

---

## ORAUX BLANCS CENTRALE 2 – PSI\* – JUIN 2026

---

---

### Thèmes abordés

---

136-py-11	Division euclidienne et endomorphisme
136-py-28	Résultant de deux polynômes
136-py-34	Endomorphisme auto-adjoint
136-py-35	Théorème de Perron-Frobenius
136-py-37	Critère de Raabe-Duhamel
136-py-39	Convergence uniforme
136-py-45	Série génératrice
136-py-46	Série génératrice
136-py-48	Intégrales généralisées
136-py-50	Chaîne de Markov
136-1552	Somme d'une série entière

---

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}_{n-1}[X].$$

Pour  $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ , on note  $\Phi(P)$ , le reste de la division euclidienne du polynôme  $PF$  par  $X^n - 1$ .

[ 1. ] Démontrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ .

[ 2.a. ] Pour  $n = 4$ , écrire une fonction `MatCan(F)` qui renvoie la matrice de  $\Phi$  relative à la base canonique de  $\mathbb{C}_3[X]$ . Tester cette fonction avec

$$F = 1 + X + X^2 + X^3.$$

[ 2.b. ] Tester avec d'autres polynômes de degré 3 et calculer les vecteurs propres de la matrice. Quelle conjecture peut-on faire ?

[ 3. ] On revient au cas général.

Écrire la matrice de  $\Phi$  relative à la base canonique de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ . L'endomorphisme  $\Phi$  est-il diagonalisable ?

[ 1. ] Pour tout  $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ , le reste de la division euclidienne de  $PF$  par  $(X^n - 1)$  est un polynôme dont le degré est strictement inférieur à  $n$  (= le degré du diviseur), donc  $\Phi(P) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ .

• Par définition, quels que soient  $P_1$  et  $P_2$  dans  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ , quel que soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$P_1 F = (X^n - 1)Q_1 + \Phi(P_1)$$

$$P_2 F = (X^n - 1)Q_2 + \Phi(P_2)$$

$$(\lambda P_1 + P_2)F = (X^n - 1)Q_0 + \Phi(\lambda P_1 + P_2)$$

et, en combinant les deux premières relations, on obtient également :

$$(\lambda P_1 + P_2)F = (X^n - 1)Q_0 + [\lambda \Phi(P_1) + \Phi(P_2)]$$

où, selon la propriété bien connue,

$$\deg[\lambda \Phi(P_1) + \Phi(P_2)] \leq \max\{\deg P_1, \deg P_2\} < n.$$

Par unicité de la division euclidienne, on peut identifier les restes :

$$\forall P_1, P_2 \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \Phi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda \Phi(P_1) + \Phi(P_2)$$

donc  $\Phi$  est bien linéaire.

[ 2.a. ] Pour chaque vecteur  $E = X^0, X^1, X^2, X^3$  de la base canonique de  $\mathbb{C}_3[X]$ , on calcule le reste de la division euclidienne du produit  $EF$  par  $Q = X^4 - 1$ .

Les coordonnées relatives à la base canonique du polynôme  $\Phi(E)$  sont en fait ses coefficients, il reste donc à écrire les coefficients de  $\Phi(X^i)$  sur la colonne  $n^o$ i de la matrice.

```
X = Polynomial([0,1])
n = 4
Q = X**n-1
```

```
def matrice_Phi(F):
    M = np.zeros((n,n))
    for j in range(n):
        E = X**j
        R = (E*F)%Q
        for i, x in enumerate(R.coef):
            M[i,j] = x
    return M
```

• La matrice associée au polynôme  $1 + X + X^2 + X^3$  est la matrice dont les seize coefficients sont égaux à 1.

[ 2.b. ] Après quelques essais, il semblerait que la matrice de l'endomorphisme  $\Phi$  associée au polynôme  $F = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$  soit la matrice

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

[ 3. ] Soit  $n \geq 1$ . Pour  $0 \leq i < n$ , il est clair que

$$\begin{aligned} X^i \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{k+i} \\ &= \sum_{k=0}^{n-i-1} a_k X^{k+i} + \sum_{k=n-i}^n a_k (X^{k+i} - X^{k+i-n}) + \sum_{k=n-i}^n a_k X^{k+i-n} \\ &= (X^n - 1) \sum_{k=n-i}^n a_k X^{k+i-n} + \left( \sum_{k=i}^{n-1} a_{k-i} X^k + \sum_{k=0}^{i-1} a_{n-i+k} X^k \right). \end{aligned}$$

La colonne  $n^{\circ}i$  de la matrice est donc

$$\begin{pmatrix} a_{n-i} \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_0 \\ \vdots \\ a_{n-i-1} \end{pmatrix}.$$

• On a ainsi démontré dans le cas général la conjecture émise au [2.b].

↳ Pour ce qui suit, il faut savoir que la matrice

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \diagdown & & 0 \\ \vdots & \diagdown & & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

est une matrice de permutation, associée à un cycle d'ordre  $n$ .

Les puissances de  $J_n$  s'obtiennent donc par décalage et  $J_n^n = I_n$ .

On vérifie que la matrice de l'endomorphisme  $\Phi$  associé au polynôme

$$F = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$$

est égale à  $F(J_n)$ . Comme  $X^n - 1$  est un polynôme annulateur de  $J_n$  et que ce polynôme est scindé (sur  $\mathbb{C}$ ) à racines simples, la matrice  $J_n$  est diagonalisable. Par conséquent, tout polynôme en  $J_n$  est diagonalisable et en particulier, l'endomorphisme  $\Phi$  est diagonalisable.

Étant donnés deux polynômes

$$P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \quad \text{et} \quad Q = b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m$$

à coefficients complexes, le **résultant** de  $P$  et  $Q$  est le déterminant  $\text{Res}(P, Q)$  de la matrice

$$S(P, Q) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \ddots & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 & b_2 & b_1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_n & \dots & \dots & \dots & b_m \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

[ 1. ] Coder  $\text{Res}(P, Q)$  pour  $P$  et  $Q$  de degré 2.

[ 2. ] Calculer  $\text{Res}(P, Q)$  pour

[ 2.a. ]  $P = (X-1)(X-2)$  et  $Q = (X-1)(X-3)$ ,

[ 2.b. ]  $P = (X-1)(X-2)$  et  $Q = (X-3)(X-4)$ ,

[ 2.c. ]  $P = X^2 - 2X + 1$  et  $Q = X^2 - 2$ .

[ 3. ] Que peut-on conjecturer ?

[ 4. ] On considère l'application  $\varphi$  définie par

$$\forall (U, V) \in \mathbb{C}_{m-1}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X], \quad \varphi(U, V) = PU + QV.$$

[ 4.a. ] Démontrer que  $\varphi$  est linéaire et prend ses valeurs dans  $\mathbb{C}_{n+m-1}[X]$ .

[ 4.b. ] Démontrer que  $\varphi$  est injective si, et seulement si,  $P$  et  $Q$  n'ont pas de racine complexe commune.

[ 4.c. ] On pose

$$\mathcal{B} = ((1, 0), \dots, (X^{m-1}, 0), (0, 1), \dots, (0, X^{n-1}))$$

$$\mathcal{B}' = (1, X, \dots, X^{n+m-1}).$$

Démontrer que

$$S(P, Q) = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\varphi).$$

[ 5. ] Pour  $P \in \mathbb{C}[X]$ , le **discriminant**  $\Delta$  de  $P$  est défini par

$$\Delta = \text{Res}(P, P').$$

[ 5.a. ] Démontrer que les racines de  $P$  sont simples si, et seulement si,  $\Delta \neq 0$ .

[ 5.b. ] Soit  $P = aX^2 + bX + c$ , un polynôme de degré 2. Dédurre de ce qui précède que  $P$  admet deux racines complexes distinctes si, et seulement si,  $b^2 - 4ac \neq 0$ .

[ 1. ] La définition de la matrice  $S(P, Q)$  est tout sauf simple. Il faut prendre le temps de bien la comprendre :

— Dans un premier temps, on recopie en décalant d'un cran à chaque fois les coefficients de  $P$ ;

— dans un second temps, on recopie en décalant d'un cran à chaque fois les coefficients de  $Q$ ;

— on obtient au bout du compte une matrice carrée de taille  $n + m$ .

Sur la colonne de rang 0, le coefficient  $a_0$  est sur la ligne de rang 0 et le coefficient  $a_n$  est sur la ligne de rang  $n$ .

À cause du décalage, sur la colonne de rang  $j$ , le coefficient  $a_0$  est sur la ligne de rang  $0 + j = j$  et le coefficient  $a_n$  est sur la ligne de rang  $n + j$ .

Au terme de la première partie, le coefficient  $a_n$  est sur la dernière ligne, c'est-à-dire sur la ligne de rang  $n + (m - 1)$ . Cette colonne est donc la colonne de rang  $j = (m - 1)$ .

Dans la seconde partie de la matrice, c'est-à-dire pour  $m \leq j < m + n$ , le coefficient  $b_0$  est sur la ligne de rang  $(j - m)$  et le coefficient  $b_m$  est sur la ligne de rang  $(j - m) + m = j$ .

En particulier, sur la dernière colonne, c'est-à-dire pour  $j = m + n - 1$ , le coefficient  $b_m$  est sur la ligne de rang  $j = m + n - 1$ , c'est-à-dire sur la dernière ligne.

✎ Maintenant que tout est clair, on peut tirer parti des commodités offertes par numpy pour coder efficacement la matrice  $S(P, Q)$ .

```
def S(P, Q):
    m, n = P.degree(), Q.degree()
    A = np.zeros((m+n, m+n))
    for j in range(m):
        A[j:j+n+1, j] = P.coef
    for j in range(m, m+n):
        A[j-m:j+1, j] = Q.coef
    return A

def Res(P, Q):
    return alg.det(S(P, Q))
```

[ 2.a. ] Le résultant affiché est de l'ordre de  $10^{-16}$ . Comme il s'agit en fait d'un entier (= déterminant d'une matrice à coefficients entiers), on conclut que ce résultant est nul.

[ 2.b. ] De même, aux erreurs d'arrondi près, le résultant est égal à 12.

[ 2.c. ] Résultant égal à 1.

[ 3. ] Pas grand'chose si on n'a jamais entendu parler du résultant...

Si on a jeté un œil sur la suite de l'énoncé [5.a.] (ou si on a déjà rencontré le résultant au cours de ses aventures mathématiques), on peut conjecturer que le résultant de deux polynômes est nul si, et seulement si, ces deux polynômes ont une racine en commun.

↳ Pour apprécier ce théorème à sa juste valeur, il faut remarquer qu'on peut calculer le résultant de deux polynômes en ignorant tout de leurs racines respectives : il suffit de connaître les coefficients de ces polynômes.

[ 4.a. ] Comme  $\deg P = n$  et  $\deg Q = m$ , alors

$$\forall U \in \mathbb{C}_{m-1}[X], \quad \deg(PU) \leq n + m - 1 \quad \text{et} \quad \forall V \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \quad \deg(QV) \leq m + n - 1.$$

Par conséquent,  $\deg \varphi(U, V) \leq n + m - 1$ .

La linéarité de  $\varphi$  est claire.

[ 4.b. ] Comme  $P$  et  $Q$  sont des polynômes non constants, ils sont scindés dans  $\mathbb{C}[X]$ . Donc :

- ou bien  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux;
- ou bien  $P$  et  $Q$  ont une racine commune.

✎ Si  $P$  et  $Q$  ont une racine commune  $\alpha$ , alors il existe deux polynômes  $P_0 \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$  et  $Q_0 \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$  tels que

$$P = (X - \alpha)P_0 \quad \text{et} \quad Q = (X - \alpha)Q_0.$$

Dans ces conditions,  $(Q_0, -P_0) \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \times \mathbb{C}_{m-1}[X]$  est non nul et

$$\varphi(Q_0, -P_0) = (X - \alpha)P_0Q_0 - (X - \alpha)P_0Q_0 = 0,$$

donc l'application  $\varphi$  n'est pas injective.

✎ Si  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux et s'il existe  $(U, V) \in \mathbb{C}_{m-1}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X]$  tel que  $\varphi(U, V) = 0$ , alors

$$PU = Q(-V).$$

On déduit du Théorème de Gauss que  $P$  divise  $V$  et que  $Q$  divise  $U$ .

Mais  $\deg V < n = \deg P$  et  $\deg U < m = \deg Q$ , donc en fait  $(U, V) = (0, 0)$  et cela prouve que l'application  $\varphi$  est injective.

✎ On a ainsi démontré que  $\varphi$  était injective si, et seulement si,  $P$  et  $Q$  n'avaient aucune racine commune.

↳ Si on considère des polynômes à coefficients dans un corps  $\mathbb{K}$ , il ne faut plus raisonner sur les racines mais sur les diviseurs irréductibles de  $P$  et de  $Q$  (les polynômes non constants ne sont pas nécessairement scindés).

Si  $P$  et  $Q$  n'ont aucun facteur irréductible commun (= s'ils sont premiers entre eux), la démonstration qu'on a donnée prouve que l'application  $\varphi$  est injective.

Si  $P$  et  $Q$  ont un facteur irréductible  $R_0$  (= s'ils ne sont pas premiers entre eux), il est facile d'adapter la démonstration qu'on a donnée pour prouver que  $\varphi$  n'est pas injective.

*Autrement dit : pour des polynômes à coefficients dans un corps  $\mathbb{K}$ , l'application linéaire  $\varphi$  est injective si, et seulement si, les deux polynômes  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux.*

[ 4.c. ] Il suffit de revenir à la définition de la matrice d'une application linéaire.

[ 5.a. ] Les racines complexes de  $P$  sont simples si, et seulement si, les polynômes  $P$  et  $P'$  n'ont pas de racine commune, c'est-à-dire si l'application linéaire  $\varphi$  est injective.

Or l'espace de départ  $\mathbb{C}_{n-2}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X]$  et l'espace d'arrivée  $\mathbb{C}_{(n-1)+n-1}[X] = \mathbb{C}_{2n-2}[X]$  de  $\varphi$  ont même dimension :

$$(n-2+1) + (n-1+1) = 2n-1 = (2n-2) + 1$$

donc (Théorème du rang) l'application  $\varphi$  est injective si, et seulement si, le déterminant de sa matrice est non nul.

Donc les racines complexes de  $P$  sont simples si, et seulement si, le discriminant de  $P$  est non nul.

↳ *Le même raisonnement peut se tenir dans un corps  $\mathbb{K}$  quelconque : le discriminant de  $P \in \mathbb{K}[X]$  est nul si, et seulement si,  $P$  admet un facteur carré (= l'un des facteurs irréductibles apparaît avec une valuation supérieure à 2).*

[ 5.b. ] Avec  $P = aX^2 + bX + c$  et  $P' = 2aX + b$ , on a  $n = 2$  et  $m = 1$ , donc  $S(P, P') \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$  :

$$S(P, P') = \begin{pmatrix} c & b & 0 \\ b & 2a & b \\ a & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

et  $\text{Res}(P, P') = 4a^2c + ab^2 - 2ab^2 = a(4ac - b^2)$  (avec la règle de Sarrus, bien entendu).

Comme  $a \neq 0$  (puisque  $\deg P = 2$ ), on en déduit que  $P$  admet deux racines complexes distinctes si, et seulement si,  $4ac - b^2 \neq 0$ .

↳ *Pour la culture, si  $P = X^3 + pX + q$  (forme canonique d'un polynôme de degré 3), alors  $P' = 3X^2 + p$  et  $m + n = 5$  :*

$$S(P, P') = \begin{pmatrix} q & 0 & p & 0 & 0 \\ p & q & 0 & p & 0 \\ 0 & p & 3 & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On retrouve ainsi  $\text{Res}(P, P') = 27q^2 + 4p^3$ .

On étudie la matrice  $A_n \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad [A_n]_{i,j} = \frac{1}{n-i+j+1} \binom{n}{i}.$$

[ 1.a. ] Écrire une fonction `mat(n)` qui renvoie la matrice  $A_n$ .

📖 Le module `scipy.special` contient la fonction `comb(n, i)` qui renvoie le coefficient binomial  $\binom{n}{i}$ .

[ 1.b. ] Étudier la diagonalisabilité de  $A_n$  pour  $2 \leq n \leq 6$ .

[ 2. ] Pour  $x = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$  et  $y = (y_i)_{0 \leq i \leq n}$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , on pose

$$\langle x | y \rangle_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{x_i y_j}{i+j+1}.$$

On admet que  $\langle \cdot | \cdot \rangle_n$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

[ 2.a. ] Écrire une fonction `prod_scal(x, y)` qui renvoie la valeur de  $\langle x | y \rangle_n$ .

[ 2.b. ] Pour  $2 \leq n \leq 8$ , étudier l'orthogonalité des sous-espaces propres de  $A_n$  pour le produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle_n$ .

[ 3. ] On définit une application  $u$  en posant

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt.$$

[ 3.a. ] Démontrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  et que la matrice  $A_n$  représente  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

[ 3.b. ] On considère le produit scalaire défini sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x) dx.$$

Démontrer que  $u$  est auto-adjoint pour ce produit scalaire et conclure.

[ 1.a. ]

```
from scipy.special import comb

def mat(n):
    A = np.zeros((n+1, n+1))
    for i in range(n+1):
        for j in range(n+1):
            A[i,j] = comb(n, i)/(n-i+j+1)
    return A
```

[ 1.b. ]

```
for n in range(2, 7):
    A = mat(n)
    Sp, P = alg.eig(A)
    print(Sp)
```

On constate que les matrices  $A_n$  ont  $(n+1)$  valeurs propres (assez nettement) distinctes. De ce fait, il semble que ces matrices soient toutes diagonalisables.

[ 2.a. ]

```
def prod_scal(x, y, n):
    s = 0
    for i in range(n+1):
        for j in range(n+1):
            s += x[i]*y[j]/(i+j+1)
    return s
```

[ 2.b. ] Appliquée à une matrice  $A$ , la fonction `eig` renvoie un couple, constitué d'un tableau `Sp` contenant les valeurs propres de  $A$  (ou du moins des valeurs approchées des valeurs propres de  $A$ ) et d'une matrice `P` dont les colonnes sont des vecteurs propres de  $A$  (rangés, évidemment, dans le même ordre que les valeurs propres).

☞ *Numériquement parlant (= aux erreurs d'arrondi près), toute matrice carrée de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  possède  $n$  valeurs propres complexes distinctes. Donc, de ce point de vue, toute matrice est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.*

On calcule le produit scalaire des colonnes de chaque matrice de passage.

```
for n in range(2, 9):
    A = mat(n)
    Sp, P = alg.eig(A)
    for i in range(n):
        Ci = P[:, i]
        for j in range(i+1, n+1):
            Cj = P[:, j]
            print(prod_scal(Ci, Cj, n))
```

Le résultat est passablement indigeste, mais si on fait un peu attention, tous les produits scalaires sont de l'ordre de  $10^{-16}$  ou  $10^{-17}$ . Autrement dit, tous ces produits scalaires sont très probablement nuls et les vecteurs propres qui se trouvent dans la matrice de passage sont deux à deux orthogonaux.

[ 3.a. ] D'après la formule du binôme,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(P)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \int_0^1 t^{n-k} P(t) dt,$$

donc  $u(P)$  est bien une fonction polynomiale de degré inférieur à  $n$ .

La linéarité de  $u$  découle évidemment de la linéarité de l'intégrale.

☛ Pour tout  $0 \leq j \leq n$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(X^j)(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \int_0^1 t^{n-i} t^j dt = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1}{n-i+j+1} \cdot x^i.$$

On retrouve bien les coefficients de la  $j$ -ème colonne de  $A_n$ . La matrice  $A_n$  représente donc l'endomorphisme  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

[ 3.b. ] Pour  $0 \leq i, j \leq n$ ,

$$\begin{aligned} \langle u(X^i) | X^j \rangle &= \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n-k+i+1} \cdot x^k \right) x^j dx \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n-k+i+1} \frac{1}{k+j+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{n-\ell} \frac{1}{\ell+i+1} \frac{1}{n-\ell+j+1} && \text{(changement d'indice : } \ell = n-k) \\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \frac{1}{n-\ell+j+1} \frac{1}{\ell+i+1} && \text{(symétrie des coefficients binomiaux)} \\ &= \langle u(X^j) | X^i \rangle = \langle X^i | u(X^j) \rangle. \end{aligned}$$

Comme la famille  $(X^i)_{0 \leq i \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ , cela suffit pour prouver que l'endomorphisme  $u$  est auto-adjoint (pour la structure euclidienne considérée ici).

☞ *Variante savante. Quels que soient les polynômes  $P$  et  $Q$ , l'application*

$$[(x, t) \mapsto (x+t)^n P(t) Q(x)]$$

*est continue sur le compact  $[0, 1] \times [0, 1]$ , donc*

$$\begin{aligned} \langle u(P) | Q \rangle &= \int_0^1 \left( \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt \right) Q(x) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^1 (t+x)^n Q(x) dx \right) P(t) dt = \langle P | u(Q) \rangle \end{aligned}$$

*d'après le Théorème de Fubini sur les intégrales doubles.*

• Comme la matrice  $A_n$  représente l'endomorphisme auto-adjoint  $u$ , elle est diagonalisable (Théorème spectral).

De plus, les sous-espaces propres de  $u$  sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$ . Comme

$$\langle x | y \rangle_n = \left\langle \sum_{i=0}^n x_i X^i \mid \sum_{j=0}^n y_j X^j \right\rangle,$$

les sous-espaces propres de la matrice  $A_n$  sont orthogonaux pour le produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle_n$ .

Et comme ces sous-espaces propres sont des droites vectorielles, chaque base de vecteurs propres est une base orthogonale. Donc les colonnes de la matrice de passage renvoyée par la fonction eig (= une base de vecteurs propres) sont deux à deux orthogonales.

• La matrice  $A_n$  n'est pas symétrique car elle représente  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  qui n'est pas une base orthonormée de  $\mathbb{R}_n[X]$  pour  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .

Soit  $\mathcal{E}_n$ , l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont strictement positifs.

[ 1. ] Écrire une fonction `creer_matrice(n, a, b)` qui renvoie une matrice  $A \in \mathcal{E}_n$  dont les coefficients sont des entiers pris au hasard dans l'intervalle  $[[a, b]]$ .

[ 2. ] Une matrice de  $\mathcal{E}_n$  peut-elle avoir des valeurs propres négatives ? strictement négatives ?

[ 3. ] Soit  $A \in \mathcal{E}_n$ . On note

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

ses valeurs propres et  $(X_1, \dots, X_n)$ , une base orthonormée telle que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad AX_k = \lambda_k X_k.$$

[ 3.a. ] Démontrer que

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n, \quad Y^T \cdot A \cdot Y \leq \lambda_n \|Y\|^2.$$

[ 3.b. ] Conjecturer le signe des coefficients du vecteur propre  $X_n$ .

[ 3.c. ] Étudier le cas d'égalité dans [3.a.].

[ 3.d. ] Démontrer la conjecture avancée en [3.b.]

[ 1. ]

```
def creer_matrice(n, a, b):
    A = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        L = rd.randint(a, b, n-i)
        A[i,i:] = L # fin de la i-ème ligne
        A[i:,i] = L # fin de la i-ème colonne
    return A
```

[ 2. ] La matrice  $J_n$  dont tous les coefficients sont égaux à 1 appartient à  $\mathcal{E}_n$  et elle admet 0 pour valeur propre.

La matrice  $2J_n - I_n$  appartient à  $\mathcal{E}_n$  (les coefficients sont égaux à 1 sur la diagonale et à 2 partout ailleurs) et pourtant la matrice

$$(2J_n - I_n) - (-1)I_n = (2J_n - I_n) + I_n$$

n'est pas inversible, donc  $(-1)$  est valeur propre de  $(2J_n - I_n)$ .

↳ La matrice est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable et en particulier sa trace est la somme de ses valeurs propres.

Comme tous les coefficients sont strictement positifs, la trace est strictement positive et une matrice  $A \in \mathcal{E}_n$  admet donc au moins une valeur propre strictement positive. En particulier, la plus grande valeur propre de  $A$  est strictement positive.

[ 3.a. ] Soit  $Y \in \mathbb{R}^n$ . Décomposons ce vecteur dans la base orthonormée de vecteurs propres :

$$Y = \sum_{k=1}^n y_k X_k.$$

Comme la base est orthonormée,

$$\|Y\|^2 = \sum_{k=1}^n y_k^2$$

et comme les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de  $A$ ,

$$Y^T A Y = \left( \sum_{k=1}^n y_k X_k \right)^T \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k X_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2$$

puisque  $X_k^T X_\ell = \delta_{k,\ell}$  (base orthonormée).

Comme les valeurs propres sont rangées dans l'ordre croissant,

$$Y^T A Y \leq \sum_{k=1}^n \lambda_n y_k^2 = \lambda_n \|Y\|^2.$$

[ 3.b. ] On se sert de la fonction `creer_matrice` pour faire quelques essais.

La fonction `alg.eig` nous donne un couple de tableaux :

— le premier tableau  $S$  nous donne le spectre (approché) de la matrice  $M$ ;

— le second tableau est une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}MP = \text{Diag}(S)$ , c'est-à-dire une matrice de passage vers une base de vecteurs propres.

Il faut donc lire cette matrice **en colonnes** pour avoir une idée des vecteurs propres de la matrice étudiée.

☞ *Puisqu'il s'agit ici de calcul numérique, tout se passe comme si les matrices étudiées admettaient  $n$  valeurs propres réelles deux à deux distinctes. Il existe donc (à peu près) toujours une base de vecteurs propres.*

À chaque essai, on constate que les coefficients du vecteur propre  $X_n$  associé à  $\lambda_n$  (= la plus grande des valeurs propres) sont tous de même signe.

[ 3.c. ] En reprenant les calculs précédents, on constate qu'il y a égalité si, et seulement si,  $\lambda_k = 0$  pour tout  $k$  tel que  $\lambda_k < \lambda_n$ .

Autrement dit,  $Y^T AY = \lambda_n \|Y\|^2$  si, et seulement si, le vecteur  $Y$  appartient au sous-espace propre de  $A$  associé à la plus grande valeur propre  $\lambda_n$ .

[ 3.d. ] Considérons un vecteur propre  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  associé à la plus grande valeur propre  $\lambda_n$  et le vecteur

$$Z = (|y_1|, \dots, |y_n|).$$

Il est clair que  $\|Z\|^2 = \|Y\|^2$  et que

$$Y^T AY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i a_{i,j} y_j \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_i| a_{i,j} |y_j| = Z^T AZ$$

puisque les coefficients de  $A$  sont tous positifs.

On a donc

$$\lambda_n \|Z\|^2 = \lambda_n \|Y\|^2 = Y^T AY \leq Z^T AZ \leq \lambda_n \|Z\|^2.$$

Nous sommes donc dans le cas d'égalité et on sait, depuis la question précédente, que  $Z$  est alors un vecteur propre associé à  $\lambda_n$ .

☞ *Dans un sous-espace propre, seul le vecteur nul n'est pas un vecteur propre. Comme  $Y$  est, par hypothèse, un vecteur propre, il n'est pas nul et  $Z$  non plus. Donc  $Z$  est bien un vecteur propre.*

☛ Supposons que le vecteur  $Z$  admette une coordonnée nulle. Pour simplifier l'écriture des calculs, nous supposons que  $|y_1| = 0$ . La relation  $AZ = \lambda_n Z$  nous donne alors (sur la ligne  $i$ ) :

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{a_{i,j}}_{>0} |y_j| = \lambda_n |y_1| = 0.$$

Si une somme de réels positifs est nulle, alors tous ses termes sont nuls et comme les  $a_{1,j}$  sont strictement positifs, on en déduit que tous les  $y_j$  sont nuls : c'est absurde, puisque ce sont les coordonnées d'un vecteur propre !

Par conséquent, toutes les coordonnées de  $Z$  sont strictement positives.

☛ Supposons enfin que les coordonnées du vecteur propre  $Y$  ne soient pas toutes de même signe. Dans ce cas,  $Y + Z$  n'est pas le vecteur nul (puisque certaines coordonnées de  $Y$  sont strictement positives), donc c'est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_n$ , mais  $Y + Z$  admet au moins une coordonnée nulle (puisque  $Y$  possède au moins une coordonnée strictement négative).

Ainsi,  $Y + Z$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_n$ , toutes ses coordonnées sont positives et l'une de ses coordonnées est nulle : le raisonnement qu'on a appliqué à  $Z$  nous conduit cette fois à une absurdité.

Nous avons ainsi démontré que toutes les coordonnées des vecteurs propres associés à  $\lambda_n$  sont de même signe (et toutes non nulles).

☞ *En insistant dans la même direction, on peut démontrer que la dimension du sous-espace propre associé à  $\lambda_n$  est égale à 1.*

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On dit qu'une suite de termes strictement positifs  $(u_n)$  vérifie la propriété  $(F_\lambda)$  lorsque

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $v_n = 1/n^\beta$  (où  $\beta$  est un réel donné quelconque) et pour  $n \geq 2$ , on pose

$$y_n = \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

[ 1. ] À l'aide de Python, conjecturer le réel  $\lambda$  tel que la suite  $(v_n)$  vérifie la propriété  $(F_\lambda)$ . Étudier la convergence de la série  $\sum v_n$  et démontrer la conjecture sur  $\lambda$ .

[ 2. ] Mêmes questions sur  $(y_n)$ .

[ 3. ] Dans cette question, on considère une suite strictement positive  $(u_n)$  qui vérifie la propriété  $(F_\lambda)$ .

[ 3.a. ] On suppose que  $\lambda < 0$ . Démontrer que la série  $\sum u_n$  diverge.

[ 3.b. ] On suppose que  $\lambda > \beta > 1$ . Démontrer qu'il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

En déduire la nature de la série  $\sum u_n$ .

[ 3.c. ] On suppose que  $0 \leq \lambda < 1$ . Démontrer que la série  $\sum u_n$  diverge. Que dire dans le cas  $\lambda = 1$  ?

[ 4. ] Pour  $n \geq 1$ , on pose

$$w_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Déterminer la nature de la série  $\sum w_n$ .

[ 1. ]

```
def estimation_lambda(u, n):
    x, y = u(n), u(n+1)
    return (x-y)/x*n

def u(beta):
    def f(n):
        return n**(-beta)
    return f
```

Après quelques essais, on devine que  $\lambda = \beta$ .

- La série (de Riemann)  $\sum v_n$  converge si, et seulement si,  $\beta > 1$ .
- Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

[ 2. ]

```
def v(n):
    return 1/(n*np.log(n)**2)
```

En prenant de très, très grandes valeurs de  $n$ , on finit par conjecturer que  $\lambda = 1$ . Mais la convergence est très, très, très lente :  $\lambda \approx 1,0789$  pour  $n = 10^{11}$  !

- Là encore, un développement asymptotique valide notre conjecture. (Vérifiez !)
- Une comparaison somme/intégrale montre que la série  $\sum y_n$  est convergente.

[ 3.a. ] Si  $\lambda < 0$ , alors le quotient  $u_{n+1}/u_n$  est strictement supérieur à 1 pour tout  $n$  assez grand et comme les  $u_n$  sont supposés strictement positifs, on en déduit qu'il existe un rang  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad u_{n+1} > u_n > 0.$$

De ce fait, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers 0 et la série  $\sum u_n$  est grossièrement divergente.

[ 3.b. ] On vérifie facilement que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda - \beta}{n}.$$

⚡ *Il est risqué de sommer des équivalents, mais il est logique d'ajouter des développements limités ou des développements asymptotiques — c'est même fait pour ça.*

Comme  $\lambda - \beta > 0$ , on en déduit que cette différence est strictement positive à partir d'un certain rang.

• Comme les  $u_n$  sont strictement positifs, on en déduit par récurrence que

$$\forall n \geq N, \quad u_n \leq \frac{u_N}{v_N} \cdot v_n.$$

Comme  $\beta > 1$ , la série  $\sum v_n$  est une série convergente. Par comparaison de séries de termes généraux positifs, on en déduit que la série  $\sum u_n$  est (absolument) convergente.

[ 3.c. ] Si  $\lambda < 1$ , on peut choisir  $\beta$  de telle sorte que  $\lambda < \beta < 1$ . Le même raisonnement qu'à la question précédente montre qu'il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \quad u_n \geq \frac{u_N}{v_N} \cdot v_n$$

et comme la série  $\sum v_n$  est une série divergente de terme général positif, la série  $\sum u_n$  est divergente elle aussi.

• Dans le cas  $\lambda = 1$ , on ne peut pas conclure : la série  $\sum u_n$  peut être convergente (cas de la série  $\sum y_n$ ) ou divergente (cas de la série harmonique).

⚡ *Même situation que pour la règle de d'Alembert !*

[ 4. ] Il est clair que les  $w_n$  sont strictement positifs. De plus,

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On a donc  $0 \leq \lambda = 1/6 < 1$  et la série  $\sum w_n$  est divergente.

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la suite de fonctions définies par la donnée de

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_0(x) = 1$$

et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x 2\sqrt{f_n(t)} dt.$$

On pose également

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$$

ainsi que

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \frac{4\sqrt{b_n}}{a_n + 2}.$$

[ 1. ] Écrire une fonction qui, pour  $n \in \mathbb{N}$ , renvoie le couple  $(a_n, b_n)$ . Conjecturer la convergence et les limites éventuelles des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

[ 2. ] Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = b_n x^{a_n}.$$

[ 3. ] Tracer les courbes des fonctions  $f_2, f_3, f_7 \dots$  pour  $x \in [0, 1]$ . Quelle conjecture peut-on faire sur la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

[ 4. ] Démontrer que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Préciser sa limite.

[ 5. ] Démontrer que la suite de terme général

$$2^{n+1} \ln b_{n+1} - 2^n \ln b_n$$

est bornée. En déduire que la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et préciser sa limite.

[ 6. ] En déduire la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . La convergence est-elle uniforme ?

[ 1. ] Code sans mystère.

```
def couple_ab(n):
    a, b = 0, 1
    for i in range(n):
        a, b = a/2+1, 4*np.sqrt(b)/(a+2)
    return a, b
```

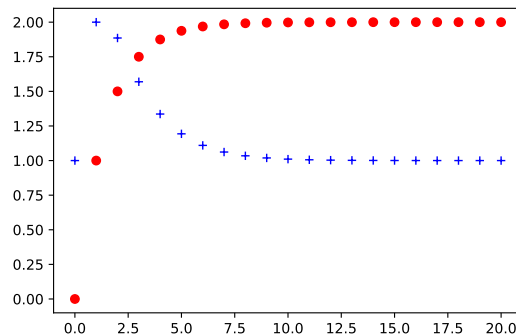
☛ Je préfère éviter de calculer plusieurs fois les mêmes valeurs : si on peut illustrer graphiquement le comportement asymptotique des suites avec une complexité linéaire en  $n$ , pourquoi s'obliger à le faire avec une complexité quadratique ?

Je reprends donc le code précédent et, au lieu de renvoyer le dernier couple calculé, je renvoie l'ensemble des valeurs calculées.

```
def listes_ab(n):
    L_a, L_b = [], []
    for i in range(n):
        a, b = L_a[-1], L_b[-1]
        L_a.append(a/2 + 1)
        L_b.append(4*np.sqrt(b)/(a+2))
    return L_a, L_b
```

On trace le résultat et on constate que, visiblement, la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 2 et que la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 1.

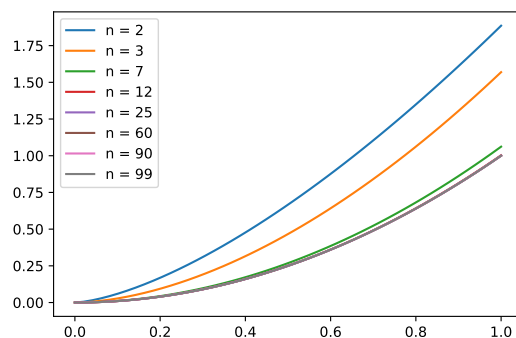
```
def tracer_ab(n):
    L_a, L_b = listes_ab(n)
    plt.figure()
    plt.plot(L_a, 'ro')
    plt.plot(L_b, 'b+')
```



[ 2. ] Récurrence sans mystère.

[ 3. ] On calcule un échantillon de couples  $(a_n, b_n)$  avec des valeurs "assez" grandes de  $n$ , puis on trace le graphe de  $f_n$  pour ces valeurs de  $n$ .

```
L_a, L_b = listes_ab(100)
X = np.linspace(0, 1)
for n in [2, 3, 7, 12, 25, 60, 90, 99]:
    def fn(x):
        return L_b[n]*x**L_a[n]
    plt.plot(X, fn(X), label=f"n = {n}")
plt.legend()
```



Il semblerait que les trois dernières courbes (pour  $n \geq 60$ ) soient confondues — convergence uniforme sur  $[0, 1]$  ?

[ 4. ] La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmético-géométrique de raison  $1/2$  et comme  $|1/2| < 1$ , cette suite est convergente. Sa limite est le "point fixe"  $\ell$  défini par  $\ell = \ell/2 + 1$ , c'est-à-dire  $\ell = 2$ .

↳ Si  $u_{n+1} = au_n + b$  et  $\ell = a\ell + b$ , alors la suite de terme général  $v_n = u_n - \ell$  est géométrique de raison  $a$  (vérification sans difficulté). Si  $|a| < 1$ , la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ .

[ 5. ] Sachant que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(a_n - 2) = \frac{1}{2^n}(a_0 - 2) \quad \text{c'est-à-dire} \quad a_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right),$$

on déduit de la relation de récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln b_{n+1} - \frac{1}{2} \ln b_n = \ln \frac{b_{n+1}}{\sqrt{b_n}} = \ln \frac{4}{2 + a_n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

On en déduit que

$$2^{n+1} \ln b_{n+1} - 2^n \ln b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

et donc (télescopage et sommation des relations de comparaison) que

$$\ln b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2^n}$$

et en particulier que la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 1.

[ 6. ] Comme  $b_n$  tend vers 1 et que  $a_n$  tend vers 2, il est clair que, pour tout  $x \in [0, 1]$ , l'expression  $b_n x^{a_n}$  tend vers  $x^2$ . La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc simplement sur  $[0, 1]$  vers  $x \mapsto x^2$ .

• Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$|f_n(x) - x^2| = |(b_n - 1)x^{a_n} + (x^{a_n} - x^2)| \leq |b_n - 1| + |x^{a_n} - x^2|.$$

La fonction  $\Delta$  définie par  $\Delta(x) = x^{a_n} - x^2$  est nulle en 0 et en 1. De plus,

$$\Delta'(x) = a_n x^{a_n - 1} - 2x = (a_n x^{a_n - 2} - 2)x$$

donc  $|\Delta(x)|$  est maximum pour  $x = x_0$  où  $x_0^{a_n - 2} = 2/a_n$ . Par conséquent,

$$\max_{x \in [0, 1]} |\Delta(x)| = x_0^2 (x_0^{a_n - 2} - 1) = x_0^2 \left( \frac{2}{a_n} - 1 \right) \leq \left( \frac{2}{a_n} - 1 \right)$$

puisque  $0 \leq x_0 \leq 1$ .

• On sait que  $a_n < 2$ , donc on connaît le signe de  $\Delta(x)$ .

Sur les courbes qu'on a tracées plus haut, on a l'impression que l'écart  $|f_n(x) - x^2|$  est maximal pour  $x = 1$ . Les calculs qui précèdent montrent que ce n'est pas le cas – pas tout à fait, car  $x_0$  est quand même très proche de 1.

Bref,

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], \quad |f_n(x) - x^2| \leq |b_n - 1| + \left( \frac{2}{a_n} - 1 \right).$$

Le majorant est indépendant de  $x$  et tend vers 0, donc la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers  $x \mapsto x^2$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$H_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : n = 2p + 3q\},$$

on note  $\sigma(n)$ , le cardinal de  $H_n$  et on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma(n)x^n.$$

☞ La fonction  $S$  est la **fonction génératrice** de la suite d'entiers  $(\sigma(n))_{n \in \mathbb{N}}$ .

[ 1. ] Démontrer l'existence de  $\sigma(n)$ . Calculer  $\sigma(0)$ ,  $\sigma(1)$ ,  $\sigma(2)$ . Démontrer que

$$\forall n \geq 3, \quad \sigma(n) \geq 1.$$

[ 2. ] Tracer  $\sigma(n)$  pour  $n \in \llbracket 0, 25 \rrbracket$ .

[ 3. ] Déterminer le rayon de convergence de la série entière de somme  $S$ .

[ 4. ] Démontrer que, pour un intervalle  $I$  à préciser,

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3}.$$

[ 5. ] Déterminer les nombres complexes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $f$  tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1 \implies S(z) = \frac{a}{1-z} + \frac{b}{(1-z)^2} + \frac{c}{1+z} + \frac{d}{1-jz} + \frac{f}{1-j^2z}$$

où  $j$  est bien sûr la racine cubique de l'unité de partie imaginaire strictement positive.

[ 6. ] En déduire une expression de  $\sigma(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

[ 1. ] Si  $(p, q) \in H_n$ , alors  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels tels que  $2p \leq n$  et  $3q \leq n$ . Il n'y a donc qu'un nombre fini de couples  $(p, q)$  dans  $H_n$  et cela prouve l'existence de  $\sigma(n)$  en tant qu'entier naturel.

☛ L'ensemble  $H_0$  est réduit à  $(0, 0)$ , donc  $\sigma(0) = 1$ .

L'ensemble  $H_1$  est clairement vide, donc  $\sigma(1) = 0$ .

L'ensemble  $H_2$  est réduit à  $(1, 0)$ , donc  $\sigma(2) = 1$ .

☛ Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ .

Comme les entiers 2 et 3 sont premiers entre eux, il existe un couple  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $2a + 3b = m$ . Comme  $m$  n'est pas nul, les deux entiers  $a$  et  $b$  ne peuvent être tous les deux nuls.

L'entier  $a$  (resp.  $b$ ) est nul si, et seulement si,  $m$  est un multiple de 3 (resp. de 2).

Supposons que  $a > 0$  et que  $b < 0$ . Pour tout entier  $k \in \mathbb{Z}$ , il est clair que

$$2(a - 3k) + 3(b - 2k) = m.$$

La division euclidienne de  $a$  par 3 nous donne un entier  $k$  particulier (= le quotient de la division euclidienne) tel que

$$0 \leq a - 3k < 3 \quad \text{et donc que} \quad 0 \leq 2(a - 3k) \leq 4$$

(inégalité stricte entre nombres entiers). Supposons alors que  $b + 2k < 0$ , c'est-à-dire que  $b + 2k \leq -1$  (inégalité stricte entre entiers à nouveau). On a donc  $3(b + 2k) \leq -3$ . Par conséquent,

$$m = 2(a - 3k) + 3(b - 2k) \leq 4 - 3 = 1.$$

Supposons enfin que  $b > 0$  et que  $a < 0$ . En raisonnant de même, on dispose d'un entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$m = 2(a - 3k) + 3(b + 2k) \quad \text{et} \quad 0 \leq 3(b + 2k) \leq 3.$$

Si  $a - 3k < 0$ , alors  $a - 3k \leq -1$  et  $2(a - 3k) \leq -2$ , d'où  $m \leq 3 - 2 = 1$  à nouveau.

On a ainsi démontré que

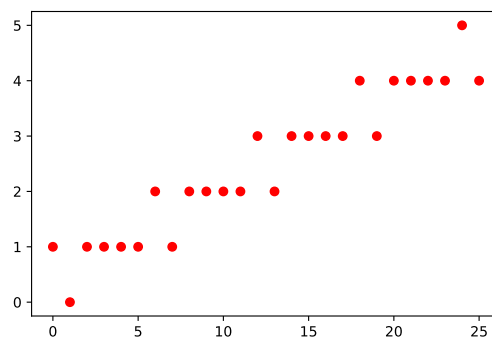
$$\forall m \geq 2, \quad H_m \neq \emptyset.$$

[ 2. ] On sait que l'entier  $q$  varie entre 0 et  $\lceil n/3 \rceil$ . Pour chaque valeur de  $q$ , il existe au plus une valeur de  $p$ . Plus précisément, à  $q$  fixé, il existe un entier  $p$  convenable si, et seulement si,  $n - 3q$  est pair.

```
def sigma(n):
    s, qmax = 0, n//3 + 1
    for q in range(qmax):
        if (n-3*q)%2==0:
            s += 1
    return s
```

Le tracé montre que  $\sigma(n)$  croît à peu près linéairement en  $n$ .

```
N = range(26)
S = [sigma(n) for n in N]
plt.plot(N, S, 'ro')
```



[ 3. ] Comme  $\sigma(n) \geq 1$  pour tout  $n \geq 2$ , alors le rayon de convergence de la série entière  $\sum \sigma(n)x^n$  est inférieur à 1.

↳ Il y a divergence grossière pour  $x \geq 1$ .

D'après la remarque initiale,  $0 \leq 3q \leq n$ , donc il y a au plus  $\lceil n/3 \rceil$  valeurs possibles pour  $q$  et par conséquent,  $\sigma(n) = \mathcal{O}(n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Donc le rayon de convergence de la série  $\sum \sigma(n)x^n$  est supérieur à 1.

↳ La série entière  $\sum nx^n$  est une série de référence (cf série géométrique), dont le rayon de convergence est égal à 1.

Donc le rayon de convergence de la série entière  $\sum \sigma(n)x^n$  est égal à 1.

[ 4. ] Soit  $0 \leq r < 1$ . La famille  $(r^{2p+3q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  est une famille de réels positifs et cette famille est sommable d'après le Théorème de Fubini, puisque :

— pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la sous-famille  $(r^{2p+3q})_{q \in \mathbb{N}}$  est sommable, de somme

$$s_p = \sum_{q=0}^{+\infty} r^{2p+3q} = \frac{r^{2p}}{1-r^3}$$

(suite géométrique de premier terme  $r^{2p}$  et de raison  $0 < r^3 < 1$ );

— la famille des sommes partielles  $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est sommable (c'est une suite géométrique de raison  $0 \leq r^2 < 1$ ).

Par conséquent, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , la famille  $(x^{2p+3q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable. Il est clair que

$$\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} H_n.$$

On déduit alors du Théorème de Fubini que

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} x^{2p+3q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(p,q) \in H_n} x^{2p+3q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(p,q) \in H_n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma(n)x^n$$

mais aussi (avec une autre partition, naturelle, de  $\mathbb{N}^2$ ) que

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} x^{2p+3q} = \sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p} \left( \sum_{q=0}^{+\infty} x^{3q} \right) = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3}.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad S(x) = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3}.$$

[ 5. ] Allons-y progressivement et cherchons d'abord la décomposition dans  $\mathbb{R}(X)$  :

$$\frac{1}{(1-X^2)(1-X^3)} = \frac{a}{1-X} + \frac{b}{(1-X)^2} + \frac{c}{1+X} + \frac{\Delta X + F}{1+X+X^2}.$$

On détermine directement  $b = 1/6$  et  $c = 1/4$ . En calculant un équivalent au voisinage de l'infini, on obtient l'équation

$$0 = -a + \frac{1}{4} + \Delta \quad \text{c'est-à-dire} \quad a - \Delta = \frac{1}{4}$$

et en calculant un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0, on obtient d'une part

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = (1+o(x))(1+o(x)) = 1+o(x)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1+x} + \frac{\Delta x + F}{1+x+x^2} &= a(1+x) + b(1+2x) + c(1-x) + (F+\Delta x)(1-x) + o(x) \\ &= [a+b+c+F] + [a+2b-c+\Delta-F]x + o(x). \end{aligned}$$

En égalant ces deux développements limités, on obtient les équations

$$a + F = 1 - b - c = \frac{7}{12} \quad \text{et} \quad a + \Delta - F = \frac{-1}{12}.$$

En sommant ces trois équations, on obtient  $3a = 3/4$ , donc  $a = 1/4$ . On en déduit que  $\Delta = 0$  et que  $F = 1/3$ . On a donc

$$\frac{1}{(1-X^2)(1-X^3)} = \frac{1}{4(1-X)} + \frac{1}{6(1-X)^2} + \frac{1}{4(1+X)} + \frac{1}{3(1+X+X^2)}.$$

☞ On pourrait procéder différemment, mais ce ne serait pas forcément plus rapide.

On commence bien sûr par factoriser le dénominateur en produit de polynômes deux à deux premiers entre eux :

$$\frac{1}{(1-X^2)(1-X^3)} = \frac{1}{P_0 P_1 P_2}$$

avec  $P_0 = (1-X)^2$ ,  $P_1 = 1+X$  et  $P_2 = 1+X+X^2$ . On sait alors que les polynômes

$$Q_0 = P_1 P_2, \quad Q_1 = P_0 P_2, \quad Q_2 = P_0 P_1$$

sont premiers dans leur ensemble. L'algorithme de Blankinskip nous permet de trouver une solution de l'équation de Bézout :

$$(5-3X)Q_0 + 3Q_1 + 4Q_2 = 12$$

ce qui nous donne, en divisant par  $P_0 P_1 P_2$  :

$$\frac{12}{(1-X^2)(1-X^3)} = \frac{5-3X}{P_0} + \frac{3}{P_1} + \frac{4}{P_2} = \frac{2+3(1-X)}{(1-X)^2} + \frac{3}{1+X} + \frac{4}{1+X+X^2}$$

et on retrouve ainsi

$$\frac{1}{(1-X^2)(1-X^3)} = \frac{1}{4(1-X)} + \frac{1}{6(1-X)^2} + \frac{1}{4(1+X)} + \frac{1}{3(1+X+X^2)}.$$

Les calculs ne sont pas vraiment plus courts (il y a quelques divisions euclidiennes de polynômes à poser), mais ils me paraissent moins pénibles — avis strictement personnel.

```

import numpy as np
from numpy.polynomial import Polynomial
X = Polynomial([0, 1]) # l'indéterminée X
Z = Polynomial([0])   # polynôme nul
U = Polynomial([1])   # polynôme unité

P = [(1-X)**2, 1+X, (1+X+X**2)]

Q = [P[1]*P[2], P[2]*P[0], P[0]*P[1]]

def afficher(A):
    n, p = A.shape
    for i in range(n):
        s = " & ".join([str(A[i,j]) for j in range(p)])
        print(s)
    print()

# Initialisation de l'algorithme de Blankinship
A = np.zeros((3, 4), dtype=np.polynomial.polynomial.Polynomial)
for i in range(3):
    for j in range(3):
        if j!=i:
            A[i,j] = Z
        else:
            A[i,j] = U
    A[i,-1] = Q[i]
afficher(A)

def argmin(L):
    m = min(L)
    return L.index(m)

# Itération
degres = [p.degree() for p in A[:,-1]]
m, j = min(degres), argmin(degres)
# Si un reste est constant, c'est qu'on a atteint le pgcd
while (m>0):
    # Algorithme d'Euclide de calcul du pgcd
    for i in range(3):
        if i!=j:
            q = A[i,-1]//A[j,-1]
            for k in range(4):
                A[i,k] = A[i,k] - q*A[j,k]
    afficher(A)
    degres = [p.degree() for p in A[:,-1]]
    m, j = min(degres), argmin(degres)

```

• Il reste à décomposer dans  $\mathbb{C}(X)$  le dernier terme. Les deux pôles sont simples et conjugués ( $j$  et  $\bar{j} = j^2$ ), donc il est souhaitable d'appliquer une méthode spécifique.

On rappelle que, quel que soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ , quel que soit  $Q \in \mathbb{C}[X]$  scindé à racines simples,

$$\frac{P}{Q} = \sum_{\zeta \in Z(Q)} \frac{P(\zeta)}{Q'(\zeta)(X - \zeta)}.$$

Ici,  $P = 1$  et  $Q = 1 + X + X^2$ , donc  $Q' = 2X + 1$ , donc

$$Q'(j) = j + (1 + j) = j - j^2 = j - \bar{j} = 2i \Im(j) = i\sqrt{3}.$$

Comme  $Q' \in \mathbb{R}[X]$ , on en déduit que  $Q'(\bar{j}) = \overline{Q'(j)} = -i\sqrt{3}$  et donc que

$$\frac{1}{1 + X + X^2} = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left( \frac{1}{X - j} - \frac{1}{X - j^2} \right) = \frac{i}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{X - j^2} - \frac{1}{X - j} \right) = \frac{i}{\sqrt{3}} \left( \frac{j^2}{1 - j^2 X} - \frac{j}{1 - jX} \right).$$

[ 6. ] On a démontré plus haut que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma(n)x^n.$$

On déduit de la décomposition en éléments simples qui précède et de la décomposition en série entière de chaque terme que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} &= a \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + b \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n + c \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + d \sum_{n=0}^{+\infty} j^n x^n + f \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{j}^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} [a + (n+1)b + (-1)^n c + 2\Re(dj^n)] x^n. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière (le rayon de convergence est strictement positif), on en déduit une formule pour  $\sigma(n)$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma(n) = \frac{1}{4} + \frac{n+1}{6} + \frac{(-1)^n}{4} - 2\Re\left(\frac{ij^{n+1}}{3\sqrt{3}}\right).$$

✎ Ce n'est certainement pas la meilleure façon de calculer les entiers  $\sigma(n)$ . On sait que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad (1-x^2)(1-x^3) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma(n)x^n \right) = 1.$$

En développant le premier membre (inutile d'invoquer le produit de Cauchy pour cela), on obtient

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= 1 && \text{(coefficient constant)} \\ \sigma(1) &= 0 && \text{(coefficient de } x) \\ \sigma(2) - \sigma(0) &= 0 && \text{(coefficient de } x^2) \\ \sigma(3) - \sigma(0) - \sigma(1) &= 0 && \text{(coefficient de } x^3) \\ \sigma(4) - \sigma(1) - \sigma(2) &= 0 && \text{(coefficient de } x^4) \\ \sigma(n) - \sigma(n-1) - \sigma(n-2) - \sigma(n-5) &= 0 && \text{(coefficient de } x^n \text{ pour } n \geq 5) \end{aligned}$$

d'où  $\sigma(0) = 1, \sigma(1) = 0, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 1$  et

$$\forall n \geq 5, \quad \sigma(n) = \sigma(n-2) + \sigma(n-3) - \sigma(n-5).$$

On considère la fonction  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{(1-x^3)(1-x^5)}.$$

[ 1. ] Démontrer que  $f$  est développable en série entière au voisinage de 0. Préciser son rayon de convergence.

Dans la suite de cet énoncé, on notera

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

le développement en série entière au voisinage de 0 de l'application  $f$ .

[ 2. ] Écrire une fonction qui calcule  $c_n$ .

[ 3. ] Calculer  $c_n$  pour  $n \in \llbracket 0, 199 \rrbracket$ , puis en déduire la valeur de

$$c_{n+15} - c_n$$

pour  $n \in \llbracket 0, 185 \rrbracket$ .

[ 4.a. ] Démontrer que le polynôme  $(1-x^{15})(1-x)$  est divisible par  $(1-x^3)(1-x^5)$ .

[ 4.b. ] On note  $Q$ , le quotient de cette division euclidienne. Quel est le degré de  $Q$ ? Que vaut  $Q(1)$ ?

[ 5. ] Démontrer que la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = (1-x^{15})f(x) - \frac{1}{1-x}$$

est polynomiale.

[ 6. ] En déduire une relation entre  $c_n$  et  $c_{n+15}$ .

[ 7. ] Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $D_n$ , l'ensemble des couples  $(u, v) \in \mathbb{N}^2$  tels que

$$3u + 5v = n.$$

On note  $d_n$ , le cardinal de l'ensemble  $D_n$ .

[ 7.a. ] Écrire une fonction qui calcule  $d_n$ .

[ 7.b. ] En déduire une relation entre  $c_n$  et  $d_n$ .

[ 1. ] La fonction  $f$  est le produit de deux fonctions développables en série entière, donc (Théorie du produit de Cauchy) elle est elle-même développable en série entière :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f(x) = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} x^{3k} \right) \left( \sum_{\ell=0}^{+\infty} x^{5\ell} \right) = \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{3\mathbb{Z}}(m) x^m \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{5\mathbb{Z}}(n) x^n \right).$$

Comme les rayons de convergence des deux facteurs sont égaux à 1, le rayon de convergence de  $f$  est au moins égal à 1.

✎ Le rayon de convergence de  $f$  est en fait égal à 1, mais nous n'avons pas encore les moyens de prouver cela.

✎ On peut déterminer naïvement les coefficients  $c_n$  (on verra plus loin comment y parvenir plus efficacement).

Tout d'abord, pour  $x$  voisin de 0,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x^3)(1-x^5)} &= [1+x^5 + \mathcal{O}(x^{10})][1+x^3+x^5 + \mathcal{O}(x^9)] \\ &= 1+x^3+x^5+x^6+x^8 + \mathcal{O}(x^9), \end{aligned}$$

donc  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = c_2 = 0$ ,  $c_3 = 1$ ,  $c_4 = 0$ ,  $c_5 = c_6 = 1$ ,  $c_7 = 0$  et  $c_8 = 1$  (puisque le développement en série entière est aussi un développement de Taylor).

D'autre part, on peut calculer le développement en série entière de  $(1-x^3)f(x)$ , puis celui de  $(1-x^3)(1-x^5)f(x)$  :

$$\begin{aligned} 1 &= (1-x^3)(1-x^5)f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + (c_3 - c_0)c^3 + (c_4 - c_1)x^4 \\ &\quad + (c_5 - c_2 - c_0)x^5 + (c_6 - c_3 - c_1)x^6 + (c_7 - c_4 - c_2)x^7 \\ &\quad + \sum_{n=8}^{+\infty} [c_n - c_{n-3} - (c_{n-5} - c_{n-8})]x^n \end{aligned}$$

On retrouve ainsi (en identifiant terme à terme) les coefficients  $c_0$  à  $c_7$  et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 8, \quad c_n = c_{n-3} + c_{n-5} - c_{n-8}.$$

[ 2. ] D'après la formule du produit de Cauchy,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{3\mathbb{Z}}(i) \mathbb{1}_{5\mathbb{Z}}(n-i).$$

Un premier code exploite les commodités de numpy.

```
def c(n):
    a = [k%3==0 for k in range(n+1)]
    b = [k%5==0 for k in range(n+1)]
    produit_Cauchy = sum([a[i]*b[n-i] for i in range(n+1)])
    return produit_Cauchy
```

Un second code repose sur l'assimilation des booléens à des entiers.

```
def c(n):
    a, b = np.zeros((2, n+1), dtype=int)
    for k in range(n+1):
        if k%3==0:
            a[k]=1
        if k%5==0:
            b[k]=1
    produit_Cauchy = np.dot(a, b[::-1])
    return produit_Cauchy
```

[ 3. ] Une fois encore, on profite de numpy pour produire un code concis.

```
def conjecture_cn():
    L = np.array([c(n) for n in range(200)])
    return L[15:] - L[:-15]
```

On constate que toutes les différences  $c_{n+15} - c_n$  sont égales à 1.

☞ *Cela ne peut pas être une coïncidence!*

[ 4.a. ] Factorisons :

$$(1 - X^{15}) = (1 - X^5)(1 + X^5 + X^{10}).$$

Les racines de  $1 + X + X^2$  sont  $j$  et  $j^2$ . Comme  $j^3 = 1$ , on en déduit que

$$1 + j^5 + j^{10} = 1 + j^2 + j = 0 \quad \text{et que} \quad 1 + j^{10} + j^{20} = 1 + j + j^2 = 0.$$

Comme les deux racines de  $1 + X + X^2$  sont simples et sont des racines de  $1 + X^5 + X^{10}$ , on en déduit que  $1 + X + X^2$  divise  $1 + X^5 + X^{10}$ . Il existe donc un polynôme  $Q_8$  de degré 8 tel que

$$(1 - X^{15})(1 - X) = (1 - X^5)(1 + X + X^2)(1 - X)Q_8, \quad (*)$$

ce qui prouve que  $(1 - X^5)(1 - X^3)$  divise  $(1 - X^{15})(1 - X^3)$ .

☞ *Si on a le temps de poser la division euclidienne, on trouve :*

$$X^{10} + X^5 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^8 - X^7 + X^5 - X^4 + X^3 - X + 1).$$

*Si on est pressé, il est possible de gagner du temps.*

```

from numpy.polynomial import Polynomial
X = Polynomial([0, 1])
P = X**10+X**5+1
D = X**2+X+1
print(P//D) # quotient
print("Reste : {}".format(P%D))

```

[ 4.b. ] On divise un polynôme de degré 16 par un polynôme de degré 8, donc le degré du quotient est égal à 8.

Pour  $x \neq 1$  mais voisin de 1,

$$Q(x) = \frac{(x^{15} - 1)(x - 1)}{(x^3 - 1)(x^5 - 1)} = \frac{x^{15} - 1}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{x - 1}{x^5 - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 15 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = 1.$$

En effet, si  $f$  est dérivable en  $x = 1$ , alors

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} f'(1)$$

et si  $f(x) = x^n$ , alors  $f'(x) = nx^{n-1}$ . Cela s'appelle la *règle de l'Hospital*.

Si on n'apprécie pas la règle de l'Hospital, on peut factoriser (\*) : comme

$$(1 - X)^2 \sum_{k=0}^{14} X^k = (1 - X)^2 (1 + X + X^2)(1 + X + X^2 + X^3 + X^4) Q_8,$$

on en déduit que  $15 = 3 \cdot 5 \cdot Q_8(1)$  en simplifiant par  $(1 - X)^2$  avant de substituer 1 à  $X$ .

[ 5. ] Reprenons (\*) : comme  $\deg Q_8 = 8$ , on déduit de la formule de Taylor que

$$\frac{(1 - X^{15})(1 - X)}{(1 - X^3)(1 - X^5)} = Q_8 = 1 + \sum_{k=1}^8 \frac{Q_8^{(k)}(1)}{k!} (X - 1)^k$$

et donc que

$$(1 - X^{15}) \cdot \frac{1}{(1 - X^3)(1 - X^5)} = \frac{1}{1 - X} - \sum_{k=1}^8 \frac{Q_8^{(k)}(1)}{k!} (X - 1)^{k-1}.$$

Il est clair sur le second membre que la fonction  $g$  est polynomiale.

[ 6. ] Pour  $|x| < 1$ ,

$$(1 - x^{15})f(x) = \sum_{n=0}^{14} c_n x^n + \sum_{n=15}^{+\infty} (c_n - c_{n-15}) x^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Comme la différence entre ces deux sommes est une fonction polynomiale de degré inférieur à 8, on en déduit que

$$\forall n \geq 15, \quad c_n - c_{n-15} = 1$$

par unicité du développement en série entière.

Cela confirme les valeurs calculées au [3.].

[ 7.a. ]

```

def d(n):
    nb_couples = 0
    for v in range(n//5+1):
        nb_couples += (n-5*v)%3==0
    return nb_couples

```

[ 7.b. ] On peut commencer par vérifier que  $c_n = d_n$  pour "tout" entier  $n$ .

```

for n in range(1000):
    if c(n) != d(n):
        print(f"n = {n} : erreur !")
print("fini !!")

```

• Pour  $|x| < 1$ ,

$$\frac{1}{1-x^3} = \sum_{u=0}^{+\infty} x^{3u}, \quad \frac{1}{1-x^5} = \sum_{v=0}^{+\infty} x^{5v}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

D'après le Théorème de Fubini, la famille  $(x^{3u+5v})_{(u,v) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable et par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{(u,v) \in D_n} x^{3u+5v} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on a prouvé que  $c_n = d_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On considère ici les intégrales

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad I_m = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2m+1} t}{t} dt.$$

- [ 1. ] Déterminer une valeur approchée de l'intégrale  $J$  à l'aide de Python.
- [ 2. ] Calculer une valeur approchée de  $I_m$  pour différentes valeurs de  $m \in \mathbb{N}$  à l'aide de Python. Que peut-on conjecturer lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$  ?
- [ 3.a. ] Démontrer que l'intégrale  $J$  est convergente.
- [ 3.b. ] Au moyen d'une intégration par parties, démontrer que  $J = I_0$ .
- [ 4.a. ] Démontrer que l'intégrale  $I_m$  converge pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .
- [ 4.b. ] Démontrer que la suite  $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est décroissante et positive.
- [ 4.c. ] Étudier la limite de cette suite.

[ 1. ]

```
def f(t):
    return (np.sin(t)/t)**2

integr.quad(f, 0, np.inf)
```

La valeur approchée renvoyée est 1,5708678849453772 mais l'erreur d'approximation n'est majorée que par 0,0015587759422626135. Il convient donc de se limiter à  $J \approx 1,57$ , ce qui fait inévitablement penser à  $\pi/2$ .

[ 2. ] L'aide-mémoire officiel permet de coder facilement une fonction qui renvoie des valeurs approchées de  $I_m$ .

```
def I(m):
    def f(t):
        return (np.sin(t))**(2*m+1)/t
    return integr.quad(f, 0, np.inf)
```

Pour les basses valeurs de  $m$ , la précision du résultat fourni est douteuse. La situation s'arrange quand  $m$  augmente et devient acceptable lorsque  $m$  est grand.

$m$	Valeur approchée de $I_m$	Estimation de l'erreur	Avertissement
2	1,6038945322719702	0,6129034957144435	oui
3	1,3248005912724021	0,21013705196798793	oui
10	0,42028706142479655	0,2048485658010973	oui
50	0,18799240819666735	0,10201097481351346	oui
100	0,1430154314835025	0,06481619952222575	oui
500	0,03363622679817765	$1,3711177634921904e-08$	non
1000	0,02378636335431956	$4,06028470386619e-09$	non

Les premiers résultats sont accompagnés d'un avertissement (IntegrationWarning) : *The integral is probably divergent, or slowly convergent*. Autrement dit, Python suggère de **ne pas** se fonder sur les valeurs calculées pour conjecturer la convergence de l'intégrale.

En revanche, pour les grandes valeurs de  $m$ , la précision des calculs est satisfaisante et permet de conjecturer que  $I_m$  devient très petite : pour  $m = 10^4$ , la valeur approchée de l'intégrale est inférieure à l'estimation de l'erreur (qui est de l'ordre de  $10^{-11}$ ).

🔗 Néanmoins, l'exécution de `I(5000)` renvoie une valeur approchée égale à  $-0,005318855451711839$  avec une estimation de l'erreur de l'ordre de  $10^{-8}$ . Et pourtant nous démontrerons plus loin que  $I_m$  est positive pour tout  $m \geq 1$  !

[ 3.a. ] La fonction  $f$  définie par  $f(0) = 1$  et par

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$$

est continue sur  $\mathbb{R}_+$  ( $y$  compris en  $t = 0$ ) et  $f(t) = \mathcal{O}(1/t^2)$  au voisinage de  $+\infty$ , donc elle est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et l'intégrale  $J$  est convergente.

[ 3.b. ] Soient  $0 < \varepsilon < A$ . On intègre par parties :

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \left[ \frac{-\sin^2 t}{t} \right]_{\varepsilon}^A + \int_{\varepsilon}^A \frac{2 \sin t \cos t}{t} dt.$$

Il est clair que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-\sin^2 A}{A} = 0.$$

Par ailleurs, le changement de variable  $u = 2t$  nous donne

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{2 \sin t \cos t}{t} dt = \int_{\varepsilon}^A \frac{\sin 2t}{t} dt = \int_{2\varepsilon}^{2A} \frac{\sin u}{u} du.$$

Sachant que l'intégrale  $J$  est convergente, on en déduit que l'intégrale  $I_0$  est elle aussi convergente et donc que

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = I_0.$$

[ 4.a. ] Pour  $m = 0$ , le résultat a déjà été établi.

• Pour tout entier  $m \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin^{2m+1} t = (1 - \cos^2 t)^m \cdot \sin t$$

donc il existe un polynôme  $P_m \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin^{2m+1} t = P'_m(\cos t) \cdot (-\sin t) \quad \text{et} \quad P_m(1) = 0.$$

• Un tel polynôme  $P_m$  doit vérifier  $P'_m = -(1 - X^2)^m$ . Il est donc déterminé à une constante additive près et la condition  $P_m(1) = 0$  impose la valeur de cette constante. Cela prouve l'existence, mais aussi l'unicité, d'un tel polynôme  $P_m$ .

Il est inutile d'expliciter ce polynôme.

Comme  $P_m(1) = 0$  et que  $P'_m(1) = 0$  (puisque  $m \geq 1$ ), il existe un polynôme  $Q_m$  tel que  $P_m = (X - 1)^2 Q_m$  et de ce fait,

$$P_m(\cos t) = (\cos t - 1)^2 Q_m(\cos t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(t^4).$$

Intégrons par parties : quels que soient  $0 < \varepsilon < A$ ,

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{\sin^{2m+1} t}{t} dt = \int_{\varepsilon}^A \frac{P'_m(\cos t) \cdot (-\sin t)}{t} dt = \left[ \frac{P_m(\cos t)}{t} \right]_{\varepsilon}^A + \int_{\varepsilon}^A \frac{P_m(\cos t)}{t^2} dt.$$

Comme  $P_m(\cos t)$  est continue et périodique, cette expression est bornée, donc

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{P_m(\cos A)}{A} = 0.$$

Comme  $P_m(\cos t) = \mathcal{O}(t^4)$  lorsque  $t$  tend vers 0,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_m(\cos \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$$

et la fonction

$$t \mapsto \frac{P_m(\cos t)}{t^2}$$

est prolongeable en une fonction continue sur l'intervalle fermé  $[0, +\infty[$  et  $\mathcal{O}(1/t^2)$  au voisinage de  $+\infty$ , donc intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

[ 4.b. ] Comme l'intégrale  $I_m$  est convergente, on peut appliquer la relation de Chasles pour exprimer  $I_m$  comme la somme d'une série.

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad I_m = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^{2m+1} t}{t} dt$$

On effectue alors le changement de variable  $u = t - k\pi$ , en prenant en compte les changements de signe de  $\sin t$ .

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad I_m = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin^{2m+1} u}{k\pi + u} du$$

Il est alors clair que l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2m+1} u}{k\pi + u} du$$

est décroissante en fonction du paramètre  $k$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall 0 < u \leq \pi, \quad 0 \leq \frac{\sin^{2m+1} u}{(k+1)\pi + u} \leq \frac{\sin^{2m+1} u}{k\pi + u}$$

qui tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  :

$$\forall k \geq 1, \forall 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq \frac{\sin^{2m+1} u}{k\pi + u} \leq \frac{\sin^{2m+1} u}{k} \pi.$$

D'après le Critère spécial des séries alternées, la somme  $I_m$  est du signe du premier terme ( $k = 0$ ), qui est positif. Donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad I_m \geq 0.$$

• Pour  $m \in \mathbb{N}$ , on applique le même raisonnement à l'intégrale

$$I_m - I_{m+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2m+1} t \cdot \cos^2 t}{t} dt$$

et on en déduit que la suite  $(I_m)$  est décroissante :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad I_m - I_{m+1} \geq 0.$$

• En tant que suite décroissante et positive, la suite  $(I_m)$  est convergente.

[ 4.c. ] On a pu appliquer le Critère spécial des séries alternées, qui nous dit aussi que la valeur absolue de la somme est dominée par la valeur absolue de son premier terme. Donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_m \leq \int_0^\pi \frac{\sin^{2m+1} t}{t} dt.$$

Le théorème de convergence dominée prouve que le majorant tend vers 0 lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ , donc la suite  $(I_m)$  tend vers 0.

On considère une marche aléatoire sur quatre emplacements numérotés de 1 à 4 :

- Initialement (= pour  $n = 0$ ), on est sur l'emplacement 1.
- Si, à l'instant  $n$ , on est sur l'emplacement 1, alors on rejoint à l'instant  $(n + 1)$  de manière équiprobable un des quatre emplacements possible. Il est donc possible de ne pas bouger.
- Si, à l'instant  $n$ , on est sur un emplacement  $i \geq 2$ , alors on rejoint l'emplacement  $(i - 1)$  à l'instant  $(n + 1)$ .

On suppose connue une suite  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  telle que  $X_k$  indique le numéro de l'emplacement occupé à l'instant  $k$ .

La loi de chaque variable aléatoire  $X_k$  est représentée par la colonne

$$U_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_k = 1) \\ \mathbf{P}(X_k = 2) \\ \mathbf{P}(X_k = 3) \\ \mathbf{P}(X_k = 4) \end{pmatrix}.$$

[ 1. ] Écrire une fonction `trajectoire(n)` qui renvoie la liste  $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$  des numéros d'emplacements où on est passé entre l'instant initial et l'instant  $n$ .

[ 2. ] Écrire une fonction `loi_position(k)` qui renvoie une approximation de la colonne  $U_k$ . Tester cette fonction pour  $k \in \{10, 50, 100\}$ . Quelle conjecture peut-on en déduire ?

[ 3.a. ] Déterminer une matrice  $A$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = AU_n.$$

[ 3.b. ] Démontrer que 1 est une valeur propre de  $A$  et donner un vecteur propre associé à cette valeur propre.

[ 3.c. ] On admet que la matrice  $A$  possède trois autres valeurs propres distinctes, toutes de module strictement inférieur à 1, deux d'entre elles étant complexes (et donc conjuguées).

Démontrer que la suite  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

[ 4. ] On note  $Y_k(i)$ , le nombre de passages sur l'emplacement  $i$  entre l'instant initial et l'instant  $k$  (inclus).

[ 4.a. ] Écrire une fonction `Y(n)` qui renvoie les valeurs de  $Y_n(1)$ ,  $Y_n(2)$ ,  $Y_n(3)$  et  $Y_n(4)$ , puis une fonction `esperance_Y100()` qui renvoie les valeurs de  $\mathbf{E}(Y_{100}(i))$  pour  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ .

[ 4.b. ] Quelle conjecture peut-on faire ?

[ 1. ]

```
def trajectoire(n):
    positions = [1] # position initiale
    for _ in range(n):
        X = positions[-1] # position actuelle
        if X==1:
            suivant = rd.randint(1, 5)
        else:
            suivant = X-1
        positions.append(suivant)
    return positions
```

[ 2. ] La Loi des grands nombres permet de calculer une valeur approchée de la probabilité d'un évènement quelconque ("Méthode" de Monte-Carlo).

Pour cela, on simule un "grand nombre" de trajectoires et on compte la proportion de trajectoires pour lesquelles on se trouve sur l'emplacement  $1 \leq i \leq 4$  à l'instant  $k$ .

Pour des valeurs de  $k$  assez grandes, on constate que

$$\mathbf{P}(U_k = 1) \approx 0,4 \quad \mathbf{P}(U_k = 2) \approx 0,3 \quad \mathbf{P}(U_k = 3) \approx 0,2 \quad \mathbf{P}(U_k = 4) \approx 0,1.$$

```

def loi_position(k, N=1000):
    Xk = { 1:0, 2:0, 3:0, 4:0 }
    for _ in range(N):
        position = 1
        for _ in range(k):
            if position==1:
                position = rd.randint(1, 5)
            else:
                position -= 1
        Xk[position] += 1
    U = np.zeros(4)
    for i in range(4):
        U[i] = Xk[i+1]/N
    return U

```

[ 4.a. ] C'est toujours à peu près le même principe.

```

def Y(n):
    passages = { 1:1, 2:0, 3:0, 4:0 }
    position = 1
    for _ in range(n):
        if position == 1:
            position = rd.randint(1, 5)
        else:
            position -= 1
        passages[position] += 1
    return passages

```

On utilise à nouveau la Loi des grands nombres pour calculer une valeur approchée de l'espérance.

```

def esperance_Y100(N = 1000):
    D = {}
    for i in range(4):
        D[i+1] = 1
    for _ in range(N):
        passages = Y(100)
        for i in passages.keys():
            D[i] += passages[i]
    return [D[i+1]/N for i in range(4)]

```

[ 4.b. ] On constate que le vecteur de ces espérances est, à un facteur près, la loi de  $U_k$  pour  $k$  assez grand.

$$(E[Y_n(1)], E[Y_n(2)], E[Y_n(3)], E[Y_n(4)]) \approx (40, 30, 20, 10)$$

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt.$$

[ 1. ] Démontrer que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

[ 2. ] Démontrer que la série  $\sum (-1)^n a_n$  converge.

[ 3. ] Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geq \frac{1}{2n+1}.$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$ . Vérifier à l'aide de Python que  $a_n \sim 1/n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

[ 4. ] Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n.$$

Vérifier l'exactitude de cette relation avec Python.

[ 5. ] Démontrer que  $f$  est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

[ 6. ] Comment tracer le graphe de  $f$  avec une précision satisfaisante ?

[ 7. ] Comparer le graphe de  $f$  avec la solution de l'équation différentielle trouvée plus haut qui prend la valeur  $f(0)$  en  $t = 0$ .

[ 8. ] Expliciter l'expression de  $f(x)$  pour  $|x| < 1$ .

[ 1. ] Par convergence dominée, la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

[ 2. ] Comme la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, on peut appliquer le Critère spécial des séries alternées.

[ 3. ] Pour  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$0 \leq \frac{1+t^2}{2} \leq t^2 \quad \text{donc} \quad 0 \leq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \leq t^{2n}.$$

Cette minoration nous dit que le rayon de convergence de la série entière est inférieur à 1. Comme la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, ce rayon de convergence est aussi supérieur à 1. Donc  $R = 1$ .

Le calcul des intégrales étant assez coûteux, on ne va calculer qu'une seule fois chaque intégrale.

```
import scipy.integrate as integr

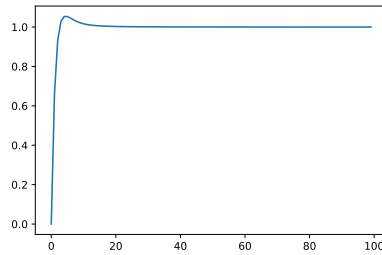
def I(n):
    def phi(t):
        return ((1+t**2)/2)**n
    return integr.quad(phi, 0, 1)[0]

Valeurs_I = {}

def calculer(N):
    for n in range(N):
        if n not in Valeurs_I.keys():
            Valeurs_I[n] = I(n)

def equivalent(N):
    calculer(N)
    X = range(N)
    Y = [n*Valeurs_I[n] for n in X]
    plt.plot(X, Y)
```

Il est assez clair que  $na_n$  tend vers 1 !



[ 4. ] On intègre par parties :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 (1+t^2)^{n+1} dt &= [t(1+t^2)^{n+1}]_0^1 - \int_0^1 t \cdot (n+1) \cdot 2t(1+t^2)^n dt \\ &= 2^{n+1} - (2n+2) \left( \int_0^1 (1+t^2)^{n+1} dt - \int_0^1 (1+t^2)^n dt \right). \end{aligned}$$

•

```
def relation_recurrence(n):
    calculer(n)
    Delta = []
    for k in range(n):
        delta = (2*k+3)*Valeurs_I[k+1] - (k+1)*Valeurs_I[k]
        Delta.append(delta)
    Delta = np.array(Delta)
    m = Delta.mean()
```

L'exécution donne une moyenne égale à 1 avec un "écart" de l'ordre de  $10^{-15}$ . Autrement dit, aux inévitables erreurs d'arrondi près, la relation de récurrence est vérifiée.

[ 5. ] Sur  $] -1, 1[$ , la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et dérivable terme à terme :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, \quad f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n.$$

La relation de récurrence peut s'écrire sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in ]-1, 1[, \quad 2(n+1)a_{n+1}t^n - na_n t^n = t^n + a_n t^n - a_{n+1} t^n$$

ce qui donne, en sommant sur  $n$  :

$$2f'(t) - tf'(t) = \frac{1}{1-t} + f(t) - \frac{f(t) - f(0)}{t},$$

c'est-à-dire, étant donné que  $f(0) = a_0 = 1$ ,

$$(2-t)f'(t) + \frac{1-t}{t}f(t) = \frac{1}{(1-t)t}.$$

[ 6. ] Sachant que  $a_n = o(1)$ , on en déduit que

$$\forall 0 < x < 1, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k\right) = o\left(\frac{x^{n+1}}{1-x}\right)$$

(somme des relations de comparaison). Comme  $0,9^{75} \approx 4 \cdot 10^{-4}$ , avec  $n = 75$ , l'approximation

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

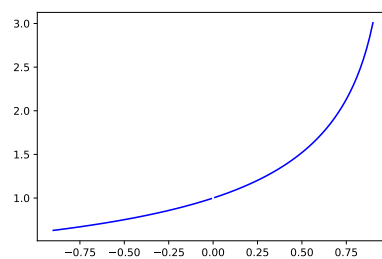
est (largement) suffisante pour tracer le graphe de  $f$  sur l'intervalle  $[-0,9; 0,9]$ .

```

def f(t, N=75):
    calculer(N)
    s = 0
    for n in range(N):
        s += Valeurs_I[n]*t**n
    return s

t_min, t_max = 0.01, 0.9
T = np.linspace(t_min, t_max)
U = np.linspace(-t_min, -t_max)
F = [f(t) for t in T]
G = [f(u) for u in U]
plt.figure()
plt.plot(T, F, 'b')
plt.plot(U, G, 'b')

```



[ 7. ] L'équation différentielle présente une singularité en  $t = 0$ , c'est pourquoi on calcule sa solution en deux temps : d'une part pour  $t > 0$ , d'autre part pour  $t < 0$ . À chaque fois, l'instant initial est choisi aussi proche que possible de  $t = 0$ .

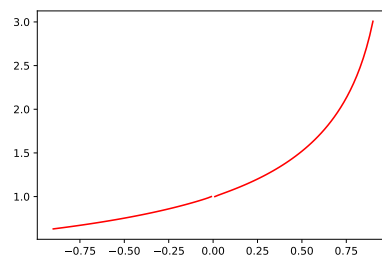
```

def F(x, t):
    return (t-1)/(t*(2-t))*(x - 1/(1-t)**2)

X = integr.odeint(F, 1, T)
Y = integr.odeint(F, 1, U)
plt.figure()
plt.plot(T, X, 'r')
plt.plot(U, Y, 'r')

```

En traçant les deux courbes sur une même figure, elles se superposent de manière quasi-parfaite.



[ 8. ] Pour  $|x| < 1$ , la série de fonctions (de  $t$ )

$$\sum \left( \frac{1+t^2}{2} \right)^n x^n$$

converge normalement sur  $[0, 1]$ . On peut donc intégrer terme à terme :

$$\forall |x| < 1, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1+t^2}{2} x \right)^n dt.$$

On reconnaît ici une somme géométrique et, après quelques simplifications classiques, on trouve :

$$\forall -1 < x < 0, \quad f(x) = \frac{2}{|x|} \sqrt{\frac{x}{x-2}} \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

et, puisqu'il faut discuter sur le signe de  $x$ ,

$$\forall 0 < x < 1, \quad f(x) = \frac{2}{x} \sqrt{\frac{x}{2-x}} \operatorname{Arg th} \sqrt{\frac{x}{2-x}}.$$

☞ La fonction  $\operatorname{Arg th}$  n'est pas (plus/pas encore) au programme. C'est fort dommage, car sa dérivée a pour expression

$$\frac{1}{1-x^2}$$

et connaître l'existence de la fonction  $\operatorname{Arg th}$  nous évite une décomposition en éléments et des calculs laborieux pour simplifier l'expression de  $f(x)$ .

On peut alors tracer le graphe de la fonction  $f$  et constater que, pour la troisième fois, on obtient la même courbe.

```
def Phi(x):
    if x<0:
        y = np.sqrt(x/(x-2))
        return 2/abs(x)*y*np.arctan(y)
    else:
        y = np.sqrt(x/(2-x))
        return 2/x*y*np.arctanh(y)
```

