
ORAUX BLANCS CCINP – PSI* – JUIN 2026

Thèmes abordés

Exercices à préparer

- 1470 Matrice de rang 1
 - 1496 Endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$
 - 1501 Structure euclidienne sur $\mathbb{R}_2[X]$
 - 1544 Série de fonctions
 - 1547 Série de fonctions (?)
 - 1548 Série de fonctions
 - 1562 Intégration terme à terme
 - 1597 Probabilités
-

Exercices sans préparation

- 1480 Matrices symétriques, polynôme annulateur
 - 1494 Division euclidienne
 - 1514 Similitudes
 - 1521 Applications linéaires continues
 - 1536 Convergence d'une intégrale généralisée
 - 1549 Nombres complexes, série entière
 - 1563 Intégration terme à terme
 - 1588 Probabilités
 - 1595 Probabilités
-

Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $A = X.X^T$.

[1.] Déterminer le rang et le spectre de A .

[2.] Expliciter le polynôme caractéristique de A .

[3.] Démontrer que

$$\det(I_n + X.X^T) = 1 + X^T.X.$$

[3.] La matrice A est diagonalisable. Elle admet 0 comme valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension $(n - 1)$ (Théorème du rang). Elle admet aussi sa trace, égale à $X^T.X$, comme valeur propre, nécessairement associée à un sous-espace propre de dimension 1.

Par conséquent, A est semblable à $\text{Diag}(0, \dots, 0, \text{tr } A)$ et $I_n + A$ est semblable à

$$\text{Diag}(1, \dots, 1, 1 + \text{tr } A).$$

Deux matrices semblables ayant même déterminant, on en déduit que

$$\det(I_n + A) = 1 + \text{tr } A.$$

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 - 5A + 6I_n = 0_n.$$

[**Question de cours**]


Citer deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice carrée à coefficients réels soit diagonalisable.

[**1.**] Démontrer que A est diagonalisable et que $\text{Sp}(A) \subset \{2; 3\}$.

[**2.**] On note D , une matrice diagonale semblable à A et on pose


$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = DM - MD.$$

Démontrer que f est un endomorphisme et que f est diagonalisable.

 On choisira la matrice D la plus simple possible, afin de permettre le calcul matriciel par blocs.

[**1.**] La matrice A admet le polynôme $P = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$ pour polynôme annulateur. Ce polynôme est scindé à racines simples, donc la matrice A est diagonalisable et son spectre est contenu dans l'ensemble $\{2; 3\}$ des racines de ce polynôme annulateur.

[**2.**] Il est clair que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

 On peut supposer que $D = \text{Diag}(2I_r, 3I_{n-r})$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} f(M) &= \begin{pmatrix} 2I_r & 0 \\ 0 & 3I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2I_r & 0 \\ 0 & 3I_{n-r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2M_1 & 2M_2 \\ 3M_3 & 3M_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2M_1 & 3M_2 \\ 2M_3 & 3M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_r & -M_2 \\ M_3 & 0_{n-r} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il apparaît ainsi que f possède trois valeurs propres.

— La valeur propre 0, associée au sous-espace des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_4 \end{pmatrix}.$$

— La valeur propre 1, associée au sous-espace des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

— La valeur propre -1 , associée au sous-espace des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que la somme des dimensions de ces trois sous-espaces est égale à $\dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, donc l'endomorphisme f est diagonalisable.

Pour P et Q dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P'(1)Q'(1) + P''(2)Q''(2).$$

- [1.] Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- [2.] Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire φ .
- [3.] Calculer la distance du polynôme $P_0 = X^2 + X - 2$ au sous-espace $F = \mathbb{R}_1[X]$.

[1.] Il est clair que φ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Si $\varphi(P, P) = 0$, alors $P(0) = P'(1) = P''(2) = 0$. L'égalité $P''(2) = 0$ prouve que $\deg P \leq 1$. L'égalité $P'(1) = 0$ montre alors que P est constant. Et dans ces conditions, l'égalité $P(0) = 0$ prouve que $P = 0$.

[2.] Le monôme 1 est unitaire.

Le monôme X est unitaire aussi et $\varphi(1, X) = 0$, donc la famille $(1, X)$ est orthonormée.

On cherche maintenant un polynôme $P = X^2 + aX + b$ tel que

$$\varphi(1, P) = b = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(X, P) = 2 + a = 0,$$

donc $P = X(X - 2)$. On en déduit que la famille

$$\left(1, X, \frac{X(X-2)}{2}\right)$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire φ .

[3.] On sait que $(1, X)$ est une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_1[X]$, donc le projeté orthogonal de P_0 sur F est le polynôme

$$P_1 = \varphi(P_0, 1) + \varphi(P_0, X)X = -2 + 3X.$$

La distance de P_0 au plan F est donc égale à

$$\|P_0 - P_1\| = \|X^2 - 2X\| = 2.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n en posant

$$\forall x > 0, \quad f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} nx}$$

et on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

- [1.] Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
 [2.] Sur quelle partie de \mathbb{R} la fonction f est-elle continue ?
 [3.] Déterminer les variations de f .
 [4.] Démontrer l'existence d'un réel $x_0 > 0$ tel que

$$\forall x \geq x_0, \forall n \geq 2, \quad f_n(x) \leq 3e^{-nx}.$$

- [5.] Démontrer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

- [1.] On sait que $\operatorname{sh} u \sim e^u/2$ lorsque u tend vers $+\infty$. Par conséquent, pour tout $x > 0$,

$$f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(e^{-x})^n}{2}$$

et comme $0 < e^{-x} < 1$, on en déduit que la série $\sum f_n(x)$ converge absolument (comparaison à une série géométrique).

La fonction f est donc définie sur \mathbb{R}_+^* .

- [2.] Chaque fonction f_n est évidemment continue sur \mathbb{R}_+^* . La fonction sh étant croissante et strictement positive sur $]0, +\infty[$,

$$\forall 0 < a \leq x, \quad 0 \leq f_n(x) \leq f_n(a).$$

Le majorant est indépendant de x et la série $\sum f_n(a)$ est convergente, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

Par conséquent, la somme f est continue sur

$$\bigcup_{a>0} [a, +\infty[=]0, +\infty[.$$

- [3.] Chaque fonction f_n est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$:

$$\forall 0 < x < y, \quad f(y) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{[f_n(y) - f_n(x)]}_{>0} > 0.$$

• La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur un voisinage de $+\infty$, on peut donc passer à la limite terme à terme :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} nx} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} nx} = 0.$$

• Par monotonie, la fonction f admet aussi une limite (finie ou non) au voisinage de 0. En tant que somme de termes positifs,

$$\forall x > 0, \quad f(x) \geq f_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc f tend vers $+\infty$ au voisinage droit de 0.

- [4.] Pour tout $n \geq 2$ et tout $x > 0$,

$$e^{nx} f_n(x) = \frac{2e^{nx}}{e^{nx} - e^{-nx}} = \frac{2}{1 - e^{-2nx}}.$$

Par conséquent,

$$e^{nx} f_n(x) \leq 3 \iff nx \geq \frac{\ln 3}{2}.$$

En posant

$$x_0 = \frac{\ln 3}{4},$$

on a donc

$$\forall x \geq x_0, \forall n \geq 2, \quad 0 \leq f_n(x) \leq 3e^{-nx}.$$

[5.] D'après la majoration précédente,

$$\forall x \geq x_0, \quad 0 \leq f(x) - f_1(x) \leq 3 \sum_{n=2}^{+\infty} (e^{-x})^n = e^{-2x} \frac{3}{1 - e^{-x}}.$$

Le majorant est équivalent à $3e^{-2x}$ lorsque x tend vers $+\infty$ et donc négligeable devant $f_1(x) \sim 2e^{-x}$.

On a ainsi démontré que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} f_1(x) + o(f_1(x))$$

c'est-à-dire

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\operatorname{sh} x} \sim 2e^{-x}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2 x^2)}{n^2 \ln(1 + n)}.$$

On pose également, lorsque cela a bien un sens,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

- [1.] Quel est le domaine de définition de S ?
 [2.] Démontrer que la somme S est continue sur D .
 [3.] Démontrer que la série $\sum u'_n$ converge uniformément sur D .
 ☞ On s'aidera d'une comparaison somme/intégrale.

- [4.] Démontrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur D .

[1.] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le terme général $u_n(x)$ est $\mathcal{O}(1/n^2)$, donc la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente. La somme S est donc définie sur \mathbb{R} .

[2.] Chaque fonction u_n est continue sur $D = \mathbb{R}$.
 Par monotonie,

$$\forall A > 0, \forall x \in [-A, A], \quad 0 \leq u_n(x) \leq u_n(A).$$

Le majorant est indépendant de x et la série $\sum u_n(A)$ converge. Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment $[-A, A]$. Par conséquent, la somme S est continue sur l'union des segments $[-A, A]$, c'est-à-dire sur \mathbb{R} .

[3.] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u'_n(x) = \frac{2x}{(1 + x^2 n^2) \ln(1 + n)}.$$

Il est alors clair que la série dérivée $\sum u'_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

☞ Les fonctions u'_n sont impaires, il suffit donc d'étudier la convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ .

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n est égal à

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2x}{(1 + x^2 k^2) \ln(1 + k)}$$

[4.]

Soient $a > 0$ et $\varphi : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue. On suppose qu'il existe un réel $c \geq 0$ tel que

$$\forall x \in [-a, a], \quad |\varphi(x)| \leq c|x|. \quad (\star)$$

On cherche les fonctions continues f sur $[-a, a]$ telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [-a, a], \quad f(x) - f(x/2) = \varphi(x). \quad (\dagger)$$

[1.] Démontrer que la fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

est définie et continue sur $[-a, a]$.

[2.] Démontrer que S est l'unique solution du problème (\dagger) .

[3.] On suppose que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[-a, a]$. Démontrer que S est dérivable sur $[-a, a]$.

[1.] Par (\star) , la série de fonctions converge normalement sur $[-a, a]$.

[2.] On vérifie facilement que S est solution de (\dagger) .

La différence de deux solutions de (\dagger) vérifie l'équation homogène

$$\forall x \in [-a, a], \quad f(x) - f(x/2) = 0.$$

Une récurrence simple montre alors que

$$\forall x \in [-a, a], \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

et par continuité de f , on en déduit que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [-a, a]$.

[3.] La série dérivée a pour terme général

$$\frac{1}{2^n} \varphi'\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

et comme φ' est bornée sur le segment $[-a, a]$, la série dérivée converge normalement sur $[-a, a]$.

Soit $\alpha > 0$.

[1.] Démontrer que l'intégrale

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$$

est bien définie.

[2.] Démontrer que l'intégrale

$$J_{n,\alpha} = \int_0^1 t^{n\alpha} dt$$

est bien définie et calculer sa valeur.

[3.] On souhaite démontrer l'égalité suivante.

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n\alpha}. \quad (*)$$

[3.a.] Peut-on justifier (*) par un argument de convergence uniforme ?

[3.b.] Peut-on justifier (*) par le théorème d'intégration terme à terme ?

[3.c.] Peut-on justifier (*) par le théorème de convergence dominée ?

[4.] Étudier les cas particuliers $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

Soient X et Y , deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}(X = k, Y = n) = \binom{n}{k} \frac{p(1-p)^n}{2^n}$$

où $p \in [0, 1]$ est un réel fixé. On rappelle la convention habituelle : $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$.

[1.] Calculer la loi de Y .

[2.] Donner le développement en série entière de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$

Démontrer que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

et en déduire la loi de X .

[3.] Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

[1.] Par σ -additivité, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k, Y = n) = pq^n.$$

[2.] Le rayon de convergence de la série entière $\sum x^k$ est égal à 1. On peut donc dériver terme à terme autant de fois qu'on le souhaite sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$.

[3.] Pour $k > n$, la probabilité $\mathbf{P}(X = k, Y = n)$ est nulle, alors $\mathbf{P}(Y = n) > 0$ et

$$\mathbf{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{p(1-p)^n}{2^n} > 0.$$

Donc $\mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = n) > 0$ pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. Les deux variables aléatoires X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Soit E , l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A^3 + 4A^2 + 5A = 0_n.$$

[1.] Une matrice $A \in E$ est-elle diagonalisable ?

[2.] Quelle relation existe-t-il entre les racines d'un polynôme annulateur de A et les valeurs propres de A ?

[3.] Déterminer l'ensemble des matrices appartenant à E .

[3.] Le discriminant de $X^2 + 4X + 5$ est égal à -4 , donc ce polynôme n'a pas de racine réelle. Par conséquent, le spectre de $A \in E$ est contenu dans $\{0\}$. Or toute matrice $A \in E$ est diagonalisable, donc $E = \{0_n\}$.

Soit φ , l'application qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$.

[1.] Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

[2.] Calculer la matrice A de φ relative à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

☞ On pourra calculer A^2 .

[3.] Donner le spectre et les sous-espaces propres de φ .

[4.] La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

[5.] L'endomorphisme φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

[6.] Géométriquement parlant, que représente la matrice A ?

[2.] Sans difficulté : $\varphi(1) = X^2$, $\varphi(X) = X^3$, $\varphi(X^2) = 1$, $\varphi(X^3) = X$. Donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et comme $A^2 = I_4$, la matrice A est diagonalisable.

[3.] Les valeurs propres de A sont ± 1 .

Une base du sous-espace propre associé à $+1$ est $(1 + X^2, X + X^3)$.

Une base du sous-espace propre associé à -1 est $(1 - X^2, X - X^3)$.

[4.] La matrice A est son propre inverse.

[6.] La matrice A est une matrice de symétrie.

Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$M^\top \cdot M = M \cdot M^\top \quad \text{et} \quad M^2 + 2I_2 = 0_2.$$

- [1.] Démontrer que $M^\top \cdot M$ est diagonalisable.
 [2.] Déterminer les valeurs propres de $M^\top \cdot M$.
 [3.] Démontrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} M \in O_2(\mathbb{R}).$$

- [4.] Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé.

- [1.] La matrice $M^\top \cdot M$ est symétrique réelle, donc diagonalisable (Théorème spectral).
 [2.] Comme M et M^\top commutent,

$$(M^\top \cdot M)^2 = (M^2)^\top \cdot M^2 = 4I_2.$$

Le polynôme $X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$ est donc un polynôme annulateur de $M^\top \cdot M$ et les valeurs propres de $M^\top \cdot M$ figurent parmi les racines de ce polynôme.

Or $M^\top \cdot M$ est une matrice symétrique positive :

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top \cdot (M^\top \cdot M) \cdot X = (MX)^\top \cdot (MX) = \|MX\|^2 \geq 0,$$

donc les valeurs propres de $M^\top \cdot M$ sont positives.

Ainsi, $M^\top \cdot M$ possède au plus une valeur propre : 2.

Mais $M^\top \cdot M$ est diagonalisable, donc elle possède au moins une valeur propre.

Finalement, le spectre de $M^\top \cdot M$ est réduit au singleton $\{2\}$.

- [3.] Comme la matrice $M^\top \cdot M$ est diagonalisable et admet 2 pour seule valeur propre, on a donc $M^\top \cdot M = 2I_2$ et la matrice $\frac{1}{\sqrt{2}}M$ est donc une matrice orthogonale.

- [4.] Le groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$ est constitué des matrices de rotations :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et des matrices de réflexion :

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Toutes ces matrices commutent à leur transposée (qui est en fait leur inverse).

Les matrices de réflexion vérifient toutes $S(\theta)^2 = I_2$. Or $M^2 = -2I_2$, donc il est impossible que $\frac{1}{\sqrt{2}}M = S(\theta)$.

La matrice de rotation $R(\theta)$ vérifie

$$R(\theta)^2 = 2 \cos \theta \cdot R(\theta) - I_2.$$

Par conséquent, si $M = \sqrt{2}R(\theta)$, alors

$$M^2 = 4 \cos \theta \cdot R(\theta) - 2I_2.$$

On en déduit que $M^2 = -2I_2$ si, et seulement si, $\cos \theta = 0$, c'est-à-dire $\theta = \pm\pi/2$.

Les matrices vérifiant les hypothèses de l'énoncé sont donc les deux matrices

$$\pm\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, un espace euclidien. On fixe un réel $0 \leq k < 1$ et on considère l'ensemble

$$F = \{f \in L(E) : \forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|\}.$$

- [1.] Déterminer F lorsque $k = 0$.
- [2.] Démontrer que l'application I_E n'appartient pas à F .
- [3.] Démontrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de $L(E)$.
- [4.] Démontrer qu'il existe une norme sur $L(E)$ telle que F soit une boule fermée pour cette norme.

[1.] Pour $k = 0$, l'ensemble F est réduit à l'application nulle.

[2.] Si $\|x\| \leq k\|x\|$ avec $0 \leq k < 1$, alors $x = 0_E$.

[3.] L'endomorphisme kI_E appartient à F , mais pas I_E , donc F n'est pas stable par homothétie : ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

[4.] Pour $f \in L(E)$, on pose

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|.$$

On vérifie que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $L(E)$ et on remarque que l'ensemble F est la boule fermée de centre 0_E et de rayon k pour la norme $\|\cdot\|$.

Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) - 1 \, dx.$$

La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 au voisinage de 0, donc la fonction intégrande est prolongeable en une fonction continue sur l'intervalle fermé $[0, +\infty[$.

Il reste donc à étudier l'ordre de grandeur de

$$f(x) = \exp\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) - 1$$

lorsque x tend vers $+\infty$. D'après le développement limité de \exp au voisinage de 0,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{2x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right). \quad (*)$$

↳ Les trois termes sont de natures différentes : pas de conclusion hâtive !

• La fonction $x \mapsto x^{-3/2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc toute fonction dominée par cette fonction est elle aussi intégrable au voisinage de $+\infty$.

• La fonction g définie par

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et d'après la relation de Chasles,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\pi}^{n\pi} g(x) \, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(x) \, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 u}{k\pi + u} \, du.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall u \in [0, \pi], \quad \frac{\sin^2 u}{k\pi + u} \geq \frac{1}{k\pi} \cdot \sin^2 u$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\pi}^{n\pi} g(x) \, dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 u \, du.$$

La série harmonique est une série divergente de terme général positif, donc

$$\forall C > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{C}{k} = +\infty.$$

↳ Il est nécessaire de savoir calculer

$$\int_0^{\pi} \sin^2 u \, du = \frac{\pi}{2}$$

mais c'est strictement inutile ici : il suffit de remarquer que cette intégrale est strictement positive et qu'elle ne dépend pas de k .

Comme la fonction g est positive, l'intégrale de g sur $[\pi, A]$ est une fonction croissante de A et par conséquent

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^A g(x) \, dx = +\infty.$$

• Soit $A > \pi$. En intégrant par parties,

$$\int_{\pi}^A \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx = \left[\frac{-\cos x}{\sqrt{x}} \right]_{\pi}^A - \int_{\pi}^A \frac{\cos x}{x\sqrt{x}} \, dx.$$

Il est clair que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-\cos A}{\sqrt{A}} = 0$$

et que la fonction

$$x \mapsto \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}$$

est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, l'intégrale généralisée

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

est convergente.

☞ On peut démontrer (et il faut savoir le faire) que l'intégrande n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$. Mais cela n'est pas nécessaire pour conclure.

☛ Dans la décomposition (*), on a fait apparaître une fonction dont l'intégrale est convergente au voisinage de $+\infty$, une fonction dont l'intégrale est divergente au voisinage de $+\infty$ et une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$.

Par conséquent, l'intégrale généralisée de f est divergente.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $z_n = (1 + i)^n$.

[1.] Calculer le module et un argument de z_n .

[2.] Démontrer que $e^x \cos x$ est développable en série entière sur \mathbb{R} .

[3.] En notant

$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n,$$

démontrer que les coefficients a_n sont des entiers.

[1.] Il est assez clair que

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + i)^n = 2^{n/2} e^{in\pi/4}.$$

[2.] Les fonctions \exp et \cos sont développables en série entière et les deux rayons de convergence sont infinis. D'après le Théorème sur le produit de Cauchy, la fonction $x \mapsto \exp(x) \cos(x)$ est développable en série entière et son rayon de convergence est infini.

[3.] Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \cos x = \Re(\exp[(1 + i)x]) = \Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 + i)^n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \Re[(1 + i)^n]$$

↳ L'application $\Re : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire et continue, ce qui permet de calculer terme à terme la partie réelle d'une somme infinie.

Attention ! Pour que \Re soit une application linéaire, il faut considérer \mathbb{C} comme un espace vectoriel (de dimension 2) sur \mathbb{R} .

• Si on applique ce qui précède,

$$a_n = \Re(z_n) = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

On peut en déduire que les a_n sont entiers en discutant sur la parité de n . C'est un peu fastidieux.

• Sinon, la formule du binôme nous donne directement

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Re(i^k)$$

et $\Re(i^k)$ ne prend que trois valeurs : 0 (pour k impair) et ± 1 (pour k pair). Comme les coefficients binomiaux sont entiers, a_n est entier.

Pour $0 < x < 1$, on pose

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}.$$

[1.] Démontrer que f est prolongeable par continuité en 1.

[2.] Soit $g(t) = f(1-t)$. Démontrer que g est développable en série entière en 0. Préciser le rayon de convergence de cette série entière.

[3.] Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

en admettant que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

[1.] Pour $x = 1 - h$, on a $\ln x = \ln(1-h) \sim -h$, donc

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln(1-h)}{-h} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} 1.$$

[2.] Par définition de g ,

$$g(t) = \frac{\ln(1-t)}{-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}.$$

Le rayon de convergence est égal à 1.

On lance un dé à six faces un certain nombre de fois. On note X_i , la valeur du i -ème lancer en supposant que $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $[1, 6]$.

[1.] Déterminer la probabilité de l'évènement $[X_1 \neq X_2]$.

[2.] Quelle est la probabilité pour que

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad X_i = X_1 \quad ?$$

[3.] On pose

$$\forall \omega \in \Omega, \quad N(\omega) = \min\{i \in \mathbb{N} : X_i(\omega) \neq X_1(\omega)\}.$$

Déterminer la loi de N .

[1.] Considérons l'évènement contraire $[X_1 = X_2]$:

$$[X_1 = X_2] = \bigsqcup_{k=1}^6 [X_1 = k] \cap [X_2 = k]$$

donc

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6^2} = \frac{1}{6}.$$

Donc $\mathbf{P}(X_1 \neq X_2) = 5/6$.

[2.] Par convergence décroissante,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} [X_i = X_1]\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = X_1]\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6^{n-1}} = 0.$$

[3.] Pour tout entier $k \geq 2$,

$$[N \geq k] = [X_1 = X_2 = \dots = X_{k-1}]$$

donc

$$\mathbf{P}(N \geq k) = \frac{1}{6^{k-2}}$$

et finalement

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbf{P}(N = k) = \mathbf{P}(N \geq k) - \mathbf{P}(N \geq k+1) = \frac{1}{6^{k-2}} \cdot \frac{5}{6}.$$

• On peut vérifier "expérimentalement" ces résultats.

```
import numpy.random as rd

def N():
    n, X1 = 2, rd.randint(1, 7)
    while rd.randint(1, 7)==X1:
        n += 1
    return n

def distrib_ref(n):
    D = {}
    for i in range(2, n+1):
        D[i] = 5/6**(i-1)
    return D

def repartition_N(nb_essais = 10000):
    D = {}
    for _ in range(nb_essais):
        n = N()
        if n in D:
            D[n] += 1
        else:
            D[n] = 1
    D_ref = distrib_ref(20)
    for i in sorted(D.keys()):
        print(i, D[i], D_ref[i])
```

rms136-1595

Soient X et Y , deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $0 < p < 1$.
On pose

$$Z = \min\{X, Y\}.$$

- [1.] Donner l'espérance et la variance de X .
- [2.] Calculer $\mathbf{P}(X > 2)$.
- [3.] Plus généralement, calculer $\mathbf{P}(X > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- [4.] Calculer $\mathbf{P}(Z > n)$.

[1.] Pour la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, l'espérance est égale à $1/p$ et la variance à q/p^2 .

[2.] La probabilité de l'évènement complémentaire $[X > 2]^c = [X \leq 2] = [X = 1] \sqcup [X = 2]$ est égale à $p + pq$, donc $\mathbf{P}(X > 2) = 1 - p - pq = q(1 - p) = q^2$.

[3.] $\mathbf{P}(X > n) = q^n$ pour tout $n \geq 1$.

[4.] Il est clair que $[Z > n] = [X > n] \cap [Y > n]$. Comme X et Y sont indépendantes et de même loi, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(Z > n) = \mathbf{P}(X > n)^2 = q^{2n}.$$