par conséquent, $u(\varepsilon_1) = 3 \cdot \varepsilon_1$.

De même,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u(\varepsilon_2)) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}_0}(-\varepsilon_2)$$

et

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u(\varepsilon_3)) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\varepsilon_3).$$

On a donc $u(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3$.

En résumé,

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_1) &= 3 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 && \text{(première colonne de } P^{-1}AP) \\ u(\varepsilon_2) &= 0 \cdot \varepsilon_1 + (-1) \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 && \text{(deuxième colonne)} \\ u(\varepsilon_3) &= 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 1 \cdot \varepsilon_3 && \text{(troisième colonne)} \end{aligned}$$

et on a bien

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

↳ On ne change pas de base pour le plaisir, mais parce qu'on a trouvé une base qui permet de représenter plus simplement l'endomorphisme u .

On aura peut-être remarqué que le vecteur $\varepsilon_3 = e_3$ dirige la droite stable \mathcal{D} et que les vecteurs ε_1 et ε_2 appartiennent respectivement au noyau de $(A - 3I_3)$ et au noyau de $(A + I_3)$. Ce n'est pas une coïncidence !

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

et on note f , l'endomorphisme représenté par la matrice M dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$.

1. Démontrer qu'il existe une droite vectorielle D telle que

$$E = \text{Ker } f \oplus D$$

et qu'il existe une base $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ de E telle que $\mathbf{u}_1 \in \text{Ker } f$, $\mathbf{u}_2 \in \text{Ker } f$ et $\mathbf{u}_3 \in D$.

2. Les sous-espaces $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont-ils supplémentaires dans E ? En déduire que la matrice de f relative à la base \mathcal{B} est de la forme suivante.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Avec le moins de calculs possibles, démontrer que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice M n'est pas la matrice nulle (donc son rang est supérieur à 1) et toutes les colonnes sont proportionnelles (donc son rang est inférieur à 1), donc le rang de M est égal à 1.

↳ La matrice nulle est la seule matrice dont le rang est nul.

• D'après le Théorème du rang, la dimension du noyau de M est égale à 2.

↳ La somme de la dimension du noyau et du rang est égale au nombre de COLONNES de la matrice.

Le noyau de f et le noyau de M sont isomorphes, donc le noyau de f est un plan, c'est-à-dire un hyperplan de \mathbb{R}^3 .

Il existe donc une droite vectorielle $D \subset \mathbb{R}^3$ telle que

$$E = \text{Ker } f \oplus D.$$

↳ Plus précisément, la droite $D = \mathbb{R} \cdot \mathbf{u}_3$ est un supplémentaire de $\text{Ker } f$ si, et seulement si, le vecteur directeur \mathbf{u}_3 est choisi en dehors de l'hyperplan $\text{Ker } f$.

• Comme $\text{Ker } f$ et D sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie (en tant que sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 , espace vectoriel de dimension finie), il existe une base $\mathcal{B}_0 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ de $\text{Ker } f$ et un vecteur directeur \mathbf{u}_3 de D .

Comme $\text{Ker } f$ et D sont supplémentaires de \mathbb{R}^3 , on obtient une base de \mathbb{R}^3 en concaténant leurs bases. Donc $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

2. Quelle que soit la colonne X ,

$$MX = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ -2(x + y + z) \end{pmatrix}$$

donc la colonne MX est égale à la colonne nulle si, et seulement si, $x + y + z = 0$.

Par conséquent, $\text{Ker } f$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$ (relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3).

▮ On pourra retenir que, pour une matrice de rang 1, les coefficients de la colonne MX sont tous proportionnels et que chaque ligne non nulle de la matrice M nous donne les coefficients d'une équation cartésienne de $\text{Ker } f$.

• L'image d'une matrice est le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice. Par conséquent, le sous-espace $\text{Im } f$ est la droite de \mathbb{R}^3 engendrée par le vecteur $(1, 1, -2)$.

▮ Comme M représente f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , les colonnes de M donnent les coordonnées relatives à la base canonique de \mathbb{R}^3 de vecteurs de $\text{Im } f$.

Comme $1 + 1 + (-2) = 0$, le vecteur $(1, 1, -2)$ appartient au noyau de f et comme il dirige $\text{Im } f$, on en déduit que $\text{Im } f$ est un sous-espace de $\text{Ker } f$.

En particulier, $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ ne sont pas supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

• Par définition, $f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}$ (puisque les vecteurs \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 sont dans le noyau de f).

D'autre part, nous venons de prouver que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$, donc

$$f(\mathbf{u}_3) \in \text{Im } f \subset \text{Ker } f = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2).$$

Il existe donc deux scalaires a et b tels que

$$f(\mathbf{u}_3) = a \cdot \mathbf{u}_1 + b \cdot \mathbf{u}_2 + 0 \cdot \mathbf{u}_3.$$

Par définition, la matrice de f relative à la base $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est donc égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. L'opération $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$ démontre que la matrice P est équivalente à la matrice

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

▮ Les opérations de pivot (transvections, dilatations et permutations) conservent le rang. Autrement dit, elles font passer d'une matrice P à une matrice P' équivalente à P . (Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, leurs rangs sont égaux.)

Les deux dernières colonnes de P' ne sont pas proportionnelles (donc le rang de P' est supérieur à 2) et la première colonne de P' n'est pas une combinaison linéaire des deux autres (donc le rang de P' est supérieur à 3).

Comme $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, son rang est égal à 3 et par conséquent cette matrice est inversible.

• La matrice P peut donc être comprise comme la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B}_0 à une autre base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Dans ce cas, les colonnes de la matrice de passage nous donnent les coordonnées relatives à la base canonique \mathcal{B}_0 des vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ qui constituent la base \mathcal{C} .

$$\varepsilon_1 = (0, 0, 1), \quad \varepsilon_2 = (1, 1, -2), \quad \varepsilon_3 = (1, -1, 0)$$

D'après la formule de changement de base, la matrice $P^{-1}AP$ représente alors l'endomorphisme f dans la base \mathcal{C} :

$$P^{-1}AP = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)).$$

En calculant dans la base canonique,

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qu'on peut traduire respectivement par

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1) &= \varepsilon_2 = 0 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 && \text{(première colonne de } P^{-1}MP) \\ f(\varepsilon_2) &= \mathbf{0} = 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 && \text{(deuxième colonne)} \\ f(\varepsilon_3) &= \mathbf{0} = 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 && \text{(troisième colonne)} \end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

↳ On aurait donc pu choisir $\mathbf{u}_1 = \varepsilon_2$, $\mathbf{u}_2 = \varepsilon_3$ et $\mathbf{u}_3 = \varepsilon_1$ à la question précédente. Avec un tel choix, la matrice de f relative à la base \mathcal{B} serait

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque l'image par f du troisième vecteur de base ($\mathbf{u}_3 = \varepsilon_1$) est égale au premier vecteur de base ($\mathbf{u}_1 = \varepsilon_2$).

Pour tout entier $n \geq 3$,

$$u_n - \ln^2 n = \sum_{k=2}^{n-1} \ln^2 k \leq \int_1^n \ln^2 t \, dt \leq \sum_{k=2}^n \ln^2 k = u_n$$

et donc

$$\int_1^n \ln^2 t \, dt \leq u_n \leq \ln^2 n + \int_1^n \ln^2 t \, dt.$$

On a démontré que

$$\int_1^n \ln^2 t \, dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln^2 n \quad \text{et il est clair que} \quad \ln^2 n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n \ln^2 n)$$

donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln^2 n.$$

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire les matrices $A - I_3$ et $A - 2I_3$. En déduire que le produit

$$A(A - I_3)(A - 2I_3)$$

est égal à la matrice nulle et que

$$A^3 = 3A^2 - 2A.$$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A.$$

3. On pose maintenant

$$P_1 = 2A - A^2 \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A.$$

Vérifier que

$$AP_1 = P_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = 2P_2$$

et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = P_1 + 2^n P_2.$$

1. On a

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

donc

$$(A - I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit que le rang de cette matrice est égal à 1 (matrice non nulle dont toutes les colonnes sont proportionnelles) et que l'image de cette matrice est la droite dirigée par le vecteur $(1, 0, 1)$.

↳ L'image d'une matrice est le sous-espace engendré par les colonnes de cette matrice.

Or ce vecteur appartient au noyau de A :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$A[(A - I_3)(A - 2I_3)] = 0_3.$$

• En développant cette expression, on obtient

$$A^3 = 3A^2 - 2A. \quad (\star)$$

2. Comme la matrice

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas proportionnelle à A , le couple (A, A^2) est une famille libre. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe au plus un couple $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A$.

↳ Si (u_1, \dots, u_r) est une famille libre, alors c'est une base du sous-espace $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_r)$ qu'elle engendre.

Chaque vecteur de F peut donc se décomposer de manière unique dans cette base :

$$x = \sum_{k=1}^r \alpha_k \cdot u_k$$

et les vecteurs de E qui n'appartiennent pas à F ne peuvent pas se décomposer sous cette forme.

Ainsi, chaque vecteur de E admet au plus une décomposition comme combinaison linéaire des u_k , $1 \leq k \leq r$.

• Il reste donc à démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n \in \text{Vect}(A, A^2)$$

ce qui revient à démontrer que le sous-espace $\text{Vect}(A, A^2)$ est stable par multiplication.

• Il est clair que

$$A^1 = A = 1 \cdot A + 0 \cdot A^2 \in \text{Vect}(A, A^2).$$

Supposons maintenant qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n \in \text{Vect}(A, A^2)$. Il existe donc deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A$ et par conséquent

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = (\alpha_n A^2 + \beta_n A) \cdot A = \beta_n A^2 + \alpha_n A^3 = \beta_n A^2 + \alpha_n (3A^2 - 2A) \\ &= (3\alpha_n + \beta_n)A^2 - 2\alpha_n A \in \text{Vect}(A, A^2). \end{aligned}$$

On a ainsi démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un couple $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A.$$

• L'unicité de cette décomposition prouve que les coefficients α_n et β_n vérifient une relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n, \quad \beta_{n+1} = -2\alpha_n.$$

3. Par définition de P_1 et de P_2 , on déduit de la décomposition (*) de A^3 que

$$\begin{aligned} AP_1 &= A(2A - A^2) = 2A^2 - A^3 \stackrel{(*)}{=} 2A^2 - (3A^2 - 2A) = 2A - A^2 = P_1 \\ AP_2 &= \frac{1}{2} \cdot A(A^2 - A) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} [(3A^2 - 2A) - A^2] = A^2 - A = 2P_2. \end{aligned}$$

• Pour $n = 1$, il est clair que

$$P_1 + 2P_2 = (2A - A^2) + (A^2 - A) = A = A^1.$$

S'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = P_1 + 2^n P_2$, alors

$$A^{n+1} = A(P_1 + 2^n P_2) = AP_1 + 2^n AP_2 = P_1 + 2^n \cdot 2P_2 = P_1 + 2^{n+1} P_2.$$

Le résultat est ainsi démontré par récurrence.

• En revenant aux définitions de P_1 et P_2 , on a ainsi démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = (2A - A^2) + 2^{n-1}(A^2 - A) = (2^{n-1} - 1)A^2 + (2 - 2^{n-1})A$$

et on a retrouvé la décomposition de la question précédente (en explicitant cette décomposition).

Soit f , une fonction de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} . On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) = 1.$$

1. Démontrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall x \geq a, \quad f'(x) \geq \frac{1}{2x}.$$

2. En déduire qu'il existe deux nombres $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall x \geq a, \quad f(x) \geq A + B \ln x$$

puis que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

1. Par définition de la limite, comme $1/2 < 1$, il existe $a > 0$ tel que

$$\forall t \geq a, \quad tf'(t) \geq \frac{1}{2}.$$

2. Comme f est de classe \mathcal{C}^1 , on déduit du Théorème fondamental que

$$\forall x \geq a, \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt \geq \int_a^x \frac{dt}{2t} = \frac{\ln x - \ln a}{2}.$$

✎ On a établi une minoration de $f'(t)$ qui n'est valable que sur l'intervalle $[a, +\infty[$. On ne peut donc intégrer cette inégalité que sur un segment contenu dans l'intervalle $[a, +\infty[$.

Finalement,

$$\forall x \geq a, \quad f(x) \geq \left(f(a) - \frac{\ln a}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln x.$$

• Comme $B = 1/2 > 0$ convient, on en déduit par comparaison que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

✎ En reprenant les calculs de manière plus précise (à la manière de la démonstration du Théorème de Cesaro), on peut démontrer que $f(x) \sim \ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On considère la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et de la relation de récurrence suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$$

1. Représenter graphiquement le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et qu'elle tend vers $+\infty$.
3. Pour quel réel α la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ admet-elle une limite finie non nulle ?
4. En admettant que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^\alpha}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha,$$

que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

1. On reconnaît une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ associée à la fonction

$$f = [x \mapsto x + 1/x^2].$$

Cette fonction f est définie et strictement positive sur $]0, +\infty[$, donc l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par f . Comme $u_0 = 1 \in]0, +\infty[$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs strictement positives.

• On vérifie facilement que la fonction f est d'abord décroissante, puis croissante.

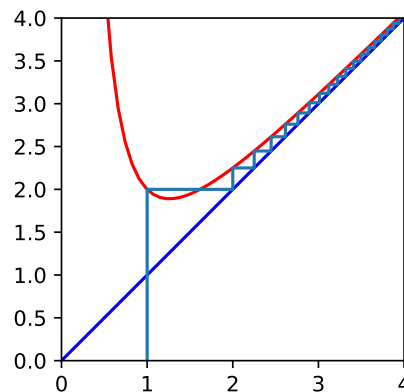
Enfin, on doit remarquer que la droite $y = x$ est asymptote au graphe de f et que le graphe de f est situé au-dessus de cette asymptote :

$$\forall x > 0, \quad f(x) > x.$$

```
def f(x):
    return x+1/x**2

u, X, Y = 1, [1], [0]
N = 100
for n in range(N):
    v = f(u) # u = u_n, v = u_{n+1}
    X.extend([u, v])
    Y.extend([v, v])
    u = v # u = u_{n+1}

xmax = 4
x = np.linspace(0.01, xmax)
y = f(x)
plt.plot(x, y, 'r') # la fonction itératrice f
plt.plot(x, x, 'b') # la bissectrice y = x
plt.plot(X, Y) # la suite (u_n)
plt.axis("square")
plt.xlim(0, xmax)
plt.ylim(0, xmax)
```



2. Il est clair que $f(x) \geq x$ pour tout $x > 0$, donc $u_{n+1} = f(u_n) > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

• D'après le Théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers une limite ℓ , finie ou infinie. Par croissance de la suite, la limite ℓ est supérieure à $u_0 = 1$.

Comme f est continue sur $]0, +\infty[$, si la limite ℓ est réelle, alors f est continue au point ℓ (puisque $\ell > 0$) et, en passant à la limite dans la relation de récurrence,

$$\ell = f(\ell) = \ell + \frac{1}{\ell^2},$$

ce qui est absurde.

Donc la limite n'est pas réelle, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend donc vers $+\infty$.

3. D'après la relation de récurrence, en tenant compte du fait que u_n tend vers $+\infty$,

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{u_n^3}\right)^\alpha - 1 \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n^\alpha \left[\frac{\alpha}{u_n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha u_n^{\alpha-3}.$$

☞ On a utilisé ici le développement limité $(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + o(h)$ (lorsque h tend vers 0) et, pour le calcul de l'équivalent, on a remarqué que la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ tendait vers 0 pour $\alpha = 0$ (on cherche ici une limite finie non nulle).

• Si $\alpha > 3$, alors l'exposant $(\alpha - 3)$ est strictement positif et comme u_n tend vers $+\infty$, on en déduit que la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ tend vers $+\infty$.

Si $\alpha < 3$, alors l'exposant $(\alpha - 3)$ est strictement négatif et cette fois la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ tend vers 0.

Par conséquent, la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ tend vers une limite finie non nulle si, et seulement si, $\alpha = 3$. Dans ce cas, la limite est égale à α , c'est-à-dire à 3.

4. On a ainsi démontré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^3}{n} = 3$$

et donc que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}.$$

On a ainsi précisé la **vitesse** avec laquelle la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (assez lente, comme on l'avait vu sur la figure).

☞ Le résultat admis par l'énoncé n'est autre que le Théorème de Cesaro.
En effet, nous avons démontré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^3 - u_n^3 = 3$$

et le Théorème de Cesaro nous permet d'en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^3 - u_k^3) = 3.$$

On reconnaît une somme télescopique :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^3 - u_k^3) = \frac{u_n^3}{n} - \frac{u_0^3}{n}$$

et il est clair que u_0^3/n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 \\ -14 & 28 & -20 \\ -18 & 36 & -26 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier l'existence d'un endomorphisme u de \mathbb{R}^3 tel que A soit la matrice de u relative à la base canonique \mathcal{B}_0 .
2. Justifier l'existence d'une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 telle que P soit la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} .
3. Calculer les produits matriciels suivants.

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En déduire la matrice $P^{-1}AP$.

4. Donner un vecteur directeur de $\text{Ker } u$.
5. Quel est le rang de u ? Donner une équation cartésienne de $\text{Im } u$.

1. **Cours :** Quelle que soit la base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 , l'application

$$[f \mapsto \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)]$$

est un isomorphisme de l'espace des endomorphismes $L(\mathbb{R}^3)$ sur l'espace des matrices $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

En particulier, pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, il existe un, et un seul, endomorphisme $u \in L(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}_0}(u)$.

2. **Cours :** Une matrice carrée P est la matrice de passage de la base canonique à une base \mathcal{B} si, et seulement si, elle est inversible.

Il s'agit donc de vérifier que P est inversible et, pour cela, le calcul du rang est la méthode la plus efficace.

L'opération $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2$ démontre que la matrice P est équivalente à la matrice

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La première et la troisième colonne de P' ne sont pas proportionnelles (donc le rang de P' est supérieur à 2) et la deuxième colonne de P' n'est pas une combinaison linéaire des deux autres (donc le rang de P' est supérieur à 3).

Comme les matrices P et P' sont équivalentes, leurs rangs sont égaux, donc $\text{rg } P = 3$ et par conséquent P est inversible.

3. On vérifie sans peine que

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

On aura reconnu les colonnes de la matrice P , matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} . En notant $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base \mathcal{B} , on vient en fait de démontrer que

$$u(\varepsilon_1) = 0, \quad u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2, \quad u(\varepsilon_3) = -2 \cdot \varepsilon_3$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_1) &= 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3, \\ u(\varepsilon_2) &= 0 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3, \\ u(\varepsilon_3) &= 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + (-2) \cdot \varepsilon_3. \end{aligned}$$

D'après la formule de changement de base, la matrice $P^{-1}AP$ représente l'endomorphisme u dans la base \mathcal{B} donc

$$P^{-1}AP = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\varepsilon_1), u(\varepsilon_2), u(\varepsilon_3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. On a remarqué que $u(\varepsilon_1) = 0$, donc $\varepsilon_1 \in \text{Ker } u$.

5. Les deux premières colonnes de la matrice A ne sont pas proportionnelles, donc le rang de A (et donc celui de u) est supérieur à 2.

Le noyau de u contient un vecteur non nul (le vecteur ε_1 par exemple), donc la dimension du noyau de u est supérieure à 1. D'après le Théorème du rang, le rang de u est inférieur à $3 - 1 = 2$.

Donc le rang de u est égal à 2.

☞ *Le Théorème du rang nous assure donc que le noyau de u est une droite vectorielle. Chaque vecteur non d'une droite vectorielle est un vecteur directeur de cette droite, donc*

$$\text{Ker } u = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1 = \mathbb{R} \cdot (2, 1, 0).$$

☛ L'image de u est donc un hyperplan de \mathbb{R}^3 et peut donc être représenté par une équation cartésienne.

☞ *L'ensemble des vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient l'équation cartésienne $ax + by + cz = 0$ est en fait le noyau de la forme linéaire*

$$[(x, y, z) \mapsto ax + by + cz]$$

et cette forme linéaire n'est identiquement nulle que si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

L'image de A est engendrée par les colonnes de A et comme le rang de A est égal à 2, on cherche une forme linéaire dont le noyau est engendré par les deux premières colonnes de A (par exemple). Mais ces colonnes sont particulièrement moches...

On a remarqué que $u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et que $u(-1/2 \cdot \varepsilon_3) = \varepsilon_3$ et donc que ε_2 et ε_3 appartiennent à l'image de u .

☞ *Les vecteurs propres associés à des valeurs propres non nulles appartiennent toujours à l'image. (À retenir!)*

Comme ces vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre et comme $\text{rg } u = 2$, ils forment même une base de $\text{Im } u$.

Il s'agit donc de trouver une forme linéaire

$$\varphi = [(x, y, z) \mapsto ax + by + cz]$$

dont le noyau contienne ε_2 et ε_3 . Autrement dit, trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a + 2b + 2c = 0 \quad \text{et} \quad 2b + 3c = 0.$$

Les solutions de ce système (deux équations, trois inconnues) sont

$$(a, b, c) = (2t, -3t, 2t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

donc

$$\text{Im } u = [2x - 3y + 2z = 0].$$

☞ *On a trouvé une infinité de solutions car un plan admet une infinité d'équations cartésiennes — toutes proportionnelles entre elles.*

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1. À l'aide d'opérations de pivot sur les colonnes, montrer que la matrice A_λ a même rang que la matrice

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 - 2\lambda & 2 \\ 1 & 1 - \lambda^2 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Le rang de la matrice B_λ peut-il être égal à 0 ? à 1 ?
 3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que B_λ soit inversible.
 4. En étudiant les variations de la fonction

$$[t \mapsto t^3 - 3t + 1],$$

déterminer le nombre de réels λ tels que le rang de la matrice A_λ soit égal à 2.

1. On effectue d'abord $C_3 \leftarrow C_3 - \lambda C_2$ et ensuite $C_2 \leftrightarrow C_3$.
 Les opérations de pivot conservent le rang, donc $\text{rg } B_\lambda = \text{rg } A_\lambda$.
 2. La matrice B_λ n'est pas la matrice nulle (indépendamment de la valeur du paramètre λ), donc le rang de B_λ n'est jamais nul.

↳ La seule matrice dont le rang est nul est la matrice nulle.

• La première colonne de B_λ n'est pas nulle et elle n'est pas proportionnelle à la troisième colonne de B_λ , donc le rang de B_λ est au moins égal à 2. Comme $\text{rg } A_\lambda = \text{rg } B_\lambda$, le rang de A_λ ne peut pas être égal à 1.

3. La matrice B_λ est inversible si, et seulement si, son déterminant est différent de 0. En développant par la dernière ligne,

$$\det B_\lambda = \begin{vmatrix} \lambda & 1 - 2\lambda \\ 1 & 1 - \lambda^2 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda - 1.$$

Donc la matrice B_λ est inversible si, et seulement si,

$$\lambda^3 - 3\lambda + 1 \neq 0.$$

4. Appelons f , cette fonction polynomiale. Il est clair que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 3t^2 - 3t = 3t(t - 1).$$

On en déduit que f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$.

De plus, $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$. Enfin, la fonction f tend vers $-\infty$ au voisinage de $-\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

En appliquant trois fois le Théorème de la bijection monotone, on conclut que la fonction f s'annule exactement trois fois sur \mathbb{R} : une fois sur $]-\infty, 0[$, une fois sur $]0, 1[$ et une fois sur $]1, +\infty[$.

Il existe donc exactement trois réels pour lesquels la matrice A_λ n'est pas inversible. Comme le rang de A_λ n'est jamais nul, ni égal à 1, il existe donc exactement trois réels pour lesquels le rang de A_λ est égal à 2.

↳ Et pour tous les autres réels, le rang de A_λ est égal à 3 (la matrice est inversible).

On considère la fonction f définie par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

1. Étudier les variations de f .
2. Calculer la primitive F de f qui s'annule en $x = 1$. Tracer l'allure des graphes de f et de F sur une même figure.
3. Démontrer que f réalise une bijection de l'intervalle $I =]0, +\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera. Sur quelle partie de J la bijection réciproque f^{-1} est-elle continue? de classe \mathcal{C}^2 ?
4. Indiquer comment tracer le graphe de f et celui de f^{-1} sur une même figure à l'aide du langage Python.
5. Démontrer que la bijection réciproque f^{-1} est lipschitzienne.

1. La fonction f est clairement de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \geq 1 > 0,$$

donc f est strictement croissante.

⚡ Il ne sert à rien de calculer le signe de la dérivée si on n'a pas au préalable précisé qu'on étudie la fonction sur un **intervalle**.

Il est aussi clair que la fonction f tend vers $-\infty$ au voisinage (droit) de 0 et vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

⚡ Plus précisément, comme $-1/x$ tend vers 0 par valeurs négatives au voisinage de $+\infty$, la droite $y = x$ est asymptote au graphe de f et le graphe de f est situé sous l'asymptote (au moins au voisinage de $+\infty$).

2. Comme f est continue, on déduit du Théorème fondamental de l'analyse que

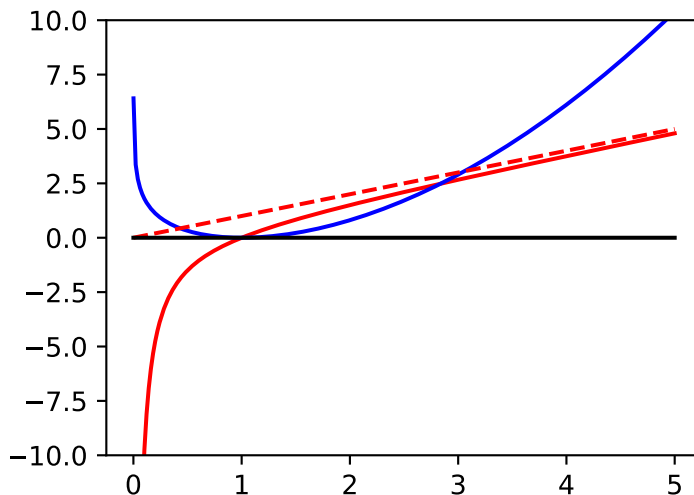
$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int_1^x f(t) dt = \frac{x^2 - 1}{2} - \ln x.$$

⚡ Comme f est strictement croissante, la fonction F est convexe.

Les deux fonctions f et F s'annulent toutes les deux pour $x = 1$, donc la fonction croissante f est du signe de $(x - 1)$. Sa primitive F est donc décroissante sur $]0, >]$ et croissante sur $[1, +\infty[$ et toujours positive.

Enfin,

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x \quad \text{et} \quad F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$



3. On a constaté que f était continue et strictement croissante sur l'intervalle I . De plus, elle tend vers $-\infty$ au voisinage de 0 et vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$. D'après le Théorème de la bijection monotone, la fonction f réalise une bijection de I sur $J = \mathbb{R}$.

Toujours d'après le Théorème de la bijection monotone,

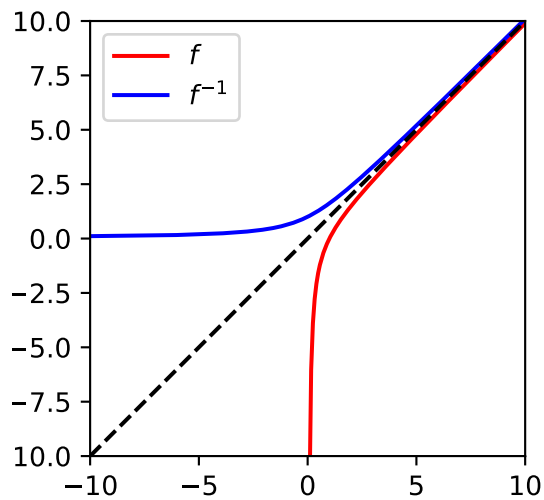
- la bijection réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle J ;
- comme f' ne s'annule pas sur I et que f est de classe \mathcal{C}^2 sur I , la bijection réciproque f^{-1} est de classe \mathcal{C}^2 sur J .

4.

```
def f(x):
    return x-1/x

def F(x):
    return (x**2-1)/2-np.log(x)
```

```
x = np.linspace(0.001, 20, 250)
y = f(x)
plt.plot(x, y, 'r', label="f")
plt.plot(y, x, 'b', label="f^-1")
t = np.linspace(-10, 10, 3)
plt.plot(t, t, 'k--')
plt.axis("square")
plt.xlim(-10, 10)
plt.ylim(-10, 10)
plt.legend()
```



5. On sait que

$$\forall x \in J = \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

et on a constaté plus haut que

$$\forall u > 0, \quad f'(u) \geq 1.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in J, \quad 0 \leq (f^{-1})'(x) \leq 1$$

et la fonction (croissante) f^{-1} est 1-lipschitzienne sur \mathbb{R} d'après l'inégalité des accroissements finis.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^\pi \frac{e^{-nx}}{1+e^x} dx.$$

1. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_{e^{-\pi}}^1 \frac{u^n}{1+u} du.$$

2. En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Au moyen d'une intégration par parties, démontrer que $(n+1)I_n$ tend vers $1/2$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. En déduire un équivalent de I_n .

1. L'application $[x \mapsto u = e^{-x}]$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 qui réalise une bijection (décroissante) de $[0, \pi]$ sur $[e^{-\pi}, 1]$. On déduit de la formule du changement de variable que

$$\int_0^\pi \frac{e^{-nx}}{1+e^x} dx = \int_0^\pi \frac{(e^{-x})^n}{e^{-x}+1} e^{-x} dx = \int_{e^{-\pi}}^1 \frac{u^n}{u+1} du.$$

2. Il est clair que

$$\forall 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq u^n \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 < 1+u \leq 1.$$

Par conséquent,

$$\forall u \in [e^{-\pi}, 1] \subset [0, 1], \quad 0 \leq \frac{u^n}{u+1} \leq u^n$$

et en intégrant cet encadrement (les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit (par encadrement) que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. On intègre par parties :

$$\begin{aligned} (n+1)I_n &= \int_{e^{-\pi}}^1 \frac{1}{1+u} \cdot (n+1)u^n du = \left[\frac{u^{n+1}}{1+u} \right]_{e^{-\pi}}^1 + \int_{e^{-\pi}}^1 \frac{u^{n+1}}{(1+u)^2} du \\ &= \frac{1}{2} - \frac{e^{-(n+1)\pi}}{1+e^{-\pi}} + \int_{e^{-\pi}}^1 \frac{u^{n+1}}{1+u} du \end{aligned}$$

Il est clair que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(n+1)\pi}}{1+e^{-\pi}} = 0$$

et, pour les mêmes raisons que plus haut,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_{e^{-\pi}}^1 \frac{u^{n+1}}{1+u} du \leq \frac{1}{n+2}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n = \frac{1}{2}.$$

4. On en déduit que

$$nI_n = \frac{n}{n+1} \cdot (n+1)I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

et donc que

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 représenté dans la base canonique par la matrice suivante.

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\alpha + 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2\alpha - 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

- 1.** Déterminer une base de $\text{Ker}(f - \alpha I)$ et compléter cette base pour obtenir une base de $\text{Ker}(f - \alpha I)^2$.
2. On pose $u_3 = (1, 1, 0)$. Calculer $(f - \alpha I)(u_3)$ et $(f - \alpha I)^2(u_3)$. En déduire une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de \mathbb{R}^3 telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

- 1.** L'endomorphisme $(f - \alpha I)$ est représenté dans la base canonique par la matrice

$$A - \alpha I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

⚡ Attention ! Il faut éviter le piège tendu par le facteur $1/2$!

Les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles, donc le rang est au moins égal à 2. Les deux dernières colonnes sont proportionnelles (opposées même), donc le rang est au plus égal à 2.

D'après le Théorème du rang, la somme du rang et de la dimension du noyau est égale au nombre de colonnes de la matrice. Par conséquent, le noyau de $(f - \alpha I)$ est une droite vectorielle et, de ce fait, chaque vecteur non nul de ce noyau est un vecteur directeur de cette droite.

On a remarqué que $C_3 = -C_2$, c'est-à-dire $0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 + 1 \cdot C_3 = 0$, donc le vecteur $(0, 1, 1)$ appartient au noyau de $(f - \alpha I)$ et finalement

$$\text{Ker}(f - \alpha I) = \mathbb{R} \cdot (0, 1, 1).$$

⚡ Les coefficients de la relation de liaison $0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 + 1 \cdot C_3 = 0$ nous donnent les coordonnées relatives à la base canonique d'un vecteur du noyau.

- L'endomorphisme $(f - \alpha I)^2$ est représenté dans la base canonique par la matrice

$$(A - \alpha I_3)^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est pas nulle et toutes ses colonnes sont proportionnelles entre elles, donc le rang de cette matrice est égal à 1 et (Théorème du rang) la dimension de son noyau est égale à 2.

Le noyau de cette matrice a pour équation cartésienne

$$x + y - z = 0.$$

⚡ Il suffit d'écrire l'équation $(A - \alpha I_3)^2 X = 0$ sous forme d'un système : la première ligne est nulle et les deux autres sont égales.

Il est clair que les coordonnées du vecteur $(0, 1, 1)$ vérifient cette équation. De même, le vecteur $(1, 0, 1)$ vérifie cette équation et comme il n'est pas proportionnel au précédent, le couple

$$((0, 1, 1), (1, 0, 1))$$

est une famille libre du noyau de $(f - \alpha I)^2$. Et comme ce noyau est un plan vectoriel, on en déduit que cette famille libre est en fait une base de $\text{Ker}(f - \alpha I)^2$.

2. Le vecteur u_3 est représenté dans la base canonique de \mathbb{R}^3 par la colonne

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans cette même base, l'endomorphisme $(f - aI)$ est représenté par la matrice $(A - aI_3)$. Donc les vecteurs $(f - aI)(u_3)$ et $(f - aI)^2(u_3)$ sont représentés dans cette base par les colonnes

$$(A - aI_3)u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A - aI_3)^2 u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• En posant

$$u_2 = (f - aI)(u_3) = (1, 0, 1) \quad \text{et} \quad u_1 = (f - aI)^2(u_3) = (f - aI)(u_2) = (0, 1, 1), \quad (*)$$

on définit une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de \mathbb{R}^3 car la matrice

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible.

↳ L'opération de pivot $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ démontre que le rang de cette matrice est égal au rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles et la troisième colonne n'est pas une combinaison linéaire des deux premières, donc cette matrice est bien inversible.

La matrice de $(f - aI)$ relative à la base \mathcal{B} est très simple à calculer : par définition (*),

$$(f - aI)(u_2) = u_1, \quad (f - aI)(u_3) = u_2$$

et on a remarqué à la première question que

$$u_1 = (0, 1, 1) \in \text{Ker}(f - aI).$$

Ainsi,

$$\begin{array}{lll} f(u_1) = a \cdot u_1 & = a \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 & \text{(première colonne)} \\ f(u_2) = u_1 + a \cdot u_2 & = 1 \cdot u_1 + a \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 & \text{(deuxième colonne)} \\ f(u_3) = u_2 + a \cdot u_3 & = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + a \cdot u_3 & \text{(troisième colonne)} \end{array}$$

et par conséquent

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$