

Composition de Mathématiques

Le 30 septembre 2026 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Partie A. Convexité

Soit E , un espace vectoriel réel de dimension $d \in \mathbb{N}^*$, muni d'une norme notée $\|\cdot\|$.

On rappelle qu'une partie C de E est **convexe** lorsque

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

On rappelle de plus que, pour toute famille $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ d'éléments d'une partie convexe C et pour tous nombres réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ dont la somme est égale à 1, on a

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_p a_p \in C.$$

On note $S_n(\mathbb{R})$, le sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques :

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad M \in S_n(\mathbb{R}) \iff M^T = M.$$

On dit qu'une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ est **définie positive** si, et seulement si,

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T \cdot S \cdot X > 0.$$

On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Démontrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie convexe non vide de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$?

Si F est une partie quelconque de E , on appelle **enveloppe convexe** de F la plus petite partie convexe de E (au sens de l'inclusion) contenant F . L'enveloppe convexe de F sera notée $\text{Conv}(F)$.

On notera Λ_d , l'ensemble des $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (\mathbb{R}_+)^{d+1}$ tels que

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_d = 1$$

et on admettra (Théorème de Carathéodory) que $\text{Conv}(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_d x_d$$

lorsque $(x_0, x_1, \dots, x_d)$ parcourt F^{d+1} et $(\lambda_0, \dots, \lambda_d)$ parcourt Λ_d .

2. Quelle est l'enveloppe convexe d'un sous-espace vectoriel F de E ?
Soit A , une partie quelconque de E . Quelle est l'enveloppe convexe de $\text{Conv}(A)$?
3. Soient K , une partie compacte de E et $\text{Conv}(K)$, son enveloppe convexe.
3.a. Définir une application $\varphi : \mathbb{R}^{d+1} \times E^{d+1} \rightarrow E$ telle que

$$\text{Conv}(K) = \varphi(\Lambda_d \times K^{d+1}).$$

- 3.b. En déduire que $\text{Conv}(K)$ est une partie compacte de E .

Partie B. Compacité

Dans cette partie, E est un espace vectoriel réel de dimension $d \in \mathbb{N}^*$ muni d'une norme notée $\|\cdot\|$.

On notera $B(x, r)$, la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$.

4. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite d'éléments de E . On suppose qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad n \neq p \implies \|x_n - x_p\| \geq \varepsilon.$$

Démontrer qu'aucune suite extraite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est convergente.

|| Dans la suite de cette partie, on étudie une partie K de E , non vide et compacte.

5. Démontrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et des éléments $x_1, \dots, x_p$ de K tels que

$$K \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_p, \varepsilon).$$

☞ On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K dont aucune suite extraite ne converge.

6. On considère ici un **recouvrement ouvert** de K , c'est-à-dire une famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ de parties ouvertes de E telle que

$$K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i.$$

(L'index I est a priori infini.)

6.a. Démontrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \exists i \in I, \quad B(x, \alpha) \subset \Omega_i.$$

☞ On pourra raisonner par l'absurde.

6.b. En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_p})$ extraite de la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ telle que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}.$$

7. Soit $(F_i)_{i \in I}$, une famille de parties fermées de E contenues dans K et d'intersection vide :

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset.$$

Démontrer qu'il existe une sous-famille finie $(F_{i_1}, \dots, F_{i_p})$ extraite de la famille $(F_i)_{i \in I}$ telle que

$$F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \dots \cap F_{i_p} = \emptyset.$$

Partie C. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Dans cette partie, E est un espace euclidien de dimension d et la norme $\|\cdot\|$ est associée au produit scalaire sur E . L'espace vectoriel $L(E)$ des endomorphismes de E est muni de la norme $\|\cdot\|$ subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur E .

L'identité de E sera notée I_E . Pour tout endomorphisme u de E et tout entier $i \in \mathbb{N}^*$, on note u^i l'endomorphisme $u \circ u \circ \dots \circ u$ (i fois) avec la convention usuelle $u^0 = I_E$.

☞ On rappelle que l'ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E est un groupe pour la loi $\circ$. On dit qu'une partie H de $L(E)$ est un **sous-groupe compact** de $GL(E)$ lorsque H est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$ et que H est une partie compacte de l'espace vectoriel $L(E)$ normé par $\|\cdot\|$.

☞ Dans cette partie, on considère un sous-groupe compact G de $GL(E)$ et, pour tout $x \in E$, on pose

$$N_G(x) = \sup_{u \in G} \|u(x)\|.$$

On considère également une partie K compacte, convexe et non vide de E .

8. Démontrer que N_G est une norme sur E .

☞ On pourra commencer par démontrer que, pour tout $z \in E$, l'application $u \mapsto \|u(z)\|$ est continue de $L(E)$ dans $\mathbb{R}$.

9. Démontrer que N_G vérifie en outre les deux propriétés suivantes.

9.a.

$$\forall u \in G, \forall x \in E, \quad N_G(u(x)) = N_G(x)$$

9.b. Soit $x \in E$, non nul. Alors, pour tout $y \in E$, l'égalité

$$N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$$

est vérifiée si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda \cdot x = y$.

On appelle **diamètre** de K le réel $\delta(K)$ défini par

$$\delta(K) = \sup_{x, y \in K} \|x - y\|.$$

(Comme K est borné et non vide, ce réel $\delta(K)$ est bien défini.)

10. On considère un élément u de $L(E)$ et on suppose que le compact K est **stable** par u , c'est-à-dire

$$\forall x \in K, \quad u(x) \in K.$$

Pour tout $x \in K$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^i(x).$$

10. a. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est à valeurs dans K . En déduire qu'il existe une suite extraite convergente vers un élément a de K .

10. b. Démontrer que

$$\forall n \geq 1, \quad \|u(x_n) - x_n\| \leq \frac{\delta(K)}{n}.$$

En déduire que l'élément a de K est un point fixe de u .

On suppose maintenant que la partie compacte convexe non vide K est stable par tous les éléments de G . Soient $r \in \mathbb{N}^*$; $u_1, \dots, u_r$ des éléments de G et

$$u = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i.$$

11. Démontrer que K est stable par u . En déduire l'existence d'un élément $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

12. Démontrer que

$$N_G\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)).$$

En déduire que

$$N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq j}} u_i(a)\right) = N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq j}} u_i(a)\right)$$

pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

13. En déduire, pour tout entier $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, l'existence d'un réel $\lambda_j \geq 0$ tel que

$$u(a) = \frac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a).$$

14. Déduire de la question précédente que a est un point fixe de l'endomorphisme u_i pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

15. En utilisant le résultat de la question [7.], démontrer qu'il existe $a \in K$ tel que

$$\forall u \in G, \quad u(a) = a.$$

Partie D. Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

L'espace vectoriel $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Son produit scalaire est donc défini par

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top \cdot B)$$

et la norme associée à ce produit scalaire est notée $\|\cdot\|$.

On rappelle que le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** lorsque $P^\top \cdot P = I_n$. Toute matrice orthogonale est par conséquent inversible.

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $O_n(\mathbb{R})$.

On admettra que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

On appelle **sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$** tout sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ qui est une partie compacte de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ normé par $\|\cdot\|$.

16. Démontrer que la norme euclidienne canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est sous-multiplicative :

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

17. a. Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ est-il une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$?

17. b. Démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

Dans la fin de cette partie, on considère un sous-groupe compact G de $GL_n(\mathbb{R})$. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application $\rho_A : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ en posant

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \rho_A(M) = A^\top \cdot M \cdot A.$$

On pose enfin

$$H = \{\rho_A, A \in G\}, \quad \Delta = \{A^\top \cdot A, A \in G\}, \quad K = \text{Conv}(\Delta).$$

L'espace $L(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ subordonnée à la norme euclidienne canonique $\|\cdot\|$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

18. Démontrer que $R^\top \cdot R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ pour toute matrice $R \in GL_n(\mathbb{R})$.

On peut démontrer, et on admettra, la propriété (réciproque) suivante : pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une matrice inversible $R \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = R^\top \cdot R$.

19. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que l'application $A \mapsto \rho_A(M)$ est continue de G dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

20. a. Démontrer que $\rho_A \in GL(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$ pour toute matrice $A \in G$.

20. b. Démontrer que H est un sous-groupe compact de $GL(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$.

21. a. Démontrer que Δ est une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ contenue dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

21. b. Démontrer que K est une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ contenue dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et que K est stable par tous les éléments de H .

22. a. Démontrer qu'il existe une matrice $M \in K$ telle que

$$\forall A \in G, \quad \rho_A(M) = M.$$

22. b. En déduire qu'il existe une matrice $N \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A \in G, \quad N A N^{-1} \in O_n(\mathbb{R}).$$

22. c. En déduire enfin qu'il existe un sous-groupe G_1 de $O_n(\mathbb{R})$ tel que

$$G = N^{-1} G_1 N \stackrel{\text{déf.}}{=} \{N^{-1} B N, B \in G_1\}.$$

Partie E. Maximalité du groupe orthogonal

Dans cette partie, on considère un espace euclidien E de dimension $d \in \mathbb{N}^*$ dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$. La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|\cdot\|$.

23. Soit g , un endomorphisme de E qui « conserve l'orthogonalité » au sens où :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x | y \rangle = 0 \implies \langle g(x) | g(y) \rangle = 0.$$

Démontrer qu'il existe un réel positif k tel que

$$\forall x \in E, \quad \|g(x)\| = k\|x\|.$$

On pourra considérer une base orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ de E et étudier les vecteurs $e_1 \pm e_i$ pour $i \in \llbracket 2, d \rrbracket$.

On travaille dorénavant dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Pour simplifier les calculs, on identifie tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ à la colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui le représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. (On rappelle que la base canonique est orthonormée dans le contexte présent.)

24. Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$, représenté par la matrice $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On dit que u est une **isométrie** lorsque

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

Démontrer que u est une isométrie si, et seulement si, la matrice U est orthogonale.

Soient Γ , un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient $O_n(\mathbb{R})$ et N , une matrice inversible de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N\Gamma N^{-1} \subset O_n(\mathbb{R})$. L'existence d'une telle matrice N est assurée par [22.b.].

On note g , l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par la matrice N dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

25. Soit $v \in \mathbb{R}^n$, non nul, représenté par la colonne V . On définit l'endomorphisme $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad s(x) = x - 2 \frac{\langle v | x \rangle}{\|v\|^2} \cdot v.$$

25. a. Exprimer en fonction de la colonne V la matrice S qui représente s dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

25. b. Calculer $s(v)$, puis $s(y)$ pour $y \in \mathbb{R}^n$ orthogonal à v . En déduire que la matrice S est orthogonale.

26. On considère maintenant l'endomorphisme t de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$t = g \circ s \circ g^{-1}.$$

26. a. Démontrer que t est une isométrie.

26. b. En déduire que $\langle g(v) | g(y) \rangle = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ orthogonal au vecteur v , puis que g conserve l'orthogonalité.

27. Démontrer que $\Gamma = O_n(\mathbb{R})$.

Solution ✱ Sous-groupes compacts du groupe linéaire

Partie A. Convexité

1. Soient S_0 et S_1 , deux matrices de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $t \in [0, 1]$.

Comme $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la combinaison linéaire $S_t = (1-t)S_0 + tS_1$ appartient bien à $S_n(\mathbb{R})$. De plus, pour toute colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle,

$$X^\top \cdot S_t \cdot X = \underbrace{(1-t)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{X^\top \cdot S_0 \cdot X}_{> 0} + \underbrace{t}_{\geq 0} \cdot \underbrace{X^\top \cdot S_1 \cdot X}_{> 0}$$

et comme t et $(1-t)$ ne sont pas simultanément nuls, on en déduit que $X^\top \cdot S_t \cdot X > 0$. Ainsi $S_t \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ pour tout $t \in [0, 1]$, ce qui montre que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

✱ La matrice I_n est évidemment symétrique et, pour toute colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle,

$$X^\top \cdot I_n \cdot X = X^\top \cdot X = \sum_{k=1}^n x_k^2 > 0.$$

Donc $I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ n'est pas vide.

✱ La matrice 0_n est bien symétrique mais $X^\top \cdot 0_n \cdot X = 0$ pour toute colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $0_n \notin S_n^{++}(\mathbb{R})$, ce qui prouve que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $C \subset E$, une partie convexe de E .

Par définition, l'enveloppe convexe d'une partie A quelconque contient A , donc $C \subset \text{Conv}(C)$.

Par définition aussi, l'enveloppe convexe de A est la plus petite partie convexe qui contienne A . Comme C est convexe, on en déduit que $\text{Conv}(C) \subset C$.

Par double inclusion, $\text{Conv}(C) = C$ pour toute partie convexe C de E .

✱ On sait qu'un sous-espace vectoriel F de E est une partie convexe de E .

Par définition, l'enveloppe convexe $\text{Conv}(A)$ d'une partie quelconque A est aussi une partie convexe de E .

Donc $\text{Conv}(F) = F$ et $\text{Conv}[\text{Conv}(A)] = \text{Conv}(A)$.

3. a. En posant

$$\forall ((\lambda_0, \dots, \lambda_d), (x_0, \dots, x_d)) \in \mathbb{R}^{d+1} \times E^{d+1}, \quad \varphi(\lambda_0, \dots, \lambda_d, x_0, \dots, x_d) = \sum_{k=0}^d \lambda_k \cdot x_k \in E,$$

on a bien $\text{Conv}(K) = \varphi(\Lambda_d \times K^{d+1})$ d'après le préambule (Théorème de Carathéodory).

3. b. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, l'espace produit $\mathbb{R}^{d+1} \times E^{d+1}$ est un espace vectoriel de dimension finie et l'application φ définie à la question précédente est bilinéaire sur cet espace produit. Par conséquent, φ est une application continue de $\mathbb{R}^{d+1} \times E^{d+1}$ dans E .

✱ Comme K est une partie compacte de E , le produit K^{d+1} est une partie compacte de E^{d+1} .

✱ Comme $\mathbb{R}^{d+1}$ est un espace vectoriel de dimension finie, toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^{d+1}$ est continue et l'image réciproque d'un singleton (= une partie fermée de tout espace vectoriel normé) par une forme linéaire est une partie fermée de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Comme $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$, le produit $(\mathbb{R}_+)^{d+1}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Le **simplexe** Λ_d est donc une partie fermée de $\mathbb{R}^{d+1}$ comme intersection de deux parties fermées :

$$(\mathbb{R}_+)^{d+1} \cap [\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_d = 1].$$

De plus, Λ_d est une partie bornée de $\mathbb{R}^{d+1}$: si $(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in \Lambda_d$, alors $0 \leq \lambda_k \leq 1$ pour tout $0 \leq k \leq d$.

|| Dans une somme de termes positifs, chaque terme est inférieur à la somme. Le raisonnement qui précède prouve que Λ_d est borné dans $\mathbb{R}^{d+1}$ pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$. Comme $\mathbb{R}^{d+1}$ est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur $\mathbb{R}^{d+1}$ sont équivalentes et une partie bornée pour la norme produit est en fait bornée pour toutes les normes sur $\mathbb{R}^{d+1}$.

En tant que partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^{d+1}$, le simplexe Λ_d est une partie compacte de l'espace $\mathbb{R}^{d+1}$ et le produit cartésien $\Lambda_d \times K^{d+1}$ est donc une partie compacte de l'espace produit $\mathbb{R}^{d+1} \times E^{d+1}$.

✱ Finalement, $\text{Conv}(K)$ est l'image d'une partie compacte par une application continue, donc $\text{Conv}(K)$ est une partie compacte (de E).

|| Il est facile de démontrer que l'enveloppe convexe de K est l'ensemble des combinaisons convexes

$$\lambda_0 \cdot x_0 + \dots + \lambda_r \cdot x_r$$

pour $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq r} \in \Lambda_r$ et $(x_k)_{0 \leq k \leq r} \in K^{r+1}$ lorsque r parcourt $\mathbb{N}^*$. On en déduit que $\text{Conv}(K)$ est une union dénombrable de parties compactes, ce qui ne nous avance pas !

En admettant le Théorème de Carathéodory, il nous a été facile de prouver que l'enveloppe convexe d'une partie compacte est elle-même compacte. Merci, qui ?

Partie B. Compacité

4. Par hypothèse, le réel ε est strictement positif. Par conséquent, $\varepsilon/3 > 0$ et s'il existait une suite extraite $(x_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui convergerait vers $a \in E$, alors il existerait un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq N, \quad \|x_{\varphi(k)} - a\| \leq \varepsilon/3.$$

Par inégalité triangulaire, on pourrait en déduire que

$$\forall k, \ell \geq N, \quad \|x_{\varphi(k)} - x_{\varphi(\ell)}\| \leq \|x_{\varphi(k)} - a\| + \|a - x_{\varphi(\ell)}\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

alors que $\|x_{\varphi(k)} - x_{\varphi(\ell)}\| \geq \varepsilon$ pour tout $k \neq \ell$ par injectivité de φ .

|| Par définition des suites extraites, l'extractrice φ est strictement croissante et en particulier injective.

Cette contradiction prouve qu'aucune suite extraite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est convergente.

5. Suivant l'indication, on raisonne par l'absurde. On suppose ainsi qu'il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_p \in K, \quad K \not\subset B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0) \cup \dots \cup B(x_p, \varepsilon_0). \quad (*)$$

On choisit $x_1 \in K$ arbitrairement. C'est possible puisque K n'est pas vide.

D'après (*), K n'est pas contenu dans la boule ouverte $B(x_1, \varepsilon_0)$. Il existe par conséquent un élément x_2 de K qui n'appartient pas à la boule ouverte $B(x_1, \varepsilon_0)$, c'est-à-dire : $\|x_2 - x_1\| \geq \varepsilon_0$.

HR — Supposons définis des éléments $x_1, \dots, x_p$ de K tels que

$$\forall 1 \leq i < j \leq p, \quad \|x_i - x_j\| \geq \varepsilon_0.$$

D'après (*), le compact K n'est pas contenu dans l'ouvert $B(x_1, \varepsilon_0) \cup \dots \cup B(x_p, \varepsilon_0)$ donc il existe un élément x_{p+1} de K tel que $x_{p+1} \notin B(x_1, \varepsilon_0) \cup \dots \cup B(x_p, \varepsilon_0)$ c'est-à-dire

$$\forall 1 \leq k \leq p, \quad \|x_{p+1} - x_k\| \geq \varepsilon_0.$$

On déduit de l'hypothèse de récurrence que

$$\forall 1 \leq i < j \leq p+1, \quad \|x_j - x_i\| \geq \varepsilon_0.$$

On a ainsi démontré par récurrence qu'il existait une suite $(x_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de K telle que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}^*, \quad i \neq j \implies \|x_i - x_j\| \geq \varepsilon_0.$$

Comme K est une partie compacte, il existe une suite extraite de cette suite qui converge. Mais d'après [4.] aucune suite extraite de cette suite n'est convergente : la contradiction est établie.

♣ On a bien démontré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existait un entier $p \geq 1$ et des éléments $x_1, \dots, x_p$ de K tels que

$$K \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_p, \varepsilon).$$

|| La partie K est dite **précompacte** : si petit que soit choisi $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir la partie K à l'aide d'un nombre fini de boules de même rayon ε .

6.a. Supposons que, pour tout $\alpha > 0$, il existe un élément $x_\alpha \in K$ tel que, pour tout indice $i \in I$, la boule ouverte $B(x_\alpha, \alpha)$ ne soit pas contenue dans l'ouvert Ω_i .

♣ Choisissons une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle. Selon notre hypothèse, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in I, \quad B(x_n, \alpha_n) \cap \Omega_i^c \neq \emptyset. \quad (†)$$

Comme K est compact, on peut extraire une sous-suite convergente de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de limite $\ell \in K$.

Pour alléger les notations, on supposera désormais que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in K$.

♣ Comme $\ell \in K$ et qu'on connaît un recouvrement de K par des parties ouvertes, il existe (au moins) un indice $i_0 \in I$ tel que $\ell \in \Omega_{i_0}$.

Comme Ω_{i_0} est un ouvert qui contient ℓ , c'est un voisinage de ℓ , donc il existe un rayon $r > 0$ tel que $B(\ell, r) \subset \Omega_{i_0}$.

Comme la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 < 2\alpha_N < r$. Par convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|\ell - x_n\| \leq \alpha_N$ pour tout $n \geq N_0$.

Comme la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,

$$\forall n \geq \max\{N, N_0\}, \forall x \in B(x_n, \alpha_n), \quad \|\ell - x\| \leq \|\ell - x_n\| + \|x_n - x\| \leq \alpha_N + \alpha_n \leq 2\alpha_N < r.$$

Cela prouve que $B(x_n, \alpha_n) \subset B(\ell, r)$ et donc que $B(x_n, \alpha_n) \subset \Omega_{i_0}$, en contradiction avec $(\dagger)$.

• Nous avons ainsi démontré par l'absurde qu'il existe un rayon $\alpha > 0$ assez petit pour que chaque boule ouverte $B(x, \alpha)$ centrée en un point $x \in K$ soit tout entière contenue dans l'un des ouverts Ω_i .

6.b. D'après [6.a.], il existe $\alpha > 0$ assez petit pour que, pour tout $x \in K$, la boule ouverte $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'un des Ω_i .

D'après [5.], pour un tel $\alpha > 0$, il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et des points $x_1, \dots, x_p$ dans K tels que

$$K \subset B(x_1, \alpha) \cup B(x_2, \alpha) \cup \dots \cup B(x_p, \alpha).$$

Comme on l'a dit, pour tout $1 \leq k \leq p$, il existe un indice $i_k \in I$ tel que $B(x_k, \alpha) \subset \Omega_{i_k}$. Par conséquent,

$$K \subset \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}.$$

|| La réciproque de cette propriété est vraie : si de tout recouvrement ouvert de $K \subset \mathbb{R}^n$ on peut extraire un recouvrement fini de K , alors K est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.
 || Cette caractérisation des parties compactes de $\mathbb{R}^n$ est attribuée à BOREL, HEINE et LEBESGUE.

7. Comme les fermés F_i sont supposés contenus dans K , l'intersection d'une sous-famille quelconque des F_i est aussi contenue dans K :

$$\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} \subset K. \quad (\dagger_1)$$

Comme les F_i sont des fermés et que leur intersection est l'ensemble $\emptyset$, les F_i^c sont des ouverts dont l'union est égale à E . Par conséquent,

$$K \subset E = \bigcup_{i \in I} F_i^c.$$

D'après la propriété établie en [6.b.], il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et des indices $i_1, \dots, i_p$ dans I tels que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^p F_{i_k}^c.$$

En repassant au complémentaire, on en déduit que

$$\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} \subset K^c. \quad (\dagger_2)$$

Comme K et K^c sont disjoints, on déduit de $(\dagger_1)$ et $(\dagger_2)$ que l'intersection des fermés $F_{i_1}, \dots, F_{i_p}$ est vide.

Partie C. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

8. Pour $z \in E$, l'application $u \mapsto u(z)$ est linéaire de $L(E)$ dans E . Comme E est un espace de dimension finie, l'espace $L(E)$ est aussi un espace de dimension finie et toute application linéaire définie sur $L(E)$ est continue.

Par ailleurs, l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue de E dans $\mathbb{R}$ (elle est 1-lipschitzienne d'après le cours). Par composition d'applications continues, l'application $u \mapsto \|u(z)\|$ est continue de $L(E)$ dans $\mathbb{R}$.

|| Quelques calculs peuvent remplacer ces phrases, c'est une affaire de goût !
 || Comme $L(E)$ est muni de la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ sur E ,

$$\forall z \in E, \forall u, v \in L(E), \quad \|u(z) - v(z)\| \leq \|u - v\| \|z\| = \|z\| \|u - v\|$$

|| donc $u \mapsto u(z)$ est $\|z\|$ -lipschitzienne et par conséquent continue sur $L(E)$.

Comme G est, par hypothèse, une partie compacte de $L(E)$, toute application continue de $L(E)$ dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes sur G . En particulier, la borne supérieure $N_G(z)$ est bien définie.

|| Cette borne supérieure est en fait un maximum : il existe $u_0 \in G$ tel que $N_G(z) = \|u_0(z)\|$. (Bien entendu, il est très probable que l'automorphisme u_0 dépende du vecteur $z \in E$.)

• **Séparation** — Si $N_G(x) = 0$, alors $u(x) = 0_E$ pour tout $u \in G$. Mais comme $G \subset GL(E)$, chaque $u \in G$ est un automorphisme de E et par conséquent $x = 0_E$.

|| Variante : comme $I_E \in G$, alors $N_G(x) \geq \|x\|$ pour tout $x \in E$. On en déduit que N_G sépare les points.

♣ **Homogénéité** — Par linéarité de $u \in G$ et homogénéité de la norme $\|\cdot\|$ sur E ,

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in G, \quad \|u(\lambda \cdot x)\| = \|\lambda \cdot u(x)\| = |\lambda| \|u(x)\|.$$

Comme $\sup(\mu A) = \mu \sup(A)$ pour toute partie non vide et bornée $A \subset \mathbb{R}$ et tout réel positif μ , on en déduit que

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad N_G(\lambda \cdot x) = |\lambda| N_G(x).$$

♣ **Inégalité triangulaire** — Soient x et y dans E . Pour tout automorphisme $u \in G$,

$$\|u(x+y)\| = \|u(x) + u(y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\| \leq N_G(x) + N_G(y)$$

puisque la borne supérieure est un majorant.

Le dernier terme est indépendant de $u \in G$, on peut donc passer à la borne supérieure et en déduire que

$$N_G(x+y) = \sup_{u \in G} \|u(x+y)\| \leq N_G(x) + N_G(y).$$

9. a. Soit $u \in G$. Comme $(G, \circ)$ est un groupe, l'application $v \mapsto v \circ u$ est une bijection de G sur G (dont la réciproque est l'application $w \mapsto w \circ u^{-1}$). Par conséquent,

$$\{\|v(u(x))\|, v \in G\} = \{\|w(x)\|, w \in G\}$$

et comme ces deux ensembles sont égaux, ils ont même borne supérieure : $N_G(u(x)) = N_G(x)$.

9. b. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \lambda \cdot x$, alors

$$N_G(x+y) = N_G((1+\lambda) \cdot x) = \underbrace{(1+\lambda)}_{\geq 0} N_G(x) \quad \text{et} \quad N_G(y) = N_G(\lambda \cdot x) = \lambda N_G(x)$$

(par homogénéité de la norme N_G [8.]), donc $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$.

♣ Réciproquement, supposons que $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$. On a démontré plus haut [8.] qu'il existait un $w \in G$ tel que $N_G(x+y) = \|w(x+y)\|$. On en déduit que

$$N_G(x+y) = \|w(x) + w(y)\| \leq \|w(x)\| + \|w(y)\| \leq N_G(x) + N_G(y)$$

par linéarité de w , puis par inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$ et enfin parce que la borne supérieure est un majorant. Avec l'hypothèse que nous avons faite, nous avons donc

$$N_G(x+y) = \|w(x) + w(y)\| \leq \|w(x)\| + \|w(y)\| \leq N_G(x) + N_G(y) \leq N_G(x+y).$$

Notre hypothèse initiale devient donc $\|w(x) + w(y)\| = \|w(x)\| + \|w(y)\|$ et la norme $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire. On sait alors que les vecteurs $w(x)$ et $w(y)$ sont colinéaires et de même sens.

Conséquence importante de l'inégalité de Schwarz : si $\|a+b\| = \|a\| + \|b\|$, alors $\langle a|b \rangle = \|a\| \|b\|$ et par conséquent, si $a \neq 0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $b = \lambda \cdot a$.

Attention ! Pour une norme qui n'est pas associée à un produit scalaire, le cas d'égalité $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ dans l'inégalité triangulaire n'apporte pas d'information particulière sur les vecteurs x et y ! C'est donc ici l'endroit de la démonstration où on a vraiment besoin de l'hypothèse que la norme sur E soit associée à un produit scalaire.

Deux contre-exemples pour ceux qui doutent avec $x = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$:

- on a $\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$ si, et seulement si, la première coordonnée de y est positive ;
- si $|y_2| \leq y_1$, alors $\|x+y\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

On peut aussi remarquer que $N_G(x) = \|w(x)\|$ et $N_G(y) = \|w(y)\|$. On avait mentionné en [8.] que l'automorphisme u_0 dépendait du vecteur x choisi. On vient ici de démontrer que l'automorphisme w qui convient pour le vecteur $x+y$ convient aussi pour les deux vecteurs x et y !

Comme $x \neq 0_E$ et que $w \in G \subset GL(E)$, le vecteur $w(x)$ n'est pas nul. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $w(y) = \lambda \cdot w(x)$, c'est-à-dire $w(y - \lambda \cdot x) = 0_E$. Comme w est injectif (c'est un automorphisme de E), on en déduit que $y = \lambda \cdot x$.

10. a. Comme $x \in K$, alors $u^i(x) \in K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ par récurrence (y compris pour $i = 0$, puisque $u^0(x) = I_E(x) = x$). Comme x_n est l'isobarycentre de n éléments de K , c'est une combinaison convexe d'éléments de K :

$$\forall 0 \leq i < n, \quad \lambda_i = \frac{1}{n} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leq i < n} \lambda_i = 1$$

et comme K est convexe, on en déduit que $x_n \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

♣ Comme K est compact, il existe une suite extraite de $(x_n)_{n \geq 1}$ qui converge vers un élément a de K .

10. b. Par linéarité de u (et changement d'indice),

$$u(x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u^i(x).$$

Par télescopage,

$$u(x_n) - x_n = \frac{u^n(x) - x}{n}.$$

Par homogénéité de $\|\cdot\|$ et par définition du diamètre de K ,

$$\|u(x_n) - x_n\| = \frac{\|u^n(x) - x\|}{n} \leq \frac{\delta(K)}{n}$$

puisque x et $u^n(x)$ appartiennent tous les deux à K .

• Par hypothèse, a est la limite d'une suite extraite de terme général $x_{\varphi(k)}$. Par continuité de u et composition de limites, $u(x_{\varphi(k)})$ tend vers $u(a)$ quand k tend vers $+\infty$, donc la différence $u(x_{\varphi(k)}) - x_{\varphi(k)}$ tend vers $u(a) - a$. Mais la majoration précédente montre que la différence $u(x_{\varphi(k)}) - x_{\varphi(k)}$ tend vers 0_E lorsque k tend vers $+\infty$. Par conséquent, $u(a) = a$.

Remarque subtile : on a démontré que, pour tout $x \in K$, il existait une suite extraite qui convergerait vers un point fixe de u . Si le compact K était vide, ce serait vrai et sans aucun intérêt. L'énoncé a pris soin de préciser que K n'était pas vide, donc il existe au moins un point $x \in K$ et on peut donc affirmer l'existence d'un point fixe $a \in K$ pour tout $u \in L(E)$ qui laisse K stable.

A priori, ce point fixe a dépend de l'endomorphisme u . Mais si par exemple le compact K contient le vecteur nul 0_E , il y a un point fixe évident dans K pour tous les $u \in L(E)$...

Le rapport du jury indique qu'il fallait rappeler la continuité de u (bien sûr !) mais aussi la justifier. C'est facile : u est un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension finie. Mais c'est aussi surprenant : l'espace $L(E)$ est muni de la norme $\|\cdot\|$, ce qui sous-entend que tous les endomorphismes considérés sont continus.

À ce niveau de détail, il faudrait aussi préciser que $\varphi(k)$ tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$... (Et aussi justifier cette propriété, pendant qu'on y est ?)

Mon opinion est qu'une rédaction raisonnablement rigoureuse, qui énonce précisément et au moment opportun les arguments importants, bénéficie de l'indulgence du jury sur les détails secondaires.

11. Soit $x \in K$. Comme K est stable par tous les u_i , alors $u_i(x) \in K$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Le vecteur $u(x)$ est donc une combinaison convexe de vecteurs de K :

$$u(x) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{r} \cdot u_i(x)$$

(cf [10.a.]), donc il appartient bien au convexe K . Ainsi, K est stable par u .

• Comme K est un compact convexe stable par $u \in L(E)$, on déduit de [10.] que u possède au moins un point fixe $a \in K$.

12. Comme a est un point fixe de u ,

$$a = u(a) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a), \quad \text{donc} \quad N_G\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = N_G(a).$$

Par ailleurs, $N_G(a) = N_G(u_i(a))$ pour tout $1 \leq i \leq r$ d'après [9.a.] et donc

$$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)) = \frac{1}{r} \cdot r N_G(a) = N_G(a).$$

L'égalité annoncée est ainsi démontrée.

• Soit $1 \leq j \leq r$. En appliquant de manière répétée l'inégalité triangulaire pour la norme N_G ,

$$\begin{aligned} N_G\left(\sum_{i=1}^r u_i(a)\right) &= N_G\left(u_j(a) + \sum_{i \neq j} u_i(a)\right) \leq N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{i \neq j} u_i(a)\right) \\ &\leq N_G(u_j(a)) + \sum_{i \neq j} N_G(u_i(a)) = \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)). \end{aligned}$$

Par homogénéité de N_G et l'égalité qui vient d'être démontrée,

$$rN_G(a) = N_G(r \cdot a) = N_G\left(\sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)).$$

Les deux termes extrêmes de l'inégalité sont égaux, donc les inégalités intermédiaires sont en fait toutes des égalités! En particulier,

$$N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq j}} u_i(a)\right) = N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq j}} u_i(a)\right).$$

13. Si le vecteur a est nul (ce qui peut arriver lorsque $0_E \in K$), les deux membres de l'égalité sont nuls, donc l'égalité est vraie (pour un λ_j positif quelconque).

♣ Dans la suite, on suppose que $a \neq 0_E$ et on fixe $1 \leq j \leq r$. Comme u_j est un automorphisme de E , alors $u_j(a) \neq 0_E$. On peut alors déduire de [12.] et du cas d'égalité [9.b.] qu'il existe un réel positif λ_j tel que

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq j}} u_i(a) = \lambda_j \cdot u_j(a).$$

Par conséquent,

$$(\lambda_j + 1) \cdot u_j(a) = u_j(a) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq j}} u_i(a) = \sum_{i=1}^r u_i(a) = r \cdot u(a).$$

Comme $r \geq 1$, on en déduit que

$$u(a) = \frac{\lambda_j + 1}{r} \cdot u_j(a).$$

14. Comme $\lambda_j \geq 0$, alors $1 + \lambda_j > 0$, donc

$$u_j(a) = \frac{r}{1 + \lambda_j} \cdot u(a) = \frac{r}{1 + \lambda_j} \cdot a$$

puisque a est un point fixe de u .

On déduit alors de [9.a.] que

$$N_G(a) = N_G(u_j(a)) = \frac{r}{1 + \lambda_j} N_G(a)$$

par homogénéité de N_G . On distingue alors deux cas pour conclure :

- Si $a = 0_E$, alors a est bien un point fixe de l'endomorphisme u_i pour tout $1 \leq i \leq r$. (Et c'est aussi, bien entendu, un point fixe de tout endomorphisme $v \in L(E)$!)
- Si $a \neq 0_E$, alors $N_G(a) > 0$ (une norme sépare les points) et par conséquent

$$\forall 1 \leq j \leq r, \quad \frac{r}{1 + \lambda_j} = 1.$$

On déduit alors de [13.] que $a = u(a) = u_j(a)$ pour $1 \leq j \leq r$.

On peut proposer une variante plus longue mais instructive : le vecteur a , s'il n'est pas nul, est un vecteur propre de u_j associé à la valeur propre $\mu = r/(1 + \lambda_j) \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $u_j \in GL(E)$, on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad u_j^k(a) = \mu^k \cdot a \in K$$

puisque $a \in K$ et que K est stable par tous les u_j^k (si $u_j \in G$, alors tous les u_j^k appartiennent au groupe G et K est, par hypothèse, stable par tous les automorphismes du groupe G).

La valeur propre μ est strictement positive et on élimine deux cas :

- Si $\mu > 1$, alors μ^k tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$ et comme $a \neq 0_E$, le vecteur $u_j^k(a)$ tend vers l'infini lorsque k tend vers $+\infty$. Mais $u_j^k(a) \in K$ et un compact est borné : l'hypothèse $\mu > 1$ est donc absurde.
- Si $0 < \mu < 1$, alors μ^k tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers $-\infty$. Le raisonnement précédent conduit alors à la même conclusion : l'hypothèse $0 < \mu < 1$ est absurde.

Il ne reste donc plus qu'une seule possibilité : $\mu = 1$.

15. Soit $u \in G$. Considérons alors l'ensemble des points fixes de u appartenant à K :

$$F_u = \{x \in K : u(x) = x\} = K \cap \{x \in E : (u - I_E)(x) = 0_E\}.$$

Comme $u \in GL(E)$ est continue, de même que I_E , l'ensemble F_u est l'intersection de K , partie compacte, avec une partie fermée de E , donc c'est une partie compacte de E .

La partie $\text{Ker}(u - I_E)$ est fermée en tant qu'image réciproque d'un fermé de E (ici, le singleton $\{0_E\}$) par une application continue ou en tant qu'espace vectoriel de dimension finie.
Comme toute partie fermée de E contenue dans un compact est elle-même compacte et qu'une intersection de parties fermées est toujours fermée, l'intersection d'un fermé et d'un compact est toujours un compact.

De plus, d'après [10.b.], cette partie compacte n'est pas vide.

Considérons une famille finie $(u_1, \dots, u_r)$ d'éléments de G et posons, comme au [11.],

$$u = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i.$$

D'après [11.], il existe $a \in K$, point fixe de u et d'après [14.], ce point a est aussi un point fixe pour $u_1, u_2, \dots, u_r$. Par conséquent,

$$a \in F_{u_1} \cap \dots \cap F_{u_r} \neq \emptyset.$$

On dispose ainsi d'une famille de parties fermées $(F_u)_{u \in G}$ contenues dans la partie compacte, convexe et non vide $K \subset E$ et on sait que l'intersection d'une sous-famille finie quelconque de ces parties n'est jamais vide.

D'après [7.] (en contrapasant), l'intersection

$$\bigcap_{u \in G} F_u$$

n'est pas vide, ce qui signifie qu'il existe (au moins) un point $a_0 \in K$ tel que

$$\forall u \in G, \quad u(a_0) = a_0.$$

Partie D. Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

16. Notons $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ et $c_{i,j}$, les coefficients respectifs des matrices A , B et AB . Comme les normes sont positives, il suffit de vérifier que $\|AB\|^2 \leq \|A\|^2 \|B\|^2$.

D'après la définition de la norme euclidienne canonique (cf cours),

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2.$$

D'après l'inégalité de Schwarz (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$),

$$\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{\ell=1}^n b_{\ell,j}^2 \right).$$

Il n'est pas nécessaire de changer d'indice dans la dernière somme, mais cela rend les calculs qui suivent plus simples à comprendre.

On en déduit donc que

$$\|AB\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n b_{\ell,j}^2 \right) = \|A\|^2 \left(\sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^n b_{\ell,j}^2 \right) = \|A\|^2 \|B\|^2.$$

La norme euclidienne canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est donc sous-multiplicative.

17. a. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'homothétie λI_n appartient à $GL_n(\mathbb{R})$. Or $\|\lambda I_n\| = |\lambda| \|I_n\|$ et $\|I_n\| > 0$ (puisque $I_n \neq 0_n$), donc $\|\lambda I_n\|$ tend vers $+\infty$ lorsque λ tend vers $+\infty$. Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ n'est donc pas borné et par conséquent, ce n'est pas une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Variante : la matrice $H_k = (1/k) \cdot I_n$ appartient à $GL_n(\mathbb{R})$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et la suite $(H_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle lorsque k tend vers $+\infty$:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|H_k - 0_n\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \cdot \|I_n\| = 0.$$

Comme la matrice nulle n'est pas inversible, l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas fermé et a fortiori pas compact.

17. b. On sait (c'est rappelé par l'énoncé) que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

♣ De plus, $O_n(\mathbb{R})$ est contenu dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension finie. Par conséquent, il suffit de vérifier que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ pour en conclure que c'est une partie compacte.

|| Sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. En démontrant que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme euclidienne particulière $\|\cdot\|$, on établit en fait ce résultat pour toutes les normes sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$,

$$\|P\|^2 = \text{tr}(P^\top \cdot P) = \text{tr}(I_n) = n$$

donc $\|P\| = \sqrt{n}$. Comme $O_n(\mathbb{R})$ est contenu dans une sphère (pour la norme euclidienne canonique $\|\cdot\|$), c'est une partie bornée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme euclidienne $\|\cdot\|$.

L'application $P \mapsto (P^\top, P) \mapsto P^\top \cdot P$ est continue comme composée de deux applications continues : c'est la composée d'une application linéaire définie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension finie, par une application bilinéaire définie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension finie.

Par définition, $O_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par une application continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, donc $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

18. Soit $R \in GL_n(\mathbb{R})$. Tout d'abord, la matrice $R^\top \cdot R$ est symétrique :

$$(R^\top \cdot R)^\top = R^\top \cdot (R^\top)^\top = R^\top \cdot R.$$

De plus, pour un vecteur colonne $X \neq 0$,

$$X^\top \cdot (R^\top \cdot R) \cdot X = (RX)^\top \cdot (RX) = \sum_{k=1}^n y_k^2$$

où $(y_1, \dots, y_n)$ sont les coefficients (réels) de la colonne RX . En tant que somme de réels positifs, cette somme est positive. De plus, si cette somme est nulle, alors tous les y_k sont nuls, ce qui signifie que la colonne RX est nulle. Mais comme R est supposée inversible, cela signifierait que X serait la colonne nulle. On a ainsi démontré que

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top \cdot (R^\top \cdot R) \cdot X > 0.$$

La matrice $R^\top \cdot R$ est donc définie positive.

19. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. En décomposant l'application $A \mapsto \rho_A(M)$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & (A^\top, A) & \longmapsto & A^\top \cdot M \cdot A \end{array}$$

on constate qu'il s'agit de la composée d'une application linéaire définie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (espace vectoriel de dimension finie) par une application bilinéaire définie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (espace vectoriel de dimension finie). En tant que composée de deux applications continues, l'application $A \mapsto \rho_A(M)$ est continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Sa restriction à G est évidemment continue sur G .

|| Il faut bien comprendre le sens de la seconde flèche du diagramme sagittal. Cette seconde flèche est l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ (B, A) & \longmapsto & B \cdot M \cdot A \end{array}$$

et on voit plus clairement ici qu'elle est bien bilinéaire.

|| Attention, dans cette question (contrairement à la question suivante), la variable est la matrice A et l'application $A \mapsto \rho_A(M)$ n'est pas linéaire.

20. a. Soit $A \in G$. Il est clair que $\rho_A = [M \mapsto A^\top \cdot M \cdot A]$ est une application linéaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

♣ Soient A et B dans G . Pour tout $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$(\rho_A \circ \rho_B)(M) = \rho_A(B^\top \cdot M \cdot B) = A^\top \cdot (B^\top \cdot M \cdot B) \cdot A = (BA)^\top \cdot M \cdot (BA) = \rho_{BA}(M). \quad (**)$$

Il est clair que ρ_{I_n} est l'identité sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $A \in G$, la matrice A est inversible et la relation $(**)$ montre que ρ_A est un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont la réciproque est $\rho_{A^{-1}}$.

Ainsi $\rho_A \in GL(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$ pour tout $A \in G$.

20. b. Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\rho_A(M) - \rho_B(M) = A^\top \cdot M \cdot A - B^\top \cdot M \cdot B = (A - B)^\top \cdot M \cdot A + B^\top \cdot M \cdot (A - B).$$

Par inégalité triangulaire et sous-multiplicativité [16.] de la norme euclidienne canonique $\|\cdot\|$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|\rho_A(M) - \rho_B(M)\| \leq \|(A - B)^\top\| \|M\| \|A\| + \|B^\top\| \|M\| \|A - B\| \leq [\|A - B\|(\|A\| + \|B\|)] \|M\|$$

puisque $\|C^\top\| = \|C\|$ pour toute matrice $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

En se restreignant à la sphère unité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que

$$\| \rho_A - \rho_B \| = \sup_{\|M\|=1} \| \rho_A(M) - \rho_B(M) \| \leq (\|A\| + \|B\|) \|A - B\|.$$

Cet encadrement prouve que l'application $A \mapsto \rho_A$ est continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (muni de la norme $\|\cdot\|$) dans $L(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$ (muni de la norme $\|\cdot\|$).

|| Cet encadrement prouve en fait que l'application $A \mapsto \rho_A$ est **localement lipschitzienne** (c'est-à-dire lipschitzienne sur toute partie bornée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$).

Par hypothèse, G est une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble H est, par définition, l'image de G par l'application continue $A \mapsto \rho_A$, donc H est bien une partie compacte de $L(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$.

• Par [20.a.], l'ensemble H est contenu dans $GL(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$, qui est un groupe pour la composition des applications.

La matrice I_n appartient à G (qui est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$), donc ρ_{I_n} appartient à H et

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \rho_{I_n}(M) = I_n^\top \cdot M \cdot I_n = M$$

donc $\rho_{I_n} = \rho_{I_n} \in H$.

Enfin, d'après [20.a.] et notamment la relation $(\star\star)$, quelles que soient les matrices A et B de G ,

$$(\rho_B)^{-1} \circ \rho_A = \rho_{AB^{-1}} \in H$$

puisque $AB^{-1} \in G$ (structure de groupe de G).

On a ainsi démontré que H était un sous-groupe de $GL(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$.

21. a. Toute matrice $A \in G$ est inversible, donc $\Delta \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ [18.].

D'après [19.], l'application $A \mapsto \rho_A(I_n) = A^\top \cdot A$ est continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (en prenant $M = I_n$). Par conséquent, Δ est l'image de G , partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, par une application continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, donc Δ est une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

21. b. Comme Δ est une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ [21.a.] et que K est son enveloppe convexe, alors K est une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ [3.b.].

• Comme Δ est contenu dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ [21.a.], que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe [1.] et que K , en tant qu'enveloppe convexe de Δ , est le plus petit convexe qui contienne Δ , alors K est contenu dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

• Soit $M \in K$. D'après le Théorème de Carathéodory (cf préambule), il existe une famille de scalaires $(\lambda_k) \in \Lambda_d$ et une famille de matrices $(M_k)_{0 \leq k \leq d}$ appartenant à Δ telles que

$$M = \sum_{k=0}^d \lambda_k M_k$$

où $d = \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$. Par définition de Δ , il existe donc une famille $(A_k)_{0 \leq k \leq d}$ de matrices appartenant à G telles que

$$M = \sum_{k=0}^d \lambda_k A_k^\top \cdot A_k.$$

Tout élément de H est de la forme ρ_A avec $A \in G$ et

$$\rho_A(M) = \sum_{k=0}^d \lambda_k A^\top \cdot (A_k^\top \cdot A_k) \cdot A = \sum_{k=0}^d \lambda_k (A_k A)^\top \cdot (A_k A).$$

Comme G est un groupe qui contient A et A_k , il contient aussi le produit $A_k A$, donc $(A_k A)^\top \cdot (A_k A) \in \Delta$. Comme $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq d} \in \Lambda_d$ et que K est convexe, on en déduit que $\rho_A(M) \in K$.

On a ainsi démontré que K était stable par tous les éléments de H .

|| Dans cette question, appliquer le Théorème de Carathéodory n'est pas nécessaire, il ne sert qu'à alléger la rédaction. En effet, l'enveloppe convexe de Δ étant l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de Δ , il suffirait de rédiger le raisonnement précédent en considérant des combinaisons convexes de n vecteurs de Δ , en prenant soin d'indiquer que le nombre n décrit $\mathbb{N}^*$.

22. a. L'espace $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une structure euclidienne. Par [21.b.], l'ensemble K est une partie compacte et convexe de E . Cette partie K n'est pas vide car $I_n \in G$ (sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$) et de ce fait $I_n = I_n^\top \cdot I_n \in \Delta$.

Par [20.b.], l'ensemble H est un sous-groupe compact de $GL(E)$. Enfin, par [21.b.], la partie K est stable par tous les éléments de H .

On peut donc appliquer le résultat établi dans la **Partie C [15.]** : il existe un élément de K qui est un point fixe pour tous les éléments de H . Autrement dit, d'après la définition de H , il existe une matrice $M \in K$ telle que $\rho_A(M) = M$ pour toute matrice $A \in G$.

22. b. D'après [22.a.], il existe une matrice $M \in K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A \in G, \quad A^\top \cdot M \cdot A = M.$$

On a admis après [18.] qu'il existait une matrice inversible $N \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M = N^\top \cdot N$. L'égalité $A^\top \cdot M \cdot A = M$ devient alors $A^\top \cdot (N^\top \cdot N) \cdot A = N^\top \cdot N$, c'est-à-dire

$$(NAN^{-1})^\top \cdot (NAN^{-1}) = I_n$$

(en multipliant à gauche par $(N^{-1})^\top$ et à droite par N^{-1} . Cela signifie que NAN^{-1} est une matrice orthogonale.

22. c. Comme la matrice N est inversible, l'application $A \mapsto NAN^{-1}$ est un automorphisme du groupe $GL_n(\mathbb{R})$:

$$N(A_1 A_2) N^{-1} = (N A_1 N^{-1})(N A_2 N^{-1}),$$

dont la réciproque est $B \mapsto N^{-1} B N$. Par conséquent, l'ensemble G_1 défini par

$$G_1 = \{NAN^{-1}, A \in G\}$$

est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et, d'après [22.b.], c'est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Par construction, ce sous-groupe G_1 est isomorphe à G et on a explicité l'isomorphisme réciproque, donc

$$G = \{N^{-1} B N, B \in G_1\}.$$

Partie E. Maximalité du groupe orthogonal

23. Soit $g \in L(E)$, un endomorphisme qui conserve l'orthogonalité.

• Comme E est un espace euclidien, on sait qu'il existe une base orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ et comme $d \geq 2$, on peut considérer les vecteurs $e_1 \pm e_i$ pour $i \in \llbracket 2, d \rrbracket$.

Les vecteurs $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$ sont orthogonaux :

$$\langle e_1 + e_i | e_1 - e_i \rangle = \|e_1\|^2 - \|e_i\|^2 = 0$$

et comme g conserve l'orthogonalité, les vecteurs $g(e_1 + e_i)$ et $g(e_1 - e_i)$ sont orthogonaux. Par linéarité de g ,

$$0 = \langle g(e_1 + e_i) | g(e_1 - e_i) \rangle = \|g(e_1)\|^2 - \|g(e_i)\|^2.$$

Par conséquent,

$$\forall 1 \leq i \leq d, \quad \|g(e_i)\|^2 = \|g(e_1)\|^2.$$

|| Si $d = 1$, cette propriété est évidente et la démonstration précédente réduite à néant.

Soit $x \in E$. Comme $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ est une base orthonormée de E ,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^d \langle e_i | x \rangle^2.$$

Comme g conserve l'orthogonalité, la famille $(g(e_i))_{1 \leq i \leq d}$ est une famille orthogonale et, par linéarité de g ,

$$g(x) = \sum_{i=1}^d \langle e_i | x \rangle \cdot g(e_i).$$

D'après le Théorème de Pythagore et la propriété qui vient d'être établie,

$$\|g(x)\|^2 = \sum_{i=1}^d \langle e_i | x \rangle^2 \|g(e_i)\|^2 = \|g(e_1)\|^2 \sum_{i=1}^d \langle e_i | x \rangle^2 = \|g(e_1)\|^2 \|x\|^2.$$

On a démontré la propriété voulue avec $k = \|g(e_1)\| \in \mathbb{R}_+$.

24. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ étant orthonormée pour le produit scalaire considéré,

$$\|x\|^2 = X^\top \cdot X \quad \text{et} \quad \|u(x)\|^2 = (uX)^\top \cdot (uX) = X^\top \cdot (u^\top \cdot u) \cdot X.$$

- Si la matrice U est orthogonale, on en déduit que u est une isométrie.
- Réciproquement, si u est une isométrie, on en déduit que

$$\begin{aligned}\forall X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top \cdot (U^\top \cdot U) \cdot X &= X^\top \cdot X \\ Y^\top \cdot (U^\top \cdot U) \cdot Y &= Y^\top \cdot Y \\ (X + Y)^\top \cdot (U^\top \cdot U) \cdot (X + Y) &= (X + Y)^\top \cdot (X + Y).\end{aligned}$$

Comme $Y^\top \cdot X$ et $Y^\top \cdot (U^\top \cdot U) \cdot X$ sont des scalaires, ils sont égaux à leurs transposées :

$$Y^\top \cdot X = X^\top \cdot Y, \quad Y^\top \cdot (U^\top \cdot U) \cdot X = X^\top \cdot (U^\top \cdot U) \cdot Y$$

car $U^\top \cdot U$ est une matrice symétrique. On en déduit, par combinaison linéaire que

$$\forall X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top \cdot (U^\top \cdot U) \cdot Y = X^\top \cdot Y.$$

En faisant parcourir la base canonique aux deux colonnes X et Y , on en déduit que

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad (U^\top \cdot U)_{i,j} = \varepsilon_i^\top \cdot (U^\top \cdot U) \cdot \varepsilon_j = \varepsilon_i^\top \cdot \varepsilon_j = \delta_{i,j}$$

et donc que $U^\top \cdot U = I_n$.

Supposons que u soit une isométrie et considérons deux vecteurs x et y de E . Par hypothèse et par linéarité de u ,

$$\|u(x) + u(y)\|^2 = \|u(x + y)\|^2 = \|x + y\|^2.$$

En développant cette égalité, on obtient

$$\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$$

puisque $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$ et $\|u(y)\|^2 = \|y\|^2$. Ainsi, une isométrie « conserve le produit scalaire » et en particulier elle « conserve l'orthogonalité ».

Cette propriété (qui sera un résultat essentiel du cours sur les espaces euclidiens) nous servira pour traiter la question [26.b.].

25. a. Comme les vecteurs x et v sont représentés par les colonnes X et V dans une base orthonormée, on sait que $\langle v | x \rangle = V^\top \cdot X$ et que $\|v\|^2 = V^\top \cdot V$. Par conséquent,

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad SX = X - 2 \frac{V^\top \cdot X}{V^\top \cdot V} \cdot V = X - \frac{2}{V^\top \cdot V} \cdot (V \cdot V^\top \cdot X) = \left(I_n - \frac{2}{V^\top \cdot V} \cdot V \cdot V^\top \right) X$$

en remarquant que le scalaire $V^\top \cdot X$ et la colonne V commutent.

L'identité précédente étant vérifiée pour toute colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que

$$S = I_n - \frac{2}{V^\top \cdot V} \cdot V \cdot V^\top.$$

Il faut bien faire attention au format des matrices : le produit $V^\top \cdot V$ (ligne fois colonne) est une matrice de $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire un scalaire tandis que le produit $V \cdot V^\top$ (colonne fois ligne) est une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

25. b. En revenant à la définition de s ,

$$s(v) = v - 2 \frac{\langle v | v \rangle}{\|v\|^2} \cdot v = -v$$

et $s(y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ orthogonal à v .

La droite $\mathbb{R} \cdot v$ dirigée par v et l'hyperplan orthogonal à v sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un scalaire α et un vecteur y orthogonal à v tels que $x = \alpha \cdot v + y$.

D'après le Théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \alpha^2 \|v\|^2 + \|y\|^2$. Par linéarité de s et le calcul précédent, on a $s(x) = -\alpha \cdot v + y$ donc

$$\|s(x)\|^2 = \alpha^2 \|v\|^2 + \|y\|^2 = \|x\|^2.$$

Donc s est une isométrie et sa matrice S relative à la base canonique est une matrice orthogonale [24.].

Variante : on peut aussi vérifier directement que $S^\top \cdot S = I_n$ en commençant par remarquer que la matrice S est symétrique.

26. a. La matrice de t relative à la base canonique est égale à $T = N \cdot S \cdot N^{-1}$. Comme $S \in O_n(\mathbb{R}) \subset \Gamma$ et que, par hypothèse, $N \Gamma N^{-1} \subset O_n(\mathbb{R})$, on en déduit que la matrice T est orthogonale et donc [24.] que t est une isométrie.

26. b. Nous venons de démontrer que t était une isométrie. Comme on l'a justifié au [24.],

$$\langle g(v) | g(y) \rangle = \langle (t \circ g)(v) | (t \circ g)(y) \rangle = \langle (g \circ s)(v) | (g \circ s)(y) \rangle \stackrel{[25.b.]}{=} \langle g(-v) | g(y) \rangle = -\langle g(v) | g(y) \rangle$$

par linéarité de g (et linéarité à gauche du produit scalaire). Le seul réel égal à son opposé est 0, donc $\langle g(v) | g(y) \rangle = 0$.

• Comme g est linéaire, $g(0) = 0$ et le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (par bilinéarité du produit scalaire). Pour démontrer que g conserve l'orthogonalité, il suffit donc de vérifier que

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle v | y \rangle = 0 \implies \langle g(v) | g(y) \rangle = 0.$$

C'est précisément ce que nous venons de démontrer !

|| Il fallait bien comprendre que le résultat précédent était établi pour un vecteur v qui pouvait être librement choisi au [25.].

27. Comme g conserve l'orthogonalité, on déduit de [23.] qu'il existe un réel positif k tel que

$$\forall x \in E, \quad \|g(x)\| = k \|x\|.$$

Si k était nul, alors g serait identiquement nul, alors que la matrice N , qui représente g dans la base canonique, est supposée inversible. Donc $k > 0$ et par conséquent $(1/k) \cdot g$ est une isométrie. On déduit alors de [24.] que la matrice $U = (1/k) \cdot N$ est orthogonale.

En revenant au préambule de [25.], le groupe Γ contient le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ et de plus, pour toute matrice $A \in \Gamma$,

$$O_n(\mathbb{R}) \ni N A N^{-1} = (k \cdot U) A (k \cdot U)^{-1} = k \cdot U A \cdot \left(\frac{1}{k} \cdot U^{-1}\right) = U A U^{-1}.$$

On en déduit que

$$\forall A \in \Gamma, \quad A = U^{-1}(U A U^{-1})U \in O_n(\mathbb{R})$$

puisque $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif.

On a ainsi démontré que $\Gamma = O_n(\mathbb{R})$ par double inclusion.