Lycée Pierre CORNEILLE
ANNÉE SCOLAIRE 2026/2027

MP/MPI ✻

Composition de Mathématiques

Le 9 septembre 2026 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

*Un nombre complexe α est dit **algébrique (sur $\mathbb{Q}$)** lorsqu'il existe un polynôme non nul P à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que*

$$P(\alpha) = 0.$$

*Un nombre complexe qui n'est pas algébrique (sur $\mathbb{Q}$) est dit **transcendant (sur $\mathbb{Q}$)**.*
*Dans la dernière partie de ce problème, on démontre que la somme, la différence et le produit de deux nombres algébriques sont des nombres algébriques. **On pourra admettre ce résultat pour traiter le début du problème.***
On peut déduire de la définition que l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ est une partie dénombrable de $\mathbb{C}$. Sachant que le corps $\mathbb{C}$ lui-même n'est pas dénombrable, on en déduit qu'il existe des nombres transcendants (Cantor, 1874).
Il est plus difficile d'expliciter un nombre transcendant (Liouville, 1844) et encore plus difficile de démontrer qu'un nombre connu est transcendant (Hermite, 1873, pour la transcendance de e et Lindemann, 1882, pour la transcendance de π).

Partie A. Préliminaires

1. Un nombre rationnel est-il transcendant ?

2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, un nombre algébrique.

2. a. Démontrer que $-z_0$ est aussi un nombre algébrique.

2. b. On suppose de plus que $z_0 \neq 0$. Démontrer que $1/z_0$ est aussi un nombre algébrique.

3. Soient α et β, deux nombres réels et $z_0 = \alpha + i\beta$.

3. a. On suppose que z_0 est algébrique. Démontrer que son conjugué $\overline{z_0}$ est algébrique.

3. b. Démontrer que z_0 est transcendant si, et seulement si, α ou β est transcendant.

☞ *On rappelle que la somme et le produit de deux nombres algébriques sont des nombres algébriques.*

4. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, une fonction telle que

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0.$$

Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \qquad f(n) = 0.$$

Partie B. Irrationalité de π (Lambert)

Soit $\alpha > 0$, un nombre réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \cos \alpha x \, dx.$$

5. Justifier l'existence de l'intégrale I_n.

6. Démontrer que

$$\alpha^2 I_n = 2n(2n-1)I_{n-1} - 4n(n-1)I_{n-2}$$

pour tout $n \geqslant 2$.

7. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes P_n et Q_n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et indépendants de α tels que

$$\alpha^{2n+1} I_n = n!\big[P_n(\alpha)\sin\alpha + Q_n(\alpha)\cos\alpha\big]$$

et que

$$\max\big\{\deg P_n, \deg Q_n\big\} < 2n+1.$$

8. On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\pi = a/b$, on pose $\alpha = \pi/2$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad J_n = \frac{a^{2n+1} I_n}{n!}.$$

8. a. Déduire de **[7.]** que $J_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. b. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < J_n < \frac{2a^{2n+1}}{n!}$$

et conclure.

Partie C. Irrationalité de π^2 (Legendre)

On suppose dans cette partie que π^2 est rationnel : il existe donc deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\pi^2 = a/b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions f et G définies par

$$f(x) = \frac{x^n (1-x)^n}{n!}$$

et par

$$G(x) = b^n \Big(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f^{(2k)}(x) \Big)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

9. Démontrer que $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k)}(1)$ sont des entiers pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que $G(0)$ et $G(1)$ sont des entiers.
10. Calculer une expression simple de la dérivée de

$$G'(x) \sin \pi x - \pi G(x) \cos \pi x$$

et en déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \pi \int_0^1 a^n f(x) \sin \pi x \, dx = G(0) + G(1).$$

11. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^1 a^n f(x) \sin \pi x \, dx > 0$$

puis que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 a^n f(x) \sin \pi x \, dx = 0$$

et conclure.
12. Historiquement, la démonstration de l'irrationalité de π par Lambert a-t-elle précédé ou suivi la démonstration de l'irrationalité de π^2 par Legendre ?

Partie D. Transcendance de e

On présente ici une version simplifiée (Hilbert, Hurwitz, Gordan - 1893) de la démonstration d'Hermite. On raisonne à nouveau par l'absurde.

13. On suppose que e est un nombre algébrique. Démontrer qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ et des entiers relatifs $a_0, \ldots, a_m$ tels que

$$a_m e^m + \cdots + a_1 e + a_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_0 \neq 0.$$

Pour un nombre premier p arbitrairement choisi, on pose

$$f(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p (x-2)^p \cdots (x-m)^p}{(p-1)!}$$

ainsi que

$$F(x) = \sum_{k=0}^{mp+p-1} f^{(k)}(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

14. Démontrer que

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x}F(x)\right] = -e^{-x}f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

15. En déduire que

$$\sum_{j=0}^{m} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x)\,dx = -\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{mp+p-1} a_j f^{(i)}(j).$$

16. a. Soient $i \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant j \leqslant m$, deux entiers. Démontrer que $f^{(i)}(j)$ est un entier divisible par p sauf peut-être si $j = 0$ et $i = p-1$.

16. b. Vérifier que

$$f^{(p-1)}(0) = (-1)^p \cdots (-m)^p.$$

En déduire que si le nombre premier p est choisi assez grand, alors l'entier $a_0 f^{(p-1)}(0)$ est premier à p.

17. Démontrer que, si le nombre premier p est assez grand, alors

$$\sum_{j=0}^{m} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x)\,dx \neq 0.$$

18. Démontrer que

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{j=0}^{m} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x)\,dx = 0$$

et conclure.

On trouvera une démonstration de la transcendance de π dans l'excellent livre Galois Theory *de Ian Stewart (chapitre 24 de la cinquième édition, 2023).*

Partie E. Approximation rationnelle des nombres algébriques (Liouville)

Soit $x \in \mathbb{R}$, un nombre irrationnel et algébrique. Il existe donc des entiers relatifs $a_0, \ldots, a_n$, non tous nuls, tels que

$$a_n x^n + \cdots + a_0 = 0.$$

On notera ici $f(t) = a_n t^n + \cdots + a_0$ pour tout $t \in \mathbb{C}$.

19. Démontrer que l'ensemble

$$Z_f = \left\{y \in \mathbb{R} \setminus \{x\} \,:\, f(y) = 0\right\}$$

est fini.

20. Soit $y_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $f(y_0) \neq 0$. On considère deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $y_0 = p/q$.
Démontrer que

$$\left|f(y_0)\right| \geqslant \frac{1}{q^n}.$$

21. On conserve les hypothèses de **[20.]** et on suppose de plus que

$$x - 1 < y_0 < x + 1$$

et que

$$|x - y_0| < \inf_{y \in Z_f} |x - y|. \qquad (\star)$$

21. a. Pourquoi l'hypothèse $(\star)$ a-t-elle un sens ?

21. b. Démontrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall\, t \in]x-1, x+1[, \quad \left|f'(t)\right| < M.$$

21. c. Déduire de l'Inégalité des accroissements finis que

$$|y_0 - x| \geqslant \frac{1}{Mq^n}.$$

22. Soient $r > n$, un entier et $K > 0$, un réel. Démontrer qu'il existe un nombre fini de couples d'entiers (p, q) tels que

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| < \frac{K}{q^r}.$$

23. On pose

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k!}.$$

23. a. Justifier l'existence de x.
23. b. Démontrer que x est irrationnel.
23. c. Démontrer que x est transcendant.

Partie F. Le corps des nombres algébriques

*D'après **[2.]**, pour démontrer que l'ensemble des nombres algébriques est un sous-corps de $\mathbb{C}$, il suffit de vérifier que la somme et le produit de deux nombres algébriques sont encore des nombres algébriques.*
*On sait démontrer cette propriété à l'aide du **résultant** de deux polynômes depuis la fin du dix-huitième siècle. La démonstration qui suit est due à Dedekind (1871) et repose sur un argument d'algèbre linéaire.*

Soient α et β, deux nombres algébriques non nuls. Par définition, il existe deux entiers naturels a et b et deux polynômes à coefficients rationnels

$$P = X^a + \sum_{k=1}^{a} p_k X^{a-k} \qquad \text{et} \qquad Q = X^b + \sum_{k=1}^{b} q_k X^{b-k}$$

tels que $P(\alpha) = Q(\beta) = 0$.

Soit $n = ab \in \mathbb{N}$. Les n produits $\alpha^u \beta^v$ pour $u \in [\![0, a[\![$ et $v \in [\![0, b[\![$ sont numérotés $\omega_1, \ldots, \omega_n$ (dans un ordre quelconque).

24. Dans cette question, la lettre ω désigne indifféremment la somme $\alpha + \beta$ ou le produit $\alpha\beta$.
24. a. Démontrer que, pour tout entier $1 \leqslant m \leqslant n$, il existe des nombres rationnels $c_{m,1}, \ldots, c_{m,n}$ tels que

$$\omega\omega_m = \sum_{k=1}^{n} c_{m,k}\omega_k.$$

24. b. En déduire que

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} - \omega & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} - \omega & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

puis que ω est un nombre algébrique.

Solution ❀ Nombres irrationnels, nombres transcendants

Partie A. Préliminaires

1. Un nombre $q \in \mathbb{Q}$ est racine du polynôme

$$P = X - q \in \mathbb{Q}[X].$$

Donc tout nombre rationnel est algébrique (sur $\mathbb{Q}$).

2. a. Comme z_0 est supposé algébrique (sur $\mathbb{Q}$), il existe un polynôme

$$P_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Q}[X]$$

tel que $P_0(z_0) = 0$. Par conséquent,

$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k (-z_0)^k = P_1(-z_0)$$

où

$$P_1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k X^k \in \mathbb{Q}[X].$$

Donc $-z_0$ est aussi un nombre algébrique (sur $\mathbb{Q}$).

2. b. On reprend les notations précédentes.

Comme $z_0 \neq 0$,

$$0 = P_0(z_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k = z_0^n \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^{k-n} = z_0^n \sum_{k=0}^{n} a_k \Big(\frac{1}{z_0}\Big)^{n-k}.$$

Comme $z_0^n \neq 0$, le nombre complexe $1/z_0$ est ainsi une racine du polynôme

$$P_2 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} \in \mathbb{Q}[X]$$

et c'est donc un nombre algébrique (sur $\mathbb{Q}$).

3. a. On continue avec les mêmes notations.

Comme les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ sont réels (en tant que nombres rationnels),

$$0 = \overline{P_0(z_0)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \big(\overline{z_0}\big)^k,$$

donc $P_0(\overline{z_0}) = 0$. Donc $\overline{z_0}$ est aussi un nombre algébrique.

3. b. On raisonne par contraposée, en commençant par remarquer que $1/2$ est algébrique **[1.]** et que i est algébrique (car $P_0 = X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ et $P_0(i) = 0$). Comme le produit de deux nombres algébriques est un nombre algébrique, on en déduit que $i/2$ est algébrique et donc **[2.a.]** que $-i/2$ est algébrique.

❧ Si α et β sont algébriques, alors $i\beta$ est algébrique (produit de deux nombres algébriques), donc $z_0 = \alpha + i\beta$ est algébrique (somme de deux nombres algébriques).

❧ Réciproquement, si z_0 est algébrique, alors $\overline{z_0}$ est algébrique **[3.a.]**, donc $z_0 \pm \overline{z_0}$ sont algébriques (**[2.a.]** et somme de deux nombres algébriques), donc

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \big(z_0 + \overline{z_0}\big) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-i}{2} \cdot \big(z_0 - \overline{z_0}\big) = \frac{z_0 - \overline{z_0}}{2i}$$

sont des nombres algébriques (produit de deux nombres algébriques).

❧ On a ainsi démontré que z_0 est algébrique si, et seulement si, α et β sont algébriques. Autrement dit : z_0 est transcendant si, et seulement si, α ou β est transcendant.

4. Soit $\varepsilon = 1/2 > 0$. Par définition de la convergence, il existe un rang $N \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \qquad \big|f(n) - 0\big| \leqslant \varepsilon = \frac{1}{2}$$

et donc tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \qquad \frac{-1}{2} \leqslant f(n) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Comme la fonction f ne prend que des valeurs entières, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant N, \qquad f(n) = 0.$$

Partie B. Irrationalité de π (Lambert)

5. La fonction

$$x \mapsto (1-x^2)^n \cos \alpha x$$

est évidemment continue sur le segment $[-1,1]$, donc son intégrale existe bien.

6. On intègre par parties une première fois.

$$\begin{aligned}\alpha^2 I_n &= \alpha \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \big[\alpha \cos \alpha x\big]\, dx \\ &= \alpha\Big\{ \big[(1-x^2)^n \sin \alpha x\big]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 2nx(1-x^2)^{n-1} \sin \alpha x\, dx \Big\} \\ &= 2n \int_{-1}^{1} x(1-x^2)^{n-1} \big[\alpha \sin \alpha x\big]\, dx\end{aligned}$$

On intègre une seconde fois par parties.

$$\begin{aligned}\alpha^2 I_n &= 2n\Big\{ \big[-x(1-x^2)^{n-1} \cos \alpha x\big]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \big[(1-x^2)^{n-1} - 2(n-1)x^2(1-x^2)^{n-2}\big] \cos \alpha x\, dx \Big\} \\ &= 2n \int_{-1}^{1} \Big[(1-x^2)^{n-1} + 2(n-1)\big[(1-x^2)-1\big](1-x^2)^{n-2}\Big] \cos \alpha x\, dx \\ &= 2n(2n-1) I_{n-1} - 4n(n-1) I_{n-2}\end{aligned}$$

7. Nous allons procéder par récurrence en exploitant la relation établie en **[6.]**.

❧ Pour $n = 0$, on rappelle que $n! = 1$ et

$$\alpha I_0 = \alpha \int_{-1}^{1} \cos \alpha x\, dx = 2 \sin \alpha.$$

On peut donc choisir $P_0 = 2$ et $Q_0 = 0$.

❧ Pour $n = 1$, on a aussi $n! = 1$ et en intégrant à nouveau deux fois par parties :

$$\alpha^3 I_1 = 2\alpha^2 \int_{-1}^{1} x \sin \alpha x\, dx = -4\alpha \cos \alpha + 4 \sin \alpha.$$

Cette fois, on peut choisir $P_1 = 4$ et $Q_1 = -4X$.

Ainsi, pour $n = 0$ et pour $n = 1$, on a trouvé des polynômes P_n et Q_n à coefficients entiers tels que $\deg P_n < 2n+1$ et $\deg Q_n < 2n+1$.

❧ Soit $n \geqslant 2$, un entier. On suppose [HR] qu'il existe quatre polynômes P_{n-1}, Q_{n-1}, P_{n-2} et Q_{n-2}, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, tels que

$$\alpha^k I_k = k!\big[P_k(\alpha) \sin \alpha + Q_k(\alpha) \cos \alpha\big], \quad \deg P_k < 2k+1 \qquad \text{et} \qquad \deg Q_k < 2k+1$$

pour $k = n-1$ et pour $k = n-2$.

D'après la relation de récurrence de **[6.]**,

$$\begin{aligned}\alpha^{2n+1} I_n &= \alpha^{2n-1}(\alpha^2 I_n) = \alpha^{2n-1}\big[2n(2n-1) I_{n-1} - 4n(n-1) I_{n-2}\big] \\ &= 2n(2n-1)(n-1)!\big[P_{n-1}(\alpha) \sin \alpha + Q_{n-1}(\alpha) \cos \alpha\big] - 4n(n-1)\alpha^2 (n-2)!\big[P_{n-2}(\alpha) \sin \alpha + Q_{n-2}(\alpha) \cos \alpha\big] \\ &= 2(2n-1)n!\big[P_{n-1}(\alpha) \sin \alpha + Q_{n-1}(\alpha) \cos \alpha\big] - 4\alpha^2 n!\big[P_{n-2}(\alpha) \sin \alpha + Q_{n-2}(\alpha) \cos \alpha\big] \\ &= n!\big[\big(2(2n-1)P_{n-1}(\alpha) - 4\alpha^2 P_{n-2}(\alpha)\big) \sin \alpha + \big(2(2n-1)Q_{n-1}(\alpha) - 4\alpha^2 Q_{n-2}(\alpha)\big) \cos \alpha\big].\end{aligned}$$

D'après [HR], les coefficients des polynômes

$$P_n = 2(2n-1)P_{n-1} - 4X^2 P_{n-2} \qquad \text{et} \qquad Q_n = 2(2n-1)Q_{n-1} - 4X^2 Q_{n-2}$$

sont des entiers relatifs et leurs degrés sont strictement inférieurs à

$$\max\big\{2(n-1)+1;\ 2+2(n-2)+1\big\} = 2n-1 < 2n+1.$$

Le résultat est ainsi démontré par récurrence.

> *On peut vérifier facilement que les degrés de P_n et de Q_n sont tous les deux inférieurs ou égaux à n pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est sensiblement plus précis que ce que demande l'énoncé mais une telle précision n'est pas utile pour la suite de la démonstration.*

8. a. D'après **[7.]** avec $\alpha = \pi/2$,

$$\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2n+1}\frac{I_n}{n!} = P_n(\pi/2)\sin\pi/2 + Q_n(\pi/2)\cos\pi/2 = P_n(\pi/2).$$

Par définition de a et b,

$$\frac{a^{2n+1}}{(2b)^{2n+1}}\frac{I_n}{n!} = P_n\Big(\frac{a}{2b}\Big).$$

Comme $\deg P_n < 2n+1$, le polynôme P_n admet une expression développée de la forme

$$P_n = u_0 + u_1X + \cdots + u_{2n}X^{2n}$$

(où les coefficients u_k sont des entiers relatifs) et par conséquent

$$\frac{a^{2n+1}I_n}{n!} = (2b)^{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} u_k\Big(\frac{a}{2b}\Big)^k = \sum_{k=0}^{2n} u_k a^k (2b)^{2n+1-k} \in \mathbb{Z}$$

puisque les u_k sont des entiers, que $2b$ est un entier et que les exposants $(2n+1-k)$ sont tous positifs.

8. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n = \frac{a^{2n+1}}{n!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\cos\frac{\pi x}{2}\,dx.$$

Il est clair que le facteur $a^{2n+1}/n!$ est strictement positif. Par ailleurs, l'intégrande est une expression positive et non identiquement nulle pour $x \in [-1,1]$.

L'intégrande est nulle pour $x = \pm 1$ (les deux facteurs sont nuls) et égale à 1 pour $x = 0$.

En tant que fonction de x, l'intégrande est une fonction continue sur $[-1,1]$. Donc son intégrale est strictement positive (Théorème de nullité de l'intégrale).

Donc $J_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❧ Les deux facteurs de l'intégrande sont positifs et inférieurs à 1 pour $x \in [-1,1]$, donc

$$\forall\, x \in [-1,1], \qquad (1-x^2)^n\cos\frac{\pi x}{2} \leqslant 1.$$

L'égalité n'est vérifiée que pour $x = 0$. Par continuité de l'intégrande, on en déduit à nouveau que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad J_n < \frac{a^{2n+1}}{n!}\int_{-1}^{1} dx = \frac{2a^{2n+1}}{n!}.$$

Si on a compris où on allait, l'inégalité stricte $J_n > 0$ est essentielle mais l'autre inégalité stricte est sans importance.

❧ Par croissances comparées (suite géométrique *vs* factorielle), cet encadrement prouve que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. D'après **[8.a.]**, il s'agit d'une suite d'entiers et on vient de démontrer que tous ces entiers sont strictement positifs, ce qui contredit le lemme fondamental **[4.]**.

Cette contradiction nous permet de conclure : le réel π n'est pas rationnel.

Partie C. Irrationalité de π^2 (Legendre)

9. La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$. De même, la fonction G est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Les dérivées d'une fonction polynomiale sont toutes polynomiales et une combinaison linéaire de fonctions polynomiales est encore polynomiale. Il n'est peut-être pas nécessaire d'entrer aussi loin dans les détails sur sa copie.

❧ Comme $f(1-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit du Théorème de dérivation des fonctions composées que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$$

et en particulier que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(0).$$

Il suffit donc de vérifier que $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ pour pouvoir conclure.

❧ Il est clair que 0 est une racine de f de multiplicité n. Par conséquent,

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0.$$

Il reste à traiter $f^{(k)}(0)$ pour $k \geqslant n$.

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \varepsilon_n(x) = x^n \qquad \text{et} \qquad \eta_n(x) = (1-x)^n = \varepsilon_n(1-x).$$

D'après le cours, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

— si $m < n$, alors
$$\varepsilon_n^{(m)}(x) = \frac{n!}{(n-m)!}\varepsilon_{n-m}(x)$$
— si $m = n$, alors $\varepsilon_n^{(n)}(x) = n!$
— et si $m > n$, alors $\varepsilon_n^{(m)}(x) = 0$.
Par conséquent,
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \varepsilon_n^{(n)}(0) = n! \qquad \text{et} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{n\}, \qquad \varepsilon_n^{(m)}(0) = 0. \tag{†}$$
On démontre par récurrence que
$$\forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \eta_n^{(m)}(x) = (-1)^m \varepsilon_n^{(m)}(1-x).$$

On peut traiter la suite du problème sans introduire ces notations. Mais c'est beaucoup plus compliqué. *La meilleure réponse à une question est parfois une prise d'initiative.*

D'après la formule de Leibniz (dérivation d'un produit), pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f^{(m)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}\varepsilon_n^{(k)}(x)\varepsilon_n^{(m-k)}(1-x).$$
On suppose ici que $m \geqslant n$ et on déduit alors de (†) que
$$f^{(m)}(0) = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}\varepsilon_n^{(k)}(0)\varepsilon_n^{(m-k)}(1) = \frac{1}{n!}\binom{m}{n}(-1)^{m-n}n!\varepsilon_n^{(m-n)}(1) = \binom{m}{n}(-1)^{m-n}\varepsilon_n^{(m-n)}(1).$$
On sait que les coefficients binomiaux sont tous des entiers. La fonction ε_n est un polynôme à coefficients entiers, donc ses dérivées successives sont des polynômes à coefficients entiers et par conséquent elles prennent des valeurs entières en chaque point de $\mathbb{Z}$. En particulier, $\varepsilon_n^{(m-n)}(1) \in \mathbb{Z}$.

On a ainsi démontré que $f^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et aussi, par symétrie, que $f^{(m)}(1) \in \mathbb{Z}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Variante rapide, sur une idée de Milo T. et Clélie A.-V.
D'après la formule du binôme,
$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}(-1)^\ell x^{n+\ell} = \sum_{m=n}^{2n}\binom{n}{m-n}\frac{(-1)^{m-n}}{n!}x^m$$
et d'après la formule de Taylor pour les polynômes,
$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m$$
(cette somme ne comptant qu'un nombre FINI *de termes non nuls).*
L'unicité de l'expression développée d'un polynôme permet d'identifier terme à terme, ce qui donne $f^{(m)}(0) = 0$ *pour* $m < n$ *et pour* $m > 2n$ *et enfin*
$$\forall\, n \leqslant m \leqslant 2n, \qquad f^{(m)}(0) = (-1)^{m-n}\binom{n}{m-n}\frac{m!}{n!}.$$
Comme $m \geqslant n$ *dans cette expression, le quotient* $m!/n!$ *est entier et par conséquent* $f^{(m)}(0)$ *est entier pour tout* $m \in \mathbb{N}$.
Je ne vois pas comment adapter cette méthode, très efficace, aux calculs de dérivées qui vont suivre.

❧ L'hypothèse $\pi^2 = a/b$ nous donne
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad G(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a^{n-k}b^k f^{(2k)}(x).$$
Or a^{n-k} et b^k sont des entiers (les exposants sont positifs) et $f^{(2k)}(x) \in \mathbb{Z}$ pour $x = 0$ et pour $x = 1$. On en déduit que $G(0) \in \mathbb{Z}$ et que $G(1) \in \mathbb{Z}$.

10. On démontre facilement (formule de dérivation d'un produit) que
$$\frac{d}{dx}\big[G'(x)\sin\pi x - \pi G(x)\cos\pi x\big] = \big[G''(x) + \pi^2 G(x)\big]\sin\pi x.$$

Comme f est une fonction polynomiale de degré $2n$, la dérivée $f^{(2n+2)}$ est identiquement nulle. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G''(x) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f^{(2k+2)}(x) = -b^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k+2} f^{(2k)}(x) \qquad \text{(changement d'indice)}$$
$$= -\pi^2 b^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f^{(2k)}(x) = -\pi^2 \big[G(x) - b^n \pi^{2n} f(x)\big].$$

On en déduit finalement que

$$\frac{d}{dx}\big[G'(x)\sin \pi x - \pi G(x)\cos \pi x\big] = \pi^2 b^n \pi^{2n} f(x)\sin \pi x = \pi^2 a^n f(x)\sin \pi x.$$

❧ On en déduit (Théorème fondamental) que

$$\pi^2 \int_0^1 a^n f(x)\sin \pi x \, dx = \big[G'(x)\sin \pi x - \pi G(x)\cos \pi x\big]_0^1$$
$$= \pi\big[G(1) + G(0)\big].$$

11. D'après **[9.]** et **[10.]**,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \pi \int_0^1 a^n f(x)\sin \pi x \, dx = G(0) + G(1) \in \mathbb{Z}.$$

❧ Il est clair que la fonction f est positive sur $[0,1]$ et même strictement positive sur $]0,1[$. On sait que la fonction sin est positive sur $[0,\pi]$ (et même strictement positive sur $]0,\pi[$). Enfin, $a > 0$ et par conséquent, l'intégrande

$$x \mapsto a^n f(x)\sin \pi x$$

est une fonction continue sur $[0,1]$ et strictement positive sur $]0,1[$. Par conséquent (Théorème de nullité de l'intégrale),

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^1 a^n f(x)\sin \pi x \, dx > 0.$$

❧ Enfin,

$$\forall\, x \in [0,1], \qquad a^n x^n (1-x)^n \sin \pi x \leqslant a^n \cdot 1^n \cdot 1^n \cdot 1 = a^n,$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < \int_0^1 a^n f(x)\sin \pi x \, dx \leqslant \frac{a^n}{n!}$$

et par croissances comparées

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 a^n f(x)\sin \pi x \, dx = 0.$$

❧ On conclut comme au **[8.b.]** : il est impossible qu'une suite d'entiers strictement positifs puisse converger vers 0.
On a ainsi démontré par l'absurde que π^2 était irrationnel.

12. Si un nombre x est rationnel, alors son carré x^2 est rationnel aussi. Par contraposée, si π^2 est irrationnel, on en déduit immédiatement que π est lui aussi irrationnel.

Cet argument logique prouve que la démonstration de l'irrationalité de π a nécessairement devancé la démonstration de l'irrationalité de π^2.

Renseignements pris, la démonstration de Lambert date de 1761 et celle de Legendre date de 1794.

Partie D. Transcendance de e

13. Le réel e étant ici supposé algébrique, il existe des rationnels $\beta_0, \ldots, \beta_n$ non tous nuls tels que

$$\beta_0 + \beta_1 e + \cdots + \beta_n e^n = 0.$$

En réduisant les rationnels β_0, β_1, ..., β_n au même dénominateur et en multipliant par le dénominateur commun, cette équation devient

$$b_0 + b_1 e + \cdots + b_n e^n = 0 \qquad (\ddagger)$$

où les $b_0, b_1, \ldots, b_n$ sont des entiers relatifs.

❧ Si $b_0 \neq 0$, alors on peut prendre $m = n$ et $a_k = b_k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Si $b_0 = 0$, alors l'ensemble $\Omega = \{1 \leqslant k \leqslant n \ : \ b_k \neq 0\}$ est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$ (non vide car les b_k ne sont pas tous nuls et que $b_0 = 0$). Cette partie Ω admet donc un plus petit élément (Axiome de bon ordre), que nous noterons k_0. L'équation (‡) devient donc

$$b_{k_0} e^{k_0} + \cdots + b_n e^n = 0 \qquad \text{avec} \qquad b_{k_0} \neq 0.$$

En factorisant par $e^{k_0} \neq 0$ et en posant $a_k = b_{k_0+k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant m = n - k_0$, on obtient alors

$$a_0 + a_1 e + \cdots + a_m e^m = 0$$

avec $a_0 \neq 0$.

❧ Il reste à remarquer que le cas $m = 0$ signifie que $a_0 = 0$, ce qui est impossible. On a donc bien $m \geqslant 1$.

14. Ici, la fonction f est polynomiale de degré $mp + (p-1)$. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ et par conséquent la fonction F est elle aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$. Par linéarité de la dérivation et par changement d'indice,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \sum_{k=0}^{mp+p-1} f^{(k+1)}(x) = \sum_{k=1}^{mp+p} f^{(k)}(x) = \sum_{k=1}^{mp+p-1} f^{(k)}(x)$$

puisque $f^{(mp+p)}$ est la fonction nulle. Autrement dit,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = F(x) - f(x)$$

et par conséquent

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x}F(x)\right] = e^{-x}\left[-F(x) + F'(x)\right] = -e^{-x}f(x).$$

15. D'après la question précédente,

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^j e^{-x} f(x)\,dx = -\left[e^{-x}F(x)\right]_0^j = F(0) - e^{-j}F(j).$$

On en déduit que

$$\sum_{j=0}^{m} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x)\,dx = \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m} a_j e^j\right)}_{=0 \quad \text{[13.]}} F(0) - \left(\sum_{j=0}^{m} a_j F(j)\right) = -\sum_{j=0}^{m} a_j \left(\sum_{k=0}^{mp+p-1} f^{(k)}(j)\right)$$

par définition de F.

16. a. Commençons par traiter le cas $1 \leqslant j \leqslant m$.

Il est clair que j est une racine du polynôme f et que sa multiplicité est égale à p. Par conséquent,

$$f(j) = f'(j) = \cdots = f^{(p-1)}(j) = 0.$$

Pour les dérivées d'ordre $i \geqslant p$, on reprend les notations de **[9.]** : il existe une fonction polynomiale g_j à coefficients <u>entiers</u> telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{(p-1)!}\theta_p(x) \cdot g_j(x) \qquad \text{où} \qquad \theta_p(x) = \varepsilon_p(x-j).$$

D'après le Théorème de dérivation des fonctions composées,

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \theta_p^{(k)}(x) = \varepsilon_p^{(k)}(x-j).$$

D'après **[9.]**,

$$\theta_p^{(p)}(j) = p! \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \neq p, \quad \theta_p^{(k)}(j) = 0.$$

On déduit alors de la formule de Leibniz que

$$\begin{aligned}
\forall\, i \geqslant p, \quad f^{(i)}(j) &= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\theta_p^{(k)}(j)g_j^{(i-k)}(j) \\
&= \frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\cdots + \underbrace{\binom{i}{p}\theta_p^{(p)}(j)g_j^{(i-p)}(j)}_{k=p} + \sum_{k=p+1}^{i}\cdots\right) && \text{(car } i \geqslant p\text{)} \\
&= \frac{p!}{(p-1)!}\binom{i}{p}g_j^{(i-p)}(j) && \text{(les autres termes sont nuls)} \\
&= p \cdot \binom{i}{p}g_j^{(i-p)}(j).
\end{aligned}$$

Le coefficient binomial $\binom{i}{p}$ est un entier. Comme g_j est un polynôme à coefficients entiers, ses dérivées sont des polynômes à coefficients entiers et comme j est un entier, l'expression $g_j^{(i-p)}(j)$ est un entier.

Par conséquent, $f^{(i)}(j)$ est un entier divisible par p, quel que soit $i \in \mathbb{N}$, pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant m$.

❧ On reprend la démonstration précédente avec cette fois $j = 0$.

Comme 0 est racine de f de multiplicité $(p-1)$, il est clair que

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(p-2)}(0) = 0.$$

Comme plus haut, on peut factoriser f :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{(p-1)!} \cdot \varepsilon_{p-1}(x) g_0(x)$$

où g_0 est une fonction polynomiale à coefficients <u>entiers</u> :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad g_0(x) = \sum_{k=0}^{mp} b_k \varepsilon_k(x).$$

Comme précédemment, on déduit de la formule de Leibniz et de **[9.]** que

$$\forall\, i \geqslant p-1, \qquad f^{(i)}(0) = \frac{1}{(p-1)!} \cdot \binom{i}{p-1} \varepsilon_{p-1}^{(p-1)}(0) g_0^{(i-p+1)}(0) = \binom{i}{p-1} g_0^{(i-p+1)}(0)$$

avec $g_0^{(i-p+1)}(0) = (i-p+1)! b_{i-p+1}$ (en convenant de poser $b_k = 0$ pour $k > mp$).

Si $i \geqslant p$, alors

$$f^{(i)}(0) = \binom{i}{p-1} (i-p+1)! b_{i-p+1} = i(i-1)\cdots p \cdot b_{i-p+1}$$

et il est alors clair que $f^{(i)}(0)$ est un entier multiple de p.

En revanche, pour $i = p-1$, le facteur p n'apparaît pas explicitement : $f^{(p-1)}(0) = b_0$ et on ne peut pas conclure.

❧ **Conclusion.** Nous avons démontré que

— si $1 \leqslant j \leqslant m$, alors l'entier $f^{(i)}(j)$ est divisible par p pour tout $i \in \mathbb{N}$;

— si $j = 0$, alors l'entier $f^{(i)}(0)$ est divisible par p pour tout $i \in \mathbb{N}$ sauf peut-être pour $i = p-1$.

À vrai dire, dans le cas $(i, j) = (p-1, 0)$, il reste à préciser la valeur de b_0, ce sera fait à la question suivante.

16. b. Il est clair que

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{(-1)^p (-2)^p \cdots (-m)^p}{(p-1)!} x^{p-1}.$$

Cet équivalent est en fait le développement limité à l'ordre $(p-1)$ au voisinage de $x = 0$ de la fonction f. Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on déduit de la formule de Taylor que

$$f^{(p-1)}(0) = (-1)^p (-2)^p \cdots (-m)^p.$$

> *On aurait pu déduire cette expression des calculs menés à la question précédente.*
> *On voit sur cette expression que si $m \geqslant p$, alors $f^{(p-1)}(0)$ est aussi un entier multiple de p.*

❧ Tout diviseur premier du produit

$$a_0 f^{(p-1)}(0) = \pm a_0 2^p 3^p \cdots m^p$$

est manifestement un diviseur de a_0, ou un diviseur de 2, ou un diviseur de 3, ... ou un diviseur de m. Il n'y a donc qu'un nombre *fini* de diviseurs premiers de $a_0 f^{(p-1)}(0)$. Or l'ensemble des nombres premiers est infini : si on choisit le nombre premier p assez grand, il ne divisera pas $a_0 f^{(p-1)}(0)$ et par conséquent, il sera premier à $a_0 f^{(p-1)}(0)$.

> *Comme p est un nombre premier, alors pour tout $x \in \mathbb{Z}$,*
> — *ou bien p et x sont premiers entre eux ;*
> — *ou bien p divise x.*
> *Pour traiter la question suivante, il suffit de prouver que $a_0 f^{(p-1)}(0)$ n'est pas divisible par p.*

17. On a exprimé cette somme en **[15.]** comme une somme double.

Dans cette somme double,

— tous les termes sont des entiers (puisque les $f^{(i)}(j)$ et les a_j sont tous des entiers relatifs)

— tous les termes en $j \geqslant 1$ et les termes en $j = 0$, sauf peut-être le terme en $i = p-1$, sont divisibles par p.

Comme $mp + p - 1 \geqslant p - 1$, le terme correspondant à $(i, j) = (p - 1, 0)$ figure bien dans cette somme et il est égal à $-a_0 f^{(p-1)}(0)$. D'après la question précédente, si le nombre premier p est choisi "assez grand", alors ce terme n'est pas divisible par p.

Par conséquent, la somme

$$\sum_{j=0}^{m} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x)\,dx$$

est un entier relatif qui n'est pas divisible par p et, en particulier, elle n'est pas nulle!!!

C'est futé, hein ?

18. Pour $0 \leqslant x \leqslant m$,

$$\left|e^{-x} f(x)\right| \leqslant \frac{m^{p-1} \cdot m^p \cdots m^p}{(p-1)!} \leqslant \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}.$$

On déduit alors de l'inégalité triangulaire puis de l'inégalité triangulaire intégrale que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=0}^{m} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x)\,dx\right| &\leqslant \sum_{j=0}^{m} e^j |a_j| \int_0^j \left|e^{-x} f(x)\right| dx \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{m} e^j |a_j| \frac{j \cdot m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \leqslant \frac{e^m m^{(m+1)p}}{(p-1)!} \sum_{j=0}^{m} |a_j|.\end{aligned}$$

Les entiers m, a_0, …, a_m sont fixés et le nombre premier p peut être choisi arbitrairement grand. L'argument habituel de croissances comparées nous assure que le majorant tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$ et, par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{p \to +\infty} \sum_{j=0}^{m} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x)\,dx = 0.$$

❧ La conclusion est toujours la même : une suite d'entiers qui tend vers 0 doit être nulle à partir d'un certain rang **[4.]** alors que cette suite n'est jamais nulle pour p assez grand. Cette contradiction prouve que e est transcendant.

En adaptant la démonstration qu'on vient de donner, on peut démontrer que e^t est transcendant pour tout nombre algébrique non nul t (Théorème de Lindemann-Weierstrass).
On peut alors déduire de la célèbre relation $e^{i\pi} = -1$ que π est transcendant.

Partie E. Approximation rationnelle des nombres algébriques (Liouville)

19. La fonction f est polynomiale, non identiquement nulle, donc elle n'a qu'un nombre fini de racines. Par conséquent, Z_f est un ensemble fini (éventuellement vide).

Le réel $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel et algébrique, puisque c'est une racine de $X^3 - 2$. Mais aucune autre racine de ce polynôme n'est réelle. Il se pourrait donc que Z_f soit vide !

20. Par définition de f et de y_0,

$$f(y_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{p^k}{q^k} = \frac{1}{q^n} \sum_{k=0}^{n} a_k p^k q^{n-k} \neq 0.$$

Le numérateur est un entier (car les a_k sont des entiers et les exposants k et $(n-k)$ sont tous positifs). Comme cet entier n'est pas nul, sa valeur absolue est supérieure à 1 et par conséquent

$$\left|f(y_0)\right| \geqslant \frac{1}{q^n}.$$

21. a. Tout d'abord, l'ensemble Z_f est une partie finie **[19.]** de $\mathbb{R}$.

Si $Z_f \neq \varnothing$, alors l'ensemble $\{|x - y|,\ y \in Z_f\}$ admet un plus petit élément et comme $y \neq x$ pour tout $y \in Z_f$ (par définition de Z_f), ce minimum est strictement positif.

Si $Z_f = \varnothing$, alors la borne inférieure est, par convention, égale à $+\infty$ et dans ce cas, l'hypothèse $(\star)$ est vide : elle n'impose aucune contrainte sur y_0.

La propriété $(\star)$ définit donc un intervalle non vide centré en x (éventuellement égal à $\mathbb{R}$). Comme l'encadrement $x - 1 < y_0 < x + 1$ définit également un intervalle non vide centré en x, on considère ici des rationnels y_0 tels que $f(y_0) \neq 0$ et qui sont "assez proches" de x (tout en étant distincts de x, puisque x est irrationnel).

21. b. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ (polynomiale) et sa dérivée, qui est donc continue, est bornée sur le segment $[x - 1, x + 1]$. Par conséquent, la dérivée f' est aussi bornée sur l'intervalle ouvert $]x - 1, x + 1[$ (qui est contenu dans ce segment).

Le fait que f' soit bornée peut se traduire indifféremment par une inégalité large ou par une inégalité stricte, au choix. Le réel M étant un majorant *(et pas nécessairement une borne supérieure), on peut le remplacer par toute quantité plus grande que lui. C'est pour cette raison qu'il ne coûte rien de supposer que $M > 0$.*

21. c. D'après **[21.b.]** et l'inégalité des accroissements finis,

$$\left|f(y_0) - f(x)\right| \leqslant M\,|y_0 - x|$$

puisque x et y_0 appartiennent tous deux à l'intervalle $]x-1, x+1[$. Par hypothèse, $f(x) = 0$ et $M > 0$, donc

$$|y_0 - x| \geqslant \frac{\left|f(y_0)\right|}{M} \geqslant \frac{1}{Mq^n}$$

d'après **[20.]**.

22. Soit $y_0 \in \mathbb{Q}$. Nous allons distinguer plusieurs cas :
- ou bien $f(y_0) = 0$, c'est-à-dire $y_0 \in Z_f$ (puisque x est irrationnel) ;
- ou bien $f(y_0) \neq 0$ et
  - y_0 vérifie les hypothèses de **[21.]** ;
  - ou $|y_0 - x| \geqslant 1$
  - ou $|y_0 - x| \geqslant \inf_{y \in Z_f} |x - y|$.

Il est commode de poser

$$\alpha = \min\Big\{1,\ \inf_{y \in Z_f} |x - y|\Big\} > 0.$$

En effet, la discussion précédente se réduit alors à :
- ou bien $f(y_0) = 0$ et donc $|y_0 - x| \geqslant \alpha$ puisque $y_0 \in Z_f$;
- ou bien $f(y_0) \neq 0$ et $|y_0 - x| < \alpha$;
- ou bien $f(y_0) \neq 0$ et $|y_0 - x| \geqslant \alpha$

et il ne reste finalement que deux cas à traiter :
- ou bien $f(y_0) \neq 0$ et $|y_0 - x| < \alpha$
- ou bien $|y_0 - x| \geqslant \alpha$.

❧ **Premier cas.** Les hypothèses de **[21.]** sont vérifiées, donc il existe un réel M *qui ne dépend que du réel* x *et du polynôme* f *choisis* tel que, pour tout rationnel $y_0 = p/q$ tel que $f(y_0) \neq 0$ et que $|y_0 - x| < \alpha$,

$$\frac{1}{Mq^n} \leqslant |y_0 - x|.$$

Avec la contrainte supplémentaire

$$|y_0 - x| < \frac{K}{q^r},$$

on obtient

$$q^{r-n} < KM.$$

Or q est un entier naturel et $(r-n) > 0$, donc q^{r-n} tend vers $+\infty$ lorsque q tend vers $+\infty$. Par conséquent, il n'y a qu'un nombre FINI d'entiers q possibles.

❧ **Deuxième cas.** Cette fois, on étudie les rationnels $y_0 = p/q$ tels que

$$\alpha \leqslant |y_0 - x| \leqslant \frac{K}{q^r}.$$

Il faut donc que $q^r \leqslant K/\alpha$ et on en déduit, comme dans le premier cas, qu'il n'y a qu'un nombre FINI d'entiers q possibles.

❧ **Dans les deux cas,** la contrainte

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| \leqslant \frac{K}{q^r}$$

implique

$$|p - qx| \leqslant \frac{K}{q^{r-1}} \leqslant K$$

(puisque $q \in \mathbb{N}^*$ et $r > n \geqslant 2$). Ainsi, $p \in [qx - K, qx + K]$: pour chaque valeur de q, il n'y a qu'un nombre **fini** de valeurs de p possibles. On a démontré précédemment qu'il n'y avait qu'un nombre fini de valeurs de q possibles. Donc il n'existe qu'un nombre fini de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| < \frac{K}{q^r}.$$

Il n'y a donc qu'un nombre fini de rationnels y_0 qui donnent une "assez bonne" approximation d'un nombre algébrique et pour chacun de ces rationnels, il n'y a qu'un nombre fini de représentations p/q convenables (le majorant est une fonction du dénominateur q indépendante du numérateur p).

23. a. Pour tout entier n, on sait que $n! \geqslant n$. Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant 10^{-n!} \leqslant \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

La série géométrique $\sum \alpha^n$ converge pour tout $0 < \alpha < 1$. Par encadrement, la série $\sum 10^{-n!}$ converge elle aussi et le réel x est donc bien défini.

23. b. Raisonnons une fois encore par l'absurde et supposons qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $x = p/q$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la somme partielle de rang m est un nombre "décimal" : il existe $p_m \in \mathbb{N}$ et $q_m = 10^{m!}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{m} 10^{-k!} = \frac{p_m}{q_m}.$$

Comme x est la somme d'une série convergente dont le terme général est *strictement* positif,

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \quad 0 < x - \frac{p_m}{q_m} = \frac{p}{q} - \frac{p_m}{q_m} = \frac{pq_m - p_m q}{q q_m}.$$

Un entier naturel non nul est en fait supérieur à 1, donc

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \qquad x - \frac{p_m}{q_m} \geqslant \frac{1}{q q_m}.$$

Par ailleurs, on sait majorer le reste :

$$x - \frac{p_m}{q_m} = \sum_{k=m+1}^{+\infty} 10^{-k!} \leqslant \sum_{\ell=(m+1)!}^{+\infty} 10^{-\ell} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{q_{m+1}} \leqslant \frac{2}{q_{m+1}}.$$

On en déduit enfin que

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{q} \leqslant q_m x - p_m \leqslant \frac{2q_m}{q_{m+1}}.$$

Le quotient $q_m/q_{m+1} = 10^{-(m+1)!+m!}$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$, donc il ne peut être minoré par $1/q$ (qui est strictement positif et indépendant de m).

Cette contradiction prouve que x est irrationnel.

23. c. Comme x est irrationnel, s'il était algébrique et racine d'un polynôme de degré n, alors **[22.]** pour tout entier $r > n$ et pour $K = 2$ (par exemple), il n'existerait qu'un nombre fini de quotients p/q tels que

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| < \frac{2}{q^r}.$$

Nous allons démontrer que c'est impossible.

Soit $r > n$, un entier. On a démontré précédemment **[23.b.]** que

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \qquad \left|\frac{p_m}{q_m} - x\right| = \sum_{k=m+1}^{+\infty} 10^{-k!} \leqslant \frac{2}{q_{m+1}}.$$

Or

$$\frac{2}{q_{m+1}} < \frac{2}{q_m^r} \iff 10^{r \cdot m!} < 10^{(m+1)!}$$

et par conséquent, aussi grand que soit choisi r, cette inégalité est vérifiée pour tout entier m assez grand.

Il existe donc une infinité de couples $(p_m, q_m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left|\frac{p_m}{q_m} - x\right| < \frac{2}{q_m^r}$$

et cela prouve que x est transcendant.

Partie F. Le corps des nombres algébriques

24. a. Notons $\Omega = \{\alpha^k\beta^\ell,\ 0 \leqslant k < a,\ 0 \leqslant \ell < b\}$ et choisissons $\omega_m \in \Omega$: il existe donc deux entiers $0 \leqslant u < a$ et $0 \leqslant v < b$ tels que $\omega_m = \alpha^u\beta^v$.

❧ Si $\omega = \alpha + \beta$, alors $\omega\omega_m = \alpha^{u+1}\beta^v + \alpha^u\beta^{v+1}$.
Comme $0 \leqslant u < a$, on doit distinguer deux cas : ou bien $1 \leqslant u+1 < a$, ou bien $u+1 = a$.
Si $1 \leqslant u+1 < a$, alors $\alpha^{u+1}\beta^v \in \Omega$.
Si $u+1 = a$, on déduit de $P(\alpha) = 0$ que

$$\alpha^{u+1}\beta^v = \Big(-\sum_{k=1}^{a} p_k\alpha^{a-k}\Big)\beta^v = \sum_{k=1}^{a}(-p_k)\alpha^{a-k}\beta^v \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\Omega)$$

puisque les p_k sont tous des rationnels.
Ainsi, dans tous les cas, $\alpha^{u+1}\beta^v \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\Omega)$.
Par symétrie, on a aussi $\alpha^u\beta^{v+1} \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\Omega)$ et par somme, on en déduit que $\omega\omega_m \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\Omega)$.

❧ Si $\omega = \alpha\beta$, alors $\omega\omega_m = \alpha^{u+1}\beta^{v+1}$.
On doit cette fois distinguer quatre cas.
Si $1 \leqslant u+1 < a$ et $1 \leqslant v+1 < b$, alors $\omega\omega_m \in \Omega$.
Si $u+1 = a$ et $1 \leqslant v+1 < b$, alors $\omega\omega_m \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\Omega)$ (selon la démonstration précédente).
De même, par symétrie, si $1 \leqslant u+1 < a$ et $v+1 = b$.
Enfin, si $u+1 = a$ et $v+1 = b$, alors

$$\omega\omega_m = \alpha^a\beta^b = \Big(-\sum_{k=1}^{a} p_k\alpha^{a-k}\Big)\Big(-\sum_{\ell=1}^{b} q_\ell\beta^{b-\ell}\Big) = \sum_{k=1}^{a}\sum_{\ell=1}^{b}\underbrace{p_kq_\ell}_{\in\mathbb{Q}}\alpha^{a-k}\beta^{b-\ell} \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\Omega)$$

puisque $0 \leqslant a-k < a$ et $0 \leqslant b-\ell < b$ pour chaque terme de cette somme.

❧ Conclusion : on a bien démontré que $\omega\omega_m \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\Omega)$ pour chaque entier $1 \leqslant m \leqslant n$.

24. b. Ni α, ni β ne sont nuls. Par conséquent, les nombres $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sont tous différents de 0. Ainsi, d'après **[24.a.]**, le vecteur $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur non nul du noyau de la matrice

$$\begin{pmatrix} c_{1,1}-\omega & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2}-\omega & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n}-\omega \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le déterminant de cette matrice (carrée !) est nul.

D'après la formule développée du déterminant, ce déterminant est un polynôme en ω dont les coefficients sont rationnels (puisque les $c_{i,j}$ sont rationnels). Le degré de ce polynôme est égal à n (cf cours sur le polynôme caractéristique), donc ce polynôme n'est pas le polynôme nul. On vient ainsi d'expliciter une équation polynomiale non nulle à coefficients rationnels dont ω est une racine. Autrement dit : ω est un nombre algébrique.

> *Cette démonstration se trouve dans l'article de Richard Dedekind : Sur la théorie des nombres entiers algébriques, paru dans le* Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, *2e série, tome 1, no 1 (1877), p. 144-164.*
> *On remarquera qu'elle se transpose très facilement au cas des* ***entiers algébriques****, c'est-à-dire aux nombres algébriques pour lesquels les coefficients p_k et q_ℓ sont des entiers relatifs : dans ce cas, $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ sont aussi des entiers algébriques.*
> *L'article de Dedekind démontre de manière analogue que le corps des nombres algébriques est algébriquement clos : si P est un polynôme non constant dont les coefficients sont des nombres algébriques, alors toutes les racines complexes de P sont des nombres algébriques.*
> *La lecture de cet article est rendue difficile par l'évolution du vocabulaire : Dedekind appelle* nombres rationnels entiers *les éléments de $\mathbb{Z}$ et* nombres entiers *les entiers algébriques.*