

1. Soit H , un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, distinct de $\{0\}$. On pose

$$a = \inf\{x \in H : x > 0\}.$$

1. a. Si $a = 0$, alors H est une partie dense dans $\mathbb{R}$. et on se donne $\varepsilon > 0$.

Il existe $x_0 \in H$ tel que $0 < x_0 < \varepsilon$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - kx_0| \leq \varepsilon$. Donc le sous-groupe H est une partie dense de $\mathbb{R}$.

1. b. Si $a > 0$, alors $a \in H$, $H = a\mathbb{Z}$ et H est fermé.

2. Un sous-groupe H de $(\mathbb{R}, +)$, distinct de $\mathbb{R}$, est fermé si, et seulement si, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.

3. Soient a et b , deux réels strictement positifs tels que le quotient b/a ne soit pas rationnel. L'ensemble

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{pa + qb, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui est dense dans $\mathbb{R}$.

1. a. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure, il existe $x_0 \in H$ tel que $0 < x_0 < \varepsilon$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$k = \left\lfloor \frac{x}{x_0} \right\rfloor \in \mathbb{Z}.$$

Par définition de la partie entière, on a donc

$$k \leq \frac{x}{x_0} < k + 1$$

et comme $x_0 > 0$, on en déduit que

$$kx_0 \leq x \leq kx_0 + x_0 < kx_0 + \varepsilon, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x - \varepsilon < kx_0 \leq x.$$

Comme $x_0 \in H$ et que H est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, alors $kx_0 \in H$ (quel que soit $k \in \mathbb{Z}$) et l'encadrement précédent montre que $|x - kx_0| \leq \varepsilon$.

On a ainsi démontré que H était une partie dense dans $\mathbb{R}$.

1. b. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments strictement positifs de H qui converge vers a par valeurs supérieures.

• Nous allons démontrer par l'absurde que $a \in H$. Nous supposons donc que $a \notin H$.

Posons $\varepsilon = a/2 > 0$. Comme $a + \varepsilon > a$, par définition de la borne inférieure, il existe $u \in H$ tel que $a < u < a + \varepsilon$.

On a supposé que $a \notin H$ et $u \in H$: ces deux réels sont nécessairement distincts.

D'autre part, $a + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $H \cap \mathbb{R}_+^*$, donc il existe bien un élément de $H \cap \mathbb{R}_+^*$ qui est strictement inférieur à $a + \varepsilon$.

Comme $u > a$, toujours par définition de la borne inférieure, il existe $v \in H$ tel que $a < v < u$. Comme H est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, on en déduit que $u - v \in H$. Or

$$0 < u - v < \varepsilon = a/2 < a,$$

donc il existe un élément dans $H \cap \mathbb{R}_+^*$ qui est strictement inférieur à $a = \inf(H \cap \mathbb{R}_+^*)$: c'est impossible. Donc $a \in H$.

• Comme $a \in H$ et que H est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, alors $a\mathbb{Z} \subset H$.

Réciproquement, soit $x \in H$. On pose à nouveau $k = \lfloor x/a \rfloor \in \mathbb{Z}$ et, comme plus haut, on en déduit que

$$ka \leq x < (k+1)a.$$

Mais $x \in H$, $ka \in H$ et H est un sous-groupe additif, donc $x - ka \in H$ et

$$0 \leq x - ka < a.$$

Comme $a = \min(H \cap \mathbb{R}_+^*)$, on en déduit que $x - ka = 0$ et donc que $x = ka \in a\mathbb{Z}$.

Finalement, $H = a\mathbb{Z}$.

• Considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. En tant que suite convergente, cette suite est bornée. Quel que soit $R > 0$, l'intersection $H \cap B(0, R)$ ne contient qu'un

nombre fini de réels. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs distinctes et comme elle converge, elle est nécessairement stationnaire. Par conséquent, $\ell \in H$ et nous avons démontré que H était fermé.

2. On a distingué quatre cas :
- Si $H = \{0\}$, alors H est fermé et $H = 0\mathbb{Z}$.
 - Si $H = \mathbb{R}$, alors H est fermé.
 - Si H n'est pas réduit à $\{0\}$, alors $H \cap \mathbb{R}_+^*$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et :
 - si $a = \min(H \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$, alors H est dense dans $\mathbb{R}$;
 - si $a > 0$, alors $H = a\mathbb{Z}$ et H est fermé.

La seule partie à la fois dense dans $\mathbb{R}$ et fermée est $\mathbb{R}$ lui-même. Par conséquent, on a bien démontré l'alternative suivante :

- ou bien $H = \mathbb{R}$;
- ou bien $H \neq \mathbb{R}$ est fermé et il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $H = a\mathbb{Z}$;
- ou bien $H \neq \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3. La somme de deux sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ est encore un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
Le sous-groupe $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est au plus dénombrable (car $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable) et $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, donc $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \neq \mathbb{R}$.

Comme a et b sont strictement positifs et appartiennent à $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, ce sous-groupe n'est pas réduit à $\{0\}$.

Si $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ était fermé, alors il existerait un réel $\alpha > 0$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$. En particulier, il existerait deux entiers k et ℓ dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$a = k\alpha \quad \text{et} \quad b = \ell\alpha.$$

Comme $\alpha > 0$, on en déduirait alors que

$$\frac{a}{b} = \frac{k\alpha}{\ell\alpha} = \frac{k}{\ell} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est faux par hypothèse.

Il ne reste plus qu'une seule possibilité : le sous-groupe H est un sous-groupe dense dans $\mathbb{R}$, distinct de $\mathbb{R}$.