
ORAUX BLANCS MPI — 15 JUIN 2026

Référence	Origine	Thèmes
136-1179	Centrale MP	Polynômes
136-1215	"	Série de fonctions
136-1230	"	Équation différentielle
136-1369	IMT MP	Réduction
136-1411	CCINP MP	Série entière
136-1422	IMT MP	Intégration terme à terme
136-1433	"	Inégalité des accroissements finis
136-1437	"	Une urne, des boules
136-1438	CCINP MP	Étude d'une variable aléatoire
136-1440	IMT MP	Formule de l'espérance totale
136-1448	"	Étude asymptotique d'une marche aléatoire
136-1449	ISUP	Inégalité de Cantelli
136-1457	CCINP PSI	Projections
136-1475	"	Réduction d'une matrice
136-1476	"	Réduction et sous-espaces stables
136-1486	IMT PSI	Matrices anticommutes
136-1490	CCINP PSI	Diagonalisabilité d'une racine carrée
136-1496	"	Réduction d'un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$
136-1504	"	Sous-espaces orthogonaux en dimension infinie
136-1508	IMT PSI	Projections orthogonales
136-1510	"	Matrices antisymétriques
136-1514	CCINP PSI	Similitudes
136-1520	IMT PSI	Sous-espace dense dans un espace préhilbertien
136-1522	"	Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}
136-1536	"	Convergence d'une intégrale généralisée
136-1544	CCINP PSI	Série de fonctions
136-1549	IMT PSI	Série entière
136-1551	"	Suite récurrente
136-1577	IMT PSI	Équation intégrale
136-1580	ENSEA PSI	Équation différentielle

Il est possible qu'il reste des fautes de frappe ou de calcul (ou de raisonnement). N'hésitez pas à m'en faire part, merci d'avance!

Dans ce qui suit, \mathbb{K} désigne un corps.

[Question de cours]

Énoncer le Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

[Question de cours]

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que a soit racine simple de P .

[1.] Soit $n \geq 2$. On pose

$$P_n = X^n - X + (-1)^n.$$

Déterminer le nombre de racines de P_n dans \mathbb{Q} , dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} .

[2.] On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, les racines complexes de P_n (comptées avec multiplicité). Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 + \alpha_n \end{pmatrix}.$$

[1.] Si $x = p/q$ est une racine rationnelle de P_n (écrite sous forme irréductible), alors

$$p^n - pq^{n-1} + (-1)^n q^n = 0$$

donc $p^n = q^{n-1}[p - (-1)^n q]$. Par conséquent, l'entier q divise p^n alors que, par hypothèse, p et q sont premiers entre eux. On en déduit que $q = 1$ et donc que $p^n - p + (-1)^n = 0$, c'est-à-dire

$$p(p^{n-1} - 1) = (-1)^{n+1}.$$

Donc p divise (-1) et par conséquent $x = \pm 1$.

Or $P_n(1) = (-1)^n \neq 0$ et $P_n(-1) = 2 \cdot (-1)^n + 1 \neq 0$. Donc P_n n'a pas de racine rationnelle.

• Considérons maintenant P_n comme une application polynomiale de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Cette application est de classe \mathcal{C}^2 et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n'(x) = nx^{n-1} - 1, \quad P_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}.$$

Posons $r_n = (1/n)^{1/(n-1)} \in]0, 1[$.

Si n est impair, alors la fonction P_n est croissante sur les intervalles

$$]-\infty, -r_n] \quad \text{et} \quad [r_n, +\infty[$$

et décroissante sur le segment $[-r_n, r_n]$. De plus,

$$P_n(-r_n) = -\left(\frac{1}{n}\right)^{n/(n-1)} + \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(n-1)} - 1 < 0,$$

donc P_n est strictement négative sur $]-\infty, r_n]$. Sur l'intervalle $]r_n, +\infty[$, la fonction P_n est continue, strictement croissante et change de signe. Donc P_n admet une, et une seule, racine réelle.

• Comme n est impair, $P_n(1) = -1 < 0$ et $P_n(2) = 2^n - 2 - 1 > 0$ (puisque $n \geq 2$), donc la racine réelle est comprise entre 1 et 2.

Si n est pair, alors la fonction P_n est convexe sur \mathbb{R} et atteint son minimum en r_n . Ce minimum est égal à

$$P_n(r_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n/(n-1)} - \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(n-1)} + 1 > 0$$

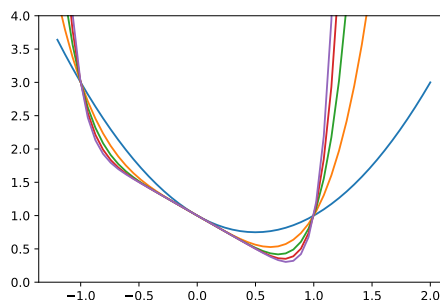
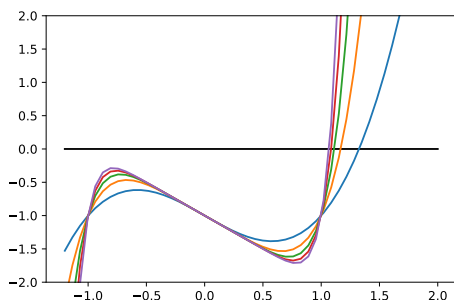
(le terme négatif est compris entre -1 et 0), donc P_n n'a pas de racine réelle.

☞ On peut facilement vérifier les calculs précédents en définissant une fonctionnelle P (c'est-à-dire une fonction de n qui renvoie une fonction de x) et en traçant quelques graphes.

```
def P(n):
    def Pn(x):
        return x**n-x+(-1)**n
    return Pn

U = np.linspace(-1.2, 2)

plt.figure()
plt.plot(U, np.zeros_like(U), 'k') # axe des abscisses
for k in range(1, 6):
    P_impair = P(2*k+1)
    plt.plot(U, P_impair(U))
plt.ylim(-2, 2)
plt.figure()
for k in range(1, 6):
    P_pair = P(2*k)
    plt.plot(U, P_pair(U))
plt.ylim(0, 4)
```



Graphes de quelques fonctions P_n avec n impair à gauche et n pair à droite

☛ Sur le corps \mathbb{C} , le polynôme P_n est scindé (son degré est supérieur à 2, donc il n'est pas constant). Par ailleurs, si $P'_n(z) = 0$, alors $z^{n-1} = 1/n$ et par conséquent

$$P_n(z) = z^n - z + (-1)^n = z\left(\frac{1}{n} - 1\right) + (-1)^n$$

et comme

$$0 \leq \left|z\left(\frac{1}{n} - 1\right)\right| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)|z| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)r_n < 1,$$

il est clair que $P_n(z) \neq 0$. D'après la deuxième question de cours, les racines complexes de P_n sont toutes simples, donc P_n possède exactement n racines complexes de multiplicité 1.

[2.] Comme P_n est un polynôme unitaire scindé de degré n ,

$$P_n = \prod_{k=1}^n (X - a_k) = X^n - \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)X^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \left(\sum_{k=1}^n \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq k}} a_\ell\right)X + (-1)^n \prod_{k=1}^n a_k.$$

On en déduit que la somme des racines est nulle et que

$$\sum_{k=1}^n \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq k}} a_\ell = \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq k}} a_\ell = (-1)^n.$$

☞ Les relations entre coefficients et racines d'un polynôme sont très utiles. À défaut de les connaître, il faut savoir les retrouver rapidement.

• Le calcul qui suit est assez astucieux, mais cette astuce est plutôt classique. (Peut-être existe-t-il une méthode sans astuce pas trop compliquée?)

• Considérons l'application polynomiale Q définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \det(M - xI_n).$$

C'est, au signe près, le polynôme caractéristique de M , donc c'est un polynôme de degré n et son coefficient dominant est égal à $(-1)^n$.

Comme les scalaires a_k sont deux à deux distincts, la famille $(L_k)_{1 \leq k \leq n}$ des polynômes interpolateurs de Lagrange est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et comme P_n est un polynôme unitaire de degré n , il existe n scalaires $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que

$$Q = (-1)^n P_n + \sum_{k=1}^n u_k L_k. \tag{*}$$

On sait (cf cours sur l'interpolation de Lagrange) que $u_k = Q(a_k)$ pour $1 \leq k \leq n$.

Pour simplifier les notations, nous allons calculer $Q(a_1)$ et on donnera le résultat général qui s'en déduit.

$$\begin{aligned} Q(a_1) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 + a_2 - a_1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 + a_n - a_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 - a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & a_n - a_1 \end{vmatrix} \quad (C_j \leftarrow C_j - C_1 \text{ pour } 2 \leq j \leq n) \\ &= \prod_{k=2}^n (a_k - a_1) \quad (\text{matrice triangulaire}) \end{aligned}$$

On se convainc aisément que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad Q(a_k) = \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq k}} (a_\ell - a_k)$$

et donc que, d'après (*) et la formule *bien connue* des polynômes interpolateurs de Lagrange,

$$Q = (-1)^n P_n + \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq k}} (a_\ell - X).$$

En particulier,

$$\det M = Q(0) = (-1)^n P_n(0) + \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq k}} a_\ell = 1 + (-1)^n.$$

Le déterminant de M est donc égal à 2 lorsque n est pair et à 0 lorsque n est impair.

• Pour un polynôme P de la forme

$$P = X^n + u_1 X^{n-1} + \dots + u_{n-1} X + u_n$$

qui admet n racines a_1, \dots, a_n deux à deux distinctes dans \mathbb{C} , on trouverait de la même manière

$$\det M = \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq k}} a_\ell + \prod_{k=1}^n a_k = (-1)^{n-1} u_{n-1} + (-1)^n u_n.$$

• Si les racines complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ne sont pas deux à deux distinctes, il suffit de constater que $\det M$ est en général une expression polynomiale des $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (avec la somme sur les permutations de \mathfrak{S}_n) et que deux polynômes qui sont égaux sur une partie dense de \mathbb{C}^n sont en fait égaux sur \mathbb{C}^n . (Si on ne sait pas démontrer que les listes de n complexes deux à deux distinctes sont denses dans \mathbb{C}^n , on ne sait pas non plus démontrer que les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$...)

• Il est facile de vérifier cette formule sur quelques exemples avec les modules habituels de Python.

On part de la liste des racines complexes (pas nécessairement distinctes) pour définir le polynôme unitaire P .

```
def polynome(A):
    P = (X-A[0])
    for a in A[1:]:
        P *= (X-a)
    return P
```

La matrice M est alors vite définie et son déterminant facilement calculé.

```
def formule_verifiee(A):
    P = polynome(A)
    n = P.degree()
    M = np.ones((n, n))+np.diag(A)
    expr = (-1)**n*(P.coef[0]-P.coef[1])
    return (alg.det(M)-expr)
```

On peut vérifier sur des exemples variés que la différence entre le déterminant de M et l'expression littérale

$$(-1)^n(u_n - u_{n-1})$$

est très faible (de l'ordre de 10^{-17}) et seulement dûe aux inévitables erreurs d'arrondi.

```
def coeffs_aleatoires():
    n = rd.randint(2, 10)
    A = rd.random(n+1)
    print(formule_verifiee(A))

for _ in range(20):
    coeffs_aleatoires()
```

On note E , l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Pour $f \in E$, on pose $f_0 = f$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x t f_n(t) dt.$$

[Question de cours]

Énoncer le théorème d'intégration terme à terme.

[1.] Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$

[1.a.] dans le cas où la fonction f est constante

[1.b.] puis dans le cas général.

[2.] On note $T(f)$, la somme de la série de fonctions $\sum f_n$. Démontrer que T est un automorphisme de E .

[1.a.] Supposons que $f(x) = C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On vérifie par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = C \frac{x^{2n}}{2^n n!}.$$

La série de fonctions $\sum f_n$ est donc une série entière dont le rayon de convergence est infini et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = C \exp \frac{x^2}{2}.$$

[1.b.] La fonction f est continue sur \mathbb{R} , donc localement bornée : pour tout $A > 0$, il existe un réel $M_A > 0$ tel que

$$\forall x \in [-A, A], \quad |f(x)| \leq M_A.$$

On peut alors vérifier par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-A, A], \quad |f_n(x)| \leq M_A \frac{x^{2n}}{2^n n!}. \quad (*)$$

Il s'agit essentiellement de reprendre la démonstration précédente et d'utiliser l'inégalité triangulaire intégrale.

Une série entière dont le rayon de convergence est infini converge normalement sur tout segment $[-A, A]$. Par comparaison, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment $[-A, A]$ et la somme de la série est donc continue sur \mathbb{R} .

[2.] Comme f est de classe \mathcal{C}^∞ , la fonction f_0 est de classe \mathcal{C}^1 et par conséquent chaque fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 (Théorème fondamental et récurrence sur n) avec

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_n(x) = x f_{n-1}(x).$$

On déduit alors de (*) que, pour tout $A > 0$,

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [-A, A], \quad |f'_n(x)| \leq A M_A \frac{A^{2(n-1)}}{2^{n-1} (n-1)!}$$

et donc que la série dérivée $\sum f'_n$ converge normalement sur tout segment $[-A, A]$.

De ce fait, la somme $T(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [T(f)]'(x) = f'(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} x f_{n-1}(x) = f'(x) + x T(f)(x).$$

La fonction $T(f)$ est donc une solution du problème de Cauchy

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - t y(t) = f'(t) \quad \text{et} \quad y(0) = f(0). \quad (\dagger)$$

(Par construction, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$.) Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = f(0) e^{x^2/2} + e^{x^2/2} \int_0^x f'(t) e^{-t^2/2} dt.$$

Comme f' est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , on déduit du Théorème fondamental que $T(f)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , c'est-à-dire $T(f) \in E$.

• Il est clair que T est linéaire (par linéarité de l'intégration), donc T est un endomorphisme de E .

• Soit $g \in E$. L'application $t \mapsto g'(t) - tg(t)$ appartient à E , donc il existe une, et une seule, application $f \in E$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = g'(t) - tg(t) \quad \text{et} \quad f(0) = g(0).$$

Le problème de Cauchy (†) admettant une, et une seule, solution, on en déduit que cette application f est l'unique élément de E tel que $T(f) = g$. Donc $T : E \rightarrow E$ est une bijection et finalement T est bien un automorphisme de E .

On considère l'équation différentielle

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0 \quad (E)$$

où $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, paire et π -périodique.

[**Question de cours**]

Démontrer que l'ensemble S des solutions de (E) est un espace vectoriel. Préciser sa dimension.

[**1.**] Pour $y \in S$, on pose

$$\varphi(y) = [x \mapsto y(x + \pi)].$$

Démontrer que φ est un endomorphisme de S .

[**2.**] Soit $\mathcal{B} = (y_1, y_2)$, la base de S formée des solutions qui vérifient

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

[**2.a.**] Démontrer que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}.$$

[**2.b.**] Étudier la parité de y_1 et de y_2 .

[**2.c.**] Démontrer que $\det A = 1$.

[**2.d.**] Que dire du polynôme caractéristique de A ? Démontrer que $A + A^{-1} = \operatorname{tr} A \cdot I_2$, puis que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix}.$$

En déduire que

$$y_1(\pi) = y_2'(\pi).$$

[**1.**] Soit $y \in S$.

Comme y est \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} (par définition de S) et que $x \mapsto x + \pi$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} (fonction affine), la fonction $\varphi(y)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

De plus, d'après la formule de dérivation des fonctions composées,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\varphi(y)]''(x) = y''(x + \pi) \stackrel{*}{=} -q(x + \pi)y(x + \pi) \stackrel{*}{=} -q(x)\varphi(y)(x),$$

l'égalité $*$ découlant de la périodicité de q . On vient de vérifier que $\varphi(y)$ appartient bien à S .

La linéarité de φ est claire.

🔗 Il s'agit de vérifier que

$$\forall y, z \in S, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda y + z)(x) = \lambda \varphi(y)(x) + \varphi(z)(x)$$

et, à mon avis, un examinateur normalement constitué se satisfait de voir un candidat écrire cette expression (avec les quantificateurs qui vont bien).

Donc φ est bien un endomorphisme de S .

[**2.**] 🔗 On pourra se référer à chaque étape de l'étude à un cas particulier bien connu : si la fonction q est constante, égale à 1, alors $y_1 = \cos$ et $y_2 = \sin$.

[**2.a.**] On sait (Théorème de Cauchy-Lipschitz) qu'il existe une, et une seule, fonction $y_1 \in S$ telle que $y_1(0) = 1$ et $y_1'(0) = 0$. De même pour y_2 .

On sait aussi (cf cours) que S est un espace vectoriel de dimension 2 et que l'application

$$\Phi : S \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ y \longmapsto (y(0), y'(0))$$

est un isomorphisme de S sur \mathbb{R}^2 . Comme les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^2 et que l'image réciproque d'une base (de \mathbb{R}^2) par un isomorphisme est une base (de S), le couple (y_1, y_2) est bien une base de S .

🔗 Certes, la question n'est pas posée, mais il faut savoir y répondre.

Par définition de φ ,

$$\varphi(y_1)(0) = y_1(0 + \pi) = y_1(\pi), \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad [\varphi(y_1)]'(x) = y_1'(x + \pi)$$

donc

$$\begin{cases} \varphi(y_1)(0) = y_1(\pi) \cdot 1 + y_1'(\pi) \cdot 0 \\ [\varphi(y_1)]'(0) = y_1(\pi) \cdot 0 + y_1'(\pi) \cdot 1 \end{cases}$$

Autrement dit, l'image de $\varphi(y_1)$ par Φ est en fait l'image de $y_1(\pi) \cdot y_1 + y_1'(\pi) \cdot y_2$ par Φ . Comme Φ est injectif (c'est un isomorphisme),

$$\varphi(y_1) = y_1(\pi) \cdot y_1 + y_1'(\pi) \cdot y_2$$

et, de même,

$$\varphi(y_2) = y_2(\pi) \cdot y_1 + y_2'(\pi) \cdot y_2$$

d'où

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}.$$

[2.b.] Considérons la fonction z_1 définie par $z_1(x) = y_1(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1''(x) = (-1)^2 y_1''(-x) \stackrel{S}{=} -q(-x) y_1(-x) \stackrel{*}{=} -q(x) z_1(x),$$

l'égalité $*$ provenant de la parité de q . De plus,

$$z_1(0) = y_1(-0) = 1 \quad \text{et} \quad z_1'(0) = -y_1'(-0) = 0$$

donc z_1 est une solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la même condition initiale que y_1 . Par conséquent, $z_1 = y_1$, ce qui signifie que la solution y_1 est paire.

En considérant $z_2(x) = -y_2(-x)$, on vérifie de manière analogue que z_2 est une solution de (E) qui vérifie la même condition initiale que y_2 , donc $z_2 = y_2$ et la solution y_2 est impaire.

[2.c.] Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

☞ *Ce n'est pas une astuce, c'est du cours : le wronskien doit être connu.*

L'équation différentielle peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = B(x) \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix}$$

donc le déterminant wronskien vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W'(x) = \text{tr } B(x) \cdot W(x) = 0.$$

☞ *Attention, le programme 2022 n'est pas clair sur ce point : le wronskien doit être connu, mais rien n'est précisé sur l'équation différentielle vérifiée par le wronskien.*

En cas de doute, on peut développer $W(x)$, le dériver et, à l'aide de l'équation (E), vérifier rapidement que $W'(x)$ est identiquement nul : il n'y a aucune difficulté technique.

Par conséquent, la fonction W est constante et

$$\det A = \det W(\pi) = \det W(0) = \det I_2 = 1.$$

[2.d.] Comme $\det A = 1$, on déduit des formules de Cramer que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} y_2'(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_1(\pi) \end{pmatrix}$$

et donc que

$$A + A^{-1} = (y_1(\pi) + y_2'(\pi)) I_2 = \text{tr } A \cdot I_2.$$

☞ *On peut éviter d'expliciter A^{-1} et se contenter d'invoquer le Théorème de Cayley-Hamilton en dimension 2, avec une matrice A inversible dont le déterminant est égal à 1.*

• On a démontré que φ était un endomorphisme de S et le calcul de déterminant a prouvé que φ était en fait un automorphisme de S . La bijection réciproque de φ est facile à expliciter :

$$\forall z \in S, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{-1}(z) = z(x - \pi).$$

En raisonnant comme plus haut, on arrive à

$$A^{-1} = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix}.$$

Par parité de y_1 et imparité de y_2 , on en déduit que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$

et donc que

$$A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 2y_1(\pi) & 0 \\ 0 & 2y_2'(\pi) \end{pmatrix}.$$

En comparant les deux expressions de $A + A^{-1}$, on arrive à la conclusion :

$$y_1(\pi) = y_2'(\pi).$$

On pose $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soient A et B , deux matrices non nulles de E et $f : E \rightarrow E$, l'application définie par

$$\forall M \in E, \quad f(M) = \text{tr}(AM)B.$$

[1.] Quels sont les éléments propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

[2.] On pose

$$\mathcal{C} = \{k \in \mathbb{R}_+ : \forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(f(M)^2) \leq k \text{tr}(M^2)\}.$$

Démontrer que \mathcal{C} n'est pas vide et déterminer son minimum.

[1.] En restriction à E , le produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit

$$\langle M | N \rangle = \text{tr}(M^T \cdot N) = \text{tr}(MN).$$

Par conséquent,

$$\forall M \in E, \quad f(M) = \langle A | M \rangle \cdot B.$$

• Comme $B \neq 0_n$, on a $f(M) = 0_n$ si, et seulement si, $\langle A | M \rangle = 0$. Comme $A \neq 0_n$, 0 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé (c'est-à-dire le noyau de f) est l'hyperplan orthogonal à A .

• Comme les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe, — ou bien f est diagonalisable et le second sous-espace propre est une droite vectorielle; — ou bien f n'est pas diagonalisable.

• Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre non nulle de f , alors il existe une matrice non nulle M telle que

$$f(M) = \lambda M = \langle A | M \rangle \cdot B$$

et comme $\lambda \neq 0$, on en déduit que M est nécessairement colinéaire à B .

Or $f(B) = \langle A | B \rangle \cdot B$. Donc deux cas se présentent :

— Si $\langle A | B \rangle \neq 0$, alors $\langle A | B \rangle$ est une valeur propre (non nulle) de f et le sous-espace propre associé à cette valeur propre est la droite dirigée par la matrice (non nulle!) B . Dans ce cas, l'endomorphisme f est diagonalisable :

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f - \langle A | B \rangle \cdot I_n).$$

— Si $\langle A | B \rangle = 0$, alors $B \in \text{Ker } f$, donc f n'admet qu'une seule valeur propre (le réel 0) et n'est pas diagonalisable (son noyau est strictement contenu dans E).

[2.] Puisqu'on travaille dans l'espace $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que

$$\forall M \in E, \quad (f(M))^2 = \langle A | M \rangle^2 \cdot B^2,$$

l'inégalité qui définit les éléments de \mathcal{C} peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\langle A | M \rangle^2 \cdot \|B\|^2 \leq k \|M\|^2. \tag{*}$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\langle A | M \rangle^2 \leq \|A\|^2 \|M\|^2$$

donc

$$\text{tr}[(f(M))^2] \leq \|A\|^2 \|B\|^2 \|M\|^2$$

et le réel $k_0 = \|A\|^2 \|B\|^2$ appartient à \mathcal{C} .

• D'après (*), un réel k appartient à \mathcal{C} si, et seulement si,

$$\forall M \in E \setminus \{0_n\}, \quad \frac{\langle A | M \rangle^2}{\|M\|^2} \cdot \|B\|^2 \leq k$$

donc \mathcal{C} admet un plus petit élément, égal à

$$\sup_{M \in E \setminus \{0_n\}} \frac{\langle A | M \rangle^2}{\|M\|^2} \cdot \|B\|^2.$$

L'inégalité de Schwarz nous a déjà montré que cette borne supérieure était inférieure à k_0 . En prenant $M = A$ (non nulle!), on constate que cette borne supérieure est supérieure à k_0 . Donc

$$\min \mathcal{C} = \|A\|^2 \|B\|^2.$$

On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{2n-1}.$$

[1.] Calculer le rayon de convergence de la série entière de somme f .

[2.] Calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n-1}}{2n-1}$$

et en déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

[1.] Le terme général tend vers 0 pour $|x| \leq 1$ et vers l'infini pour $|x| > 1$. Le rayon de convergence est donc égal à 1.

[2.] Pour $|t| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} = \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right)$$

donc, en intégrant terme à terme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}.$$

(Il faut remarquer que les deux membres sont nuls pour $t = 0$.)

• Pour $0 \leq x < 1$, on en déduit que

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n-1}}{2n-1} = \sqrt{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{2n-1}$$

donc

$$\forall 0 < x < 1, \quad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

• Pour $-1 < x < 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[-(-x)]^{n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (\sqrt{-x})^{2n-2}}{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (\sqrt{-x})^{2n-1}}{2n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{-x})^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

On reconnaît cette fois

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{Arctan} \sqrt{-x}.$$

Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x} - e^{-x}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}.$$

Notons f , la fonction intégrande. Il est clair que f est continue sur $]0, 1[$. Un développement limité montre que f tend vers une limite finie (égale à $1/3$) au voisinage de 0 , donc elle est intégrable au voisinage de 0 . De plus, $f(x) = o(e^{-x})$ au voisinage de $+\infty$, donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et l'intégrale généralisée est bien convergente.

• Pour $x > 0$, on a $0 < e^{-x} < 1$, donc

$$\frac{x}{e^{2x} - e^{-x}} = \frac{xe^{-2x}}{1 - e^{-3x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-2x}(e^{-3x})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-(2+3n)x}.$$

On pose donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, +\infty[, \quad u_n(x) = xe^{-(2+3n)x}.$$

Il est clair que chaque fonction u_n est intégrable sur $]0, +\infty[$, on sait déjà que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et que sa somme (= la fonction f !) est continue sur $]0, +\infty[$. Comme les fonctions u_n sont positives,

$$\int_0^{+\infty} |u_n(x)| dx = \int_0^{+\infty} u_n(x) dx = \frac{1}{(2+3n)^2}$$

(avec une intégration par parties).

La série

$$\sum \int_0^{+\infty} |u_n(x)| dx$$

est convergente, nous pouvons donc intégrer terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2+3n)^2}.$$

Soit E , un espace euclidien. On considère une fonction

$$f : [a, b] \rightarrow E$$

continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (où $a < b$).

En étudiant la fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = \langle f(t) \mid f(b) - f(a) \rangle,$$

démontrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| (b - a).$$

Si $f(a) = f(b)$, alors l'inégalité à démontrer est évidente. On supposera dans la suite que $f(a) \neq f(b)$.

Comme f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et que le produit scalaire est une forme bilinéaire continue sur E , l'application φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Comme φ est une fonction à valeurs réelles, on peut appliquer le Théorème des accroissements finis : il existe donc $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} = \varphi'(c)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\|f(b) - f(a)\|^2}{b - a} = \langle f'(c) \mid f(b) - f(a) \rangle.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\langle f'(c) \mid f(b) - f(a) \rangle \leq \|f'(c)\| \|f(b) - f(a)\|$$

et on conclut en divisant par $\|f(b) - f(a)\| > 0$.

En supposant que f est de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[a, b]$, on peut donner une démonstration complètement différente de cette propriété.

L'hypothèse \mathcal{C}^1 nous permet d'appliquer le Théorème fondamental :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$$

et l'inégalité triangulaire intégrale nous donne alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Comme f est de classe \mathcal{C}^1 , la fonction $\|f'\|$ est continue sur le segment $[a, b]$ et d'après le Théorème des bornes atteintes, il existe α et β dans $[a, b]$ tels que

$$\forall t \in [a, b], \quad \|f'(\alpha)\| \leq \|f'(t)\| \leq \|f'(\beta)\|.$$

On en déduit que

$$\|f'(\alpha)\| \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b \|f'(t)\| dt \leq \|f'(\beta)\|.$$

La continuité de $\|f'\|$ sur l'intervalle $[a, b]$ permet d'appliquer le Théorème des valeurs intermédiaires pour conclure : il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire n boules simultanément dans cette urne et on note X , le nombre de boules blanches obtenues.

Proposer un calcul de $\mathbf{E}(X)$.

On tire n boules dans une urne qui en contient $(a + b)$. Il y a donc $\binom{a+b}{n}$ tirages possibles.

↳ L'adverbe *simultanément* doit être compris de cette manière : un tirage est ici une **partie** de n boules choisies dans l'ensemble des boules et non pas une **liste** (ce qui serait le cas si on piochait les boules successivement).

Implicitement, on suppose ici que les boules sont discernables (par exemple, numérotées).

Parmi tous les tirages possibles, les tirages comptant k boules blanches contiennent évidemment $(n - k)$ boules noires. Il y a donc $\binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$ tirages constitués de k boules blanches (principe multiplicatif).

On modélise ainsi le nombre aléatoire de boules blanches obtenues par une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, \min\{a, n\} \rrbracket$ telle que

$$\forall 0 \leq k \leq \min\{a, n\}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{a}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}.$$

↳ Non seulement k doit être inférieur à n (= le nombre de boules tirées de l'urne) et à a (= le nombre total de boules blanches), mais il faut symétriquement que $(n - k)$ soit inférieur à n (c'est-à-dire $k \geq 0$) et à b (= le nombre total de boules noires).

On peut se simplifier la tâche en rappelant la convention usuelle :

$$\forall p > n, \quad \binom{n}{p} = 0.$$

L'espérance de X est par définition égale à

$$\sum_{k=1}^a k \mathbf{P}(X = k).$$

(Il est inutile de prendre en compte le terme en $k = 0$.) On se donne les moyens d'appliquer la Formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=1}^a k \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \sum_{k=1}^a a \binom{a-1}{k-1} \binom{b}{n-k} = a \sum_{\ell=0}^{a-1} \binom{a-1}{\ell} \binom{b}{n-1-\ell} = a \binom{a+b-1}{n-1}.$$

On en déduit que

$$\mathbf{E}(X) = a \cdot \frac{\binom{a+b-1}{n-1}}{\binom{a+b}{n}} = \frac{na}{a+b}.$$

↳ On peut contrôler le résultat trouvé dans quelques cas évidents : si $b = 0$, il est logique que $\mathbf{E}(X) = n$; si $n = 1$, il est aussi logique que $\mathbf{E}(X) = \frac{a}{a+b}$.

• On peut aussi réaliser quelques simulations pour vérifier.

```
import numpy.random as rd

def tirage(a, b, n):
    urne = [1]*a + [0]*b
    rd.shuffle(urne) # permutation aléatoire du contenu
    return sum(urne[:n]) # nombre de 1 dans les n premiers éléments de l'urne

def esperance_theorique(a, b, n):
    return a*n/(a+b)

def moy_empirique(a, b, n, N=10000):
    s = 0
    for _ in range(N):
        s += tirage(a, b, n)
    return s/N

def test(a, b, n):
    E = esperance_theorique(a, b, n)
    M = moy_empirique(a, b, n)
    print(f"Espérance prévue : {E} - Moyenne observée : {M}")
    print(f"Erreur relative : {(M-E)/E:4.2%}")
```

Dans une compétition sportive, on tire à plusieurs reprises sur une cible.

— À la n -ième tentative, on a une chance sur n d'atteindre la cible.

— Si on atteint pas la cible, on est éliminé.

On note X , le nombre de tirs ayant atteint la cible.

[1.] Comment décrire la loi de X ?

[2.] Existence et valeur de $\mathbf{E}(X)$? de $\mathbf{V}(X)$?

[1.] À la première tentative, on est sûr d'atteindre la cible. Donc la loi de X est portée par \mathbb{N}^* . D'après les indications de l'énoncé, il paraît raisonnable de considérer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{k} \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{k}{(k+1)!}.$$

Les tirs d'indices 1 à k (inclus) atteignent la cible et le $(k+1)$ -ième la manque.

[2.] D'après la règle de d'Alembert, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la famille

$$\left(\frac{k^n}{k!}\right)_{k \in \mathbb{N}}$$

est sommable, donc X est une variable aléatoire d'espérance et de variance finies.

On remarque que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^2 = (k+1)k - (k+1) + 1 \quad (*)$$

et on en déduit que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \left(-1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) + \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) = e - 1.$$

De même,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = (k+1)k(k-1) + (k+1) - 1. \quad (†)$$

On en déduit comme plus haut que

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{(k+1)!} = e + 1$$

et, d'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2 = (3 - e)e \approx 0,766.$$

Soit N , une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, 52 \rrbracket$. On note S , la somme de N dés "équilibrés" à 6 faces.

[1.] Calculer la probabilité des évènements $[S = 1]$, $[S = 2]$ et $[S = 3]$.

[2.] Calculer l'espérance de S .

[1.] On modélise l'expérience avec des variables aléatoires N et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ où N suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, 52 \rrbracket$ et chaque U_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, 5 \rrbracket$.

• Pour que la somme des points soit égale à 1, il faut qu'il n'y ait qu'un seul dé et que celui-ci marque 1. Donc

$$[S = 1] = [N = 1] \cap [U_1 = 1]$$

et par indépendance

$$\mathbf{P}(S = 1) = \mathbf{P}(N = 1) \mathbf{P}(U_1 = 1) = \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{312}.$$

• Pour que la somme des points soit égale à 2, il faut un dé qui marque 2 ou deux dés qui marquent 1 chacun. Donc

$$[S = 2] = ([N = 1] \cap [U_1 = 2]) \cup ([N = 2] \cap [U_1 = 1] \cap [U_2 = 1])$$

et

$$\mathbf{P}(S = 2) = \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{52} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{7}{52 \cdot 36}.$$

• Pour que la somme doit égale à 3, il faut un dé qui marque 3 ou deux dés qui marquent 1 et 2 ou trois dés qui marquent tous 1. Donc

$$[S = 3] = ([N = 1] \cap [U_1 = 3]) \cup ([N = 2] \cap [U_1 = 1, U_2 = 2]) \cup ([N = 2] \cap [U_1 = 2, U_2 = 1]) \\ \cup ([N = 3] \cap [U_1 = 1, U_2 = 1, U_3 = 1])$$

donc

$$\mathbf{P}(S = 3) = \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{6^2} + \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{49}{52 \cdot 6^3}.$$

[2.] Décomposons l'évènement $[S = m]$ avec le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire N :

$$\mathbf{E}(S) = \sum_{n=1}^{52} \mathbf{E}(S \cdot \mathbb{1}_{[N=n]})$$

où

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[N(\omega)=n]} = \sum_{k=1}^n U_k(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[N(\omega)=n]}.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(S \cdot \mathbb{1}_{[N=n]}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(U_k \cdot \mathbb{1}_{[N=n]}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(U_k) \cdot \mathbf{E}(\mathbb{1}_{[N=n]})$$

par hypothèse d'indépendance.

• Ah, si la Formule de l'espérance totale était au programme...

Par conséquent,

$$\mathbf{E}(S) = \sum_{n=1}^{52} \mathbf{P}(N = n) \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(U_k) = \sum_{n=1}^{52} \frac{1}{52} \cdot \frac{7n}{2} = \frac{7}{52 \cdot 2} \cdot \frac{52 \cdot 53}{2} = \frac{53 \cdot 7}{4} = 92,75.$$

☞ On peut vérifier empiriquement l'exactitude de cette formule avec la "méthode de Monte-Carlo".

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def N():
    return rd.randint(1, 53)

def de(n):
    return rd.randint(1, 7, n)

def simulation():
    n = N()
    valeur = np.sum(de(n))
    return valeur

def moyenne_empirique(nb_essais = 100000):
    valeur = 0
    for _ in range(nb_essais):
        valeur += simulation()
    return valeur/nb_essais
```

On trouve des valeurs raisonnablement proches de la valeur calculée ci-dessus.

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose qu'il existe un réel $0 < \lambda < 1/2$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X_k = \pm k) = 1/2.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad Y_n = \frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{n}.$$

[1.] Déterminer $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.

[2.] Soit $\alpha > 0$. Donner un équivalent de

$$u_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha.$$

[3.] Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et déterminer la limite de $\mathbf{P}(|Y_n| > \alpha)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

[1.] Il est clair que les variables aléatoires X_k sont centrées. On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{V}(X_k) = \mathbf{E}(X_k^2) = k^2.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k) = 0.$$

Comme les variables aléatoires X_k sont supposées indépendantes,

$$\mathbf{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}.$$

[2.] Une comparaison somme/intégrale nous donne

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^n t^\alpha dt \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

☞ Si on connaît l'expression de la somme des carrés des n premiers entiers, on peut se passer de cette comparaison somme/intégrale.

[3.] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme S_n admet un moment d'ordre deux, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathbf{P}(|Y_n| > \alpha) \leq \frac{\mathbf{V}(S_n)}{\alpha^2}.$$

D'après les questions précédentes,

$$\frac{\mathbf{V}(S_n)}{\alpha^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^3}{3\alpha^2}$$

$$0 \leq \mathbf{P}(|Y_n| > \alpha) \leq$$

À SUIVRE!

Soit X , une variable aléatoire réelle d'espérance nulle et d'écart-type σ .

[1.] Démontrer que

$$\forall \lambda, \mu > 0, \quad \mathbf{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2 + \mu^2}{(\lambda + \mu)^2}.$$

[2.] En déduire que

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbf{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2 + \sigma^2}.$$

[1.] Comme $\lambda + \mu \geq 0$,

$$[X \geq \lambda] = [X + \mu \geq \lambda + \mu] \subset [(X + \mu)^2 \geq (\lambda + \mu)^2].$$

Comme $(X + \mu)^2$ est une variable aléatoire positive d'espérance finie, on peut appliquer l'inégalité de Markov :

$$\mathbf{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbf{E}[(X + \mu)^2]}{(\lambda + \mu)^2}.$$

Or $\mathbf{E}(X^2) = \sigma^2$ (puisque X est d'espérance finie), donc

$$\forall \lambda, \mu > 0, \quad \mathbf{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2 + \mu^2}{(\lambda + \mu)^2}.$$

[2.] Le second membre est une fonction de $\mu > 0$, alors que le membre de gauche est indépendant de μ . Par conséquent,

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbf{P}(X \geq \lambda) \leq \inf_{\mu > 0} \frac{\sigma^2 + \mu^2}{(\lambda + \mu)^2}.$$

On vérifie sans peine que le second membre est minimal pour $\mu = \sigma^2/\lambda$. On en déduit que

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbf{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2 + \sigma^2}.$$

Soit E , un espace vectoriel de dimension finie ; p et q , deux endomorphismes de E tels que

$$p + q = I_E \quad \text{et} \quad \text{rg } p + \text{rg } q \leq \dim E.$$

[1.] Démontrer que $\text{Im } p \oplus \text{Im } q = E$.

[2.] Démontrer que p et q sont des projecteurs.

[1.] Il est clair que $\text{Im } p + \text{Im } q \subset E$. Réciproquement,

$$\forall x \in E, \quad x = I_E(x) = p(x) + q(x) \in \text{Im } p + \text{Im } q. \quad (*)$$

Donc $E = \text{Im } p + \text{Im } q$.

• D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(\text{Im } p + \text{Im } q) = \text{rg } p + \text{rg } q - \dim(\text{Im } p \cap \text{Im } q).$$

Par hypothèse, $\text{rg } p + \text{rg } q = \dim E$ et d'après ce qui précède, $\dim(\text{Im } p + \text{Im } q) = \dim E$. Par conséquent,

$$\dim(\text{Im } p \cap \text{Im } q) = 0,$$

ce qui signifie que $\text{Im } p \cap \text{Im } q = \{0_E\}$. Donc les deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe :

$$E = \text{Im } p \oplus \text{Im } q.$$

[2.] Par hypothèse, $q = I_E - p$ est un polynôme en p , donc p et q commutent. Donc, d'après (*),

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad p(x) &= p(p(x) + q(x)) && \text{(d'après (*))} \\ &= p^2(x) + (p \circ q)(x) = p^2(x) + (q \circ p)(x). && \text{(car } p \text{ et } q \text{ commutent)} \end{aligned}$$

On a donc deux décompositions de $p(x)$:

$$p(x) = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im } p} + \underbrace{0_E}_{\in \text{Im } q} = \underbrace{p^2(x)}_{\in \text{Im } p} + \underbrace{q(p(x))}_{\in \text{Im } q}.$$

Or les sous-espaces vectoriels $\text{Im } p$ et $\text{Im } q$ sont en somme directe, donc il y a unicité de la décomposition. On a ainsi démontré que

$$\forall x \in E, \quad p^2(x) = p(x) \quad \text{et} \quad (q \circ p)(x) = 0_E.$$

Donc p est un projecteur et, par symétrie, q est aussi un projecteur. De plus, ces deux projecteurs commutent et $p \circ q = q \circ p = \omega_E$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On considère la matrice

$$A = (\alpha^{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

- [1.] On suppose que $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que la matrice A est diagonalisable.
 [2.] Déterminer le rang et le spectre de A .
 [3.] Pour quelles valeurs $\alpha \in \mathbb{C}^*$ la matrice A est-elle diagonalisable ?

- [1.] Si α est réel, alors la matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.
 [2.] En remarquant que

$$A = C.C^T \quad \text{où} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha^{n-2} \\ \alpha^{n-1} \end{pmatrix} \neq 0,$$

on constate que le rang de A est égal à 1.

• D'après le Théorème du rang, 0 est une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé (= le noyau de A) est égale à $(n - 1)$.

Comme le rang de A est égal à 1, on peut facilement déterminer un polynôme annulateur de A :

$$A^2 = (C.C^T).(C.C^T) = C.(C^T.C).C^T = \lambda A \quad \text{avec} \quad \lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k}.$$

Ainsi, $X(X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A .

• Toute valeur propre de A est donc une racine de ce polynôme. On sait déjà que 0 est une valeur propre de A . D'autre part, la colonne C n'est pas nulle et

$$AC = C.(C^T.C) = \lambda C$$

donc C est un vecteur propre de A et λ est bien une valeur propre de A .

Donc $\text{Sp}(A) = \{0; \lambda\}$.

[3.] Si $\lambda \neq 0$, alors ce polynôme annulateur est scindé à racines simples et A est donc diagonalisable avec deux sous-espaces propres : l'hyperplan $\text{Ker } A$ et la droite $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$.

Si $\lambda = 0$, alors A est nilpotente (d'indice inférieur à 2) et $A \neq 0_n$, donc A n'est pas diagonalisable (et son indice de nilpotence est bien égal à 2).

↳ Si α est réel, alors

$$\lambda = 1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2n-2} > 0$$

et A est bien diagonalisable : le Théorème spectral n'a pas menti.

[1.] Soient a et b , deux nombres réels. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.

[2.] Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p}$, des nombres réels non nuls. On considère l'endomorphisme $f \in L(\mathbb{R}^{2p})$ dont la matrice relative à la base canonique $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq 2p}$ est la matrice $A = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2p}$ où

$$\forall 1 \leq i \leq 2p, \quad \alpha_{i,2p+1-i} = \alpha_i,$$

les autres coefficients étant nuls.

[2.a.] Représenter la matrice A .

[2.b.] Démontrer que les sous-espaces $E_i = \text{Vect}(e_i, e_{2p+1-i})$ sont stables par f .

[2.c.] Démontrer que f est diagonalisable si, et seulement si, chaque endomorphisme $f_i \in L(E_i)$ induit par restriction de f est diagonalisable.

[2.d.] En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

[3.] On étudie une situation analogue dans un espace vectoriel de dimension impaire. Que peut-on dire ?

[1.] Si a et b sont nuls, la matrice A est diagonale...

Si a est nul mais pas b (ou l'inverse...), la matrice A est nilpotente d'indice 2, donc elle n'est pas diagonalisable.

• Supposons maintenant que a et b soient non nuls. Alors $\text{tr } A = 0$ et $\det A = -ab \neq 0$. Le polynôme caractéristique de A est donc

$$\chi_A = X^2 - (\text{tr } A)X + \det A = X^2 - ab.$$

Si $ab > 0$, alors A possède deux valeurs propres réelles non nulles opposées et comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cette matrice est diagonalisable.

Si $ab < 0$, alors la matrice A n'a pas de valeur propre réelle, donc elle n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• En conclusion, la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, $a = b = 0$ ou $ab > 0$.

• En particulier, si $a = b$, alors A est diagonalisable (symétrique réelle).

[2.a.] On s'appuie sur les valeurs extrêmes de i (c'est-à-dire $i = 1$ et $i = 2p$) pour écrire la matrice A à coup sûr.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_{2p-1} & 0 \\ \alpha_{2p} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

[2.b.] Le vecteur Ae_i se lit sur la i -ème colonne de A . Donc

$$Ae_i = \alpha_{2p-i+1} \cdot e_{2p-i+1} \in E_i.$$

De même,

$$Ae_{2p-i+1} = \alpha_i \cdot e_i \in E_i.$$

Comme l'image par A d'une base de E_i est une famille de vecteurs de E_i , le plan E_i est stable par f .

[2.c.] Si f est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par restriction de f à un sous-espace stable quelconque est diagonalisable. En particulier, les endomorphismes f_i sont tous diagonalisables.

• Réciproquement, comme $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq 2p}$ est une base de E , alors

$$\mathcal{B}_0 = (e_1, e_{2p}; e_2, e_{2p-1}; \dots; e_i, e_{2p-i+1}; \dots; e_p, e_{p+1})$$

est une base de E et par conséquent

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i.$$

Si f_i est diagonalisable pour tout $1 \leq i \leq p$, alors chaque sous-espace E_i admet une base \mathcal{B}_i constituée de vecteurs propres pour f_i (qui sont aussi des vecteurs propres pour f). En concaténant ces bases, on obtient une base de E constituée de vecteurs propres de f , donc f est diagonalisable.

↳ Dans la base \mathcal{B}_0 , la matrice de f (qui est donc une matrice semblable à A) est diagonale par blocs :

$$\text{Diag}(C_1, \dots, C_p) \quad \text{où} \quad \forall 1 \leq i \leq p, \quad C_i = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_i \\ \alpha_{2p-i+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

[2.d.] Comme les α_i sont supposés non nuls, on déduit de la première question que la matrice A est diagonalisable si, et seulement si,

$$\forall 1 \leq i \leq p, \quad \alpha_i \alpha_{2p-i+1} > 0.$$

[3.] Si $\dim E = 2p + 1$, alors les plans $E_i = \text{Vect}(e_i, e_{2p-i+2})$ sont stables par f (pour les raisons qu'on a exposées) et la droite $D_{p+1} = \mathbb{R} \cdot e_{p+1}$ est une droite propre :

$$A e_{p+1} = \alpha_{p+1} \cdot e_{p+1}.$$

On en déduit que A est diagonalisable si, et seulement si,

$$\forall 1 \leq i \leq p, \quad \alpha_i \alpha_{2p-i+2} > 0,$$

sans contrainte sur le scalaire α_{p+1} .

Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, deux matrices telles que

$$AB + BA = 0_n.$$

[1.] Soient α , une valeur propre de A et X , un vecteur propre de A associé à α . Démontrer que $ABX = 0$.

[2.] En déduire que $AB = BA = 0_n$.

[1.] Par hypothèse, $AX = \alpha X$, donc

$$0_n = (AB + BA)X = A(BX) + \alpha BX = (A + \alpha I_n)(BX) = 0. \quad (*)$$

• Premier cas : si $\alpha = 0$.

Dans ce cas, l'égalité (*) se réduit à $ABX = 0$.

• Deuxième cas : $\alpha \neq 0$.

Comme $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ par hypothèse, les valeurs propres de A sont positives et comme $\alpha \neq 0$, alors en fait $\alpha > 0$. Par conséquent, $-\alpha$ (qui est un réel strictement négatif) n'est pas une valeur propre de A , donc $(A + \alpha I_n)$ est inversible et de ce fait $BX = 0$. Donc $ABX = 0$.

[2.] D'après le Théorème spectral, il existe une base $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ de vecteurs propres de A . D'après la question précédente,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad ABX_k = 0.$$

Comme la famille $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base, on en déduit que $AB = 0$ et finalement $AB = BA = 0_n$ d'après l'hypothèse de l'énoncé.

Soient E , un espace vectoriel complexe et U , un endomorphisme de E .

[1.] On suppose que U est diagonalisable. Démontrer que U^2 est diagonalisable.

[2.] Démontrer que la réciproque est fautive. (Donner un contre-exemple.)

[3.] Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que

$$\text{Ker}(U^2 - \lambda^2 I_E) = \text{Ker}(U - \lambda I_E) \oplus \text{Ker}(U + \lambda I_E).$$

[4.] On suppose dans cette question que U est un automorphisme de E et que U^2 est diagonalisable. Démontrer que U est diagonalisable.

[5.] Démontrer que : si U est diagonalisable, alors $Q(U)$ est diagonalisable pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$.

[6.] On suppose qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(U)$ soit diagonalisable et que $Q'(U)$ soit bijectif. Démontrer que U est diagonalisable.

[1.] Si $P^{-1}UP$ est diagonale, alors $P^{-1}U^2P = (P^{-1}UP)^2$ est diagonale elle aussi. Par conséquent, si U est diagonalisable, alors U^2 est diagonalisable.

[2.] La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable : elle n'a qu'une seule valeur propre (le réel 0) et la dimension du sous-espace propre associée est égale à 1 (et donc pas à 2).

Cependant, le carré de cette matrice est diagonalisable : c'est la matrice nulle.

[3.] Comme $X^2 - \lambda^2 = (X - \lambda)(X + \lambda)$ et que $\lambda \neq 0$, les deux facteurs $(X - \lambda)$ et $(X + \lambda)$ sont premiers entre eux. La décomposition en somme directe découle alors du Théorème de décomposition des noyaux.

[4.] Comme U^2 est diagonalisable, le polynôme minimal P_0 de U^2 est scindé à racines simples. Comme U est un automorphisme, alors U^2 aussi est un automorphisme, donc 0 n'est pas une racine de P_0 . Le polynôme P_0 est donc de la forme

$$P_0 = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)$$

où $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq r}$ est une famille de r nombres complexes deux à deux distincts et non nuls.

Comme $P_0(U^2) = 0_n$, le polynôme $P_0(X^2)$ est un polynôme annulateur de U . Comme E est un espace complexe et que les λ_k sont non nuls, on peut factoriser $P_0(X^2)$ sous la forme :

$$P_0(X^2) = \prod_{k=1}^r (X - \omega_k)(X + \omega_k)$$

où $\omega_k^2 = \lambda_k$. Comme les λ_k sont deux à deux distincts et non nuls, le polynôme $P_0(X^2)$ est scindé à racines simples, donc U est diagonalisable.

[5.] S'il existe une matrice inversible P telle que la matrice $D = P^{-1}UP$ soit diagonale, alors

$$\forall Q \in \mathbb{C}[X], \quad P^{-1}Q(U)P = Q(P^{-1}UP) = Q(D)$$

donc $Q(U)$ est semblable à une matrice diagonale.

[6.] Si $\deg Q = 1$, la conclusion est évidente.

On supposera donc dans la suite que $\deg Q \geq 2$ et on notera encore P_0 le polynôme minimal de U .

• En tant que polynôme non constant à coefficients complexes, le polynôme Q' est scindé :

$$Q' = \prod_{k=1}^N (X - \alpha_k) \quad \text{d'où} \quad Q'(U) = \prod_{k=1}^N (U - \alpha_k I_n).$$

Comme $Q'(U)$ est inversible, tous les $(U - \alpha_k I_n)$ doivent être inversibles, donc aucune racine de Q' n'est valeur propre de U . Les valeurs propres de U sont les racines du polynôme minimal P_0 , donc P_0 et Q' n'ont aucune racine en commun.

• Comme $Q(U)$ est diagonalisable, alors il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que

$$(P \circ Q)(U) = P(Q(U)) = 0_n.$$

Le polynôme $(P \circ Q)$ est donc un polynôme annulateur de U et le polynôme minimal P_0 est un diviseur de $(P \circ Q)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une valeur propre de U , c'est-à-dire une racine de P_0 . On a donc $P(Q(\lambda)) = 0$ et aussi

$$(P \circ Q)'(\lambda) = P'(Q(\lambda)) \cdot Q'(\lambda).$$

Par hypothèse, les racines de P sont simples et comme $Q(\lambda)$ est une racine de P , alors $P'(Q(\lambda)) \neq 0$. D'autre part, on sait que P_0 et Q' n'ont aucune racine commune, donc $Q'(\lambda) \neq 0$.

On a ainsi démontré que les valeurs propres de U sont des racines simples de $(P \circ Q)$. Par conséquent, le polynôme minimal de U est scindé à racines simples et U est diagonalisable.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 - 5A + 6I_n = 0_n.$$

[**Question de cours**]


Citer deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice carrée à coefficients réels soit diagonalisable.

[**1.**] Démontrer que A est diagonalisable et que $\text{Sp}(A) \subset \{2; 3\}$.

[**2.**] On note D , une matrice diagonale semblable à A et on pose


$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = DM - MD.$$

Démontrer que f est un endomorphisme et que f est diagonalisable.

 On choisira la matrice D la plus simple possible, afin de permettre le calcul matriciel par blocs.

[**1.**] La matrice A admet le polynôme $P = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$ pour polynôme annulateur. Ce polynôme est scindé à racines simples, donc la matrice A est diagonalisable et son spectre est contenu dans l'ensemble $\{2; 3\}$ des racines de ce polynôme annulateur.

[**2.**] Il est clair que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

 On peut supposer que $D = \text{Diag}(2I_r, 3I_{n-r})$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} f(M) &= \begin{pmatrix} 2I_r & 0 \\ 0 & 3I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2I_r & 0 \\ 0 & 3I_{n-r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2M_1 & 2M_2 \\ 3M_3 & 3M_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2M_1 & 3M_2 \\ 2M_3 & 3M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_r & -M_2 \\ M_3 & 0_{n-r} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il apparaît ainsi que f possède trois valeurs propres.

— La valeur propre 0, associée au sous-espace des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_4 \end{pmatrix}.$$

— La valeur propre 1, associée au sous-espace des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

— La valeur propre -1 , associée au sous-espace des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que la somme des dimensions de ces trois sous-espaces est égale à $\dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, donc l'endomorphisme f est diagonalisable.

Soit E , l'ensemble des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} . On pose

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

[1.] Démontrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

[2.] Soient

$$F = \{f \in E : \forall x \in [0, 1], f(x) = 0\}$$

$$\text{et } G = \{g \in E : \forall x \in [-1, 0], g(x) = 0\}.$$

[2.a.] Démontrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , qu'ils sont orthogonaux et qu'ils sont en somme directe.

[2.b.] Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

[3.] Démontrer que $G \subset F^\perp$.

[4.] On cherche à démontrer que $G = F^\perp$. On considère $g \in F^\perp$.

[4.a.] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \in E$ en posant

$$\forall x \in [0, 1], f_n(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [-1, -1/n], f_n(x) = g(0),$$

la fonction f_n étant affine sur $[-1/n, 0]$.

Calculer $\langle f_n | g \rangle$, puis vérifier que

$$g(0) \int_{-1}^0 g(x) dx = 0.$$

[4.b.] En considérant la fonction $h \in E$ telle que

$$\forall x \in [0, 1], h(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [-1, 0], h(x) = g(x) - g(0),$$

démontrer que $g \in G$.

[2.a.] Pour tout $x \in [-1, 1]$, l'application $\varepsilon_x = [f \mapsto f(x)]$ est une forme linéaire sur E . Par définition,

$$F = \bigcap_{x \in [0, 1]} \text{Ker } \varepsilon_x \quad \text{et} \quad G = \bigcap_{x \in [-1, 0]} \text{Ker } \varepsilon_x$$

donc F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E (en tant qu'intersections de sous-espaces vectoriels de E).

Si $f \in F$ et $g \in G$, alors le produit fg est identiquement nul, donc $\langle f | g \rangle = 0$. Les deux sous-espaces vectoriels F et G sont donc orthogonaux et, de ce fait, ils sont en somme directe.

[2.b.] Si $f \in F$ et $g \in G$, alors $f(0) = g(0) = 0$, donc toute fonction $h \in F + G$ est nulle en $x = 0$. La fonction constante égale à 1 appartient à E , mais elle n'appartient pas à $F + G$, donc F et G ne sont pas supplémentaires dans E .

[3.] On a déjà démontré que F et G étaient orthogonaux.

[4.a.] Chaque fonction f_n appartient à F , donc $\langle f_n | g \rangle = 0$. Mais en revenant à la définition du produit scalaire, on a aussi

$$\langle f_n | g \rangle = \int_{-1}^{-1/n} g(0)g(x) dx + \int_{-1/n}^0 -nxg(0)g(x) dx + \int_0^1 0 dx.$$

D'une part,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^{-1/n} g(0)g(x) dx = g(0) \int_{-1}^0 g(x) dx.$$

↳ Quelle que soit la fonction h continue par morceaux sur I , la fonction

$$x \mapsto \int_a^x h(t) dt$$

est continue sur I , quel que soit le point a choisi dans I .

D'autre part, par inégalité triangulaire,

$$\forall n \geq 1, \quad \left| \int_{-1/n}^0 -nxg(0)g(x) \, dx \right| \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot \|g\|_\infty$$

et, par encadrement, ce terme tend vers 0. Par conséquent,

$$g(0) \int_{-1}^0 g(x) \, dx = 0.$$

[4.b.] Comme g est continue, la fonction h est bien continue et appartient donc à E . De plus, h est nulle sur $[0, 1]$, donc $h \in F$ et, par hypothèse, elle est donc orthogonale à g , c'est-à-dire

$$0 = \langle h | g \rangle = \int_{-1}^0 g(x)^2 - g(0)g(x) \, dx.$$

On déduit alors de la question précédente que

$$\int_{-1}^0 g(x)^2 \, dx = 0$$

et donc que la fonction continue g est nulle sur $[-1, 0]$ (Théorème de nullité de l'intégrale). Autrement dit, $g \in \bar{F}$.

↪ Cet exemple illustre la situation où

$$F \oplus F^\perp \subsetneq E,$$

qui est impensable dans un espace de dimension finie.

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, un espace euclidien ; p et q , deux projecteurs orthogonaux. On considère les endomorphismes

$$f = p \circ q \circ p \quad \text{et} \quad g = q \circ p \circ q.$$

- [1.] Démontrer que f et g sont auto-adjoints.
- [2.] Démontrer que f et g sont positifs.
- [3.] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que α est une valeur propre de f si, et seulement si, α est une valeur propre de g .
- [4.] Démontrer que

$$\text{Ker } f = \text{Ker}(q \circ p) \quad \text{et que} \quad \text{Ker } g = \text{Ker}(p \circ q).$$

- [5.] Démontrer que $f = g$ si, et seulement si, p et q commutent.

- [1.] Tout projecteur orthogonal est un endomorphisme auto-adjoint. Par conséquent,

$$f^* = (p \circ q \circ p)^* = p^* \circ q^* \circ p^* = p \circ q \circ p = f,$$

donc f est auto-adjoint. Idem pour g .

- [2.] Tout projecteur orthogonal est un endomorphisme auto-adjoint positif :

$$\forall y \in E, \quad \langle q(y) | y \rangle = \langle q(y) | [y - q(y)] + q(y) \rangle = \langle q(y) | y - q(y) \rangle + \|q(y)\|^2 = \|q(y)\|^2 \quad (*)$$

car $q(y) \in \text{Im } q \perp \text{Ker } q \ni y - q(y)$.

• Pour tout $x \in E$, comme $p^* = p$,

$$\langle f(x) | x \rangle = \langle (p \circ q)(p(x)) | p(x) \rangle = \langle q(p(x)) | p(x) \rangle \geq 0$$

donc $f \in \mathcal{S}^+(E)$. Idem pour g .

- [3.] Si α est une valeur propre de f , il existe un vecteur $x \neq 0_E$ tel que

$$f(x) = (p \circ q \circ p)(x) = \alpha \cdot x.$$

On en déduit que

$$g(p(x)) = q \circ (p \circ q \circ p)(x) = \alpha \cdot p(x).$$

Si $p(x)$ était le vecteur nul, alors le vecteur $f(x)$ serait nul lui aussi, alors que $x \neq 0_E$ (vecteur propre !) et $\alpha \neq 0$ (par hypothèse). Donc $p(x)$ est bien un vecteur propre de g associé à la valeur propre α .

• De même, si y est un vecteur propre de g associé à la valeur propre *non nulle* α , alors $q(y)$ est un vecteur propre de f associé à α .

Ainsi un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}^*$ est une valeur propre de f si, et seulement si, c'est une valeur propre de g .

- [4.] Il est clair que $\text{Ker}(q \circ p) \subset \text{Ker } f$. Réciproquement, si $x \in \text{Ker } f$, alors

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f(x) | x \rangle = \langle (q \circ p)(x) | p(x) \rangle && \text{(car } p \text{ est auto-adjoint)} \\ &= \langle q(p(x)) | p(x) \rangle = \|q(p(x))\|^2 && \text{(d'après (*))} \end{aligned}$$

ce qui montre que $(q \circ p)(x) = 0_E$.

On a ainsi démontré que $\text{Ker } f = \text{Ker}(q \circ p)$. Par symétrie, $\text{Ker } g = \text{Ker}(p \circ q)$.

- [5.] Si p et q commutent, alors

$$f = (q \circ p) \circ p = q \circ p$$

puisque p est un projecteur et

$$g = q \circ (p \circ q) = q \circ p$$

puisque q est un projecteur. On en déduit que $f = g$.

↳ La réciproque est astucieuse et repose sur le fait simple qu'un endomorphisme h est nul si, et seulement si, l'endomorphisme symétrique $h^* \circ h$ est nul :

$$\forall x \in E, \quad \langle (h^* \circ h)(x) | x \rangle = \|h(x)\|^2.$$

• On suppose que $f = g$ et on considère l'endomorphisme

$$h = p \circ q - q \circ p.$$

Comme p et q sont auto-adjoints, $h^* = -h$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} h^* \circ h &= -(p \circ q - q \circ p) \circ (p \circ q - q \circ p) \\ &= -(p \circ q \circ p) \circ q + q \circ (p \circ p) \circ q + p \circ (q \circ q) \circ p - (q \circ p \circ q) \circ p \\ &= -f \circ q + g + f - g \circ p \\ &= 2f - f \circ q - f \circ p \end{aligned}$$

puisque $f = g$. Mais aussi

$$\begin{aligned} f \circ q &= g \circ q = (q \circ p \circ q) \circ q = q \circ p \circ q = g = f \\ f \circ p &= (p \circ q \circ p) \circ p = p \circ q \circ p = f \end{aligned}$$

donc $h^* \circ h = 0$ et par conséquent $h = 0$: les deux projections orthogonales p et q commutent.

rms136-1510

|| Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = A + A^\top$. On suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^k = 0_n$.
Démontrer que A est antisymétrique.

La matrice B est symétrique réelle, donc diagonalisable. De plus, elle est nilpotente, donc sa seule valeur propre est 0. Par conséquent, $B = 0_n$ et $A = -A^\top$.

Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$M^\top \cdot M = M \cdot M^\top \quad \text{et} \quad M^2 + 2I_2 = 0_2.$$

- [1.] Démontrer que $M^\top \cdot M$ est diagonalisable.
 [2.] Déterminer les valeurs propres de $M^\top \cdot M$.
 [3.] Démontrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} M \in O_2(\mathbb{R}).$$

- [4.] Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé.

- [1.] La matrice $M^\top \cdot M$ est symétrique réelle, donc diagonalisable (Théorème spectral).
 [2.] Comme M et M^\top commutent,

$$(M^\top \cdot M)^2 = (M^2)^\top \cdot M^2 = 4I_2.$$

Le polynôme $X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$ est donc un polynôme annulateur de $M^\top \cdot M$ et les valeurs propres de $M^\top \cdot M$ figurent parmi les racines de ce polynôme.

Or $M^\top \cdot M$ est une matrice symétrique positive :

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top \cdot (M^\top \cdot M) \cdot X = (MX)^\top \cdot (MX) = \|MX\|^2 \geq 0,$$

donc les valeurs propres de $M^\top \cdot M$ sont positives.

Ainsi, $M^\top \cdot M$ possède au plus une valeur propre : 2.

Mais $M^\top \cdot M$ est diagonalisable, donc elle possède au moins une valeur propre.

Finalement, le spectre de $M^\top \cdot M$ est réduit au singleton $\{2\}$.

- [3.] Comme la matrice $M^\top \cdot M$ est diagonalisable et admet 2 pour seule valeur propre, on a donc $M^\top \cdot M = 2I_2$ et la matrice $\frac{1}{\sqrt{2}}M$ est donc une matrice orthogonale.

- [4.] Le groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$ est constitué des matrices de rotations :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et des matrices de réflexion :

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Toutes ces matrices commutent à leur transposée (qui est en fait leur inverse).

Les matrices de réflexion vérifient toutes $S(\theta)^2 = I_2$. Or $M^2 = -2I_2$, donc il est impossible que $\frac{1}{\sqrt{2}}M = S(\theta)$.

La matrice de rotation $R(\theta)$ vérifie

$$R(\theta)^2 = 2 \cos \theta \cdot R(\theta) - I_2.$$

Par conséquent, si $M = \sqrt{2}R(\theta)$, alors

$$M^2 = 4 \cos \theta \cdot R(\theta) - 2I_2.$$

On en déduit que $M^2 = -2I_2$ si, et seulement si, $\cos \theta = 0$, c'est-à-dire $\theta = \pm\pi/2$.

Les matrices vérifiant les hypothèses de l'énoncé sont donc les deux matrices

$$\pm\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient E , un espace préhilbertien réel et F , un sous-espace de E , qu'on suppose dense dans E .

On considère un vecteur unitaire $v \in E \setminus F^\perp$ et $G = \{v\}^\perp$.

[1.] Soient x et y , deux vecteurs de F . Démontrer que le vecteur

$$z = \langle x|v \rangle \cdot y - \langle y|v \rangle \cdot x$$

appartient à $F \cap G$.

[2.] Démontrer que tout élément de G est limite d'une suite d'éléments de $F \cap G$.

[1.] Par définition, les vecteurs x et y appartiennent au sous-espace vectoriel F , donc $z \in F$ (en tant que combinaison linéaire de deux vecteurs de F).

Par ailleurs, par linéarité à droite du produit scalaire,

$$\langle z|v \rangle = \langle x|v \rangle \langle y|v \rangle - \langle y|v \rangle \langle x|v \rangle = 0$$

donc $z \in G$.

Ainsi, le vecteur z appartient bien au sous-espace $F \cap G$.

[2.] Soit $u \in G$.

Par densité de F , il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de F qui converge vers u . Alors,

$$\forall y \in F, \quad z_n = \langle x_n|v \rangle \cdot y - \langle y|v \rangle \cdot x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle u|v \rangle \cdot y - \langle y|v \rangle \cdot u = -\langle y|v \rangle \cdot u$$

par définition de G .

Par hypothèse, v n'est pas orthogonal à F , donc on peut choisir $y \in F$ tel que $\langle y|v \rangle \neq 0$ et, quitte à multiplier y par un scalaire convenable, on peut supposer que $\langle y|v \rangle = -1$, si bien que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n|v \rangle \cdot y - \langle y|v \rangle \cdot x_n = u.$$

On a ainsi démontré que tout vecteur $u \in G$ était la limite d'une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs appartenant à $F \cap G$.

☞ L'énoncé est sans doute incomplet, car $F^\perp = \{0_E\}$. En effet, si $x \in F^\perp$, alors il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de F (= sous-espace dense) qui converge vers x . Par continuité du produit scalaire,

$$0 = \langle u_n|x \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle x|x \rangle = \|x\|^2$$

et donc $x = 0_E$.

[Question de cours]

Soient E et F , deux espaces vectoriels normés réels et $f : E \rightarrow F$.

Démontrer que f est continue en $a \in E$ si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers a , la suite de terme général $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.

[1.] On suppose ici que $E = F = \mathbb{R}$ et que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. On suppose de plus que

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, \quad a < b \implies f(a) < f(b).$$

[1.a.] Démontrer que f est croissante.

[1.b.] Démontrer que f est strictement croissante.

[1.a.] Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , quels que soient les réels x et y , il existe une suite rationnelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x et une suite rationnelle $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers y .

Si $x < y$, alors il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $a_n < b_n$. Par hypothèse,

$$\forall n \geq n_0, \quad f(a_n) < f(b_n).$$

Par continuité de f , on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(x) \leq f(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n).$$

[1.b.] Soient $x < y$. Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il existe deux rationnels r et s tels que $x < r < s < y$. Le raisonnement précédent montre qu'il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1, \quad a_n < r < s < b_n.$$

On en déduit que

$$\forall n \geq n_1, \quad f(a_n) < f(r) < f(s) < f(b_n)$$

et donc, par passage à la limite, que :

$$f(x) \leq f(r) < f(s) \leq f(y).$$

On a cette fois démontré que

$$\forall x < y, \quad f(x) < f(y)$$

et donc que f est strictement croissante.

Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) - 1 \, dx.$$

La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 au voisinage de 0, donc la fonction intégrande est prolongeable en une fonction continue sur l'intervalle fermé $[0, +\infty[$.

Il reste donc à étudier l'ordre de grandeur de

$$f(x) = \exp\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) - 1$$

lorsque x tend vers $+\infty$. D'après le développement limité de \exp au voisinage de 0,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{2x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right). \quad (*)$$

↳ Les trois termes sont de natures différentes : pas de conclusion hâtive !

• La fonction $x \mapsto x^{-3/2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc toute fonction dominée par cette fonction est elle aussi intégrable au voisinage de $+\infty$.

• La fonction g définie par

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et d'après la relation de Chasles,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\pi}^{n\pi} g(x) \, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(x) \, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 u}{k\pi + u} \, du.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall u \in [0, \pi], \quad \frac{\sin^2 u}{k\pi + u} \geq \frac{1}{k\pi} \cdot \sin^2 u$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\pi}^{n\pi} g(x) \, dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 u \, du.$$

La série harmonique est une série divergente de terme général positif, donc

$$\forall C > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{C}{k} = +\infty.$$

↳ Il est nécessaire de savoir calculer

$$\int_0^{\pi} \sin^2 u \, du = \frac{\pi}{2}$$

mais c'est strictement inutile ici : il suffit de remarquer que cette intégrale est strictement positive et qu'elle ne dépend pas de k .

Comme la fonction g est positive, l'intégrale de g sur $[\pi, A]$ est une fonction croissante de A et par conséquent

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^A g(x) \, dx = +\infty.$$

• Soit $A > \pi$. En intégrant par parties,

$$\int_{\pi}^A \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx = \left[\frac{-\cos x}{\sqrt{x}} \right]_{\pi}^A - \int_{\pi}^A \frac{\cos x}{x\sqrt{x}} \, dx.$$

Il est clair que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-\cos A}{\sqrt{A}} = 0$$

et que la fonction

$$x \mapsto \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}$$

est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, l'intégrale généralisée

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

est convergente.

☞ On peut démontrer (et il faut savoir le faire) que l'intégrande n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$. Mais cela n'est pas nécessaire pour conclure.

☛ Dans la décomposition (*), on a fait apparaître une fonction dont l'intégrale est convergente au voisinage de $+\infty$, une fonction dont l'intégrale est divergente au voisinage de $+\infty$ et une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$.

Par conséquent, l'intégrale généralisée de f est divergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n en posant

$$\forall x > 0, \quad f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} nx}$$

et on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

- [1.] Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
 [2.] Sur quelle partie de \mathbb{R} la fonction f est-elle continue ?
 [3.] Déterminer les variations de f .
 [4.] Démontrer l'existence d'un réel $x_0 > 0$ tel que

$$\forall x \geq x_0, \forall n \geq 2, \quad f_n(x) \leq 3e^{-nx}.$$

- [5.] Démontrer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

- [1.] On sait que $\operatorname{sh} u \sim e^u/2$ lorsque u tend vers $+\infty$. Par conséquent, pour tout $x > 0$,

$$f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(e^{-x})^n}{2}$$

et comme $0 < e^{-x} < 1$, on en déduit que la série $\sum f_n(x)$ converge absolument (comparaison à une série géométrique).

La fonction f est donc définie sur \mathbb{R}_+^* .

- [2.] Chaque fonction f_n est évidemment continue sur \mathbb{R}_+^* . La fonction sh étant croissante et strictement positive sur $]0, +\infty[$,

$$\forall 0 < a \leq x, \quad 0 \leq f_n(x) \leq f_n(a).$$

Le majorant est indépendant de x et la série $\sum f_n(a)$ est convergente, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

Par conséquent, la somme f est continue sur

$$\bigcup_{a>0} [a, +\infty[=]0, +\infty[.$$

- [3.] Chaque fonction f_n est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$:

$$\forall 0 < x < y, \quad f(y) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{[f_n(y) - f_n(x)]}_{>0} > 0.$$

• La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur un voisinage de $+\infty$, on peut donc passer à la limite terme à terme :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} nx} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} nx} = 0.$$

• Par monotonie, la fonction f admet aussi une limite (finie ou non) au voisinage de 0. En tant que somme de termes positifs,

$$\forall x > 0, \quad f(x) \geq f_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc f tend vers $+\infty$ au voisinage droit de 0.

- [4.] Pour tout $n \geq 2$ et tout $x > 0$,

$$e^{nx} f_n(x) = \frac{2e^{nx}}{e^{nx} - e^{-nx}} = \frac{2}{1 - e^{-2nx}}.$$

Par conséquent,

$$e^{nx} f_n(x) \leq 3 \iff nx \geq \frac{\ln 3}{2}.$$

En posant

$$x_0 = \frac{\ln 3}{4},$$

on a donc

$$\forall x \geq x_0, \forall n \geq 2, \quad 0 \leq f_n(x) \leq 3e^{-nx}.$$

[5.] D'après la majoration précédente,

$$\forall x \geq x_0, \quad 0 \leq f(x) - f_1(x) \leq 3 \sum_{n=2}^{+\infty} (e^{-x})^n = e^{-2x} \frac{3}{1 - e^{-x}}.$$

Le majorant est équivalent à $3e^{-2x}$ lorsque x tend vers $+\infty$ et donc négligeable devant $f_1(x) \sim 2e^{-x}$.

On a ainsi démontré que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} f_1(x) + o(f_1(x))$$

c'est-à-dire

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\operatorname{sh} x} \sim 2e^{-x}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $z_n = (1 + i)^n$.

[1.] Calculer le module et un argument de z_n .

[2.] Démontrer que $e^x \cos x$ est développable en série entière sur \mathbb{R} .

[3.] En notant

$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n,$$

démontrer que les coefficients a_n sont des entiers.

[1.] Il est assez clair que

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + i)^n = 2^{n/2} e^{in\pi/4}.$$

[2.] Les fonctions \exp et \cos sont développables en série entière et les deux rayons de convergence sont infinis. D'après le Théorème sur le produit de Cauchy, la fonction $x \mapsto \exp(x) \cos(x)$ est développable en série entière et son rayon de convergence est infini.

[3.] Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \cos x = \Re(\exp[(1 + i)x]) = \Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 + i)^n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \Re[(1 + i)^n]$$

↳ L'application $\Re : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire et continue, ce qui permet de calculer terme à terme la partie réelle d'une somme infinie.

Attention ! Pour que \Re soit une application linéaire, il faut considérer \mathbb{C} comme un espace vectoriel (de dimension 2) sur \mathbb{R} .

• Si on applique ce qui précède,

$$a_n = \Re(z_n) = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

On peut en déduire que les a_n sont entiers en discutant sur la parité de n . C'est un peu fastidieux.

• Sinon, la formule du binôme nous donne directement

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Re(i^k)$$

et $\Re(i^k)$ ne prend que trois valeurs : 0 (pour k impair) et ± 1 (pour k pair). Comme les coefficients binomiaux sont entiers, a_n est entier.

Soit $u_1 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}.$$

- [1.] Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
- [2.] Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
- [3.] Pour quels $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum u_n x^n$ est-elle convergente ?

[1.] Comme la fonction \exp ne prend que des valeurs strictement positives, $u_n > 0$ pour tout $n \geq 2$. Comme $e^{-x} \leq 1$ pour tout $x \geq 0$,

$$\forall n \geq 2, \quad 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Par encadrement, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0.

[2.] Puisque u_n tend vers 0, la relation de récurrence nous dit que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}. \quad (*)$$

Par comparaison à la série de référence $\sum x^n/n$, le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$ est donc égal à 1.

[3.] Puisque le rayon de convergence est égal à 1, la série $\sum u_n x^n$ converge absolument pour $|x| < 1$ et diverge grossièrement pour $|x| > 1$.

• Pour $x = 1$,

$$u_n x^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Or la série harmonique $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif. Donc la série $\sum u_n x^n$ est divergente pour $x = 1$.

• Pour $x = -1$, on a affaire à une série alternée :

$$u_n x^n = (-1)^n u_n.$$

On sait déjà que u_n tend vers 0, mais la monotonie de u_n est peu délicate à étudier.

D'après (*) et la relation de récurrence,

$$u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} (1 - u_n + o(u_n)) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o(1/n) \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (\ddagger)$$

On en déduit que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (\dagger)$$

• C'est le passage délicat du calcul : u_n et u_{n+1} , c'est la même chose à l'ordre 1, mais pas à l'ordre 2 ! On obtient le développement asymptotique de u_n en substituant $(n-1)$ à n dans le développement asymptotique de u_{n+1} .

On en déduit que

$$(-1)^n u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente comme somme de deux séries convergentes (sans avoir à vérifier les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées).

• Variante. Avec (\dagger) et (\ddagger) ,

$$u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{-1}{n^2} + o(1/n^2) \sim \frac{-1}{n^2}.$$

Par conséquent, la différence $u_{n+1} - u_n$ est strictement négative à partir d'un certain rang (qu'il est inutile de chercher à préciser). On peut donc aussi appliquer le Critère spécial des séries alternées (à partir de ce rang, aussi fameux qu'inconnu) et en déduire que la série $\sum u_n x^n$ converge aussi pour $x = -1$.

☞ Avec (†), la relation de récurrence nous donne

$$u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

(avec le développement limité à l'ordre 2 de \exp au voisinage de 0) et on en déduit comme plus haut que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

On peut continuer ainsi encore longtemps et obtenir un développement asymptotique arbitrairement précis du terme général u_n .

Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_0^x f(t) dt = 1.$$

Comme f est supposée continue, l'intégrale a bien un sens.

On remarque déjà que $f(0) = 1$. D'après le Théorème fondamental, l'application

$$x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 et sa dérivée est égale à f . Donc la fonction f est en fait de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \int_0^x f(t) dt.$$

↳ On en déduit (par récurrence) que f est en fait de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

En dérivant, on constate que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x)$$

et comme on a remarqué que $f(0) = 1$, on conclut :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x.$$

↳ Une **équation intégrale** est une équation différentielle formulée sous un autre aspect. Sous cette forme, elle contient implicitement une condition initiale : une équation intégrale est en fait un **problème de Cauchy**.

On considère l'équation différentielle

$$x^2 y'(x) + y(x) = x \tag{E}$$

et l'application $h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \int_0^x \frac{e^{-1/t}}{t} dt.$$

[1.] Démontrer que h est bien définie.

[2.] Démontrer que f est une solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = h(x)e^{1/x} + \lambda e^{1/x}.$$

[3.a.] Démontrer que

$$\forall x > 0, \quad h(x) = xe^{-1/x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+ux} du.$$

☞ On pourra poser le changement de variable

$$t = \frac{x}{1+ux}.$$

[3.b.] En déduire un équivalent de h au voisinage de 0.

[1.] Pour $t > 0$, on pose

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} \cdot e^{-1/t}.$$

Il est clair que φ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, on sait que ue^{-u} tend vers 0 lorsque u tend vers $+\infty$ (par croissances comparées), donc $\varphi(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0^+ (par composition de limites).

En posant $\varphi(0) = 0$, on définit donc un prolongement de φ qui est continu sur $[0, +\infty[$ et en particulier continu sur le segment $[0, x]$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

La fonction h est donc bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ (en tant que primitive de φ).

[2.] On vérifie sans peine que les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont les fonctions proportionnelles à $x \mapsto e^{1/x}$.

Ensuite, on fait varier la constante : la fonction $x \mapsto \lambda(x)e^{1/x}$ est solution de (E) si, et seulement si,

$$\forall x > 0, \quad x^2 \lambda'(x) e^{1/x} = x$$

c'est-à-dire si

$$\forall x > 0, \quad \lambda'(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{-1/x} = h'(x)$$

c'est-à-dire si $\lambda - h$ est constante sur $]0, +\infty[$.

[3.a.] L'homographie

$$u \mapsto t = \frac{x}{1+ux}$$

est de classe \mathcal{C}^1 et strictement décroissante de $[0, +\infty[$ sur $]0, x]$ (car $x > 0$). De plus,

$$\frac{1}{t} = \frac{1+ux}{x} = \frac{1}{x} + u \quad \text{et} \quad dt = \frac{-x^2 du}{(1+ux)^2},$$

donc

$$\int_0^x \frac{e^{-1/t}}{t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-1/x-u} \cdot \frac{1+ux}{x} \cdot \frac{x^2 du}{(1+ux)^2} = xe^{-1/x} \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{du}{1+ux}.$$

[3.b.] Pour $x > 0$ et $u \in [0, +\infty[$, on pose

$$\psi(u, x) = \frac{e^{-u}}{1+xu}.$$

Pour tout $x > 0$, l'application $u \mapsto \psi(u, x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (si ce n'était pas évident, ce serait une conséquence du changement de variable précédent) et, pour tout $u \in [0, +\infty[$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(u, x) = e^{-u}.$$

Enfin, il est clair que

$$\forall (u, x) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad |\psi(u, x)| \leq e^{-u}.$$

Ce majorant est indépendant de x et intégrable sur \mathbb{R}_+ en fonction de u , ce qui établit la domination.

D'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} du = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1.$$

On déduit alors de la question précédente que

$$h(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x e^{-1/x}.$$