
ORAUX BLANCS CENTRALE 2 – PSI* – JUIN 2026

Thèmes abordés

135-py-32	Résolution d'une équation différentielle linéaire
135-py-34	Convergence d'un produit infini
135-py-35	Produit eulérien du sinus
135-py-36	Dénombrement
135-py-38	Développement eulérien
135-py-40	Loi des évènements rares
135-py-43	Inégalité de Gronwall
135-py-44	Intégrale fonction d'un paramètre
135-py-45	Diviseurs d'un entier
135-py-48	Estimation d'une espérance par la méthode de Monte-Carlo
135-py-50	Méthode d'Euler
135-py-51	Fonctions de matrice
135-py-54	Décomposition polaire avec la méthode de Newton
135-py-65	Matrices de Jacobi

On considère l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x^2)y''(x) + xy'(x) - \frac{y(x)}{4} = 0. \quad (\text{E})$$

[1.] On commence par une résolution purement numérique.

[1.a.] Démontrer qu'il existe une, et une seule, solution de (E) telle que $y(0) = \sqrt{3}$ et $y'(0) = 0$.

[1.b.] Compléter le code suivant pour tracer l'allure du graphe de cette solution pour $t \in [-1, 1]$.

```
def f(x, t):
    return np.array(...)

T = np.arange(0, 1, 0.01)
X = integr.odeint(...)
plt.plot(T, ...)
T = np.arange(0, -1, -0.01)
X = integr.odeint(...)
plt.plot(T, ...)
```

[2.] Dans cette question, on cherche les solutions qui sont développables en série entière.

[2.a.] Déterminer les solutions de (E) qui sont développables en série entière. (On ne demande pas d'explicitier leur somme.)

[2.b.] Démontrer que toute solution de (E) est développable en série entière au voisinage de l'origine.

[2.c.] En déduire une autre façon de tracer la courbe tracée à la question précédente.

[3.] Dans cette dernière question, on résout littéralement l'équation (E) au moyen d'un changement de variable bien choisi.

[3.a.] Soit h , une solution de (E). Déterminer une équation différentielle vérifiée par $g = h \circ sh$.

[3.b.] En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R} .

[1.a.] L'équation différentielle (E) est une équation du second ordre linéaire et homogène. Ses coefficients sont clairement des fonctions continues et le coefficient de $y''(x)$ ne s'annule pas. Par conséquent, on peut réécrire l'équation (E) sous forme résoluble d'un système linéaire du premier ordre :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{4(1+x^2)} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 4x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}. \quad (\text{S})$$

D'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, le système (S) admet une unique solution $Y(x)$ telle que $Y(x_0) = (y_0, v_0)$. Autrement dit : l'équation (E) admet une unique solution $y(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = v_0$.

[1.b.] Dans l'équation (E), le facteur de la dérivée seconde ne s'annule pas, donc on n'a aucune difficulté à écrire l'équation sous forme résoluble.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} x'(t) \\ 1/4 x(t) - tx'(t) \end{pmatrix}$$

Sous cette forme, l'inconnue est le couple $X = (x, x')$, donc à chaque instant, la position $x(t)$ est représentée par $X[0]$ et la vitesse $x'(t)$ par $X[1]$.

On en déduit l'expression de la fonction f .

```
def f(X, t):
    return np.array([X[1], (X[0]/4-t*X[1])/(1+t**2)])
```

• On résout dans un premier temps sur l'intervalle $[0, 1]$, en précisant la condition initiale : $t = 0, x(0) = \sqrt{3}$ et $x'(0) = 0$.

La solution X est un tableau numpy de la forme

$$X = ((x_k, v_k))_{0 \leq k < N}.$$

On récupère les positions successives en fonction du temps $(x_k)_{0 \leq k < N}$ avec $X[:, 0]$. On pourrait récupérer de même les vitesses successives en fonction du temps $(v_k)_{0 \leq k < N}$ avec $X[:, 1]$.

```
T = np.arange(0, 1, 0.01)
Xp = integr.odeint(f, np.array([np.sqrt(3), 0]), T)
plt.plot(T, Xp[:,0], 'r')
```

• On résout ensuite sur l'intervalle $[-1, 0]$ en conservant la même condition initiale, donc en considérant une discrétisation *décroissante* de l'intervalle $[-1, 0]$.

```
T = np.arange(0, -1, -0.01)
Xm = integr.odeint(f, np.array([np.sqrt(3), 0]), T)
plt.plot(T, Xm[:,0], 'r')
```

• On a imposé la même couleur (rouge) sur les deux tracés pour obtenir une courbe d'une seule couleur. (Par défaut, deux courbes consécutives sont tracées dans des couleurs différentes).

[2.a.] Si y est une fonction développable en série entière, alors il existe un réel $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, & xy'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n, \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n, & x^2 y''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n, \end{aligned}$$

pour tout $x \in]-r, r[$ car la fonction y est alors de classe \mathcal{C}^∞ et ses dérivées successives peuvent être calculées en dérivant terme à terme.

• On en déduit (après quelques simplifications) que

$$(1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \frac{1}{4}y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + \frac{(2n+1)(2n-1)}{4} a_n \right] x^n$$

pour tout $x \in]-r, r[$. Et comme le rayon de convergence est strictement positif, on en déduit que y est solution de (E) sur $]-r, r[$ si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} + \frac{(2n+1)(2n-1)}{4} a_n = 0$$

(Unicité du développement en série entière).

• Ainsi, la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ est solution de (E) si, et seulement si, le rayon de convergence de la série entière est strictement positif et si ses coefficients vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{(2n+1)(2n-1)}{4(n+2)(n+1)} a_n.$$

• Une telle relation de récurrence nous conduit à discuter sur la parité des indices.

• Les coefficients de rang pair sont liés par la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k+2} = -\frac{(4k+1)(4k-1)}{4(2k+2)(2k+1)} a_{2k} \quad (*)$$

et entièrement déterminés par la donnée de a_0 : la suite $(\alpha_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $\alpha_0 = 1$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2k} = (-1)^k \prod_{\ell=1}^k \frac{(4\ell+1)(4\ell-1)}{(4\ell+4)(4\ell+2)}$$

nous donne $a_{2k} = \alpha_{2k} \cdot a_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Les coefficients de rang impair sont liés par la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k+3} = -\frac{(4k+3)(4k+1)}{4(2k+3)(2k+2)} a_{2k+1} \quad (**)$$

et entièrement déterminés par la donnée de a_1 : la suite $(\alpha_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $\alpha_1 = 1$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2k+1} = (-1)^k \prod_{\ell=1}^k \frac{(4\ell+3)(4\ell+1)}{(4\ell+6)(4\ell+4)}$$

nous donne $a_{2k+1} = \alpha_{2k+1} \cdot a_1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- Si $a_0 \neq 0$, alors les termes de rang pair sont tous différents de 0 et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{2k+2} x^{2k+2}}{a_{2k} x^{2k}} \right| = x^2.$$

Par conséquent, la série $\sum a_{2k} x^{2k}$ converge absolument pour $|x| < 1$ et diverge grossièrement pour $|x| > 1$ (règle de d'Alembert).

- Si $a_1 \neq 0$, alors les termes de rang impair sont tous différents de 0 et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{2k+3} x^{2k+3}}{a_{2k+1} x^{2k+1}} \right| = x^2.$$

Par conséquent, la série $\sum a_{2k+1} x^{2k+1}$ converge absolument pour $|x| < 1$ et diverge grossièrement pour $|x| > 1$.

• Finalement, les solutions de (E) qui sont développables en série entière sont les fonctions de la forme

$$y = a_0 S_0 + a_1 S_1 \quad \text{où} \quad S_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k} x^{2k} \quad \text{et} \quad S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k+1} x^{2k+1}.$$

[2.b.] La théorie de Cauchy-Lipschitz nous assure que l'ensemble des solutions de (E) est un plan vectoriel.

Les calculs précédents nous ont montré que l'ensemble des solutions de (E) qui sont développables en série entière est le sous-espace engendré par les fonctions S_0 et S_1 . Comme ces deux fonctions ne sont pas identiquement nulles ($\alpha_0 = \alpha_1 = 1$), que S_0 est paire et que S_1 est impaire, ces deux fonctions ne sont pas proportionnelles. L'ensemble des solutions développables en série entière est donc un plan.

Par conséquent, toute solution de (E) est développable en série entière au voisinage de 0 (avec un rayon de convergence égale à 1 — sauf pour la solution nulle, bien entendu).

[2.c.] Puisque S_0 est paire et que S_1 est impaire, on a

$$S_0(0) = 1, \quad S_0'(0) = 0, \quad S_1(0) = 0, \quad S_1'(0) = 1$$

et l'unique solution de l'équation (E) associée au problème de Cauchy $(x_0, y_0, v_0) = (0, \sqrt{3}, 0)$ s'exprime donc

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad y(x) = y_0 \cdot S_0(x) + v_0 \cdot S_1(x) = \sqrt{3} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k} x^{2k}.$$

• Pour tracer le graphe de cette solution, il suffit de savoir calculer une valeur approchée assez précise de la somme de cette série entière.

Les relations (*) et (***) montrent que les séries entières $\sum \alpha_{2k} x^{2k}$ et $\sum \alpha_{2k+1} x^{2k+1}$ vérifient les hypothèses du Critère spécial des séries alternées pour tout $x \in]-1, 1[$.

• On peut démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 (ce n'est pas spécialement compliqué, mais ça n'a rien d'évident). On en déduit que le Critère spécial des séries alternées s'applique aussi pour $x = \pm 1$ et par conséquent les solutions de (E) sont développables en série entière sur le segment $[-1, 1]$.

• L'estimation du reste donnée par le Critère spécial des séries alternées nous montre qu'on aura un tracé satisfaisant en ne considérant que les 20 premiers termes de la série.

```
def DSE(T, n):
    s, puiss = np.ones_like(T), np.ones_like(T)
    coeff = 1
    for k in range(n):
        coeff *= -(4*k+1)*(4*k-1)/(4*(2*k+2)*(2*k+1))
        puiss *= T**2
        s += coeff*puiss
    return s
```

```
T = np.arange(-1, 1, 0.01)
Z = np.sqrt(3)*DSE(T, 20)
plt.plot(T, Z)
```

[3.a.] Quelle que soit la fonction h de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , la fonction $g = h \circ \text{sh}$ vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = \text{ch } t \cdot h'(\text{sh } t) \quad \text{et} \quad g''(t) = (1 + \text{sh}^2 t)h''(\text{sh } t) + \text{sh } t h'(\text{sh } t).$$

Comme sh réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x^2)h''(x) + xh'(x) - \frac{h(x)}{4} &= 0 \\ \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad g''(t) - \frac{1}{4}g(t) &= 0 \end{aligned}$$

☞ En résolvant une équation du second degré, on trouve l'expression de la bijection réciproque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arg sh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Comme sh est une fonction impaire, sa réciproque est également une fonction impaire — on ne peut pas dire que ça saute aux yeux.

[3.b.] Les solutions de cette équation (à coefficients constants) sont bien connues : il existe deux constantes réelles a_0 et a_1 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = a_0 \text{ch } \frac{t}{2} + a_1 \text{sh } \frac{t}{2}$$

et par conséquent la solution générale de (E) est de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = a_0 \text{ch } \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{2} + a_1 \text{sh } \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{2}.$$

☞ Il est bon de conserver la décomposition de la solution générale comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, ça aide à voir plus clair.

☞ Il est facile de vérifier qu'on n'a pas fait de faute de calcul en superposant le graphe obtenu pour $a_0 = \sqrt{3}$ et $a_1 = 0$ aux graphes précédents.

```
Y = np.sqrt(3)*np.cosh(.5*np.log(T+np.sqrt(1+T**2)))
plt.plot(T, Y, 'b')
```

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$P_n(x) = x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{k}\right).$$

[1.a.] Écrire une fonction qui prend n et x comme arguments et qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.

[1.b.] Tracer le graphe de P_n sur $[0, 1]$ pour $n \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ sur une même figure. En déduire une conjecture sur la suite $(P_n)_{n \geq 1}$.

[2.a.] Démontrer que P_n atteint un maximum sur $[0, 1]$.

[2.b.] Écrire une fonction $\text{Max}(n, \text{eps})$ qui renvoie une valeur approchée à ε près d'un réel x_n tel que

$$P_n(x_n) = \max_{x \in [0, 1]} P_n(x).$$

[2.c.] Calculer une liste avec les valeurs de x_n et n pour $n = 10^i$ avec $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$.

[3.a.] Démontrer que

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

[3.b.] En déduire un équivalent de x_n .

[3.c.] Que peut-on en déduire ?

[1.a.] On peut modifier légèrement la définition

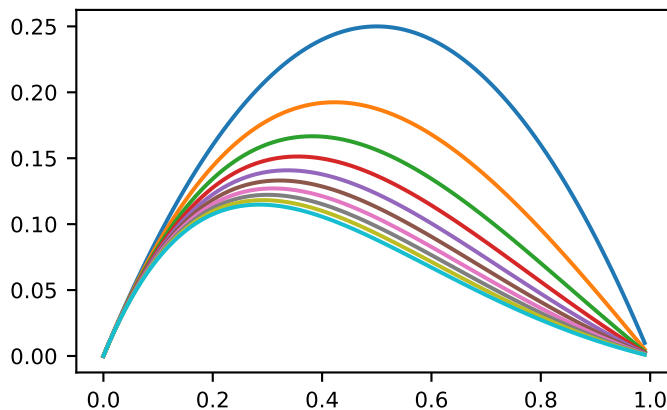
$$P_0(x) = x \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq k < n, \quad P_{k+1}(x) = P_k(x) \times \left(1 - \frac{x}{k+1}\right)$$

pour que le code devienne immédiat.

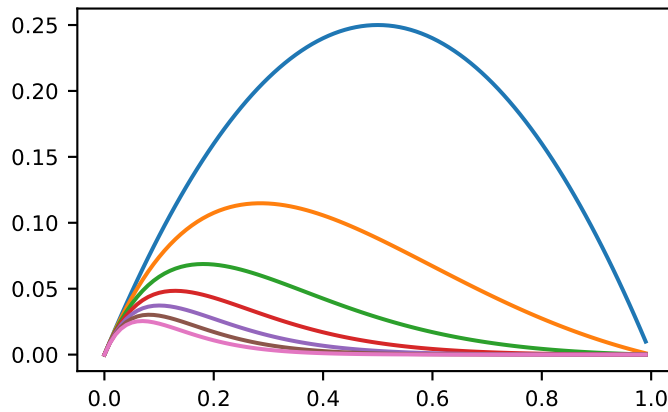
```
def P(n, x):
    y = x
    for k in range(n):
        y = y*(1-x/(k+1))
    return y
```

[1.b.] Code sans difficulté, mais la figure produite n'est pas simple à interpréter.

```
X = np.arange(0, 1, 0.01)
for n in range(1, 11):
    Y = P(n, X)
    plt.plot(X, Y)
```



• La figure suivante montre les graphes de P_{10^k} pour $0 \leq k \leq 6$ et laisse mieux deviner que la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.



[2.a.] La fonction P_n est continue (polynomiale) sur le segment $[0, 1]$, donc elle atteint un maximum.

☞ Comme $P_n(x) \geq 0$ (produit de facteurs positifs), ce maximum est en fait $\|P_n\|_\infty$.

[2.b.] Le comportement des fonctions P_n étant très régulier, on peut se contenter de considérer une liste d'abscisses $(x_k)_{0 \leq k \leq N}$ en progression arithmétique de raison ε et de chercher pour quel indice k la valeur de $P_n(x_k)$ est maximale.

```
def Max(n, eps):
    X = np.arange(0, 1, eps/2)
    Y = P(n, X)
    x0, y0 = X[0], Y[0]
    for (x,y) in zip(X, Y):
        if y>y0:
            x0, y0 = x, y
    return x0
```

[2.c.] On choisit $\varepsilon = 5.10^{-3}$ pour avoir une précision satisfaisante.

```
eps = 0.005
N = [10**i for i in range(1, 6)]
L = [Max(n, eps)*np.log(n) for n in N]
```

Le code précédent nous donne : $[0.656, 0.829, 0.898, 0.921, 0.950]$ ce qui suggère que $x_n \ln n$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

[3.a.] La fonction P_n est nulle en $x = 0$ et en $x = 1$ (quel que soit $n \geq 2$). Sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$, la fonction P_n est strictement positive (produit de facteurs strictement positifs), donc la fonction P_n atteint son maximum exactement au point où la fonction $\ln P_n$ atteint son maximum.

☞ La fonction \ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

☛ Calculons la dérivée logarithmique de P_n :

$$\forall 0 < x < 1, \quad \frac{P'_n(x)}{P_n(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1-x/k} = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-x}.$$

Comme $P_n(0) = P_n(1) = 0$, alors P_n est maximal en $x_n \in]0, 1[$ et comme P_n est de classe \mathcal{C}^1 , il faut que $P'_n(x_n) = 0$. On en déduit que

$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-x_n} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{x_n} = \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-x_n}.$$

☛ Comme $0 < x_n < 1$, on a $k-1 < k-x_n < k$ pour tout $k \geq 1$, donc

$$\frac{1}{x_n} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et aussi} \quad \frac{1}{x_n} < \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} = \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Ainsi, en notant comme d'habitude H_n la n -ième somme partielle de la série harmonique,

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq \frac{1}{x_n} - H_n \leq \frac{x_n}{1 - x_n}.$$

[3.b.] On sait que H_n tend vers $+\infty$, donc la minoration montre que x_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Par conséquent, le majorant tend vers 0 et l'encadrement précédent montre que

$$\frac{1}{x_n} - H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$$

et on en déduit que

$$\frac{1}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} H_n + o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n.$$

[3.c.] Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq P_n(x) = x(1-x) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{x}{k}\right) \leq x(1-x)$$

(puisque les facteurs sont compris entre 0 et 1 pour tout $k \geq 2$). Par conséquent,

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq \|P_n\|_\infty = P_n(x_n) \leq x_n(1-x_n)$$

et comme x_n tend vers 0, on en déduit que $\|P_n\|_\infty$ tend vers 0.

On a ainsi démontré que la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ convergeait uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right).$$

[1.] Déterminer une valeur approchée de u_n pour $n \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ et de u_{10^k} pour $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

Proposer une conjecture sur la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

[2.] Pour tout réel $0 < t < \pi$, on pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t}.$$

[2.a.] Tracer les graphes de f et de g . Quelle conjecture peut-on en déduire ? **On admettra cette conjecture dans la suite.**

[2.b.] Déterminer la limite de g au voisinage de 0.

[2.c.] Démontrer que les fonctions f et g peuvent être prolongées en des fonctions continues sur $]0, \pi[$.

[3.] En calculant l'intégrale de $g(t)$ sur $[0, x]$ de deux manières, déterminer la limite de

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

[4.] La fonction f est-elle intégrable sur $]0, \pi[$?

[1.] Par définition, $u_1 = 3/4$ et

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = u_{n-1} \times \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right).$$

Un code récursif s'en déduit immédiatement et suffit pour calculer les premiers termes de la suite.

```
def u(n):
    if n==1:
        return 3/4
    else:
        return (1-1/(4*n**2))*u(n-1)

for n in range(1, 11):
    print(u(n))
```

La récursivité est très limitée en Python et il n'est pas possible d'utiliser un code récursif pour calculer les valeurs de u_n avec $n > 10^3$.

```
def u_iter(n):
    un = 3/4
    for k in range(2, n+1):
        un *= (1-1/(4*k**2))
    return un

for k in range(1, 5):
    print(u_iter(10**k))
```

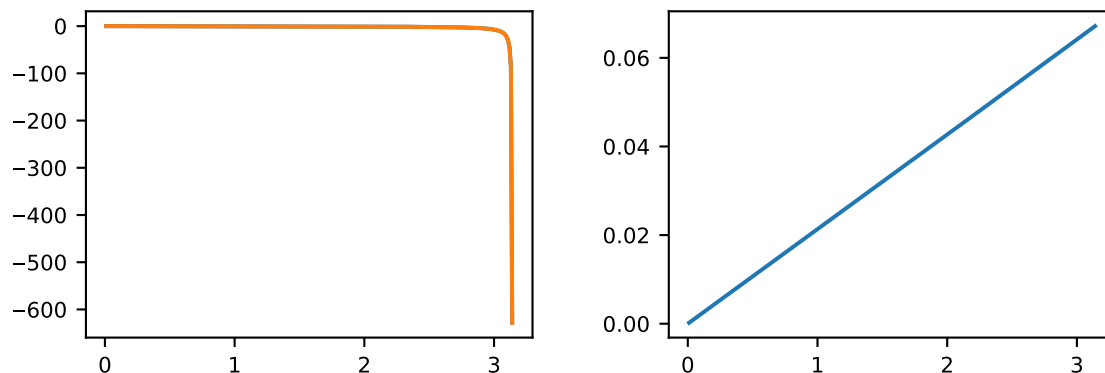
Il semble que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (mais lentement).

[2.a.] Le code est sans problème.

```
T = np.arange(0.01, np.pi, 0.01)
plt.plot(T, f(10, T))
plt.plot(T, g(T))
```

Mais on n'y voit pas grand'chose (figure de gauche)! Il vaudrait mieux tracer la différence entre les deux fonctions (figure de droite).

```
plt.figure(figsize=(3., 2.25))
plt.plot(T, f(10, T)-g(T))
```



On peut conjecturer que la différence entre f et g est nulle.

☞ On n'a pas calculé les valeurs de f , mais seulement des sommes partielles et sans aucune subtilité. Il est donc tout à fait naturel que la différence entre f et g augmente légèrement avec t : c'est l'erreur de calcul sur f qui se manifeste ainsi.

[2.b.] Par définition,

$$g(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t \sin t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}.$$

Lorsque t tend vers 0,

$$t \cos t - \sin t \underset{t \rightarrow 0}{=} \left(t - \frac{t^3}{2} + o(t^3) \right) - \sin t = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) t^3 + o(t^3)$$

donc $g(t) \sim -t/3$ au voisinage de 0. La fonction g tend donc vers 0 au voisinage de 0.

[2.c.] Il est clair que g est continue sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$ et on vient de voir que g tendait vers 0 au voisinage de l'origine. En posant $g(0) = 0$, on définit donc un prolongement de g qui est continu sur $[0, \pi[$.

☛ Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$\forall t \in [0, \pi[, \quad \varphi_n(t) = \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

Il est clair que φ_1 est continue sur $[0, \pi[$ et que φ_n est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0, \pi]$ pour tout $n \geq 2$.

☛ Pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $t \in [0, \pi]$,

$$|\varphi_n(t)| = \frac{2t}{n^2\pi^2 - t^2} \leq \frac{2\pi}{(n^2 - 1)\pi^2}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de t et ce majorant est $\mathcal{O}(1/n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc la série $\sum_{n \geq 2} \varphi_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$.

La somme de la série $\sum_{n \geq 1} \varphi_n$ est donc continue sur $[0, \pi]$ et elle coïncide avec f sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$. On a ainsi démontré que f admettait un prolongement continu sur $[0, \pi]$.

☞ On a admis que $f(t) = g(t)$ pour $0 < t < \pi$. Ayant prolongé les deux fonctions par continuité en 0, on en déduit que $f(t) = g(t)$ pour tout $0 \leq t < \pi$.

[3.] Comme g est continue sur $[0, \pi]$, elle admet des primitives sur cet intervalle et la fonction G définie par

$$\forall x \in [0, \pi[, \quad G(x) = \int_0^x g(t) dt$$

est la primitive qui est nulle en $x = 0$.

• Il est clair que $\ln \sin x - \ln x = \ln \frac{\sin x}{x}$ est une primitive de g sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$. Comme cette expression tend vers 0 au voisinage de 0, on en déduit que

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad G(x) = \ln \frac{\sin x}{x}.$$

• Une primitive sur $]0, \pi[$ est en particulier une fonction continue en 0. Par conséquent, l'unique primitive qui est nulle en 0 est aussi l'unique primitive qui tend vers 0 en 0.

• En admettant que $f = g$ sur $]0, \pi[$,

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{2t}{t^2 - x^2} dt + \int_0^x \sum_{n=2}^{+\infty} \varphi_n(t) dt.$$

On a démontré que la série de fonctions continues $\sum_{n \geq 2} \varphi_n$ convergeait normalement sur $]0, \pi[$. Par conséquent,

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \int_0^x \sum_{n=2}^{+\infty} \varphi_n(t) dt = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^x \varphi_n(t) dt = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \frac{x^2 - n^2 \pi^2}{-n^2 \pi^2}$$

• L'égalité

$$\int_0^x \varphi_1(t) dt = \ln \frac{x^2 - \pi^2}{-\pi^2} = \ln \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right)$$

n'est vraie que pour $0 \leq x < \pi$.

• On a donc démontré que

$$\forall 0 < x < \pi, \quad \ln \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$$

ou, si on préfère,

$$\forall 0 < x < \pi, \quad \frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

• Par continuité de la fonction exp, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \exp \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{(\pi/2)^2}{n^2 \pi^2} \right) \right] = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

[4.] La fonction f est continue sur $]0, \pi[$ (depuis qu'on l'a prolongée par continuité en 0) et elle est de signe constant (négative, en tant que somme de fonctions négatives), donc elle est intégrable sur $]0, \pi[$ si, et seulement si, l'intégrale

$$\int_0^x f(t) dt = \ln \frac{\sin x}{x}$$

tend vers une limite finie lorsque x tend vers π . Ce n'est pas le cas, donc f n'est pas intégrable sur $]0, \pi[$.

• Variante.

On a décomposé f en somme de deux fonctions :

$$f(t) = \frac{2t}{(t-\pi)(t+\pi)} + S(t) \quad \text{où} \quad S(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \varphi_n(t).$$

La fonction S est continue sur le segment $]0, \pi[$ car, pour tout $n \geq 2$, les fonctions φ_n sont continues sur $]0, \pi[$ et la série $\sum_{n \geq 2} \varphi_n$ converge normalement sur $]0, \pi[$.

Ainsi, la fonction f est intégrable sur $]0, \pi[$ si, et seulement si, la fonction φ_1 est intégrable sur $]0, \pi[$.

Or

$$\varphi_1(t) \underset{t \rightarrow \pi}{\sim} \frac{1}{t - \pi}$$

donc φ_1 n'est pas intégrable au voisinage de π et f ne l'est pas non plus.

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_{0,m} = 0$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_{n,m}$, le nombre de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, m \rrbracket$. On pose également

$$S_m(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n,m} \frac{z^n}{n!}.$$

- [1.] Calculer $S_{n,m}$ pour $m = 1$, pour $n = m$ et pour $n < m$.
 [2.] En majorant simplement $S_{n,m}$, démontrer que la somme S_m est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$.
 [3.a.] Démontrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n,m+1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S_{n-k,m}.$$

- [3.b.] En déduire que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, \quad S_m(z) = (e^z - 1)^m.$$

- [4.] Calculer les valeurs de $S_{10,m}$ pour $1 \leq m \leq 10$.
 [5.] Démontrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n,m} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k}.$$

[1.] Si $m = 1$, une seule application de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, m \rrbracket$ existe, c'est une application constante et elle est surjective. Donc $S_{n,1} = 1$ pour tout entier $n \geq 1$.

• Pour $n = m$, l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont des ensembles *finis*, de même cardinal. Donc une application est surjective si, et seulement si, elle est bijective et on cherche à dénombrer les permutations d'un ensemble de n éléments. Donc $S_{n,n} = n!$ pour tout $n \geq 1$.

• Si $n < m$, alors le cardinal de l'ensemble de départ est strictement inférieur au cardinal de l'ensemble d'arrivée. Par conséquent, l'image de toute fonction est une partie stricte de l'ensemble d'arrivée et aucune fonction n'est surjective. Donc $S_{n,m} = 0$ pour tous $n < m$.

[2.] Le nombre d'applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, m \rrbracket$ est égal à m^n , donc $0 \leq S_{n,m} \leq m^n$, quels que soient m et n .

Quel que soit le réel positif t ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq S_{n,m} \cdot \frac{t^n}{n!} \leq \frac{(mt)^n}{n!}.$$

Par croissances comparées, le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc la suite de terme général $S_{n,m} t^n / n!$ est bornée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Dans ces conditions, le rayon de convergence de la série entière est infini et la somme est définie sur \mathbb{C} .

[3.a.] L'entier $S_{n,m+1}$ est le cardinal de l'ensemble $\Sigma_{n,m+1}$ des surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, m+1 \rrbracket$.

Pour toute application $f \in \Sigma_{n,m+1}$, l'élément $(m+1)$ admet au moins un antécédent (puisque f est surjective) et au plus n antécédents (puisqu'il y a n éléments dans l'ensemble de départ).

↳ On pourrait être plus précis : puisque chacun des m autres éléments de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent, l'élément $(m+1)$ admet au plus $(n-m)$ antécédents. C'est sans importance pour la suite du raisonnement.

On peut définir une partition de l'ensemble $\Sigma_{n,m+1}$ en discutant sur le cardinal de l'image réciproque de $\{m+1\}$: nous noterons $\Sigma_{n,m+1}^k$, l'ensemble des applications surjectives de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, m+1 \rrbracket$ pour lesquelles $(m+1)$ admet exactement k antécédents. Puisqu'on a défini une partition,

$$\#(\Sigma_{n,m+1}) = \sum_{k=1}^n \#(\Sigma_{n,m+1}^k).$$

• Il reste à compter le nombre d'éléments de $\Sigma_{n,m+1}^k$.

Pour déterminer une application $f \in \Sigma_{n,m+1}^k$, il faut d'abord connaître les k antécédents de l'élément $(m+1)$, ce qui nous fait $\binom{n}{k}$ possibilités.

L'image réciproque de $(m+1)$ étant connue, il faut ensuite déterminer la restriction de f à $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus f^*({m+1})$. Cette restriction est une application surjective d'un ensemble de cardinal $(n-k)$ à valeurs dans $\llbracket 1, m \rrbracket$, donc il y a (par définition!) $S_{n-k, m}$ restrictions possibles.

Par principe multiplicatif,

$$\#(\Sigma_{n, m+1}^k) = \binom{n}{k} \cdot S_{n-k, m}$$

et finalement

$$S_{n, m+1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot S_{n-k, m}. \quad (*)$$

☞ On a remarqué plus haut que $1 \leq k \leq n-m$. Si $k > n-m$, alors $n-k < m$ et, d'après la première question, $S_{n-k, m}$ est alors nul.

[3.b.] Pour $m=1$, on sait que $S_{0, m} = 0$ et que $S_{n, 1} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n, 1} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z - 1.$$

☛ Supposons que, pour un certain entier $m \in \mathbb{N}^*$, on ait démontré que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n, m} \frac{z^n}{n!} = (e^z - 1)^m.$$

Alors le calcul précédent nous assure que

$$\begin{aligned} (e^z - 1)^{m+1} &= (e^z - 1)^m (e^z - 1) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n, m} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n, 1} \frac{z^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{S_{n-k, m}}{(n-k)!} \cdot \frac{S_{k, 1}}{k!} \right) z^n && \text{(produit de Cauchy de deux séries entières)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=1}^n S_{n-k, m} \binom{n}{k} \right] \frac{z^n}{n!} && \text{(la somme commence avec } k=1 \text{ car } S_{0, 1} = 0) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n, m+1} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

d'après la relation de récurrence établie ci-dessus. Le résultat voulu est ainsi établi par récurrence.

☞ Si les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont infinis, alors le rayon de convergence du produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

est infini lui aussi.

[4.] Il est étrange de demander à calculer les valeurs de $S_{10, m}$ après avoir établi une relation de récurrence qui laisse deviner un calcul long, alors qu'une formule sensiblement plus simple est démontrée ensuite.

☛ Quoi qu'il en soit, on retrouve ici le calcul des coefficients binomiaux. Le plus économique consiste à calculer dès le début tous les coefficients binomiaux dont on aura besoin.

```
def triangle_Pascal(n):
    L, T = np.zeros(n+1), np.zeros((n+1, n+1), dtype=int)
    L[0] = 1
    T[0] = L
    for k in range(n):
        L[1:] = L[1:] + L[:-1]
        T[k+1] = L
    return T
```

```
T = triangle_Pascal(10)
```

• La relation de récurrence (*) nous fait calculer les $S_{\ell,m}$ pour $1 \leq \ell \leq 10$ et $1 \leq m \leq 10$, ainsi que les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq n \leq 10$. Il reste à récupérer les valeurs $S_{10,m}$ au terme des calculs.

```
S = np.zeros((11, 11), dtype=int)
S[1:,1] = 1
for m in range(1, 10):
    for n in range(1, 11):
        s = 0
        for k in range(1, n+1):
            s += T[n,k]*S[n-k,m]
        S[n,m+1] = s
print(S[10,1:])
```

• Le code est plus simple en utilisant l'expression obtenue à la question suivante.

```
S = []
for m in range(1, 11):
    s = 0
    for k in range(m+1):
        s += T[m,k]*k**10*(-1)**(m+k)
    S.append(s)
```

[5.] Comme le rayon de convergence de la série entière est strictement positif (il est infini!), la formule de Taylor nous dit que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n,m} = S_m^{(n)}(0)$$

et la formule du binôme permet de développer l'expression de la somme :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, \quad S_m(z) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (e^z)^k (-1)^{m-k} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} e^{kz} (-1)^{m-k}.$$

Par conséquent,

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_m^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} k^n e^{k \times 0} (-1)^{m-k},$$

ce qui donne la relation attendue.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n-x)^2} \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

[1.a.] Démontrer que f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

[1.b.] Démontrer que f est 1-périodique.

[1.c.] Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

[1.d.] Tracer l'allure du graphe de f sur l'intervalle $[10, 1; 10, 9]$.

[2.] Démontrer que la fonction g admet un prolongement continu sur \mathbb{R} .

[3.] Tracer le graphe de g . Quelle conjecture peut-on faire sur f ?

[1.a.] Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{(n-x)^2}.$$

On remarque tout de suite que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad u_{-n}(x) = u_n(-x) \quad (\dagger)$$

$$\text{et que} \quad u_n(x+1) = u_{n-1}(x). \quad (\ddagger)$$

• Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $(n-x)^2 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc tous les $u_n(x)$ sont bien définis (pas de division par zéro).

• De plus, la série de Riemann $\sum 1/n^2$ est absolument convergente et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

donc la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est absolument convergente.

• Avec (\dagger) et le fait que $-x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on en déduit que la série $\sum_{n \leq 0} u_n(x)$ est aussi absolument convergente et donc que $f(x)$ est bien définie (en tant que somme des sommes de deux séries absolument convergentes).

• La définition présente $f(x)$ comme la somme de la famille $(u_n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$, il s'agissait donc ici de justifier que cette famille était **sommable**.

On s'est appuyé ici sur le résultat suivant : si $I = I_1 \cup I_2$, alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, les deux sous-familles $(u_i)_{i \in I_1}$ et $(u_i)_{i \in I_2}$ sont sommables (sommation par paquets, version élémentaire du Théorème de Fubini).

• Le même raisonnement avec (\dagger) et le fait que $[n \mapsto -n]$ soit une bijection de \mathbb{Z} sur \mathbb{Z} montre que f est une fonction paire.

[1.b.] Si $x+1 \in \mathbb{Z}$, alors $x = (x+1) - 1 \in \mathbb{Z}$. Par contraposée : si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $x+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

• Sachant que la famille $(u_n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et que l'application $[n \mapsto n-1]$ est une bijection de \mathbb{Z} sur \mathbb{Z} , on conclut que la famille $(u_{n-1}(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et que

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_{n-1}(x) \stackrel{(\ddagger)}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(x+1) = f(x+1)$$

[1.c.] Par périodicité, il suffit de démontrer que f est continue sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

• Comme la continuité est une propriété locale et que

$$]0, 1[= \bigcup_{0 < a < 1/2} [a, 1-a],$$

il suffit de démontrer que f est continue sur tout segment $[a, 1-a]$ pour tout $0 < a < 1/2$.

• Soit $0 < a < 1/2$. Pour tout $x \in [a, 1-a]$, on a

$$a \leq 1-x \leq 1-a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad n+a-1 \leq n-x \leq n-a.$$

Si $n \geq 1$, alors $n + a - 1 = (n - 1) + a > 0$ et si $n \leq 0$, alors $n - a \leq -a < 0$, donc

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{(n + a - 1)^2} \quad \text{et} \quad \forall n \leq 0, \quad 0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{(n - a)^2}.$$

Tous les majorants trouvés sont indépendants de x et les deux familles

$$\left(\frac{1}{(n + a - 1)^2} \right)_{n \geq 1} \quad \left(\frac{1}{(n - a)^2} \right)_{n \leq 0}$$

sont sommables, donc on a prouvé que la convergence était normale sur $[a, 1 - a]$.

• En tant que somme des sommes de deux séries de fonctions continues qui convergent normalement sur $[a, 1 - a]$, la fonction f est continue sur $[a, 1 - a]$, quel que soit $0 < a < 1/2$, et donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

[1.d.] On sait que le reste d'ordre n de la série de Riemann $\sum 1/k^2$ est équivalent à $1/n$. L'encadrement obtenu à la question précédente nous assure donc que l'approximation

$$f(x) \approx \sum_{n=-N}^N u_n(x)$$

conduit à une erreur sur $f(x)$ qui est de l'ordre de $1/N$.

En choisissant $N = 10$, on a une précision largement suffisante pour tracer une courbe à l'écran.

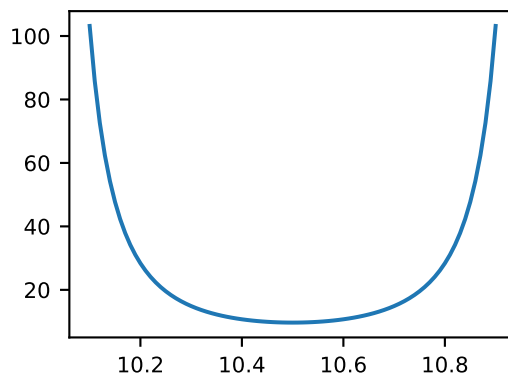
• La périodicité de f nous assure que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad f(x) = f(x - \lfloor x \rfloor).$$

En évaluant toujours f sur l'intervalle $]0, 1[$, on n'a pas à faire varier en fonction de x les indices n retenus pour calculer la somme partielle.

```
def f(x, N):
    u = x - np.floor(x)
    y = np.zeros_like(u)
    for n in range(-N, N+1):
        y += (u-n)**(-2)
    return y

X = np.arange(10.1, 10.9, 0.01)
Y = f(X, 10)
plt.plot(X, Y)
```



[2.] La fonction g est, comme la fonction f , définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, continue sur son ensemble de définition, paire et périodique, de période 1. Par conséquent, il suffit de vérifier que g tend vers une limite finie en 0 pour en déduire que g est prolongeable en une fonction continue sur \mathbb{R} .

• Pour x non nul proche de 0,

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \pi^2 \left(\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3) \right)^{-2} = \frac{\pi^2}{\pi^2 x^2} \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^2) \right)^{-2} = \frac{1}{x^2} + \frac{\pi^2}{3} + o(1).$$

• Repréons l'étude de la continuité de f . En remarquant que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-x)^2} + \frac{1}{(-n-x)^2} \right) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-x)^2} + \frac{1}{(n+x)^2} \right),$$

on est conduit à considérer la série de fonctions $\sum v_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad v_n(x) = \frac{1}{(n-x)^2} + \frac{1}{(n+x)^2}.$$

Il est clair que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall 0 < a < 1, \forall x \in [-a, a], \quad 0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-a)^2}.$$

Le majorant est indépendant de x et c'est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $[-a, a]$ et comme les fonctions v_n sont toutes continues sur $[-a, a]$, on en déduit que la somme de cette série est une fonction continue sur $[-a, a]$.

• En particulier, cela prouve que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(0) + o(1)$$

et donc que

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(0) - \frac{\pi^2}{3}.$$

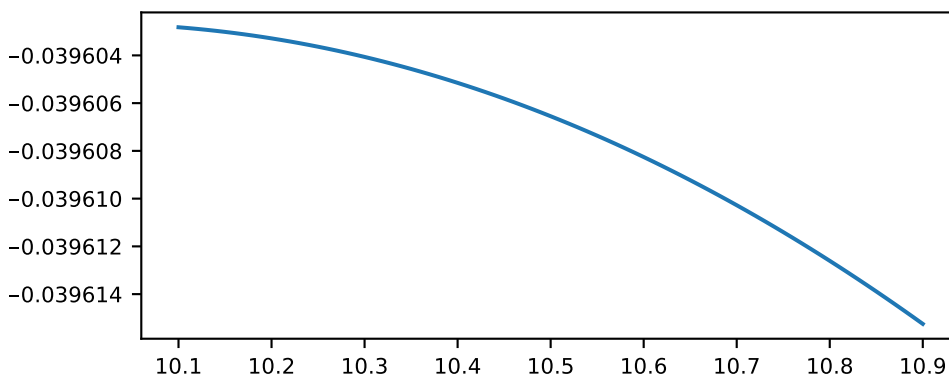
• Si on sait que $\zeta(2) = \pi^2/6$, alors on peut en déduire que g tend vers 0 au voisinage de l'origine.

Mais si on sait démontrer (cf question suivante) que g est prolongeable en une fonction identiquement nulle sur \mathbb{R} , alors on a démontré aussi que $\zeta(2) = \pi^2/6$.

[3.] Le tracé de g ne pose aucune difficulté.

```
def g(x, n):
    return f(x, n) - np.pi**2/np.sin(np.pi*x)**2
plt.plot(X, g(X, 50))
```

• Il faut ensuite prendre soin de comparer les légendes du graphe ainsi produit avec le graphe de f obtenu précédemment.



Les valeurs prises par g sont extrêmement faibles par rapport aux valeurs prises par f . On peut donc conjecturer que g est en fait identiquement nulle et donc que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad f(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}.$$

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Soient $\lambda > 0$ et Y , une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Pour tout entier $n > \lambda$, on considère une variable aléatoire S_n suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$.

[1.] Étant donné une fonction bornée f et les deux réels $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$ comme arguments, écrire une fonction qui renvoie une valeur approchée de $\mathbf{E}[f(Y)]$ à $\varepsilon \cdot \|f\|_\infty$ près.

[2.] Étant donné une fonction f , le réel $\lambda > 0$ et l'entier $n > \lambda$ comme arguments, écrire une fonction qui renvoie la valeur de $\mathbf{E}[f(S_n)]$.

[3.a.] On choisit ici $\lambda = 2$ et $f(x) = e^{-x}$. Afficher les valeurs de $\mathbf{E}[f(S_n)]$ pour $n \in \llbracket 3, 100 \rrbracket$. Comparer avec $\mathbf{E}[f(Y)]$ à 10^{-4} près.

[3.b.] Mêmes questions avec $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Établir une conjecture.

[3.c.] Démontrer cette conjecture.

[4.] Soient X et Y , deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} . Démontrer que

$$\forall A \subset \mathbb{N}, \quad |\mathbf{P}(X \in A) - \mathbf{P}(Y \in A)| \leq \mathbf{P}(X \neq Y).$$

[1.] Comme la fonction f est bornée, la variable aléatoire $f(Y)$ est bornée, donc c'est une variable aléatoire d'espérance finie et, d'après la formule de transfert,

$$\mathbf{E}[f(Y)] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} f(k) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

☞ Si on sait que la variable aléatoire $f(Y)$ est d'espérance finie, alors la famille $(f(k) \mathbf{P}(Y = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est sommable et il n'est donc pas nécessaire de justifier cette propriété.

☛ D'après la formule de la série exponentielle et l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall \lambda > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\lambda^n}{n!} \leq \frac{\lambda^N}{N!} e^\lambda$$

et donc

$$\forall \lambda > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sum_{n=N}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \leq \frac{\lambda^N}{N!}.$$

☞ Avec $f(t) = e^t$, on a $f^{(N)}(t) = e^t$ et par conséquent $|f^{(N)}(t)| \leq e^\lambda$ pour tout $t \in [0, \lambda]$.

☛ Comme la fonction f est supposée bornée,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left| f(k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq \|f\|_\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

et comme le majorant est le terme général d'une série convergente, on en déduit que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=N}^{+\infty} f(k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq \|f\|_\infty \left(\sum_{k=N}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \leq \|f\|_\infty \frac{\lambda^N}{N!}$$

par inégalité triangulaire.

☛ Cette estimation nous permet de contrôler la précision lors du calcul approché de l'espérance de $f(Y)$:

$$\mathbf{E}(f(Y)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

☛ On commence par une fonction auxiliaire qui détermine la valeur de N en fonction du paramètre λ et de la tolérance ε choisie.

```
def nb_iterations(lbd, eps):
    k, erreur = 1, lbd
    while erreur > eps:
        k += 1
        erreur *= lbd/k
    return k
```

On calcule $\lambda^N/N!$ par récurrence en remarquant que $\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \times \frac{\lambda}{k}$.

• Connaissant le nombre d'itérations à effectuer pour assurer la précision voulue, on calcule une somme partielle de la série.

```
def esp_Poisson(f, lbd, eps):
    N = nb_iterations(lbd, eps)
    s, pk = 0, 1
    for k in range(N):
        s += f(k)*pk
        pk *= lbd/(k+1)
    return s*np.exp(-lbd)
```

Ici encore, on calcule $\mathbf{P}(Y = k)$ par récurrence et on attend la dernière minute pour faire apparaître le facteur $e^{-\lambda}$.

[2.] Toujours d'après la formule de transfert,

$$\mathbf{E}[f(S_n)] = \sum_{k=0}^n f(k) \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^n f(k) \cdot \underbrace{\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left[\frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{(n-\lambda)^{n-k}}{n^n}\right]}_{p_k}.$$

↳ Il s'agit ici de calculer une somme finie, donc on peut calculer la valeur exacte de l'espérance — exacte aux erreurs d'arrondi près, bien entendu !

• Pour $k = 0$, le cofacteur p_k de $f(k)$ est égal à $(1 - \lambda/n)^n$ et pour $0 \leq k < n$,

$$p_{k+1} = p_k \cdot \frac{\lambda}{k+1} \cdot \frac{n-k}{n-\lambda}.$$

Il reste alors à coder le calcul de

$$\mathbf{E}[f(S_n)] = f(0) \cdot p_0 + \sum_{0 \leq k < n} f(k+1) \cdot p_{k+1}.$$

```
def esp_binomiale(f, n, lbd):
    pk = (1-lbd/n)**n
    s = pk*f(0)
    for k in range(n):
        pk *= lbd*(n-k)/((k+1)*(n-lbd))
        s += f(k+1)*pk
    return s
```

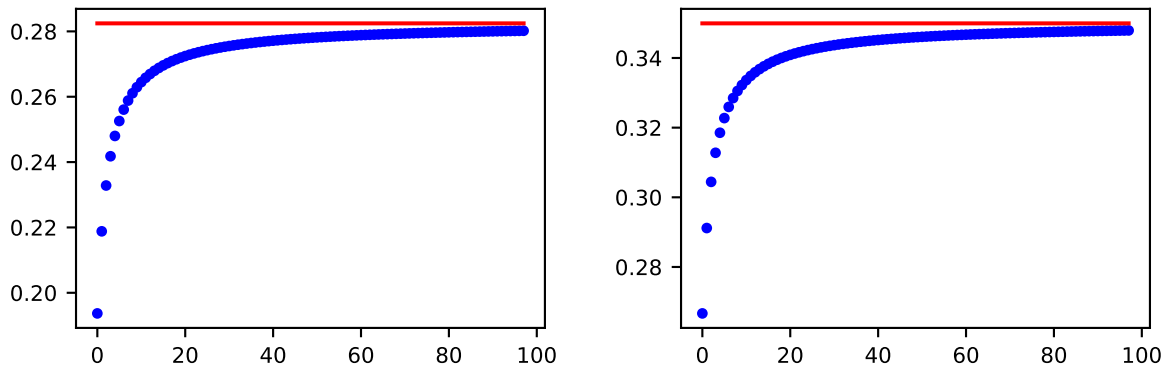
[3.a.] Le code est sans aucun mystère et son exécution suggère que $\mathbf{E}[f(S_n)]$ se rapproche de $\mathbf{E}[f(Y)]$ (voir plus bas, figure de gauche).

```
lbd = 2
def f(x):
    return np.exp(-x)
E_bin = [esp_binomiale(f, n, lbd) for n in range(3, 101)]
E_P = [esp_Poisson(f, lbd, 1e-2)]*len(E_bin)
plt.plot(E_bin, 'b.')
plt.plot(E_P, 'r')
```

[3.b.] Le code est analogue, on introduit une autre manière de définir une fonction.

Cette fois encore, l'espérance $\mathbf{E}[f(S_n)]$ se rapproche de $\mathbf{E}[f(Y)]$ lorsque n augmente (figure de droite ci-dessous).

```
f = lambda x: 1/(1+x**2)
E_bin = [esp_binomiale(f, n, lbd) for n in range(3, 101)]
E_P = [esp_Poisson(f, lbd, 1e-2)]*len(E_bin)
plt.plot(E_bin, 'b.')
plt.plot(E_P, 'r')
```



[3.c.] Nous allons démontrer que $\mathbf{E}[f(S_n)]$ converge vers $\mathbf{E}[f(Y)]$ lorsque n tend vers $+\infty$, quelle que soit la fonction f continue et bornée sur \mathbb{R}_+ .

↳ Cette question ne figurait pas dans l'énoncé original.

• D'après le cours ("loi des événements rares"),

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(S_n = k) = \mathbf{P}(Y = k)$$

et donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} |\mathbf{P}(S_n = k) - \mathbf{P}(Y = k)| = 0. \quad (\star)$$

• Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Les restes d'une série convergente tendent vers 0, donc il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$0 \leq \sum_{k=N}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) \leq \varepsilon. \quad (\dagger)$$

Cet entier N étant fixé, on déduit de (\star) qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=0}^{N-1} |\mathbf{P}(S_n = k) - \mathbf{P}(Y = k)| \leq \varepsilon. \quad (\ddagger)$$

• Comme f est bornée, on déduit de la formule de transfert et de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(f(Y)) - \mathbf{E}(f(S_n))| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} |f(k)| \cdot |\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(S_n = k)| + \sum_{k=N}^{+\infty} |f(k)| \cdot (\mathbf{P}(Y = k) + \mathbf{P}(S_n = k)) \\ &\leq \|f\|_{\infty} \cdot \left(\varepsilon + \varepsilon + \sum_{k=N}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = k) \right) \end{aligned}$$

d'après (\dagger) et (\ddagger) .

• Également de (\dagger) et de (\ddagger) , on déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = k) &= 1 - \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}(S_n = k) = \left(1 - \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}(Y = k) \right) + \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(S_n = k)] \\ &= \sum_{k=N}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) + \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(S_n = k)] \\ &\leq \sum_{k=N}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) + \sum_{k=0}^{N-1} |\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(S_n = k)| \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

On a ainsi prouvé qu'il existait un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |\mathbf{E}[f(Y)] - \mathbf{E}[f(S_n)]| \leq 4\|f\|_{\infty} \varepsilon$$

et donc que $\mathbf{E}[f(S_n)]$ converge effectivement vers $\mathbf{E}[f(Y)]$ quand n tend vers $+\infty$.

[4.]

☞ Si on admet que $[X = Y] \in \mathcal{A}$ pour toutes les variables aléatoires X et Y définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, alors $[X \neq Y] = [X = Y]^c \in \mathcal{A}$ et la démonstration suivante vaut pour toutes les variables aléatoires et non pas seulement pour les variables aléatoires discrètes.

Il est clair que

$$[Y \in A] = [Y \in A, X = Y] \cup [Y \in A, X \neq Y]$$

donc

$$\mathbf{P}(Y \in A) \leq \mathbf{P}(Y \in A, X = Y) + \mathbf{P}(Y \in A, X \neq Y)$$

mais il est aussi clair que

$$[Y \in A] \cap [X = Y] \subset [X \in A] \quad \text{et que} \quad [Y \in A, X \neq Y] \subset [X \neq Y]$$

donc

$$\mathbf{P}(Y \in A) \leq \mathbf{P}(X \in A) + \mathbf{P}(X \neq Y).$$

☛ On a ainsi démontré que

$$\mathbf{P}(Y \in A) \leq \mathbf{P}(X \in A) + \mathbf{P}(X \neq Y).$$

Par symétrie, on en déduit que

$$\mathbf{P}(X \in A) \leq \mathbf{P}(Y \in A) + \mathbf{P}(X \neq Y)$$

et finalement, on a démontré que

$$|\mathbf{P}(Y \in A) - \mathbf{P}(X \in A)| \leq \mathbf{P}(X \neq Y).$$

☞ Cette question, totalement hors sujet, figurait dans l'énoncé original.

Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, une fonction intégrable. On considère une fonction f , solution du problème de Cauchy

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + [1 + q(x)]y(x) = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b. \quad (E)$$

[1.] Écrire une fonction trace (a, b, u, v, q) qui trace l'allure du graphe d'une solution du problème de Cauchy (E) sur le segment $[u, v]$. Quelle conjecture peut-on faire ?

[2.] Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$z(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)q(t)f(t) dt.$$

[2.a.] Démontrer que z est de classe \mathcal{C}^2 et simplifier l'expression $z''(x) + z(x)$.

[2.b.] Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| \leq |a| + |b| + \int_0^x |q(t)f(t)| dt.$$

[2.c.] En déduire que la fonction f est bornée.

[1.] L'équation différentielle considérée est une équation linéaire et homogène du second ordre. Le coefficient de y'' est constant et la fonction q est continue sur \mathbb{R}_+ , donc le Théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur l'intervalle \mathbb{R}_+ : quelle que soit la condition initiale $(x_0, y_0, v_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cette équation admet une, et une seule, solution $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que

$$(f(x_0), f'(x_0)) = (y_0, v_0).$$

Pour (E), $x_0 = 0, y_0 = a$ et $v_0 = b$.

Il faut résoudre sur l'intervalle $[0, v]$ (puisque la condition initiale prend $x_0 = 0$ comme "instant initial" et tronquer le résultat pour ne tracer que sur le sous-intervalle $[u, v]$).

```
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

def trace(a, b, u, v, q):
    if u>v:
        u, v = v, u
    def f(x, t):
        return np.array([x[1], -(1+q(t))*x[0]])
    T = np.arange(0, v, 0.1)
    X = odeint(f, np.array([a, b]), T)
    n_debut = sum(T<u)
    plt.plot(T[n_debut:], X[n_debut:,0])
```

↳ Pour bien faire, il faudrait tester si $u < v$.

Après quelques essais, on constate qu'une sorte de régime permanent s'établit. Il semble que la solution de ce problème de Cauchy soit bornée.

[2.a.] Remarquons tout d'abord que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad z(x) = f(x) + \sin x \int_0^x \cos tq(t)f(t) dt - \cos x \int_0^x \sin tq(t)f(t) dt.$$

La fonction q est continue et la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 , donc les

$$\int_0^x \cos tq(t)f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_0^x \sin tq(t)f(t) dt$$

sont de classe \mathcal{C}^1 (Théorème fondamental), donc z est de classe \mathcal{C}^1 et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad z'(x) = f'(x) + \cos x \int_0^x \cos tq(t)f(t) dt + \sin x \int_0^x \sin tq(t)f(t) dt.$$

Il apparaît sur cette expression que z' est de classe \mathcal{C}^1 et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad z''(x) = f''(x) - \sin x \int_0^x \cos tq(t)f(t) dt + \cos x \int_0^x \sin tq(t)f(t) dt + q(x)f(x)$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad z''(x) + z(x) = f''(x) + f(x) - q(x)f(x) = 0$$

d'après l'équation différentielle vérifiée par f .

[2.b.] D'après les calculs qui précèdent, $z(0) = f(0) = a$ et $z'(0) = f'(0) = b$ et il existe deux réels A et B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad z(x) = A \cos x + B \sin x.$$

On en déduit facilement que $A = a$ et que $B = b$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = a \cos x + b \sin x - \int_0^x \sin(x-t)q(t)f(t) dt.$$

Comme $x \geq 0$, on intègre bornes croissantes et on peut déduire de l'inégalité triangulaire pour les intégrales que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| &\leq |a| \times 1 + |b| \times 1 + \int_0^x |\sin(x-t)q(t)f(t)| dt \\ &\leq |a| + |b| + \int_0^x |q(t)| |f(t)| dt. \end{aligned}$$

[2.c.] Simplifions l'encadrement précédent : il existe deux fonctions continues et positives $g(t) = |f(t)|$ et $\varphi(t) = |q(t)|$ ainsi qu'une constante positive $c \in \mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) \leq c + \int_0^x \varphi(t)g(t) dt.$$

Comme le produit φg est une fonction continue sur \mathbb{R}_+ , le second membre est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ :

$$h(x) = c + \int_0^x \varphi(t)g(t) dt$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h'(x) = \varphi(x)g(x) \leq \varphi(x)h(x).$$

• Comme la fonction φ est continue sur \mathbb{R}_+ , elle admet une primitive Φ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h'(x) - \varphi(x)h(x) = h'(x) - \Phi'(x)h(x) \leq 0.$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad [h'(x) - \Phi'(x)h(x)] \exp(-\Phi(x)) \leq 0$$

et donc que l'expression

$$h(x) \exp(-\Phi(x))$$

est une fonction décroissante (et positive) de x .

• On sait que $h(0) = c$ et on peut choisir $\Phi(0) = 0$ (une primitive est définie à une constante additive près). Dans ces conditions, on a démontré que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| \leq h(x) \leq h(0) \exp(\Phi(x)) = c \exp \int_0^x |q(t)| dt.$$

Comme q est intégrable sur \mathbb{R}_+ , le second membre est majoré par

$$c \exp \int_0^{+\infty} |q(t)| dt,$$

ce qui prouve que la fonction $|f|$ est bien bornée sur \mathbb{R}_+ .

Soit E , l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R} . Pour $f \in E$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} dt.$$

- [1.] Démontrer que Φ est un endomorphisme de E .
- [2.] Soit $f \in E$. Démontrer que $\Phi(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
- [3.] Soit f_0 , la fonction constante, égale à 1. On pose $g = \Phi(f_0)$.
- [3.a.] Tracer l'allure du graphe de g sur $[0, 5]$. Conjecturer la limite de g au voisinage de $+\infty$.
- [3.b.] Déterminer la limite de g au voisinage de $+\infty$.
- [3.c.] Simplifier l'expression $g(x) + g(1/x)$. (On pourra s'aider d'un graphe tracé à l'ordinateur.)

[1.] Pour $f \in E$ fixée, posons

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x, t) = \operatorname{Arctan}(tx) \frac{f(t)}{1+t^2}.$$

• **Intégrabilité** — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il est clair que la fonction $[t \mapsto \varphi(x, t)]$ est continue sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ et comme la fonction f est bornée (par définition de E),

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times I, \quad |\varphi(x, t)| \leq \frac{\pi \|f\|_\infty}{2(1+t^2)}. \quad (*)$$

Le majorant est une fonction de t intégrable au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve que $[t \mapsto \varphi(x, t)]$ est intégrable sur I .

La fonction $\Phi(f)$ est donc bien définie sur \mathbb{R} .

- **Régularité** — Pour tout $t \in \mathbb{R}$, il est clair que la fonction $[x \mapsto \varphi(x, t)]$ est continue sur $\Omega = \mathbb{R}$.
- **Domination** — L'encadrement $(*)$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in I$; le majorant est indépendant du paramètre $x \in \mathbb{R}$ et il est intégrable sur I en tant que fonction de t . Par conséquent, la fonction $\Phi(f)$ est continue sur \mathbb{R} .
- On déduit également de $(*)$ que $\Phi(f)$ est bornée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\Phi(x)| \leq \int_0^{+\infty} |\varphi(x, t)| dt \leq \frac{\pi \|f\|_\infty}{2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi^2 \|f\|_\infty}{4}.$$

Par conséquent, $\Phi(f) \in E$ pour toute fonction $f \in E$.

- On a prouvé l'intégrabilité de $[t \mapsto \varphi(x, t)]$ pour toute fonction $f \in E$ et tout paramètre $x \in \mathbb{R}$, la linéarité de Φ découle alors directement de la linéarité de l'intégrale. Ainsi Φ est bien un endomorphisme de E .

[2.] (On reprend les notations précédentes.)

- **Régularité** — Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto \varphi(x, t)]$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times I, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \frac{tf(t)}{[1+(xt)^2](1+t^2)}.$$

- **Intégrabilité** — Comme f est bornée,

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times I, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t \|f\|_\infty}{[1+(xt)^2](1+t^2)}.$$

La majorant est une fonction continue de t sur I et si $x \neq 0$, cette fonction est $\mathcal{O}(1/t^3)$ au voisinage de $+\infty$, donc c'est une fonction intégrable sur I . Par comparaison, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right]$$

est intégrable sur I .

↳ Pour $x = 0$, le majorant est seulement $\mathcal{O}(1/t)$ et l'intégrabilité n'est pas garantie au voisinage de $+\infty$. (La conclusion dépend alors de la fonction f choisie.)

• **Domination** — Soit $a > 0$. Par monotonie en fonction de x (pour $t \in I$ fixé),

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times I, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, t) \right|$$

et ce majorant est intégrable sur I d'après l'encadrement précédent. Comme ce majorant est indépendant du paramètre $x \in [a, +\infty[$, on a établi la propriété de domination.

• D'après le Théorème de dérivation sous le signe \int , la fonction $\Phi(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc elle est de classe \mathcal{C}^1 sur

$$]0, +\infty[= \bigcup_{a>0} [a, +\infty[$$

et de plus

$$\forall x > 0, \quad [\Phi(f)]'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{[1+(xt)^2](1+t^2)} dt.$$

• Il est clair que la fonction $\Phi(f)$ est impaire, donc elle est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* (et l'expression de sa dérivée est encore vraie pour $x < 0$).

[3.a.] On commence par définir la fonction g . (Il suffit de suivre les indications données dans le Vademecum.)

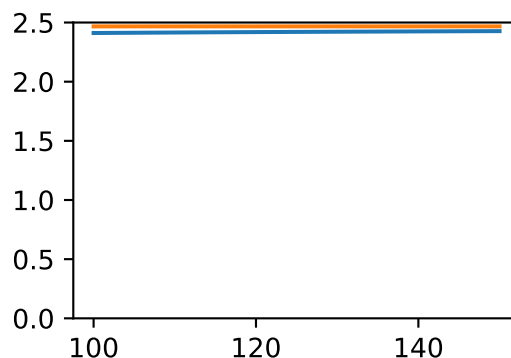
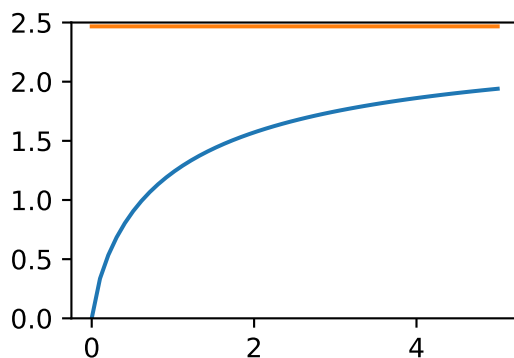
```
import scipy.integrate as integr

def g(x):
    def f(t):
        return np.arctan(t*x)/(1+t**2)
    return integr.quad(f, 0, np.inf)[0]
```

Le tracé de la courbe est ensuite classique (figure de gauche).

```
X = np.linspace(0, 5)
Y = [g(x) for x in X]
plt.plot(X, Y)
asptt = (np.pi/2)**2
plt.plot([X[0], X[-1]], [asptt, asptt])
plt.ylim(0, 2.5)
```

Le résultat apparaît plus clairement sur l'intervalle $[100, 150]$ (figure de droite).



[3.b.] Il est clair que

$$\forall t > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arctan}(tx)}{1+t^2} = \frac{\pi}{2(1+t^2)}.$$

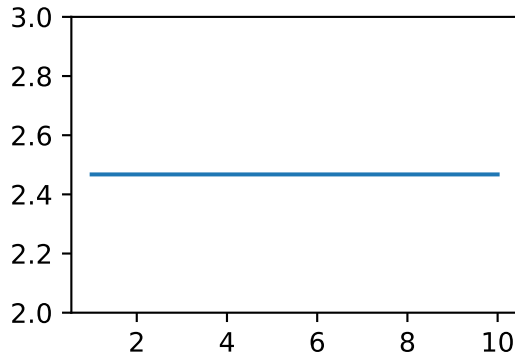
• Attention, si $t = 0$, cette limite est nulle — mais c'est sans importance pour la suite.

La domination (*) est établie au voisinage de $+\infty$ pour x (puisque \mathbb{R} est en particulier un voisinage de $+\infty$), ce qui permet de passer à la limite sous le signe \int . Ainsi, la fonction g tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arctan}(tx)}{1+t^2} dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

[3.c.] Commencer par tracer l'allure du graphe de $G = [x \mapsto g(x) + g(1/x)]$.

```
X = np.linspace(1, 10)
Z = [g(x)+g(1/x) for x in X]
plt.plot(X, Z)
plt.ylim(2, 3)
```



Cela ressemble beaucoup à une fonction constante!

• On a démontré plus haut que la fonction g était de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et que

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \, dt}{[1 + (xt)^2](1 + t^2)}.$$

Par conséquent, la fonction G est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et

$$\forall x > 0, \quad G'(x) = g'(x) - \frac{1}{x^2} g'(1/x).$$

Avec le changement de variable usuel $u = 1/t$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} g'(1/x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t \, dt}{x^2 [1 + (t/x)^2] (1 + t^2)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(u/u^2) \cdot (du/u^2)}{x^2 [1 + 1/(xu)^2] [1 + (1/u)^2]} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u \, du}{[1 + (xu)^2] (1 + u^2)} = g'(x). \end{aligned}$$

Comme sa dérivée est nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction G est constante sur $]0, +\infty[$.

• La fonction g est impaire, donc la fonction G est impaire elle aussi, elle n'est donc pas constante sur \mathbb{R}^* :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad G(x) = -G(-x).$$

Comme la fonction g est continue sur \mathbb{R} et qu'elle tend vers $(\pi/2)^2$ au voisinage de $+\infty$, on en déduit que

$$\forall x > 0, \quad G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + g(1/x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + g(0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

• On pourrait aussi remarquer que

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^A \frac{\text{Arctan } t}{1 + t^2} \, dt = \left[\frac{(\text{Arctan } t)^2}{2} \right]_0^A = \frac{1}{2} (\text{Arctan } A)^2$$

et en déduire la valeur de $G(x)$ en faisant tendre A vers $+\infty$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n , le nombre de diviseurs de n (en comptant 1 et n) et on pose

$$D_n = \sum_{k=1}^n d_k \quad \text{et} \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

[1.] Écrire des fonctions prenant un entier $n \geq 1$ pour argument et renvoyant respectivement D_n et H_n .

[2.a.] Dénombrer les couples d'entiers naturels non nuls (k, ℓ) se situant sous la courbe d'équation $xy = n$.

[2.b.] En déduire que $D_n = nH_n + \mathcal{O}(n)$, puis un équivalent de D_n .

[3.] Pour $x \in]-1, 1[$, calculer les sommes suivantes.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n H_n x^n$$

[4.] En déduire un équivalent de la somme

$$\sum d_n x^n$$

lorsque x tend vers 1.

[5.] Démontrer que la série de fonctions

$$\sum \frac{x^n}{1-x^n}$$

converge simplement sur $]-1, 1[$ et que sa somme est une fonction continue sur cet intervalle.

[1.] Pour écrire la fonction qui calcule D_n , on peut utiliser la méthode classique (qui est simple et raisonnablement efficace, même si elle n'est pas optimale).

```
def diviseurs(n):
    L = []
    for i in range(1, n+1):
        if n%i==0:
            L.append(i)
    return L

def D(n):
    s = 0
    for n in range(1, n+1):
        s += len(diviseurs(n))
    return s
```

☛ Le calcul de H_n ne pose aucune difficulté apparente.

```
def H(n):
    s = 0
    for k in range(1, n+1):
        s += 1/k
    return s
```

☛ En fait, le calcul des nombres harmoniques pose un problème réellement difficile !

On sait que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$ mais si on travaille en virgule flottante, le code précédent affirme que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ est stationnaire !

Ce comportement paradoxal apparaît quelle que soit la précision retenue pour mener les calculs. Si on refait les calculs avec une précision plus élevée, la "limite apparente" de la suite sera plus élevée, mais la suite paraîtra toujours stationnaire.

[2.a.] On peut effectuer ce dénombrement de deux manières.

• Un couple (x, x') d'entiers non nuls est situé sous la courbe $xy = n$ si, et seulement si, le produit xx' est un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $xx' = k$ si, et seulement si, x est un diviseur de k . Par conséquent, le nombre de couples (x, x') est égal à

$$\sum_{k=1}^n d_k = D_n.$$

• L'autre méthode consiste à discuter sur l'abscisse x et non plus sur le produit xy .

Pour chaque $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le couple (x, x') est situé sous la courbe $xy = n$ si, et seulement si, le produit xx' est inférieur à n . Or x' est un entier non nul, donc on cherche le nombre de multiples (entiers!) de x qui sont inférieurs à n . Par définition, ce nombre est égal à $\lfloor n/x \rfloor$ et donc le nombre de couples cherché est égal à

$$\sum_{x=1}^n \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor.$$

C'est à peu près la Formule de Legendre

• On devine (et on peut le constater expérimentalement...) que le code suivant est beaucoup plus efficace pour calculer D_n que le code précédent.

```
def D_var(n):
    s = 0
    for x in range(1, n+1):
        s += n//x
    return s
```

[2.b.] Par définition de la partie entière, $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$, donc, d'après la question précédente,

$$D_n = \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{k} = nH_n \leq \sum_{k=1}^n \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1 \right) = D_n + n.$$

Autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq nH_n - D_n \leq n \quad (*)$$

ce qu'on peut résumer sous la forme $nH_n = D_n + \mathcal{O}(n)$.

• Il est bien connu que $H_n \sim \ln n$ (comparaison somme/intégrale pour une fonction monotone), donc

$$D_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} [n \ln n + o(n \ln n)] + \mathcal{O}(n) = n \ln n + o(n \ln n)$$

et donc $D_n \sim n \ln n$.

• Il s'agit ici d'une simple factorisation : comme $\frac{1}{\ln n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$,

$$n = \frac{1}{\ln n} \cdot (n \ln n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o(n \ln n)$$

et on a bien $\mathcal{O}(n) = o(n \ln n)$.

[3.] D'après le cours,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

• Les rayons de convergence des séries $\sum x^n$ et $\sum x^n/n$ sont tous les deux égaux à 1, donc le rayon de convergence de leur produit de Cauchy est au moins égal à 1.

La formule générale du produit de Cauchy nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Dans notre cas, on a $a_0 = 0$ et $a_k = 1/k$ pour tout $k \geq 1$ et $b_\ell = 1$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, donc

$$c_0 = a_0 b_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = 0 \times 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \times 1 = H_n.$$

D'après le cours sur le produit de Cauchy,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

• Comme le rayon de convergence de la série entière précédente est strictement positif, on peut dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, ce qui nous donne

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n H_n x^{n-1} = \frac{1 - \ln(1-x)}{(1-x)^2}$$

et finalement, par une simple multiplication,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n H_n x^n = x \frac{1 - \ln(1-x)}{(1-x)^2}.$$

[4.] Pour tout entier $n \geq 1$, le nombre d_n de diviseurs de n est évidemment compris entre 2 et n . Par conséquent, la suite de terme général $d_n x^n$ est bornée pour tout $0 \leq x < 1$ et elle tend vers $+\infty$ pour tout $x > 1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum d_n x^n$ est donc égal à 1.

La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$$

est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur $]-1, 1[$.

• Comme précédemment, la série $\sum D_n x^n$ peut s'interpréter comme un produit de Cauchy, ce qui nous donne

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} D_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \frac{S(x)}{1-x}.$$

On a encadré plus haut D_n à l'aide de H_n (*), ce qui nous donne

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} D_n x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n H_n x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} D_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n.$$

↳ *Attention, cet encadrement n'a aucune raison d'être vrai pour $-1 < x < 0$!*

Le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est strictement positif, donc on peut dériver terme à terme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

• On a donc démontré que

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad 0 \leq x \frac{1 - \ln(1-x)}{(1-x)^2} - \frac{S(x)}{1-x} \leq \frac{x}{(1-x)^2}.$$

On en déduit que

$$S(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} x \frac{1 - \ln(1-x)}{1-x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

et plus simplement que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

↳ *Comme la série $\sum d_n$ est grossièrement divergente, il est logique de trouver un équivalent infiniment grand.*

Comme d_n oscille indéfiniment entre 2 (cas où n est premier) et de grandes valeurs (pour les entiers n qui ont "beaucoup" de diviseurs), il est logique de trouver un équivalent qui est intermédiaire entre la somme de la série entière $\sum x^n$ et celle de la série entière $\sum n x^n$.

[5.] Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n définie par $u_n(x) = x^n/(1-x^n)$ est clairement continue sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $0 < a < 1$,

$$\forall x \in [-a, a], \quad |u_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{1-x^n} \leq \frac{a^n}{1-a^n}.$$

↳ Si $|x| \leq a$, alors $x^n \leq |x|^n \leq a^n < 1$ et par conséquent

$$1 - x^n \leq 1 - |x|^n \leq 1 - a^n > 0.$$

Il faut toujours chercher un encadrement simple avant de se lancer dans l'étude des variations d'une fonction !

Comme $0 < a < 1$, le majorant est équivalent à a^n lorsque n tend vers $+\infty$. On a donc trouvé un majorant indépendant de $x \in [-a, a]$ et qui est le terme général d'une série convergente. On a donc prouvé que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur $[-a, a]$ pour tout $0 < a < 1$ et comme les fonctions u_n sont continues, on en déduit que la somme de cette série de fonctions est continue sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$ (qui est l'union des segments $[-a, a]$ lorsque a varie entre 0 et 1).

↳ On peut démontrer (Théorème de Fubini) que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k x^k.$$

Il y a donc bien un rapport entre les deux dernières questions !

Pour se rendre aux épreuves orales depuis sa résidence, un candidat a le choix entre deux itinéraires. Il choisit le chemin A avec probabilité p et le chemin B sinon. S'il a choisi le chemin A (resp. le chemin B), la durée du trajet en minutes suit la loi de Poisson de paramètre a (resp. de paramètre b).

La durée aléatoire du trajet est modélisée par une variable aléatoire notée T , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

[1.a.] Écrire une fonction $T(p, a, b)$ qui permet de simuler les valeurs de la variable aléatoire T .

[1.b.] En utilisant cette fonction pour simuler $N = 500$ trajets, calculer la valeur moyenne de T pour $a = 5$, $b = 10$ et $p \in \{1/4, 1/2, 3/4\}$.

Comment cette valeur moyenne évolue-t-elle en fonction de p ? Expliquer.

[2.a.] Déterminer la loi de T , sa fonction génératrice, son espérance et sa variance.

[2.b.] À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, estimer le nombre de simulations à effectuer pour que la valeur moyenne de T calculée par la méthode de Monte-Carlo soit proche de $\mathbf{E}(T)$ à 30 secondes près avec une probabilité supérieure à 95%.

[3.] Sur le lieu où se déroulent les épreuves orales, un ami attend le candidat pendant une durée τ comptée depuis l'instant où le candidat quitte sa résidence. On suppose que cette durée τ suit la loi de Poisson de paramètre c .

Si l'ami attend encore lorsque le candidat arrive, on dit qu'il y a rencontre.

On note R , la variable aléatoire qui vaut 1 si l'ami attend encore lorsque le candidat arrive et 0 si le candidat arrive trop tard pour retrouver son ami.

[3.a.] Écrire une fonction $R(p, a, b, c)$ qui permet de simuler les valeurs de la variable aléatoire R .

[3.b.] En simulant $N = 500$ trajets, calculer la valeur moyenne de R pour $a = 5$, $b = c = 10$ et $p \in \{1/4, 1/2, 3/4\}$.

[1.a.]

```
def T(p, a, b):
    choix = rd.binomial(1, p)
    if choix:
        return rd.poisson(a)
    else:
        return rd.poisson(b)
```

[1.b.]

```
def moyenne_empirique_T(p, a, b, N):
    somme = 0
    for _ in range(N):
        somme += T(p, a, b)
    return somme/N

a, b = 5, 10
for p in [1/4, 1/2, 3/4]:
    print(moyenne_empirique_T(p, a, b, 50000))
```

On trouve $\mathbf{E}(T) \approx 8,7$ pour $p = 1/4$, puis $\mathbf{E}(T) \approx 7,5$ pour $p = 1/2$ et $\mathbf{E}(T) \approx 6,2$ pour $p = 3/4$. Il semble bien que $\mathbf{E}(T)$ soit une fonction décroissante de p .

Lorsque p augmente, le candidat emprunte plus souvent le chemin A et comme $a < b$, la durée moyenne du trajet diminue. Même si elle n'est pas encore démontrée par le calcul, l'observation est justifiée par la raison.

[2.a.] Modélisons la situation par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel sont définies quatre variables aléatoires indépendantes :

- une variable aléatoire C qui suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ pour le choix du chemin emprunté;
- une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(a)$ pour la durée du trajet sur le chemin A;
- une variable aléatoire Y qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(b)$ pour la durée du trajet sur le chemin B;
- une variable aléatoire Z qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(c)$ pour la durée d'attente de l'ami.

En suivant l'énoncé, on définit la variable aléatoire $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [T = n] = ([C = 1] \cap [X = n]) \cup ([C = 0] \cap [Y = n]).$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(T = n) = pe^{-a} \frac{a^n}{n!} + qe^{-b} \frac{b^n}{n!}$$

en posant, comme d'habitude, $q = 1 - p$.

• On en déduit la fonction génératrice de T :

$$\forall x \in [0, 1], \quad G_T(x) = pe^{a(x-1)} + qe^{b(x-1)}$$

par combinaison linéaire, ainsi que l'espérance :

$$\mathbf{E}(T) = pa + qb$$

puisque le rayon de convergence de la série génératrice est strictement supérieur à 1 (il est en fait infini).

• Toujours par linéarité,

$$\mathbf{E}(T(T-1)) = G_T''(1) = pa^2 + qb^2$$

et, d'après la Formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{V}(T) = pq(a-b)^2 + pa + qb.$$

[2.b.] On considère un échantillon (T_1, \dots, T_n) de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la même loi que T . D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{T_1 + \dots + T_n}{n} - \mathbf{E}(T)\right| \geq 1/2\right) \leq \frac{\mathbf{V}(T)}{n(1/2)^2} = \frac{4\mathbf{V}(T)}{n}.$$

On cherche ici un entier n assez grand pour que $4\mathbf{V}(T)/n \leq 5\%$, c'est-à-dire

$$n \geq 80\mathbf{V}(T).$$

• Avec $a = 5$, $b = 10$ et $p \in \{1/4, 1/2, 3/4\}$, on a

$$\mathbf{V}(T) \leq \frac{1}{4} \cdot 5^2 + \frac{5}{4} + \frac{30}{4} = 15.$$

Pour $n \approx 1\,200$, on aura la précision souhaitée avec la fréquence souhaitée.

• L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est pratique (parce qu'elle est simple à appliquer), mais elle est tout de même assez grossière. On n'est donc pas tenu de faire une application numérique très précise, l'ordre de grandeur du résultat est amplement suffisant.

[3.a.] En suivant l'énoncé,

$$[R = 1] = [T < Z] = ([C = 1] \cap [X < Z]) \cup ([C = 0] \cap [Y < Z]).$$

```
def R(p, a, b, c):
    return rd.poisson(c) > T(p, a, b)
```

[3.b.]

```
def moyenne_empirique_R(p, a, b, c, N):
    somme = 0
    for _ in range(N):
        somme += R(p, a, b, c)
    return somme/N
```

On obtient $\mathbf{E}(R) \approx 0,56$, puis $\mathbf{E}(R) \approx 0,66$ et enfin $\mathbf{E}(R) \approx 0,77$. Comme plus haut, il est aisé de comprendre que : moins le candidat met de temps pour parvenir au centre d'examen, plus il a de chances que son ami ne soit pas déjà parti.

[1.] Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

[2.] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/n & 1/n \\ 1/n & 1 & 1/n \\ 1/n & 1/n & 1 \end{pmatrix}.$$

[2.a.] Écrire une fonction Python d'argument $n \in \mathbb{N}^*$ qui renvoie la matrice A_n .

[2.b.] Écrire un code Python renvoyant les valeurs propres de A_n^n pour $n \in \llbracket 5, 10 \rrbracket$.

[2.c.] Diagonaliser A_n et déterminer la limite de A_n^n lorsque n tend vers $+\infty$. Vérifier le résultat avec Python.

[3.] On note $A_{n,m} \in \mathfrak{M}_m(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et les autres coefficients sont égaux à $1/n$.

[3.a.] Exprimer la matrice $A_{n,m}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, de I_n et de la matrice $J_m \in \mathfrak{M}_m(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

[3.b.] Déterminer la limite de $A_{n,m}^n$ lorsque n tend vers $+\infty$ comme une combinaison linéaire des matrices I_m et J_m .

[1.] Lorsque n est assez grand pour que $|x/n| < 1$, on peut composer par la fonction \ln .

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right] = \exp\left[x + o(1/n)\right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x.$$

[2.a.] Il suffit de ne pas calculer six fois le même quotient pour que le code soit élégant.

```
def A(n):
    q = 1/n
    return np.array([[1,q,q],[q,1,q],[q,q,1]])
```

[2.b.] Il faut savoir calculer les puissances d'une matrice (avec la fonction `matrix_power` du module `numpy.linalg`), ainsi que son spectre (la fonction `eigvals` du même module donne une valeur approchée des valeurs propres).

```
for n in range(5, 11):
    M = alg.matrix_power(A(n), n)
    print(alg.eigvals(M))
```

Il semblerait qu'une valeur propre double soit proche de 0,35 et qu'une valeur propre simple soit proche de 6,19.

[2.c.] Comme $J_3^2 = 3J_3$, la matrice $\Pi = (1/3) \cdot J_3$ est une matrice de projection. La matrice $I_3 - \Pi$ est donc la projection associée à Π et la décomposition

$$J_3 = 3 \cdot \Pi + 0 \cdot (I_3 - \Pi)$$

nous donne la forme diagonalisée de chaque polynôme en J_3 . En particulier, comme

$$A_n = \frac{1}{n} \cdot J_3 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot I_3 = \frac{3}{n} \cdot \Pi + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot (\Pi + I_3 - \Pi) = \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \Pi + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot (I_3 - \Pi)$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A_n^k = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^k \cdot \Pi + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \cdot (I_3 - \Pi).$$

En particulier,

$$A_n^n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \cdot \Pi + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot (I_3 - \Pi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^2 \cdot \Pi + e^{-1} \cdot (I_3 - \Pi).$$

• Variante

Sachant que $J_3^2 = 3J_3$, on sait que les seules valeurs propres possibles pour J_3 sont 0 et 3. En étudiant les noyaux de J_3 et de $J_3 - 3I_3$, on forme la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est inversible et qui vérifie

$$P^{-1}J_3P = \text{Diag}(3, 0, 0).$$

On en déduit que

$$P^{-1}A_nP = \frac{1}{n} \cdot P^{-1}J_3P + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot I_3$$

et donc que

$$P^{-1}A_n^nP = (P^{-1}A_nP)^n = \text{Diag}\left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{Diag}(e^2, e^{-1}, e^{-1}).$$

✎ On peut confirmer numériquement cette étude si on sait calculer l'inverse d'une matrice (fonction `inv` du module `numpy.linalg`) ainsi que le produit de trois matrices (fonction `dot`).

```
P = np.array([[1,1,1],[1,-1,0],[1,0,-1]])
```

```
def forme_diag(n):
    D = alg.inv(P).dot(A(n)).dot(P)
    return alg.matrix_power(D, n)
```

✎ Bien évidemment, les coefficients de l'ordre de 10^{-14} ou de 10^{-29} doivent être tenus pour nuls !
Les coefficients diagonaux de la matrice calculée pour $n = 100$ sont respectivement proches de 0,724 (une fois) et de 0,366 (deux fois) et on calcule par ailleurs $e^2 \approx 7,389056$ et $e^{-1} \approx 0,367879$.

[3.a.] Comme plus haut, on remarque facilement que $J_m^2 = mJ_m$ et on en déduit que

$$A_{n,m} = \frac{1}{n} \cdot J_m + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot I_m = \left(1 + \frac{m-1}{n}\right) \cdot \Pi_m + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot (I_m - \Pi_m)$$

où $\Pi_m = (1/m) \cdot J_m$ est une projection.

[3.b.] Comme plus haut, Π_m et $(I_m - \Pi_m)$ sont deux projections qui vérifient

$$\Pi_m(I_m - \Pi_m) = (I_m - \Pi_m)\Pi_m = O_m.$$

On en déduit que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (\alpha \cdot \Pi_m + \beta \cdot [I_m - \Pi_m])^k = \alpha^k \cdot \Pi_m + \beta^k \cdot (I_m - \Pi_m)$$

et en particulier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_{n,m}^n = \left(1 + \frac{m-1}{n}\right)^n \cdot \Pi_m + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot (I_m - \Pi_m)$$

d'où finalement

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n,m}^n &= e^{m-1} \cdot \Pi_m + e^{-1} \cdot (I_m - \Pi_m) = \frac{e^{m-1}}{m} \cdot J_m + e^{-1} \cdot \left(I_m - \frac{1}{m} \cdot J_m\right) \\ &= e^{-1} \cdot I_m + \frac{e^{m-1} - e^{-1}}{m} \cdot J_m \end{aligned}$$

✎ On peut vérifier numériquement.

```
def Am(m, n):
    q = 1/n
    return (1-q)*np.eye(m)+q*np.ones((m,m))
```

```
m = 4
```

```
for k in range(1, 5):
    n = 10**k
    M = Am(m,n)
    print(alg.matrix_power(M, n))
```

[1.] Écrire une fonction `appliquer(f, M)` dont le premier argument est une application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et le second argument une matrice diagonalisable $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Si la matrice M est égale à

$$P \operatorname{Diag}(a_1, \dots, a_n) P^{-1},$$

alors la fonction doit renvoyer la matrice

$$P \operatorname{Diag}(f(a_1), \dots, f(a_n)) P^{-1}.$$

[2.] Dans cette question, on suppose que

$$f = [x \mapsto x^2] \quad \text{et que} \quad M = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Comparer le résultat de `appliquer(f, M)` et la matrice M^2 .

[3.a.] Écrire une fonction `S(N, M)` dont le premier argument est un entier $N \in \mathbb{N}$ et le second une matrice carrée M , qui renvoie la matrice

$$S_N(M) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} M^{2k+1}.$$

[3.b.] Tester avec la matrice M définie à la question précédente pour $N = 9$.

[3.c.] Comparer avec le résultat de `appliquer(f, M)` pour une fonction f bien choisie.

[4.] Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice diagonalisable.

Soient φ et \mathbf{u} , les endomorphismes canoniquement associés aux matrices

$$M = P \operatorname{Diag}(a_1, \dots, a_n) P^{-1} \quad \text{et} \quad P \operatorname{Diag}(f(a_1), \dots, f(a_n)) P^{-1}.$$

[4.a.] Démontrer que, pour toute valeur propre λ de M ,

$$\mathbf{u}|_{E_\lambda(M)} = f(\lambda) \operatorname{Id}_{E_\lambda(M)}$$

où $E_\lambda(M)$ désigne le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre λ .

[4.b.] On suppose que

$$M = Q \operatorname{Diag}(b_1, \dots, b_n) Q^{-1}.$$

Démontrer que

$$P \operatorname{Diag}(f(a_1), \dots, f(a_n)) P^{-1} = Q \operatorname{Diag}(f(b_1), \dots, f(b_n)) Q^{-1}.$$

[5.a.] Démontrer que les matrices

$$M_k = \begin{pmatrix} 1/k & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_k = \begin{pmatrix} -1/k & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont diagonalisables.

[5.b.] Soit $f = [x \mapsto |x|]$. Comparer $f(M_k)$ et $f(N_k)$.

[1.] La fonction `eig` du module `numpy.linalg` nous donne d'une part la liste des valeurs propres et d'autre part une matrice de vecteurs propres si bien que, si la matrice M est diagonalisable, on peut la diagonaliser sans peine.

```
M = 0.1*np.array([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])
spectre, P = alg.eig(M)
diag = np.diag(spectre)
```

☛ Pour vérifier ce calcul, il ne faut pas être naïf! L'exécution de la commande

```
print(P.dot(diag).dot(alg.inv(P))==M)
```

renvoie une matrice dont tous les coefficients sont égaux à False!

Les erreurs d'arrondi sont en cause, bien sûr. On contourne le problème en calculant la norme de la différence. On rappelle que la norme euclidienne canonique (ou **norme de Frobenius**) pour une matrice à coefficients réels est définie par $\sqrt{\text{tr } M^T \cdot M}$.

```
erreur = P.dot(diag).dot(alg.inv(P)) - M
print(np.sqrt(np.trace(erreur.T.dot(erreur))))
```

Il n'est pas mauvais de savoir que `alg.norm(erreur)` donne le même résultat avec moins d'efforts.

↳ Pour une matrice à coefficients complexes, il vaut mieux calculer la norme produit avec `abs(M).max()`.

• En supposant que la fonction `f` prise comme second argument s'applique à un tableau numpy, on peut donner un code très simple.

```
def appliquer(f, M):
    spectre, P = alg.eig(M)
    diag = np.diag(f(spectre))
    return P.dot(diag).dot(alg.inv(P))
```

[2.]

```
fM = appliquer(lambda x: x**2, M)
M2 = M.dot(M) # plus rapide que alg.matrix_power(M, 2)
```

Comme on s'y attend, la matrice obtenue est égale à la matrice M^2 aux erreurs d'arrondi près (la norme de Frobenius de la différence est de l'ordre de 10^{-15}).

[3.a.] Pour limiter au minimum les calculs matriciels, il faut remarquer que le premier terme de la somme ($k = 0$) est égal à M et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{(-1)^{k+1}}{(2[k+1]+1)!} M^{2(k+1)+1} = \frac{-1}{(2k+2)(2k+3)} M^2 \cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} M^{2k+1}.$$

Il s'agit donc de calculer la somme

$$\sum_{k=0}^N u_k = u_0 + \sum_{k=0}^{N-1} u_{k+1} \quad \text{où} \quad u_{k+1} = \frac{-1}{(2k+2)(2k+3)} M^2 \cdot u_k.$$

• Le code Python s'en déduit facilement, même s'il faut faire attention à bien détacher la variable locale `U` de l'argument `M`.

Le produit matriciel $I_n \cdot M$ crée une nouvelle matrice, on aurait pu aussi bien procéder à une copie avec l'instruction `U = copy.deepcopy(M)`.

```
def S(N, M):
    U, M2 = np.eye(len(M)).dot(M), M.dot(M) # copy.deepcopy(M), M.dot(M)
    somme = U
    for k in range(N):
        U = -U.dot(M2)/((2*k+2)*(2*k+3))
        somme += U
    return somme
```

[3.b.] On obtient une matrice... Il est intéressant de constater qu'on obtient la même matrice (aux erreurs d'arrondi près) pour $N = 10$, $N = 11$, $N = 12$...

[3.c.] Normalement, on a reconnu le développement limité de la fonction `sin`.

En "appliquant" la fonction `sin` à la matrice `M`, on trouve en effet une matrice très proche de la matrice calculée à la question précédente.

```
A = S(9, M)
B = appliquer(np.sin, M)
print(alg.norm(A-B))
```

La norme calculée est de l'ordre de 10^{-16} , on peut donc considérer que les deux matrices sont bien égales.

[4. a.] Par définition, un vecteur x appartient au sous-espace propre $E_\lambda(M)$ si, et seulement si, $\varphi(x) = \lambda x$. Il s'agit de vérifier que, pour un tel vecteur x , on a $u(x) = f(\lambda) \cdot x$.

☞ Si F est un sous-espace stable par un endomorphisme $u \in L(E)$, la notation u_F désigne l'endomorphisme de F induit par restriction de u , c'est-à-dire l'application linéaire de F dans F définie par

$$\forall x \in F, \quad u_F(x) = u(x).$$

Si le sous-espace F n'est pas stable par u (si par exemple, comme ici, on n'a pas encore cherché à vérifier si F était stable par u), alors la notation $u|_F$ désigne l'application linéaire de F dans E définie par

$$\forall x \in F, \quad u|_F(x) = u(x).$$

La seule différence entre ces deux applications est donc l'espace d'arrivée; la première application linéaire est un endomorphisme : $u_F \in L(F)$ (endomorphisme de F) mais pas l'autre : $u|_F \in L(E, F)$.

☛ Comme la matrice P est inversible, c'est une matrice de passage : on notera $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base de E telle que P soit la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B}_{can} à la base \mathcal{B} .

$$P = \mathfrak{Mat}(\mathcal{B}_{\text{can}} \rightarrow \mathcal{B}) \quad P^{-1} = \mathfrak{Mat}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_{\text{can}})$$

Par hypothèse, la matrice M représente l'endomorphisme φ dans la base canonique de \mathbb{R}^n et, d'après la formule du changement de base, la matrice $P^{-1}MP$ représente l'endomorphisme φ dans la base \mathcal{B} .

$$M = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\varphi) \quad P^{-1}MP = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

☛ Par hypothèse, la matrice $P^{-1}MP = \text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ est diagonale, donc les vecteurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ de la base \mathcal{B} (= les vecteurs représentés dans la base canonique par les colonnes de la matrice de passage P) sont des vecteurs propres de φ et, plus précisément,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \varphi(\varepsilon_k) = a_k \cdot \varepsilon_k.$$

Le sous-espace propre $E_\lambda(M)$ est donc engendré par les vecteurs ε_k tels que $a_k = \lambda$: si $x \in E_\lambda(M)$, alors il existe des scalaires $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \varepsilon_k = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n : \\ a_k = \lambda}} x_k \cdot \varepsilon_k.$$

☛ Par définition de u , la base \mathcal{B} est aussi une base de vecteurs propres pour u :

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad u(\varepsilon_k) = f(a_k) \cdot \varepsilon_k$$

et par conséquent

$$u(x) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n : \\ a_k = \lambda}} x_k \cdot u(\varepsilon_k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n : \\ a_k = \lambda}} x_k f(a_k) \cdot \varepsilon_k = f(\lambda) \sum_{\substack{1 \leq k \leq n : \\ a_k = \lambda}} x_k \cdot \varepsilon_k = f(\lambda) \cdot x.$$

[4. b.] On suppose cette fois qu'il existe une autre base $\mathcal{C} = (\eta_k)_{1 \leq k \leq n}$ constituée de vecteurs propres pour φ :

$$Q = \mathfrak{Mat}(\mathcal{B}_{\text{can}} \rightarrow \mathcal{C}) \quad \text{Diag}(b_1, \dots, b_n) = Q^{-1}MQ = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi).$$

On a donc

$$\text{Diag}(b_1, \dots, b_n) = Q^{-1}(P \times \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \times P^{-1})Q = (P^{-1}Q)^{-1} \text{Diag}(a_1, \dots, a_n)(P^{-1}Q). \quad (*)$$

☛ Les deux familles $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ représentent les valeurs propres de φ comptées avec multiplicité, elles se déduisent donc l'une de l'autre par une permutation : il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad b_k = a_{\sigma(k)}.$$

• Comme le spectre de φ est un ensemble fini de cardinal inférieur à n , il existe un polynôme $L \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad L(a_k) = f(a_k). \quad (\dagger)$$

• En général, la théorie des polynômes interpolateurs de Lagrange impose de choisir des abscisses deux à deux distinctes.

Ici, on sait que : si $a_k = a_\ell$, alors $f(a_k) = f(a_\ell)$ et cette contrainte fait qu'on n'a pas besoin de supposer que les a_k soient deux à deux distincts.

Par conséquent,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad f(b_k) = f(a_{\sigma(k)}) = L(a_{\sigma(k)}) = L(b_k). \quad (\ddagger)$$

On déduit alors de (\star) que

$$L(\text{Diag}(b_1, \dots, b_n)) = (P^{-1}Q)^{-1} \times L(\text{Diag}(a_1, \dots, a_n)) \times (P^{-1}Q).$$

• La formule de changement de base $[A \mapsto R^{-1}AR]$ est un morphisme d'algèbres, donc

$$L(R^{-1}AR) = R^{-1}L(A)R,$$

quel que soit le polynôme L .

• Comme L est un polynôme, d'après (\ddagger) ,

$$L(\text{Diag}(a_1, \dots, a_n)) = \text{Diag}(L(a_1), \dots, L(a_n)) = \text{Diag}(f(a_1), \dots, f(a_n))$$

et, de même, d'après (\ddagger) ,

$$L(\text{Diag}(b_1, \dots, b_n)) = \text{Diag}(f(b_1), \dots, f(b_n)).$$

On a donc démontré que

$$Q \text{Diag}(f(b_1), \dots, f(b_n))Q^{-1} = P \text{Diag}(f(a_1), \dots, f(a_n))P^{-1}.$$

• **Variante** (plus courte, pas nécessairement plus simple)

Notons v , l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $Q \text{Diag}(f(b_1), \dots, f(b_n))Q^{-1}$. D'après la question précédente,

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(M), \quad v|_{E_\lambda(M)} = f(\lambda) \text{Id}_{E_\lambda(M)} = u|_{E_\lambda(M)}.$$

Comme M est supposée diagonalisable,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(M)} E_\lambda(M)$$

et on vient de constater que les endomorphismes u et v coïncident sur chacun des sous-espaces propres. Par conséquent, $u = v$ et

$$Q \text{Diag}(f(b_1), \dots, f(b_n))Q^{-1} = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(v) = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(u) = P \text{Diag}(f(a_1), \dots, f(a_n))P^{-1}.$$

• Cette propriété rend légitime la notation $f(M)$ pour désigner la matrice $P \text{Diag}(f(a_1), \dots, f(a_n))P^{-1}$ puisqu'on obtient la même matrice, quelle que soit la manière de diagonaliser la matrice M .

• Le cours se borne à étudier les matrices $f(M)$ quand f est une application polynomiale. On n'est donc pas obligé de se restreindre aux applications polynomiales.

Cela dit, comme le spectre d'une matrice est un ensemble fini et que toute application d'une partie finie de \mathbb{C} à valeurs dans \mathbb{C} est en fait une application polynomiale (Théorie de l'interpolation de Lagrange), ce n'est pas une si grande surprise.

[5.a.] Les matrices M_k et N_k sont triangulaires, donc leurs valeurs propres sont leurs coefficients diagonaux. Ce sont donc des matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui ont deux valeurs propres distinctes, elles sont diagonalisables.

[5.b.] Si $P^{-1}M_kP$ et $P^{-1}N_kP$ sont diagonales (les matrices M_k et N_k sont alors des **matrices co-diagonalisables**), alors elles commutent et on en déduit facilement que M_k et N_k commutent.

↳ *La réciproque est vraie, mais moins évidente.*

Mais

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad M_k N_k = \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} -1 & -k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N_k M_k$$

donc il n'existe pas de matrice inversible P telle que $P^{-1}M_kP$ et $P^{-1}N_kP$ soient toutes les deux diagonales.

• Les sous-espaces propres de M_k et de N_k sont à peu près aussi évidents que leurs spectres. Avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$P^{-1}M_kP = \text{Diag}(1/k, 0) \quad \text{et} \quad Q^{-1}N_kQ = \text{Diag}(-1/k, 0).$$

↳ *Ce n'est pas prudent d'omettre l'indice k sur les matrices de passage, mais c'est bien pratique.*

• Par conséquent,

$$P^{-1}f(M_k)P = \text{Diag}(1/k, 0) = P^{-1}M_kP \quad \text{et} \quad Q^{-1}f(N_k)Q = \text{Diag}(1/k, 0) = -Q^{-1}N_kQ.$$

On en déduit que

$$\forall k \geq 2, \quad f(M_k) = M_k \quad \text{et que} \quad f(N_k) = -N_k \neq M_k.$$

↳ *On voit sur cet exemple que deux matrices diagonalisables peuvent avoir des images par f différentes alors que leurs spectres ont même image par f .*

↳ *On peut également vérifier que : si M est semblable à $\text{Diag}(a, b)$ avec $a < 0 < b$, alors $f(M) \neq M$ et $f(M) \neq -M$.*

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. On considère la suite de matrices $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $A_0 = A$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A_{k+1} = \frac{1}{2}(A_k + (A_k^{-1})^\top).$$

[1.] Dans cette question, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

[1.a.] On pose $M = A^\top \cdot A$. Diagonaliser M (avec python).

[1.b.] Trouver une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = M$.

[1.c.] Calculer A_5 et A_6 . Quelle conjecture peut-on faire ?

[2.] Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

[2.a.] Démontrer qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A^\top \cdot A$.

[2.b.] En déduire qu'il existe un couple $(\Omega, S) \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que

$$A = \Omega \cdot S.$$

[2.c.] Étudier la convergence de la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie en préambule.

Il est difficile de lire une matrice calculée par numpy, car tous les coefficients sont des flottants. Pour comparer deux matrices, il vaut donc mieux déléguer le travail !

La fonction suivante renvoie True lorsque les coefficients des deux matrices sont égaux aux erreurs d'arrondi près.

```
def test_egalite(A, B):
    return np.max(np.abs(A-B))<1e-6
```

[1.a.]

```
A = np.matrix([[1,2,3],[-1,-1,1],[2,0,-4]])
M = np.transpose(A).dot(A)
print("La matrice A est-elle inversible ?")
print(np.abs(alg.det(A))>1e-6)
```

La matrice M est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable et comme A est inversible, la matrice M est définie positive :

$$\forall X \neq 0, \quad X^\top \cdot M \cdot X = (AX)^\top \cdot (AX) = \|AX\|^2 > 0$$

puisque $AX \neq 0$.

La fonction `alg.eig` nous renvoie d'une part le spectre et d'autre part la matrice de passage vers une base de vecteurs propres. On peut vérifier que cette matrice de passage est orthogonale : on dispose donc d'une base orthonormée de vecteurs propres.

```
SpM, P = alg.eig(M)
PtP = np.dot(P, np.transpose(P))
print("La matrice P est-elle orthogonale ?")
print(test_egalite(PtP, np.eye(3)))
```

[1.b.] On connaît une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que

$$M = P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^\top$$

et les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont strictement positives.

En posant

$$S = P \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^{-1} = P \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^\top,$$

on définit une matrice symétrique définie positive (ses valeurs propres $\sqrt{\lambda_k}$ sont toutes strictement positives) telle que

$$S^2 = P \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} = M.$$

[1.c.] Les matrices A_5 et A_6 sont quasiment égales (les coefficients diffèrent d'environ 10^{-5}) et on peut conjecturer que, aux erreurs d'arrondi près, ce sont des matrices orthogonales.

```
Omega = suite(A, 6)
Ot0 = np.dot(Omega, np.transpose(Omega))
print("La matrice Omega est-elle orthogonale ?")
print(test_egalite(Ot0, np.eye(3)))
```

Avec un peu de flair, on peut conjecturer qu'on a explicité la factorisation de A .

```
OS = Omega.dot(S)
print("Le produit Omega*S est-il égal à A ?")
print(test_egalite(A, Omega.dot(S)))
```

[2.a.] Déjà fait!

[2.b.] Comme $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, cette matrice est inversible. On peut donc poser $\Omega = A.S^{-1}$. Comme S est symétrique et inversible, son inverse est symétrique. On en déduit que

$$\Omega^\top . \Omega = S^{-1} . A^\top . A . S^{-1} = S^{-1} . S^2 . S^{-1} = I_n.$$

Donc Ω est une matrice orthogonale.

[2.c.] Supposons que la matrice A_k soit inversible. Il existe donc une matrice orthogonale Ω_k et une matrice symétrique définie positive S_k telles que $A_k = \Omega_k S_k$. Par conséquent,

$$A_{k+1} = \frac{1}{2} (\Omega_k S_k + (S_k^{-1} \Omega_k^{-1})^\top) = \Omega_k \cdot \left(\frac{S_k + S_k^{-1}}{2} \right).$$

Il existe (Théorème spectral) une matrice orthogonale P_k telle que

$$P_k^{-1} S_k P_k = \text{Diag}(\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,n})$$

et par conséquent

$$P_k^{-1} \frac{S_k + S_k^{-1}}{2} P_k = \text{Diag} \left(\frac{\lambda_{k,1} + \lambda_{k,1}^{-1}}{2}, \dots, \frac{\lambda_{k,n} + \lambda_{k,n}^{-1}}{2} \right).$$

Il apparaît ainsi que les valeurs propres de $(S_k + S_k^{-1})/2$ sont, comme celles de S , strictement positives et donc que $(S_k + S_k^{-1})/2$ est définie positive.

• Si on part de la factorisation $A = \Omega S$, alors en posant $S_0 = S$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad S_{k+1} = \frac{S_k + S_k^{-1}}{2} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),$$

on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A_k = \Omega . S_k.$$

De plus, si P est une matrice orthogonale telle que $P^{-1} S P = \text{Diag}(u_{0,1}, \dots, u_{0,n})$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P^{-1} S_k P = \text{Diag}(u_{k,1}, \dots, u_{k,n})$$

où

$$\forall 1 \leq i \leq n, \forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1,i} = f(u_{k,i}) \quad \text{avec} \quad \forall x > 0, \quad f(x) = \frac{x + x^{-1}}{2}.$$

L'étude des variations de cette fonction f montre facilement que, pour tout $1 \leq i \leq n$, la suite $(u_{k,i})_{k \in \mathbb{N}}$ converge (assez rapidement) vers 1.

On en déduit que la suite des matrices $P^{-1} S_k P$ converge vers I_n . Donc la suite des matrices S_k converge vers $P I_n P^{-1} = I_n$ (composition par une application linéaire continue) et la suite des matrices $A_k = \Omega . S_k$ converge vers Ω (idem).

• L'étude théorique faisait reposer l'existence de la décomposition sur la réduction de la matrice $A^\top . A$: il fallait donc déterminer les valeurs propres de cette matrice.

L'algorithme qu'on vient d'étudier (**méthode de Newton**) nous donne une version approchée de cette factorisation avec une précision tout à fait satisfaisante et assez peu de calculs, sans avoir à calculer explicitement le spectre de $A^\top . A$.

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq \ell \leq n, \quad X_\ell = \begin{pmatrix} \sin \frac{\ell\pi}{n+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{\ell n\pi}{n+1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

On note $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice dont les colonnes sont X_1, \dots, X_n . Enfin, pour p et q dans \mathbb{Z} , on pose

$$T_p = \sum_{k=1}^n \cos \frac{pk\pi}{n+1} \quad \text{et} \quad S_{p,q} = \sum_{k=1}^n \sin \frac{pk\pi}{n+1} \sin \frac{qk\pi}{n+1}.$$

- [1.] Calculer T_1 .
- [2.] La matrice A est-elle diagonalisable? Que dire de ses sous-espaces propres?
- [3.] Écrire une fonction $A(n)$ qui renvoie la matrice A de taille n .
- [4.] La fonction suivante renvoie la matrice P de taille n .

```
def P(n):
    M = np.pi*np.ones((n, n), dtype=int)
    for i in range(n):
        M[i,:] *= (i+1)
    for j in range(n):
        M[:,j] *= (j+1)
    return np.sin(M/(n+1))
```

Donner un script qui calcule $P^{-1}AP$.

- [5.] Proposer une conjecture sur le cardinal du spectre de A ainsi qu'une conjecture sur la matrice P .
- [6.] Calculer la somme T_p pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
- [7.] Calculer la somme $S_{p,q}$ pour tout $1 \leq p, q \leq n$.
- [8.] Démontrer les conjectures faites sur le spectre de A et sur la matrice P .

- [1.] Voir plus loin le calcul de T_p .
- [2.] La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.
- [3.] Code sans difficulté.

```
def A(n):
    M = np.zeros((n, n), dtype=int)
    for i in range(1, n):
        M[i,i-1] = 1
        M[i-1,i] = 1
    return M
```

Les pythoniens fanatiques auront vu que la matrice A est la somme de deux matrices qui ressemblent à l'identité ($\text{np.eye}(n)$ – oui, c'est un calembour).

```
def A_var(n):
    J = np.eye(n,k=1,dtype=int)+np.eye(n,k=-1,dtype=int)
    return J
```

- [4.] Le produit matriciel s'appelle `dot` et c'est aussi bien une fonction du module `numpy` qu'une méthode de l'objet matrice.

```
np.dot(A, B)
A.dot(B)
```

En revanche, le calcul de l'inverse s'effectue grâce à une fonction du sous-module `numpy.linalg`.

def conjuguer(n) :

Q = P(n)

return np.round(alg.inv(Q).dot(A(n)).dot(Q)), 2)

• On a choisi d'arrondir le résultat au centième pour qu'il soit plus lisible.

[5.] Après quelques essais, on constate que $P^{-1}AP$ est diagonale, que les valeurs propres de A varient entre -2 et 2 et que A possède n valeurs propres distinctes.

• On a constaté sur les exemples que les colonnes de P étaient des vecteurs propres de A . S'il y a effectivement n valeurs propres deux à deux distinctes, alors les sous-espaces propres sont des droites vectorielles et ces droites sont deux à deux orthogonales. Les colonnes de P sont donc deux à deux orthogonales.

• Il est alors tentant de vérifier si la matrice P est orthogonale en calculant $P.P^T$. Après quelques essais, on devine plutôt que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n.P_n^T = \frac{n+1}{2} \cdot I_n.$$

[6.] Pour alléger l'écriture des calculs, nous allons poser

$$\theta = \frac{\pi}{2(n+1)} \quad \text{et} \quad \omega = \exp \frac{i\pi}{n+1} = \exp(2i\theta)$$

si bien que $\omega^{2(n+1)} = 1$.

• Puisqu'il s'agit d'alléger les calculs (et que l'entier n est fixé), on s'autorise à écrire θ et ω au lieu de θ_n et ω_n .

• Pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$T_p = \sum_{k=1}^n \cos \frac{kp\pi}{n+1} = \Re \sum_{k=1}^n (\omega^p)^k.$$

On reconnaît une somme géométrique de raison ω^p .

• Si p est un multiple de $2(n+1)$, alors $\omega^p = 1$ et $T_p = n$.

• Si p n'est pas un multiple de $2(n+1)$, alors $\omega^p \neq 1$ et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\omega^p)^k &= \omega^p \frac{\omega^{pn} - 1}{\omega^p - 1} = e^{2ip\theta} \frac{e^{inp\theta} - 1}{e^{ip\theta} - 1} = e^{i(n+1)p\theta} \frac{\sin np\theta}{\sin p\theta} \\ &= i^p \frac{\sin np\theta}{\sin p\theta} \end{aligned}$$

puisque $(n+1)\theta = \pi/2$.

Si p est impair, alors la somme est imaginaire pure, donc $T_p = 0$.

Si $p = 2k$ est pair, alors

$$T_{2k} = (-1)^k \frac{\sin 2nk\theta}{\sin 2k\theta}.$$

Mais $2nk\theta + 2k\theta = 2(n+1)k\theta = k\pi$, donc

$$\sin 2nk\theta = \sin(k\pi - 2k\theta) = (-1)^{k+1} \sin 2k\theta$$

et finalement $T_{2k} = -1$.

• On distingue donc trois cas :

— si p est impair, alors $T_p = 0$;

— si p est un multiple de $2(n+1)$, alors $T_p = n$;

— si p est pair sans être un multiple de $2(n+1)$, alors $T_p = -1$.

[7.] Quels que soient p et q dans \mathbb{Z} ,

$$\begin{aligned} S_{p,q} &= \sum_{k=1}^n \sin 2kp\theta \sin 2kq\theta = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\cos 2k(p-q)\theta - \cos 2k(p+q)\theta) \\ &= \frac{T_{p-q} - T_{p+q}}{2}. \end{aligned}$$

• Comme $1 \leq p, q \leq n$, alors $2 \leq p+q \leq 2n$ et $-n < p-q < n$. Par conséquent, l'entier $p+q$ n'est jamais un multiple de $2(n+1)$ et l'entier $p-q$ est un multiple de $2(n+1)$ si, et seulement si, $p = q$.

☞ Les entiers $p - q$ et $p + q$ ont même parité.

☛ Pour $p \neq q$, alors $S_{p,q} = (0-0)/2 = 0$ si $(p-q)$ et $(p+q)$ sont impairs et $S_{p,q} = (-1+1)/2 = 0$ si $(p-q)$ et $(p+q)$ sont pairs.

☛ Pour $p = q$, alors $p + q$ est pair et $S_{p,p} = [n - (-1)]/2 = (n + 1)/2$.

☛ Finalement,

$$\forall 1 \leq p \leq n, \quad S_{p,p} = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq p < q \leq n, \quad S_{p,q} = S_{q,p} = 0.$$

[8.] Les égalités précédentes signifient que, pour le produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, les colonnes X_p de la matrice P sont deux à deux orthogonales :

$$\forall 1 \leq p < q \leq n, \quad \langle X_p | X_q \rangle = X_p^T \cdot X_q = S_{p,q} = 0$$

et que leurs normes sont toutes égales :

$$\forall 1 \leq p \leq n, \quad \|X_p\| = \sqrt{X_p^T \cdot X_p} = \sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Par conséquent,

$$P^T \cdot P = \frac{n+1}{2} \quad \text{ou, si on préfère,} \quad \sqrt{\frac{2}{n+1}} P \in O_n(\mathbb{R}).$$

☛ En linéarisant à nouveau, pour tout $1 \leq \ell \leq n$,

$$AX_\ell = \begin{pmatrix} \sin 4\ell\theta \\ \vdots \\ \sin 2(k-1)\ell\theta + \sin 2(k+1)\ell\theta \\ \vdots \\ \sin 2n\ell\theta = \sin 2(n-1)\ell\theta + \sin 2(n+1)\ell\theta \end{pmatrix} = 2 \cos 2\ell\theta \cdot X_\ell$$

car $\sin 2(n+1)\ell\theta = 0$ pour tout entier ℓ .

On a déjà démontré que $X_\ell \neq 0$ (puisque sa norme n'est pas nulle), donc on a démontré que la colonne X_ℓ est bien un vecteur propre de A associé à la valeur propre $2 \cos 2\ell\theta$.

☛ Ainsi, on a trouvé une base orthogonale $(X_\ell)_{1 \leq \ell \leq n}$ de vecteurs propres et les valeurs propres associées

$$2 \cos \frac{\pi \ell}{n+1} \quad \text{pour } 1 \leq \ell \leq n$$

sont deux à deux distinctes car $0 < 2\ell\theta < \pi$ et \cos est injective sur $[0, \pi]$.

Pour tout entier $n \geq 1$, la matrice A est donc diagonalisable et

$$P^{-1}AP = \text{Diag}\left(2 \cos \frac{\pi}{n+1}, 2 \cos \frac{2\pi}{n+1}, \dots, 2 \cos \frac{n\pi}{n+1}\right).$$

☞ Ici, les vecteurs propres sont parachutés par l'énoncé, mais on peut les trouver avec méthode (et de la culture).

☛ Tout d'abord, le lemme d'Hadamard sur les matrices à diagonale fortement dominante montre que $A - \lambda I_n$ est inversible pour tout nombre complexe λ tel que $|\lambda| > 2$.

☛ Ensuite, comme la matrice A est symétrique réelle, on sait que ses valeurs propres appartiennent au segment $[-2, 2]$, donc chaque valeur propre de A peut s'écrire sous la forme $\lambda = 2 \cos \alpha$ avec $0 \leq \alpha \leq \pi$.

☛ Enfin, on peut remarquer que l'égalité vectoriel $AX = \lambda X$ avec $X = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$ revient à trouver une famille

$$Y = (y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = (0, x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\}$$

telle que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad y_{k-1} + y_{k+1} = \lambda y_k = 2 \cos \alpha y_k.$$

On sait exprimer les familles qui vérifient une telle relation de récurrence linéaire d'ordre deux et on en déduit l'expression des vecteurs propres de A .