

Composition de Mathématiques

Le 30 septembre 2026 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

**Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.**

Problème I

On note E , l'espace vectoriel des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n , le sous-espace vectoriel des applications polynomiales de degré inférieur à n de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On confondra les applications polynomiales et les polynômes.

Partie A. Polynômes de Tchebychev

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer qu'il existe un, et un seul, polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta). \quad (1)$$

Le polynôme T_n est le **n -ième polynôme de Tchebychev (de première espèce)**.

☞ On pourra remarquer que $\cos n\theta$ est la partie réelle de $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$.

2. Vérifier que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x). \quad (2)$$

3. a. Démontrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x). \quad (3)$$

☞ On pourra calculer $T_n(x) + T_{n+2}(x)$.

3. b. Expliciter les polynômes T_0 , T_1 , T_2 et T_3 .

3. c. Calculer le degré et le coefficient dominant de T_n .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall 0 \leq k < n, \quad \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq k \leq n, \quad c_k = \cos \frac{k\pi}{n}.$$

Les réels $\cos \theta_k$, $0 \leq k < n$, sont appelés **points de Tchebychev** et les réels c_k , $0 \leq k \leq n$, sont appelés **points de Gauss-Lobatto**.

4. Dans cette question, on suppose que $n \geq 1$ et on détermine les racines et les extrema du polynôme T_n .

4. a. Démontrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos \theta_k). \quad (4)$$

4. b. Calculer $\|T_n\|_{\infty}$, puis démontrer que

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad |T_n(c_k)| = \|T_n\|_{\infty} \quad \text{et que} \quad \forall 0 \leq k < n, \quad T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k). \quad (5)$$

Partie B. Polynôme de meilleure approximation au sens de Tchebychev

Dans cette partie, la fonction $f \in E$ et l'entier n sont fixés. On note cette fois

$$d_\infty(f, E_n) = \inf_{Q \in E_n} \|f - Q\|_\infty.$$

Un polynôme $P \in E_n$ est un **polynôme de meilleure approximation d'ordre n de f au sens de Tchebychev** lorsque

$$\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n).$$

5. a. Justifier l'existence du réel $d_\infty(f, E_n)$.

5. b. Démontrer que $P \in E_n$ est un polynôme de meilleure approximation d'ordre n de f si, et seulement si,

$$\forall Q \in E_n, \quad \|f - P\|_\infty \leq \|f - Q\|_\infty.$$

6. On pose

$$K = \{Q \in E_n : \|f - Q\|_\infty \leq \|f\|_\infty\}.$$

6. a. Démontrer que K est une partie non vide, fermée et bornée de E_n .

6. b. Démontrer que $d_\infty(f, E_n) = d_\infty(f, K)$ et en déduire qu'il existe $P \in E_n$ tel que

$$\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n).$$

Une fonction $h \in E$ **équioscille sur $k + 1$ points** lorsqu'il existe $k + 1$ réels

$$x_0 < x_1 < \dots < x_k$$

dans le segment $[-1, 1]$ tels que

$$\forall 0 \leq i \leq k, \quad |h(x_i)| = \|h\|_\infty$$

et tels que les extrema soient **alternés** :

$$\forall 0 \leq i < k, \quad h(x_{i+1}) = -h(x_i).$$

7. a. Représenter graphiquement le polynôme de Tchebychev T_3 sur $[-1, 1]$. On précisera les valeurs des abscisses c_0, c_1, c_2 et c_3 .

7. b. Démontrer que le polynôme T_{n+1} équioscille sur $n + 2$ points.

8. Le but de cette question est de trouver une condition suffisante pour qu'un polynôme P soit un polynôme de meilleure approximation d'ordre n de f .

On suppose connu un polynôme $P \in E_n$ tel que $f - P$ équioscille sur $n + 2$ points que l'on note

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$$

et on suppose qu'il existe un polynôme $Q \in E_n$ tel que $\|f - Q\|_\infty < \|f - P\|_\infty$.

8. a. Démontrer que

$$\forall 0 \leq i \leq n + 1, \quad [f(x_i) - P(x_i)][Q(x_i) - P(x_i)] > 0.$$

8. b. En déduire que $P = Q$ et conclure.

9. Dans cette question, on choisit la fonction $f \in E$ définie par

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f(x) = x^{n+1}$$

et on pose $q_n(x) = x^{n+1} - 2^{-n}T_{n+1}(x)$.

9. a. Démontrer que q_n est un polynôme de meilleure approximation d'ordre n de f .

9. b. En déduire que $\|P\|_\infty \geq 2^{-n}\|T_{n+1}\|_\infty$ pour tout polynôme P unitaire de degré $n + 1$.

10. Dans cette question, f est un polynôme de degré $n + 1$. Déterminer un polynôme de meilleure approximation d'ordre n de f .

On peut démontrer l'unicité du polynôme de meilleure approximation, mais il n'existe pas de formule donnant l'expression du polynôme de meilleure approximation d'une fonction qui n'est pas polynomiale. Cependant, il existe un algorithme qui fournit une suite de polynômes qui converge vers le polynôme de meilleure approximation (algorithme de Remez).

Problème II

Pour tout $a \in \mathbb{R}^p$ et tout $r > 0$, on note $B_\infty(a, r)$, la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq p} |x_k|.$$

L'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme définie par

$$\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(A) = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|.$$

Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que la matrice $R \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une **racine carrée** de A lorsque $R^2 = A$. On notera $\text{Rac}(A)$, l'ensemble des racines carrées de A .

Partie A. Étude de la compacité de $\text{Rac}(A)$

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\text{Rac}(A)$ est une partie fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. a. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, calculer S_q^2 où

$$S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix}.$$

2. b. L'ensemble $\text{Rac}(I_n)$ est-il un compact de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$?

2. c. On suppose que $n \geq 2$. Démontrer qu'il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (A, B) \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \times \text{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \|AB\| \geq \|A\| \|B\|. \quad (\star)$$

Partie B. Intérieur de $\text{Rac}(A)$

On note Γ_p , l'ensemble des applications polynomiales de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $P \in \Gamma_p$, on note $Z(P)$, l'ensemble des zéros de P :

$$Z(P) = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p : P(x_1, \dots, x_p) = 0\} = [P(x) = 0] \subset \mathbb{R}^p.$$

On rappelle qu'un point $a \in \mathbb{R}^p$ est un **point intérieur** à $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $B_\infty(a, r) \subset \Omega$ et que l'**intérieur** d'une partie $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ est l'ensemble des points intérieurs à Ω .

3. a. Soient $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$. Écrire la boule $B_\infty(a, r)$ comme un produit de p intervalles.

3. b. Soient F et G , deux parties de $\mathbb{R}^p$. On suppose que l'intérieur de F est vide. Démontrer que l'intérieur de $F \cap G$ est vide.

4. a. Dans cette question, on suppose que $p = 1$. Dans quel cas l'ensemble $Z(P)$ est-il infini ?

4. b. Dans cette question, on suppose que $p = 2$ et on considère

$$P(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 \quad \text{et} \quad Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2.$$

Représenter graphiquement $Z(P)$ et $Z(Q)$ sur une même figure. Commenter.

5. Soit $P \in \Gamma_p$. Il existe donc une famille presque nulle $(a_{i_1, \dots, i_p})_{(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p}$ de nombres réels tels que

$$P(x) = \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p} a_{i_1, \dots, i_p} x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p}$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$.

5. a. Soient $I_1, I_2, \dots, I_p$, des parties infinies de $\mathbb{R}$. Démontrer (par récurrence) que : si la fonction P s'annule sur $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_p$, alors

$$\forall (i_1, i_2, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p, \quad a_{i_1, i_2, \dots, i_p} = 0.$$

5. b. En déduire que si P s'annule sur une partie d'intérieur non vide, alors P est la fonction nulle.

6. Dans cette question, on identifie $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$.

6. a. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter des fonctions polynomiales $P_1, P_2, \dots, P_{n^2}$ de Γ_{n^2} telles que

$$\text{Rac}(A) = \bigcap_{k=1}^{n^2} Z(P_k).$$

6. b. En déduire l'intérieur de $\text{Rac}(A)$.

Solution I ☼ Utilisation des polynômes de Tchebychev en analyse

Partie A. Polynômes de Tchebychev

1. **Unicité** — Si deux polynômes P et Q vérifient la relation (1), alors

$$\forall x \in [-1, 1], \quad P(x) = Q(x)$$

puisque la fonction $\cos$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$. Par conséquent, le polynôme $P - Q$ admet une infinité de racines, ce qui prouve que $P = Q$.

☛ **Existence** — D'après la Formule du binôme,

$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cos^{n-p} \theta \cdot i^p \cdot \sin^p \theta.$$

Pour tout entier p impair, le complexe i^p est un imaginaire pur. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \cos n\theta = \Re(e^{in\theta}) &= \sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ p \text{ pair}}} \binom{n}{p} \cos^{n-p} \theta \cdot i^p \sin^p \theta = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} \theta \cdot (-1)^k \cdot (\sin^2 \theta)^k \quad (p = 2k) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} \theta \cdot (\cos^2 \theta - 1)^k \end{aligned}$$

car $-\sin^2 \theta = \cos^2 \theta - 1$. Le polynôme

$$T_n = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k} \in \mathbb{R}[X]$$

vérifie donc la relation (1).

2. L'application $\cos$ induit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ dont la réciproque est Arccos . Par conséquent,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\text{Arccos } x) = x.$$

On déduit alors de (1) que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_n(x) = T_n(\cos(\text{Arccos } x)) = \cos(n \text{ Arccos } x).$$

|| Cette identité n'a de sens que pour $x \in [-1, 1]$ puisque Arccos n'est définie que sur $[-1, 1]$.

3. a. Soit $x \in [-1, 1]$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos \theta$. D'après les formules d'addition, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$2 \cos(n+1)\theta \cdot \cos \theta = \cos(n+1+\theta) + \cos(n+1-\theta)$$

c'est-à-dire

$$2x \cdot T_{n+1}(x) = T_{n+2}(x) + T_n(x)$$

selon (1).

☛ On peut en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

puisque l'intervalle $[-1, 1]$ est une partie infinie de $\mathbb{R}$.

3. b. En utilisant la formule trouvée au [1.], on trouve $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et en exploitant la relation de récurrence établie à la question précédente, on trouve

$$T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1 \quad \text{et} \quad T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X.$$

3. c. D'après les calculs précédents, le degré de T_n est égal à n pour $0 \leq n \leq 3$. Si le coefficient dominant de T_0 est égal à 1, il est clair que le coefficient dominant de T_n est égal à 2^{n-1} pour $1 \leq n \leq 3$.

☛ Pour $n \in \mathbb{N}$, on note HR_n la propriété suivante : le degré de T_{n+1} est égal à $(n+1)$ et son coefficient dominant est égal à 2^n .

Ainsi qu'on l'a remarqué, la propriété HR_n est vraie pour $n = 0, 1$ et 2 .

Supposons qu'elle soit vérifiée pour un entier $n \geq 1$ ainsi que pour l'entier $(n-1)$. D'après la relation de récurrence du [3.a.],

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

On sait que le degré d'une somme $P + Q$ de deux polynômes est majoré par $\max\{\deg P, \deg Q\}$ et que si $\deg P \neq \deg Q$, alors le degré de $P + Q$ est égal à $\max\{\deg P, \deg Q\}$.

Or $\deg T_n = n$ (par HR_{n-1}) et $\deg(2XT_{n+1}) = n+2$ (par HR_n), donc le degré de T_{n+2} est égal à $n+2$ et le coefficient dominant de T_{n+2} est aussi le coefficient dominant de $2XT_{n+1}$, c'est-à-dire $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ (par HR_n).

• On a donc démontré par récurrence que $\deg T_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que le coefficient dominant de T_n est égal à 2^{n-1} pour tout entier $n \geq 1$ (et égal à 1 pour $n = 0$).

4.a. Comme $n \geq 1$, on peut considérer un entier $0 \leq k < n$. (On est prié de remarquer l'inégalité *stricte*.) Pour $x = \cos \theta_k$, on a $\text{Arccos } x = \theta_k$ puisque $0 < \theta_k < \pi$. (Ce n'est pas vrai pour $k = n \dots$)

D'après (2),

$$T_n(x) = \cos(n \text{Arccos } x) = \cos(n\theta_k) = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Pour $0 \leq k < n$, on a n angles θ_k distincts dans l'intervalle $[0, \pi]$, sur lequel la fonction $\cos$ est strictement décroissante (et donc injective). Par conséquent, les abscisses $\cos \theta_k$, $0 \leq k < n$, sont deux à deux distinctes et on a trouvé n racines distinctes pour le polynôme T_n .

Or $\deg T_n = n$ par [3.c.], donc le polynôme T_n est scindé à racines simples et comme son coefficient dominant est égal à 2^{n-1} d'après [3.c.] (puisque $n \geq 1$), on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad T_n = 2^{n-1} \prod_{0 \leq k < n} (X - \cos \theta_k)^1$$

et en particulier

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos \theta_k).$$

4.b. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on déduit de (2) que

$$|T_n(x)| = |\cos(n \text{Arccos } x)| \leq 1$$

et donc que $\|T_n\|_\infty \leq 1$.

|| Le second membre ne dépendant pas du paramètre $x \in [-1, 1]$, on peut passer à la borne supérieure.

Mais pour $x = 1$, on a $\text{Arccos } x = 0$ et donc $T_n(1) = \cos(n \cdot 0) = 1$ donc $\|T_n\|_\infty = 1$ (puisque la borne supérieure est un majorant).

• Pour $0 \leq k \leq n$, toujours d'après (2),

$$T_n(c_k) = \cos\left(n \cdot \frac{k\pi}{n}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

puisque $0 \leq k\pi/n \leq \pi$.

On en déduit d'une part que

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad |T_n(c_k)| = 1 = \|T_n\|_\infty$$

et d'autre part que

$$\forall 0 \leq k < n, \quad T_n(c_{k+1}) = (-1)^{k+1} = -(-1)^k = -T_n(c_k).$$

Partie B. Polynôme de meilleure approximation au sens de Tchebychev

5.a. Comme E_n n'est pas vide (c'est un sous-espace vectoriel), l'ensemble

$$\{\|f - Q\|_\infty, Q \in E_n\}$$

est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne inférieure réelle. Par conséquent, le réel $d_\infty(f, E_n)$ est bien défini.

5.b. La borne inférieure est un minorant. Par conséquent, si P est un polynôme de meilleure approximation d'ordre n , alors

$$\forall Q \in E_n, \quad \|f - P\|_\infty \leq \|f - Q\|_\infty.$$

Réciproquement, si un polynôme $P \in E_n$ vérifie l'inégalité précédente, du fait que le membre de gauche soit indépendant du paramètre $Q \in E_n$, on peut passer à la borne inférieure par rapport à Q , ce qui donne

$$\|f - P\|_\infty \leq d_\infty(f, E_n).$$

Par ailleurs, comme on l'a déjà dit, la borne inférieure est un minorant et comme $P \in E_n$ (par hypothèse), on a aussi

$$d_\infty(f, E_n) \leq \|f - P\|_\infty$$

et l'égalité est démontrée.

6.a. Le polynôme $Q = 0$ appartient à E_n et $\|f - 0\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, donc l'ensemble K contient le polynôme nul et n'est donc pas vide.

|| En particulier, $d_\infty(f, K) \leq \|f\|_\infty$ (puisque la borne inférieure est un minorant).

• Si $Q \in K$, alors

$$\|Q\|_\infty = \|-Q\|_\infty = \|(f - Q) - f\|_\infty \leq \|f - Q\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty.$$

Le majorant est indépendant de $Q \in K$, cela prouve donc que l'ensemble K est borné.

|| On vient de démontrer que K est contenu dans la boule fermée de centre 0 et de rayon $2\|f\|_\infty$.

• L'application $Q \mapsto \|f - Q\|_\infty$ est lipschitzienne de E_n dans $\mathbb{R}$:

$$\forall Q_1, Q_2 \in E_n, \quad \left| \|f - Q_1\|_\infty - \|f - Q_2\|_\infty \right| \leq \|(f - Q_1) - (f - Q_2)\|_\infty = \|Q_1 - Q_2\|_\infty$$

donc K est l'image réciproque de l'intervalle $]-\infty, \|f\|_\infty]$ par l'application continue $Q \mapsto \|f - Q\|_\infty$, ce qui prouve que K est une partie fermée de E_n .

|| L'ensemble E_n est un sous-espace vectoriel de E dont la dimension est finie. Par conséquent, E_n est une partie fermée de E et K est donc à la fois une partie fermée de E et une partie fermée de E_n .

6.b. Comme $K \subset E_n$, on a

$$\{\|f - Q\|_\infty, Q \in K\} \subset \{\|f - Q\|_\infty, Q \in E_n\}$$

et $d_\infty(f, E_n) \leq d_\infty(f, K)$ par décroissance de l'opérateur inf.

Réciproquement, soit $Q \in E_n$. On distingue deux cas :

— Soit $Q \in E_n \setminus K$. On rappelle que $d_\infty(f, K) \leq \|f\|_\infty$ d'après [6.a.]. Par définition de K ,

$$\|f - Q\|_\infty > \|f\|_\infty \geq d_\infty(f, K).$$

— Soit $Q \in K$. Dans ce cas,

$$\|f - Q\|_\infty \geq d_\infty(f, K)$$

puisque la borne inférieure est un minorant.

On a ainsi démontré que

$$\forall Q \in E_n, \quad \|f - Q\|_\infty \geq d_\infty(f, K).$$

Le second membre est indépendant du paramètre $Q \in E_n$, on peut donc passer à la borne inférieure et en déduire que

$$d_\infty(f, E_n) \geq d_\infty(f, K).$$

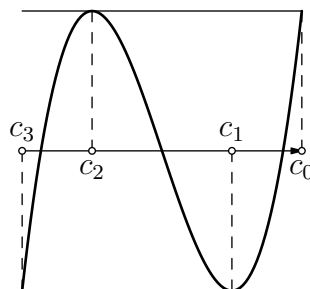
On a ainsi établi l'égalité des deux distances.

• On a démontré [6.a.] que K était une partie non vide, fermée et bornée de E_n . Comme E_n est un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que K est compact.

On a aussi démontré [6.a.] que l'application $Q \mapsto \|f - Q\|_\infty$ était continue. Comme K est un compact non vide, cette application atteint donc un minimum sur K : la borne inférieure $d_\infty(f, K)$ est en fait un minimum. Il existe donc un polynôme $P_0 \in K \subset E_n$ tel que

$$\|f - P_0\|_\infty = \min_{P \in K} \|f - P\|_\infty = d_\infty(f, K) = d_\infty(f, E_n).$$

7.a. Pour $n = 3$, on a $c_0 = 1$, $c_1 = 1/2$, $c_2 = -1/2$ et $c_3 = -1$. D'après [4.b.], la restriction de la fonction T_3 au segment $[-1, 1]$ atteint un extremum aux abscisses c_k , $0 \leq k \leq 3$. Comme les abscisses c_1 et c_2 appartiennent à l'intervalle ouvert $] -1, 1[$, le graphe de T_3 admet une tangente horizontale en ces points.



7.b. Pour $0 \leq k \leq n+1$, on a $0 \leq k\pi/(n+1) \leq \pi$. Or la fonction $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, donc la famille des réels

$$\gamma_k = \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (0 \leq k \leq n+1)$$

est une famille strictement décroissante de $(n+2)$ abscisses comprises entre -1 et 1 .

D'après [4.b.] (appliqué à T_{n+1} au lieu de T_n), le polynôme T_{n+1} équi oscille sur les points

$$x_k = \gamma_{(n+1)-k} = \cos \frac{(n-k+1)\pi}{n+1}$$

pour $0 \leq k \leq n+1$ et donc sur $n+2$ points.

8.a. D'après l'hypothèse d'existence de Q , la distance $\|f - P\|_\infty$ n'est pas nulle, donc

$$|f(x_i) - P(x_i)| = \|f - P\|_\infty > 0$$

par définition des abscisses x_i .

• Supposons que $[f(x_i) - P(x_i)] > 0$. Alors

$$f(x_i) - P(x_i) = \|f - P\|_\infty > \|f - Q\|_\infty \geq f(x_i) - Q(x_i)$$

puisque la borne supérieure est un majorant. On en déduit que

$$Q(x_i) - P(x_i) > 0.$$

• Le même raisonnement mène à une conclusion analogue lorsque $[f(x_i) - P(x_i)] < 0$ (en traduisant cette hypothèse par l'égalité $f(x_i) - P(x_i) = -\|f - P\|_\infty$).

Par conséquent, les deux facteurs sont toujours de même signe et non nuls. Par conséquent, leur produit est strictement positif pour tout i .

8.b. Si la fonction f est polynomiale et que $P = f$, il est clair que P est un polynôme de meilleure approximation de f à l'ordre n (et il est aussi clair que c'est le seul polynôme de meilleure approximation de f à l'ordre n).

On suppose dorénavant que $P \neq f$ et donc que $\|f - P\|_\infty > 0$. On suppose de plus qu'il existe un polynôme $Q \in E_n$ tel que $\|f - Q\|_\infty < \|f - P\|_\infty$.

• L'hypothèse d'équioscillation sur $(n+2)$ points contient le fait que la différence $f - P$, qui est une fonction continue, change de signe $(n+1)$ fois sur l'intervalle $[-1, 1]$. D'après [8.a.], le produit

$$(Q - P)(x_i) \times (Q - P)(x_{i+1})$$

est strictement négatif pour tout $0 \leq i \leq n$. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, le polynôme $Q - P$ admet au moins une racine sur l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

Or $\deg(Q - P) \leq n$ (puisque P et Q sont des polynômes de degré inférieur à n) et le polynôme $(Q - P)$ admet au moins $(n+1)$ racines distinctes (les intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[$ étant deux à deux disjoints). Par conséquent, $(Q - P)$ est le polynôme nul et $Q = P$.

On a ainsi démontré par l'absurde que

$$\forall Q \in E_n, \quad \|f - Q\|_\infty \geq \|f - P\|_\infty$$

et donc que $\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n)$.

9.a. D'après [3.c.], le polynôme $2^{-n}T_{n+1}$ est un polynôme unitaire de degré $(n+1)$. Donc le degré du polynôme q_n est strictement inférieur à $(n+1)$, c'est-à-dire : $q_n \in E_n$.

Par ailleurs, $f - q_n = 2^{-n}T_{n+1}$ et d'après [7.b.], la fonction $f - q_n$ équi oscille sur les $(n+2)$ points $x_0, \dots, x_{n+1}$. D'après [8.], le polynôme q_n est un polynôme de meilleure approximation de f à l'ordre n .

À ce stade du sujet, il est sans doute excessif de prendre du temps pour justifier que : si une fonction g équi oscille sur N points, alors λg équi oscille sur (les mêmes) N points pour tout $\lambda \neq 0$. Il est plus important de prendre soin de justifier ses affirmations par des références précises aux questions précédentes.

9.b. Soit P , un polynôme unitaire de degré $(n+1)$. Il existe donc un polynôme $P_0 \in E_n$ tel que $P = X^{n+1} - P_0$. D'après [9.a.], le polynôme $q_n \in E_n$ est un polynôme de meilleure approximation à l'ordre n de X^{n+1} , donc

$$\|P\|_\infty = \|X^{n+1} - P_0\|_\infty \geq d_\infty(X^{n+1}, E_n) = \|X^{n+1} - q_n\|_\infty.$$

Par définition de q_n et par homogénéité de la norme,

$$\|X^{n+1} - q_n\|_\infty = \|2^{-n}T_{n+1}\|_\infty = 2^{-n}\|T_{n+1}\|_\infty$$

et par conséquent $\|P\|_\infty \geq 2^{-n} \|T_{n+1}\|_\infty$ pour tout polynôme P unitaire de degré $(n+1)$.

10. Soit f , un polynôme de degré $(n+1)$. Il existe donc un réel $\alpha \neq 0$ et un polynôme $P_0 \in E_n$ tels que $f = \alpha X^{n+1} - P_0$. D'après [3.c.], le polynôme $P = f - 2^{-n} \alpha T_{n+1}$ appartient à E_n et la différence

$$f - P = 2^{-n} \alpha T_{n+1}$$

équioscille sur les $(n+2)$ points $x_0, \dots, x_{n+1}$ [7.b.]. On déduit à nouveau de [8.] que P est un polynôme de meilleure approximation de f à l'ordre n .

Solution II * Racines carrées de matrices

Partie A. Étude de la compacité de $\text{Rac}(A)$

1. L'application

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & (M, M) & \longmapsto & M^2 \end{array}$$

est continue en tant que composée de deux applications continues :

- La première application est continue car ses deux composantes sont continues (l'identité d'un espace vectoriel normé dans lui-même est toujours continue). Variante : La première application est continue en tant qu'application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie.
- La seconde application est bilinéaire et définie sur le produit de deux espaces vectoriels de dimension finie, donc elle est continue.

L'ensemble $\text{Rac}(A)$ est donc l'image réciproque du fermé $\{A\}$ par une application continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, donc $\text{Rac}(A)$ est une partie fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

|| Dans tout espace vectoriel normé, les singletons (et plus généralement les parties finies) sont des parties fermées.

2. a. On vérifie sans peine que $S_q^2 = I_2$, quel que soit l'entier q .

2. b. Dans tout espace vectoriel normé, une partie compacte est fermée et bornée.

Pour $n \geq 2$, on peut définir une matrice $\Sigma_q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ par blocs :

$$\Sigma_q = \begin{pmatrix} S_q & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}.$$

|| La matrice Σ_q est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc cette matrice est bien inversible : $\Sigma_q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Cette remarque nous sera utile au [2.c.].

D'après [2.a.], on a $\Sigma_q^2 = I_n$ et pour $q \geq 2$, il est clair que $N(\Sigma_q) = q$. Comme $\Sigma_q \in \text{Rac}(I_n)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\text{Rac}(I_n)$ n'est pas borné pour la norme N . Par conséquent, si $n \geq 2$, alors $\text{Rac}(I_n)$ n'est pas une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

• En revanche, si $n = 1$, alors $R \in \text{Rac}(I_1)$ si, et seulement si, $R = (\pm 1)$. Cette fois, $\text{Rac}(I_1)$ est une partie fermée et bornée de $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension finie, donc $\text{Rac}(I_1)$ est compact.

2. c. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété (*). Avec les notations introduites en [2.b.], la propriété (*) appliquée avec $A = B = \Sigma_q$ nous dit alors que

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \|\Sigma_q\|^2 \leq \|I_n\|.$$

En particulier, la suite de terme général $\|\Sigma_q\|$ est bornée.

Or $N(\Sigma_q) = q$ pour tout $q \geq 2$, donc $N(\Sigma_q)$ tend vers $+\infty$ lorsque q tend vers $+\infty$. Comme $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, les normes $\|\cdot\|$ et N sont équivalentes et en particulier $\|\Sigma_q\|$ tend vers $+\infty$ lorsque q tend vers $+\infty$: la contradiction est établie.

Il n'existe donc pas de norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété (*).

|| Si $n = 1$, la norme N correspond à la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et on a donc $N(AB) = N(A)N(B)$, quelles que soient les matrices A et B dans $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$. Ce cas très particulier ne présente pas d'autre intérêt mathématique que de justifier l'hypothèse $n \geq 2$ faite par l'énoncé.

Partie B. Intérieur de $\text{Rac}(A)$

3. a. Question de cours pour laquelle l'énoncé semble ne pas attendre de justification. Pour mémoire :

$$\begin{aligned} x = (x_1, \dots, x_p) \in B_\infty(a, r) &\iff \|x - a\|_\infty < r \\ &\iff \forall 1 \leq k \leq p, \quad |x_k - a_k| < r \\ &\iff \forall 1 \leq k \leq p, \quad x_k \in]a_k - r, a_k + r[\end{aligned}$$

donc

$$B_\infty(a, r) =]a_1 - r, a_1 + r[\times]a_2 - r, a_2 + r[\times \dots \times]a_p - r, a_p + r[.$$

3. b. D'après les définitions rappelées par l'énoncé, si x_0 est un point intérieur à $F \cap G$, alors il existe une boule ouverte $B_\infty(x_0, r)$ de rayon $r > 0$ contenue dans $F \cap G$. Cette boule est donc contenue dans F , ce qui prouve que x_0 est un point intérieur à F . Mais F est, par hypothèse, une partie d'intérieur vide ! Par conséquent, $F \cap G$ est aussi une partie d'intérieur vide.

|| On peut aussi proposer une démonstration fondée sur la caractérisation de l'intérieur (l'intérieur de F est le plus grand ouvert contenu dans F), mais ce n'est pas vraiment plus simple, ni plus rapide.

4. a. Un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ n'a qu'un nombre fini de racines.

Par conséquent, pour une application polynomiale P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des racines est infini si, et seulement si, P est identiquement nulle.

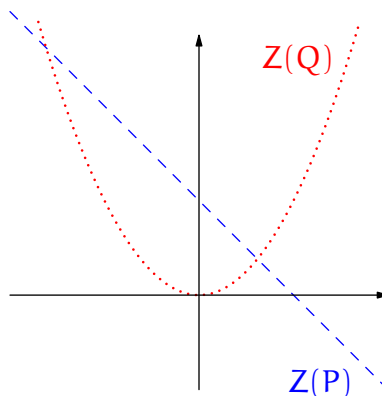
Autrement dit, s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et des réels $a_0, \dots, a_m$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$$

et si $Z(P)$ est infini, alors $a_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$.

|| Comme $\mathbb{R}$ est un ensemble infini, l'application $P \mapsto \tilde{P}$ qui envoie un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ sur l'application polynomiale $\tilde{P}$ qui lui est canoniquement associée est injective. On peut donc librement identifier le polynôme P et l'application polynomiale $\tilde{P}$.

4. b. L'ensemble $Z(P)$ est en fait la droite d'équation $x_2 = 1 - x_1$ et l'ensemble $Z(Q)$ est la parabole d'équation $x_2 = x_1^2$.



Ni le polynôme P , ni le polynôme Q ne sont identiquement nuls et pourtant, pour chacun d'eux, l'ensemble des zéros est infini.

5. a. Nous allons procéder par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

|| Avant d'aller plus loin, il faut introduire une notation qui va rendre les calculs plus rapides à écrire et plus simples à comprendre.

Une liste $i = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p$ est un **multi-indice** : le symbole a_i désigne en fait $a_{i_1, \dots, i_p}$.

Cette liste peut également servir de **multi-exposant** : pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, le symbole x^i désigne en fait le produit $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_p^{i_p}$.

Une application polynomiale $P \in \Gamma_p$ s'écrit alors sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \quad P(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}^p} a_i x^i$$

où $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^p}$ est une famille presque nulle de scalaires.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note HR_p la propriété suivante : pour toute application polynomiale $P \in \Gamma_p$ et pour toute famille presque nulle $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^p}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \quad P(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}^p} a_i x^i,$$

s'il existe des parties infinies $I_1, \dots, I_p$ de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in I_1 \times \dots \times I_p, \quad P(x) = 0,$$

alors $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}^p$.

• Prenons $p = 1$, fixons $P \in \Gamma_1$ et une famille presque nulle de scalaires $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x^i.$$

S'il existe une partie infinie $I_1 \subset \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in I_1, \quad P(x) = 0,$$

alors le polynôme $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$ admet une infinité de racines et par conséquent $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

La propriété HR_1 est donc vraie.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons que la propriété HR_p soit vraie.

On considère alors une application polynomiale $P \in \Gamma_{p+1}$ et une famille presque nulle $(a_j)_{j \in \mathbb{N}^{p+1}}$ de nombres réels telle que

$$\begin{aligned} \forall \hat{x} = (x, x_{p+1}) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, \quad P(\hat{x}) &= \sum_{j \in \mathbb{N}^{p+1}} a_j \hat{x}^j = \sum_{(i, i_{p+1}) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}} a_{i, i_{p+1}} x^i x_{p+1}^{i_{p+1}} \\ &= \sum_{i_{p+1} \in \mathbb{N}} \left(\underbrace{\sum_{i \in \mathbb{N}^p} a_{i, i_{p+1}} x^i}_{Q_{i_{p+1}}(x)} \right) x_{p+1}^{i_{p+1}}. \end{aligned}$$

|| Comme $(a_j)_{j \in \mathbb{N}^{p+1}}$ est une famille presque nulle, les sommes précédentes ne comportent qu'un nombre FINI de termes non nuls. C'est la raison pour laquelle il est possible de réorganiser ainsi les termes de la somme $P(x)$.

Supposons qu'il existe des parties infinies $I_1, \dots, I_p, I_{p+1}$ de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall \hat{x} \in I_1 \times \dots \times I_{p+1}, \quad P(\hat{x}) = 0.$$

Cela signifie que, pour tout $x \in I_1 \times \dots \times I_p$,

$$\forall x_{p+1} \in I_{p+1}, \quad \sum_{i_{p+1} \in \mathbb{N}} Q_{i_{p+1}}(x) x_{p+1}^{i_{p+1}} = 0.$$

Comme I_{p+1} est une partie infinie de $\mathbb{R}$, on déduit de HR_1 que

$$\forall i_{p+1} \in \mathbb{N}, \forall x \in I_1 \times \dots \times I_p, \quad Q_{i_{p+1}}(x) = 0.$$

|| La démonstration nous a imposé de permuter les quantificateurs $\forall i_{p+1} \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in I_1 \times \dots \times I_p$, ce qui est possible sans condition.

Les $Q_{i_{p+1}}$ sont des applications polynomiales appartenant à Γ_p . Comme $I_1, \dots, I_p$ sont des parties infinies de $\mathbb{R}$, on déduit de HR_p que

$$\forall i_{p+1} \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^p, \quad a_{i, i_{p+1}} = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall j \in \mathbb{N}^{p+1}, \quad a_j = 0.$$

• On a ainsi démontré par récurrence que la propriété HR_p était vraie pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$.

|| Corollaire très important de la propriété HR_p : pour toute application polynomiale $P \in \Gamma_p$, il existe **une, et une seule**, famille presque nulle $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^p}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \quad P(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}^p} a_i x^i.$$

|| Cette propriété d'unicité, qui n'étonnera personne, n'est pas mentionnée dans l'énoncé. Cela nous a obligés à formuler HR_p en mentionnant une famille presque nulle $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^p}$ quelconque et non pas la famille presque nulle associée à l'application polynomiale P .

5. b. Si une fonction polynomiale

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{i \in \mathbb{N}^p} a_i x^i \end{aligned}$$

(où la famille $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^p}$ est presque nulle)

s'annule sur une partie de $\mathbb{R}^p$ dont l'intérieur est non vide, alors il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^p$ et un réel $r > 0$ tels que la boule $B_\infty(a, r)$ soit contenue dans $Z(P)$.

D'après [3.a.], cette boule est un produit d'intervalles ouverts non vides. Or un intervalle ouvert non vide est une partie infinie de $\mathbb{R}$. Il existe donc des parties infinies $I_1, \dots, I_p$ telles que P s'annule sur le produit cartésien $I_1 \times \dots \times I_p$.

On déduit alors de [5.a.] que les scalaires a_i sont tous nuls et que P est nécessairement la fonction nulle.

6.a. Que signifie « identifier $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$ » ? Il s'agit de deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et ils ont même dimension : n^2 . Ils sont donc isomorphes et « identifier » signifie qu'on fixe un isomorphisme entre ces deux espaces.

Malheureusement, si les deux espaces $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$ ont tous deux une base canonique, il n'existe pas d'isomorphisme canonique entre eux. Il est en outre plus commode de conserver les couples d'entiers $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ pour effectuer les calculs matriciels que de les remplacer par des indices entiers $k \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$ choisis de manière « non canonique ».

Nous considérerons donc une bijection $\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket^2 \rightarrow \llbracket 1, n^2 \rrbracket$ et nous identifierons la matrice $R = (r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ au vecteur $x \in \mathbb{R}^{n^2}$ défini par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad x_{\sigma(i,j)} = r_{i,j}.$$

Cette identification masque l'application $\varphi_\sigma : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall x = (x_k)_{1 \leq k \leq n^2} \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad \varphi_\sigma(x) = (x_{\sigma(i,j)})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

On vérifie sans peine que φ_σ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^{n^2}$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ étant invariantes par permutations des coordonnées,

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad N(\varphi_\sigma(x)) = \|x\|_\infty.$$

L'isomorphisme φ_σ est donc en fait une isométrie entre les deux espaces vectoriels normés quelle que soit la bijection σ choisie et, pour cette raison, le choix de σ est sans incidence sur la suite.

✦ Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on définit l'application polynomiale $P_{\sigma(i,j)} \in \Gamma_{n^2}$ en posant

$$\forall (x_1, \dots, x_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad P_{\sigma(i,j)}(x_1, \dots, x_{n^2}) = a_{i,j} - \sum_{\ell=1}^n x_{\sigma(i,\ell)} x_{\sigma(\ell,j)}.$$

Comme σ est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ sur $\llbracket 1, n^2 \rrbracket$, on a ainsi défini les applications polynomiales $P_1, \dots, P_{n^2}$ une fois et une seule.

La matrice $R = (r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ appartient à $\text{Rac}(A)$ si, et seulement si,

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad \sum_{\ell=1}^n r_{i,\ell} r_{\ell,j} = a_{i,j} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n, \quad P_{\sigma(i,j)}(x_1, \dots, x_{n^2}) = 0$$

en identifiant comme plus haut la matrice R au vecteur x . Autrement dit :

$$\text{Rac}(A) = \bigcap_{k=1}^{n^2} Z(P_k).$$

6.b. Par définition, une fonction polynomiale $P \in \Gamma_{n^2}$ s'annule sur $Z(P)$. D'après [5.b.], si l'intérieur de $Z(P)$ n'est pas vide, alors tous les coefficients de P sont nuls. Par contraposée, si l'un des coefficients de P est non nul, alors l'intérieur de $Z(P)$ est vide.

✦ Considérons $P_{\sigma(1,1)}$:

$$P_{\sigma(1,1)}(x) = a_{1,1} - x_{\sigma(1,1)}^2 - \sum_{\ell=2}^n x_{\sigma(1,\ell)} x_{\sigma(\ell,1)}.$$

Comme σ est injective, $\sigma(1, \ell)$ et $\sigma(\ell, 1)$ sont distincts de $\sigma(1, 1)$ pour tout $2 \leq \ell \leq n$. L'expression de $P_{\sigma(1,1)}$ ne contient donc qu'une seule fois le monôme $x_{\sigma(1,1)}^2$, avec un coefficient non nul. Donc, comme on l'a vu, l'intérieur de $Z(P_{\sigma(1,1)})$ est vide.

✦ En appliquant [3.b.] avec $F = Z(P_{\sigma(1,1)})$, on déduit de [6.a.] que $\text{Rac}(A)$ est une partie d'intérieur vide.