Suites et séries de fonctions : énoncés

Exercices CCP

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-nx}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a>0$, puis que la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\dfrac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante de réels >0 divergeant vers l'infini. Montrer :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-a_n x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}.$$

Que vaut cette intégrale pour les suites $(n+1)_{n\geq 0}$ et $(2n+1)_{n\geq 0}$?

3) Soit $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)(2n+1)}$. Calculer $a,b\in\mathbb{Q}$ tels que $S=a\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}+b\pi$ et en déduire la valeur de S.

4) On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\ :\ x\longmapsto\dfrac{1}{(1+nx)(1+(n-1)x)}$. Calculer les sommes partielles de la série $\sum u_n$. Sur quels intervalles a-t-on convergence uniforme ? Peut-on dériver terme à terme ?

5) Etudier la convergence uniforme de la suite $f_n : x\mapsto \sin(n^2x)\exp(-n^2x)$ sur l'intervalle $[0,1]$.

6) Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ décroissante vers 0. Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de terme général $u_n(x)=f(x+n)-f(x+n+1)$.

7) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément, la suite (u_n) converge uniformément vers 0.

8) On pose $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{n+2}{n+1}e^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}\,x)$.

a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b) Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0,+\infty[$, $]0,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$ pour $a>0$?

9) Montrer que $S :\ x\longmapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}$ est définie et de classe C^1 sur $[0,1]$. Calculer $S'(1)$.

10) Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série $\sum_{n\geq 0} t^n\sin(\pi t)$ sur $[0,1]$.

11) Étudier le domaine de définition et la continuité de $f(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+(-1)^n}$.

Exercices Mines-Centrale

12) On donne un intervalle $[a,b]$ (avec $a<b$) et une suite de fonctions f_n définies sur $[a,b]$, convergeant simplement vers f. Montrer que chacune des hypothèses suivantes entraîne la convergence uniforme de la suite :

a) Les f_n sont dérivables et leurs dérivées sont uniformément bornées sur $[a,b]$.

b) Les f_n sont croissantes et f est continue.

13) Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0(x) = 1 & \text{pour } x \in [0,1] \\ u_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t & \text{pour } x \in [0,1] \text{ et } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $[0,1]$. Montrer que sa somme S est de classe C^1 sur $[0,1]$ et expliciter une équation fonctionnelle vérifiée par S.

14) Soit $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$, $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $[a,b]$ par :

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t & \text{pour } x \in [a,b] \text{ et } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$ est donner une expression de sa somme S.

15) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,t^k\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $\forall k\in\mathbb{N}$. En utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass, montrer que $f=0$. Démontrer que le résultat subsiste si l'on suppose seulement :

$$\exists k_0 \ /\ \forall k,\ k\geq k_0 \Longrightarrow \int_a^b f(t)t^k\,\mathrm{d}t = 0$$

16) Pour tout réel α, on définit $f_\alpha : x\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<\alpha \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g_\alpha : x\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<\alpha \\ x-\alpha & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit $D=\{r_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ une partie dénombrable bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que les séries de fonctions

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_{r_n}}{2^n} \quad \text{et} \quad g = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g_{r_n}}{2^n}$$

convergent uniformément sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que f est croissante et que g est convexe. Quels sont les points de discontinuité de f ? En quels points g est-elle dérivable ?

17) a) Pour $n\in\mathbb{N}$, que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$?

b) Montrer qu'il n'existe par de partie $I\subset\mathbb{N}$ telle que $f(x)=\displaystyle\sum_{n\in I}\frac{x^n}{n!}$ soit équivalent à $\dfrac{e^x}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

18) Si $x>1$, on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

a) Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

b) Montrer que la fonction $F(x) = \displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{\zeta(p)}{p}\, x^p$ est définie et continue sur $[-1, 1[$ et de classe C^1 sur $]-1, 1[$.

c) Donner une forme plus simple de $F(x)$.

19) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \int_1^x (\ln t)^n \,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa somme.

20) On pose $f_n(t) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$ et $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Quel est le domaine de définition de s ? Justifier :

$$s(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\frac{2}{\pi}$$

21) Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x-1}{n}\right)\right]$. Étudier le domaine de définition et la continuité de f. Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$, puis un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

22) On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-nx}\right)$. Étudier le domaine de définition et la continuité de S. Montrer que $S(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y$ au voisinage de 0.

23) Approximation de l'unité

Soit $\theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$, telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\,\mathrm{d}t = 1$. On note, pour tout $\eta > 0$:

$$\theta_\eta : \ t \longmapsto \frac{1}{\eta}\,\theta\left(\frac{t}{\eta}\right).$$

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornée.

a) Montrer que pour tout $\eta > 0$, l'application $g_\eta : \ x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\theta_\eta(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f_η converge vers f uniformément sur tout segment $[a, b]$ quand η tend vers 0^+.

24) Étudier $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ et en donner un équivalent au voisinage de $+\infty$.

25) Donner un équivalent en 0^+ de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} nx}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 nx}$

26) Soit $f_n : t \mapsto \dfrac{n}{1+n^2t^2}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, avec $a < b$. Déterminer la limite de $I_n = \displaystyle\int_a^b f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$.

27) Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que si f est de classe C^1, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ et $P_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f'$.

b) Généraliser au cas où f est de classe C^k avec $k \geq 1$: il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout i compris entre 0 et k, $P_n^{(i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f^{(i)}$.

c) Montrer que si f est de classe C^∞, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $P_n^{(i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f^{(i)}$.

d) On suppose maintenant que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $P_n^{(i)}$ converge uniformément vers $f^{(i)}$ sur $[a,b]$.

28) (Centrale) Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \|_\infty$. Pour $f \in E$, on pose :

$$\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

a) Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme continu T et calculer sa norme.

b) Majorer $|\lambda|$ pour λ valeur propre de T.

c) On pose pour, $x \in]0,1[$, $\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2}$ et $\beta(x) = \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$. Montrer que $\alpha - \beta$ se prolonge en un élément de E. En déduire que $\alpha = \beta$.

29) (Centrale) On note $\zeta(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ et $\eta(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$.

a) Montrer que ζ est définie et continue sur $A = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

b) On pose $a_n = (-1)^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ et $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ pour tout $n \geq 0$. En effectuant une transformation d'Abel, montrer que η converge simplement sur $B = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ avec :

$$\forall z \in B,\ \eta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z - 1}{(n+1)^z}.$$

Montrer que η est continue sur B.

c) Montrer que $\eta(z) = \zeta(z)\left(1 - 2^{1-z}\right)$ pour tout $z \in A$ et en déduire un équivalent de $\zeta(z)$ au voisinage de 1.

30) Pour $n \geq 1$, on pose $f_n: x \longmapsto \dfrac{n!\, n^x}{x(1+x)(2+x)\dots(n+x)}$.

a) Quel est le domaine de définition de f, limite simple de la suite (f_n) ?

b) Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$, quand ces deux quantités sont définies.

c) Montrer que la fonction $\ln \circ f$ est convexe sur $]0,+\infty[$.

d) Calculer $\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}$ puis montrer que f est de classe C^1 sur son domaine de définition.

31) (Centrale 2012) Soit $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ u_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x u_n(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}^+$ et que sa somme S est continue.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $S(x) = u_0(x) + e^x \displaystyle\int_0^x e^{-t}\, u_0(t)\,\mathrm{d}t$.

c) On suppose que u_0 admet une limite finie en $+\infty$. La fonction S admet-elle une limite en $+\infty$?

32) (Centrale 2012) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f:\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+x^2}$.

Que vaut $f(0)$? Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$ et donner un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

33) (Centrale 2012) Montrer que $f:\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$.

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$, $f(x) = e\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$. En déduire que f est de classe C^∞.

34) (Mines 2014) Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs qui décroit vers 0. Pour $N\in\mathbb{N}$, on définit $\sigma_N:\ x\longmapsto \sum_{n=1}^{N} a_n \sin nx$ et $S_N:\ x\longmapsto \sum_{n=1}^{N}\sin nx$.

a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et pout tout $N\in\mathbb{N}$, $|S_N(x)| \le \dfrac{1}{\sin x/2}$.

b) En utilisant la relation $\sin nx = S_n(x) - S_{n-1}(x)$, montrer que σ_N converge simplement sur $[0,2\pi]$ vers une application que nous noterons σ.

c) Pour $x\in[0,2\pi]$ et $N\in\mathbb{N}$, on note $R_N(x) = \sigma(x) - \sigma_n(x) = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \sin nx$. Montrer :

$$\forall x\in\,]0,2\pi[,\ \forall N\in\mathbb{N},\ |R_N(x)| \le 2\,\frac{a_{N+1}}{\sin x/2}$$

et en déduire que la série $\sum_{n\ge1} a_n\sin nx$ converge uniformément sur tout segment $[a,2\pi-a]$ avec $0<a<\pi$.

d) On suppose de plus que $a_n \underset{+\infty}{=} o(1/n)$. Pour $\varepsilon>0$ fixé, il existe un entier N_ε tel que $|na_n|\le\varepsilon$ pour tout $n\ge N_\varepsilon$. Montrer :

$$\forall x\in]0,\pi],\ \forall N\ge N_\varepsilon,\ \forall M\in\mathbb{N},\ |R_N(x)| \le \left(M\,x + \frac{2\pi}{M\,x}\right)\varepsilon$$

et en déduire que la convergence est uniforme sur $[0,2\pi]$.

e) On suppose réciproquement que la convergence est uniforme sur $[0,2\pi]$. En utilisant $R_n(x_n) - R_{2n}(x_n)$, pour une bonne valeur de x_n, montrer que $a_n \underset{+\infty}{=} o(1/n)$.

35) (Centrale 2014) Montrer que $F:\ x\longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^{xt}-1}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$. Établir l'égalité :

$$\forall x>0,\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}.$$

36) (Mines 2016) Quelles sont les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limites uniformes sur $\mathbb{R}$ (respectivement sur tout segment de $\mathbb{R}$) d'une suite de polynômes ?

37) (Mines 2017) a) Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}$.

b) En déduire un équivalent en $+\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

38) (Mines 2017) Démontrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\left(\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\right)^p$ tend vers $\exp(A+B)$ quand p tend vers l'infini. On pourra utiliser le développement : $\exp(M) = I_n + M + o(M)$, pour M au voisinage de 0

39) (Centrale Python 2018) On pose :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln^2 t\,\mathrm{d}t \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \ln^2 n + 2\sum_{1\leq i\leq j\leq n+1}\frac{1}{ij} - 2\ln n\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}.$$

a) Calculer une valeur approchée de I et écrire un programme qui calcule S_n. Que peut-on conjecturer ?

b) Montrer que la fonction Γ est deux fois dérivable en 1 et que $I = \Gamma''(1)$.

c) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln^2 t\,\mathrm{d}t$ tend vers I quand n tend vers $+\infty$.

d) Montrer que

$$I_n = \frac{n\ln^2 n}{n+1} + 2n\,\ln n\int_0^1 (1-s)^n\,\ln s\,\mathrm{d}s + n\int_0^1 (1-s)^n\,\ln^2 s\,\mathrm{d}s.$$

Conclure.

40) a) Montrer que $f:\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

b) Trouver des équivalents de f en 0 et en $+\infty$.

Exercices X-ENS

41) Théorème de réalisation de Borel

a) Soit $\varphi : x \mapsto \begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Construire à l'aide de φ une application θ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\theta(x) = 1 \text{ si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \qquad \theta(x) = 0 \text{ si } x \notin]-1, 1[\qquad 0 \leq \theta(x) \leq 1 \text{ pour tout } x$$

b) Soit alors une suite (a_n) de réels. Montrer qu'il existe une suite (k_n) de réels strictement positifs telle que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}\theta(k_n x)x^n$ soit de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

42) Fonction de Vanderwaerden :

Soit $g :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, 2-périodique définie par : $g(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$.

a) Montrer que la série $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n x)$ définit une application continue sur $\mathbb{R}$. Tracer les premières sommes partielles de la série.

b) Montrer que si $F:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable en x, alors $T(h,k)=\dfrac{F(x+h)-F(x-k)}{h+k}$ a une limite quand (h,k) tend vers $(0^+,0^+)$.

c) Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $k_n=\lfloor 4^n x\rfloor$, $a_n=k_n 4^{-n}$ et $b_n=(k_n+1)4^{-n}$. En étudiant le taux d'accroissement de f entre a_n et b_n, montrer que f n'est pas dérivable en x.

43) (X) a) Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) tels que $P_n(0)=0$ et convergeant uniformément vers f.

b) Soit $F=\{f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}),\ f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0\}$. Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{Q}$ engendré par les fonctions $\varphi_n:\ x\longmapsto e^{-nx}$, pour $n\in\mathbb{N}^*$, est dense dans $(F,\|\ \|_\infty)$.

c) Soit $f_n:\ x\longmapsto e^{-x}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}x^k$. Montrer que f_n converge uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$.

d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions de la forme $x\longmapsto P(x)\,e^{-x}$, avec $P\in\mathbb{R}[X]$, est dense dans $(F,\|\ \|_\infty)$.

44) (X) Trouver les fonctions $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(x^n)}{2^n}$ pour tout $x\in[0,1]$.

45) Soit X un compact d'un espace vectoriel normé E et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour toute suite $(x_n)_{n\geq N}$ de $K^{\mathbb{N}}$ et pour tout $x\in K$, si x_n tend vers x, alors $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$. Montrer que f est continue et que la convergence est uniforme.

46) (X 2019) a) Montrer que pour $g:\ [a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ continue par morceaux, $\displaystyle\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

Soit $g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodique. On suppose que g est C^1 par morceaux, c'est-à-dire qu'il existe une subdivision $(a_0,a_1,\dots,a_k)$ de $[-\pi,\pi]$ telle que pour tout $i\in\{0,\dots,k-1\}$, la restriction de g à $]a_i,a_{i+1}[$ admet un prolongement g_i de classe C^1 à $[a_i,a_{i+1}]$. On définit :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ \forall x\in\mathbb{R},\ c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{-int}\ \text{et}\ S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ikx}.$$

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on peut écrire :

$$S_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}g(x-s)D_n(s)\,\mathrm{d}s$$

où D_n est une fonction que l'on explicitera.

c) Montrer que $\displaystyle\int_{-\pi}^{0}D_n(s)\,\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}D_n(s)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}$.

d) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $S_n(x)$ converge vers $\dfrac{1}{2}\left(f(x^-)+f(x^+)\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

e) En considérant g telle que $g(x)=x^2$ pour $-\pi\leq x\leq\pi$, en déduire la valeur de $\zeta(2)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Suites et séries de fonctions : corrigés

Exercices CCP

1) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq a$, $0 \leq e^{-nx} \leq e^{-na}$. Comme $a > 0$, e^{-na} est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison $e^{-a} \in [0,1[$) : la série étudiée converge normalement, donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

b) Pour le second exemple, il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$, puisque pour $x = 0$, la série ne converge pas absolument. Nous devons donc revenir à l'étude des sommes partielles. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite de terme général $\dfrac{e^{-nx^2}}{n}$ décroît vers 0 quand n tend vers l'infini. Le théorème spécial des séries alternées prouve que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\frac{e^{-kx^2}}{k}\right| \leq \frac{e^{-(n+1)x^2}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ce majorant ne dépend pas de x et tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{-nx^2}}{n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

2) Pour $x > 0$, la suite de terme général $e^{-a_n x}$ décroit vers 0, donc d'après le théorème spécial des séries alternées, la fonction $f :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-a_n x}$ est définie sur $]0,+\infty[$. Notons $S_n(x)$ (resp. $R_n(x)$) la somme partielle (resp. le reste) de cette série.

La série converge uniformément sur tout $[\alpha,+\infty[$, avec $\alpha > 0$, puisque, toujours par le théorème spécial des séries alternées, on a :

$$\forall x \in [\alpha,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |R_n(x)| \leq e^{-a_{n+1}x} \leq \underbrace{e^{-a_{n+1}\alpha}}_{\text{ind. de } x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La fonction f est donc continue sur chaque $[\alpha,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$.

On peut se passer dans ce cas simple du théorème de converge dominée : on a $|f(x)| \leq e^{-a_0 x}$ et cette fonction est sommable sur $]0,+\infty[$, donc f est également sommable sur $]0,+\infty[$. Comme chaque somme partielle S_n est sommable, on peut ensuite écrire :

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^{+\infty} |R_n(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} e^{-a_{n+1}x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a_{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-a_n x}\mathrm{d}x.$$

On peut en particulier écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-(n+1)x}\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2\\
\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-(2n+1)x}\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

3) On utilise une décomposition en éléments simples, puis les égalités $\dfrac{1}{n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(2n+1)} &= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \left(-\frac{2}{2n+1} + \frac{3}{3n+1} \right) \\
&= -2 \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} + 3 \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{3n+1} \\
&= -2 \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-t^2)^n \right) \mathrm{d}t + 3 \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-t^3)^n \right) \mathrm{d}t \\
&= -2 \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{N+1}}{1+t^2} \mathrm{d}t + 3 \int_0^1 \frac{1-(-t^3)^{N+1}}{1+t^3} \mathrm{d}t \\
&= -2 \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t + 3 \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} \mathrm{d}t + \underbrace{2 \int_0^1 \frac{(-t^2)^{N+1}}{1+t^2} \mathrm{d}t - 3 \int_0^1 \frac{(-t^3)^{N+1}}{1+t^3} \mathrm{d}t}_{=R_n}
\end{aligned}$$

Comme $|R_n| \leq 2 \displaystyle\int_0^1 t^{2(N+1)} \,\mathrm{d}t + 3 \int_0^1 t^{3(N+1)} \,\mathrm{d}t = \frac{2}{2N+3} + \frac{3}{3N+4} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(2n+1)} = -\frac{\pi}{2} + 3 \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}$$

d'où $a = 3$ et $b = \frac{1}{2}$.

On décompose $\dfrac{1}{1+t^3}$ en éléments simple pour calculer S :

$$\int \frac{1}{1+t^3} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} \int \frac{2-t}{1-t+t^2} \,\mathrm{d}t + \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+t} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} \ln|1+t| - \frac{1}{6} \ln(1-t+t^2) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2t-1) \right)$$

d'où :

$$S = -\frac{\pi}{2} + 3 \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(1+t)^2}{1-t+t^2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2t-1) \right) \right]_0^1 = \ln 2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} \right) \pi$$

car $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \operatorname{Arctan}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$.

4) Posons $A = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in A$, $u_n(x) = \dfrac{n}{1+nx} - \dfrac{n-1}{1+(n-1)x}$, donc :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in A,\ S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x) = \frac{N}{1+Nx}$$

donc la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge simplement sur $D = A \setminus \{0\}$ vers la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. En notant R_N le reste de la série, nous avons :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in D,\ R_N(x) = \frac{1}{x} - \frac{N}{1+Nx} = \frac{1}{x(1+Nx)}$$

donc R_N n'est pas bornée au voisinage de 0 ; en particulier, il n'y a pas convergence uniforme sur le domaine de convergence simple. Par contre, pour $a > 0$, il y a convergence uniforme sur $D_a = (]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[) \cap D$: pour $x \in D_a$ et $N > \dfrac{1}{a}$, nous avons

- pour $x > 0$: $0 \leq R_N(x) = \dfrac{1}{x(1+Nx)} \leq \dfrac{1}{a(Na-1)}$;
- pour $x < 0$: $0 \leq R_N(x) = \dfrac{1}{|x|(-Nx-1)} \leq \dfrac{1}{a(Na-1)}$;

donc $|R_n(x)|$ est majoré indépendamment de x par un terme qui tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

Les u_n sont de classe C^1 sur D avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in D,\ u_n'(x) = -\frac{n^2}{(1+nx)^2} + \frac{(n-1)^2}{(1+(n-1)x)^2}$$

La série de terme général $u_n'(x)$ converge donc simplement sur D vers $x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$, qui est bien la dérivée de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$: on peut ainsi dériver terme à terme.

5) La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Si nous notons $\varphi :\ y \longmapsto \sin(y)e^{-y}$, nous avons :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{y\in[0,n]} |\varphi(y)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup_{y\in[0,+\infty[} |\varphi(y)| \neq 0$$

donc la suite ne converge pas uniformément sur $[0,1]$. Par contre, il y a convergence uniforme sur $[a,1]$ pour tout $a \in]0,1]$:

$$\forall x \in [a,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq e^{-n^2x} \leq e^{-n^2a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

6) Pour $x \geq 0$, on a :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = f(x) - f(x+n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

donc la série converge simplement vers f sur $\mathbb{R}^+$. On a ensuite :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geq 0,\ |f(x) - S_n(x)| = f(x+n+1) \leq f(n+1)$$

Comme ce majorant est indépendant de x et tend vers 0 quand n tend vers l'infini, il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Par contre, on ne peut rien dire pour la convergence normale :

- avec $f :\ x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$, on a :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geq 0,\ 0 \leq u_n(x) = \frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \alpha_n$$

  donc il y a convergence normale sur $\mathbb{R}^+$, puisque α_n est le terme général d'une série convergente ;

- considérons la fonction f en escalier définie par $f(0) = 1$ si $x \in [0,1[$, $f(x) = 1/2$ si $x \in [1,3[$, $f(x) = 1/4$ si $x \in [3,7[$, et ainsi de suite (la largeur de l'intervalle double à chaque étape). Plus précisément, en posant $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{p+1} = \alpha_p + 2^p$ pour tout $p \geq 1$, on a :

  $$\forall p \in \mathbb{N},\ f(x) = \frac{1}{2^p} \text{ si } \alpha_p \leq x < \alpha_{p+1}$$

  Pour tout $p \geq 0$, on a alors $\alpha_p = 2^p - 1$ et $f(\alpha_{p+1}-1) - f(\alpha_{p+1}) = \dfrac{1}{2^p} - \dfrac{1}{2^{p+1}} = \dfrac{1}{2^{p+1}}$. On en déduit :

  $$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in [\![\alpha_p, \alpha_{p+1}[\![,\ \underbrace{\sup_{x\geq 0}|u_n(x)|}_{=M_n} \leq |f(\alpha_{p+1}-1) - f(\alpha_{p+1})| = \frac{1}{2^{p+1}}.$$

  On en déduit que

  $$\sigma_p = \sum_{n=\alpha_p}^{\alpha_{p+1}-1} M_n \geq (\alpha_{p+1} - \alpha_p)\frac{1}{2^{p+1}} = \frac{1}{2}$$

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\alpha_{N+1}-1} M_n = \sum_{p=0}^{N} \sigma_p \geq \frac{N+1}{2}$ tend vers $+\infty$: la série de terme général M_n diverge et il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}^+$.

7) En notant A le domaine de convergence uniforme et $(R_n)_{n\geq 0}$ la suite des restes de la série, nous savons que R_n converge uniformément vers 0, donc pour $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in A,\ \|R_n(x)\| \leq \varepsilon.$$

On a donc :

$$\forall n \geq n_0 + 1,\ \forall x \in A,\ \|u_n(x)\| = \|R_{n-1}(x) - R_n(x)\| \leq \|R_{n-1}(x)\| + \|R_n(x)\| \leq 2\varepsilon$$

donc (u_n) converge uniformément vers 0.

8) a) Pour $f_n(0) = 1$ pour tout n, donc $f_n(0)$ tend vers 1 ; pour $x \neq 0$, $f(x) = O(e^{-nx^2})$ donc $f_n(x)$ tend vers 0. f_n converge donc simplement vers $f :\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

b) Comme les f_n sont continues sur $[0, +\infty[$ et que f n'est pas continue en 0, la convergence n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

Elle ne l'est pas non plus sur $]0, +\infty[$ car, dans le cas contraire, on pourrait appliquer le théorème de la double limite : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0, donc $f(x) = 0$ tendrait vers 1 quand x tend vers 0^+.

Il y a par contre convergence uniforme $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$:

$$\sup_{x\geq a} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{n+2}{n+1}\, e^{-na^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

9) Posons $u_n :\ x \in [0,1] \longmapsto \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a :

- chaque u_n est de classe C^1 sur $[0,1]$, avec $u_n' :\ x \longmapsto \dfrac{1}{x+n} - \dfrac{1}{n}$;
- pour $x \in [0,1]$, $u_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est absolument convergente : la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0,1]$;
- pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

  $$|u_n'(x)| = \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{1}{n^2}$$

  donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur $[0,1]$ (car $\dfrac{1}{n^2}$ ne dépend pas de x et est un terme général de série convergente).

On peut donc appliquer le théorème de dérivation : S est de classe C^1 sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1],\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}.$$

En particulier, $S'(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1} - 1 = -1$.

10) a) Si $t \in [0,1[$, on reconnait une série géométrique convergente et la série converge vers $\dfrac{\sin(\pi t)}{1-t}$; pour $t=1$, le terme général de la série est nul : la série converge et sa somme est nulle. On a donc convergence simple sur $[0,1]$ et la somme S est définie par :

$$\forall t \in [0,1],\ S(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{1-t} & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

b) Montrons qu'il n'y a pas convergence normale. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \longmapsto t^n \sin(\pi t)$ est positive sur $[0,1]$ et atteint son maximum en l'unique $t_n \in]1/2,1]$ vérifiant :

$$\tan(\pi t_n) = -\frac{\pi}{n}\, t_n \qquad (\star)$$

On montre ensuite que la suite (t_n) est croissante. En effet, pour tout n, on a :

$$\forall t \in]1/2,1],\ t > t_n \Longleftrightarrow \tan(\pi t) > -\frac{\pi t}{n}$$

et $\tan(\pi t_{n+1}) = -\dfrac{\pi}{n+1}\, t_{n+1} > -\dfrac{\pi}{n}\, t_{n+1}$.

La suite (t_n) a donc une limite $\ell \in]1/2,1]$; en faisant tendre n vers l'infini dans $(\star)$, on obtient $\tan(\pi\ell) = 0$, soit $\ell = 1$. On peut ensuite poser $t_n = 1 - \varepsilon_n$ avec ε_n qui tend vers 0^+. On a alors :

$$\pi\varepsilon_n \sim_{+\infty} \tan(\pi\varepsilon_n) = \frac{\pi(1-\varepsilon_n)}{n} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{n}$$

ce qui donne le développement :

$$t_n = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a enfin :

$$M_n = \sup_{0 \le t \le 1} |t^n \sin(\pi t)| = t_n^n \sin(\pi t_n) = e^{n\ln(1-1/n+o(1/n))} \sin(\pi(1/n + o(1/n)) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{ne}$$

et la série de terme général M_n diverge : il n'y a pas convergence normale sur $[0,1]$.

c) Comme les fonctions $t \longmapsto t^n \sin(\pi t)$ sont continues et que S n'est pas continue, la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Cela prouve bien en particulier qu'il n'y a pas convergence normale. Il faut donc retenir de cet exemple qu'il peut être délicat d'étudier la convergence normale, d'autant que savoir qu'il n'y a pas convergence normale ne donne aucun renseignement constructif.

11) Pour $x < 0$, le terme général $u_n(x)$ ne tend pas vers 0, il y a donc divergence grossière. Pour $x \ge 0$, on a :

$$u_n(x) = e^{-nx}\, \frac{(-1)^n}{n}\, \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}}}_{=1+O(1/n)} = (-1)^n\, \frac{e^{-nx}}{n} + O\left(\frac{e^{-nx}}{n^2}\right) = (-1)^n\, \frac{e^{-nx}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série converge : le permier terme vérifie les hypothèse du théorème spécial des séries alternées ($\frac{e^{-nx}}{n}$ décroit vers 0) et le second est un terme général de série absolument convergente).

On a donc convergence simple sur $[0,+\infty[$. En posant $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} + \alpha_n$ où $\alpha_n = O(1/n^2)$, on a ensuite :

$$\forall x \ge 0,\ f(x) = \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{e^{-nx}}{n}}_{=g(x)} + \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}}_{=h(x)}.$$

La série qui définit g converge uniformément, grâce au théorème spécial des séries alternées : pour tout $x \geq 0$, $\dfrac{e^{-nx}}{n}$ décroît vers 0, donc

$$\forall n \geq 2,\ \forall x \geq 0,\ \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{-kx}}{k} \right| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\text{ind. de } x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

La série qui définit h converge normalement sur $[0, +\infty[$, puisque

$$\forall n \geq 2,\ \forall x \geq 0,\ |\alpha_n e^{-nx}| \leq |\alpha_n| \text{ qui est un terme général de série convergente.}$$

Comme les fonctions $x \longmapsto (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$ et $x \longmapsto \alpha_n e^{-nx}$ sont continues, g et h sont continues (comme limites uniformes de fonctions continues) et f est continue.

Exercices Mines-Centrale

12) a) Les dérivées des f_n étant uniformément bornées, les f_n sont toutes lipschitziennes de même rapport K. Par limite simple, f est également lispchitzienne de rapport K.

Fixons $\varepsilon > 0$ et notons $(a_i)_{0 \leq 1 \leq N}$ une subdivision de $[0, 1]$ de pas inférieur à ε. Pour chaque i, $f_n(a_i)$ converge vers $f(a_i)$: il existe donc un rang n_ε tel que

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall i \in [\![0, N]\!],\ |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon.$$

Fixons $n \geq n_\varepsilon$; pour $x \in [0, 1]$, il existe $i \in [\![0, N[\![$ tel $a_i \leq x \leq a_{i+1}$ et on peut écrire :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \underbrace{|f_n(x) - f_n(a_i)|}_{\leq K\,|x - a_i|} + \underbrace{|f_n(a_i) - f(a_i)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|f(a_i) - f(x)|}_{\leq K\,|x - a_i|} \leq 2K\,|a_{i+1} - a_i| + \varepsilon \leq (2K + 1)\varepsilon$$

Ainsi, nous avons démontré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ \|f_n - f\|_\infty \leq (2K + 1)\,\varepsilon$$

ce qui prouve que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

b) Supposons dans un premiers temps que les (f_n) sont croissantes à partir du rang n_0. Par limite simple, f est également croissante.

La preuve est presque identique à celle du a) : comme f est continue, elle est uniformément continue ($[0, 1]$ est un compact). Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on peut choisir $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [0, 1],\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow -\varepsilon \leq f(x) - f(y) \leq \varepsilon.$$

En fixant une subdivision $(a_i)_{0 \leq 1 \leq N}$ de $[0, 1]$ de pas inférieur à η et en définissant n_ε comme précédemment, nous avons pour $n \geq \max(n_0, n_\varepsilon)$ et pour x quelconque avec $x \in [a_i, a_{i+1}]$:

$$\begin{cases} f_n(x) - f(x) \leq f_n(a_{i+1}) - f(a_i) = f_n(a_{i+1}) - f(a_{i+1}) + f(a_{i+1}) - f(a_i) \leq 2\varepsilon \\[2ex] f_n(x) - f(x) \geq f_n(a_i) - f(a_{i+1}) = f_n(a_i) - f(a_i) + f(a_i) - f(a_{i+1}) \geq -2\varepsilon \end{cases}$$

ce qui prouve que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Si les f_n sont décroissantes à partir d'un certain rang, il suffit d'adapter la preuve précédente (ou d'appliquer le résultat à la suite $(-f_n)$. Enfin, si les f_n ne sont ni croissantes, ni décroissantes à partir d'un certain rang, on peut séparer la suite en deux sous-suites $(f_{\varphi(n)})$ et $(f_{\psi(n)})$ avec $\mathbb{N} = \{\varphi(n),\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi(n),\ n \in \mathbb{N}\}$, $f_{\varphi(n)}$ strictement croissante et $f_{\psi(n)}$ décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ces deux sous-suites convergent alors uniformément vers f, donc (f_n) également.

13) Nous avons :

- $0 \leq u_0(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1]$;

- $0 \leq u_1(x) \leq \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t = x$ pour tout $x \in [0,1]$;
- $0 \leq u_2(x) \leq \displaystyle\int_0^1 (t-t^2)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \leq \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in [0,1]$.

Montrons par récurrence sur n la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ 0 \leq u_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}.$$

- la propriété est vraie au rang 0 ;
- soit $n \geq 0$ et supposons que $0 \leq u_n(x) \leq \dfrac{x^n}{n!}$ pour tout $x \in [0,1]$. Pour $x \in [0,1]$, nous avons alors :

$$0 \leq u_{n+1}(x) \leq \int_0^x \frac{(t-t^2)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

  donc la propriété est également vraie au rang n.

On en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ 0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{n!} \text{ avec } \frac{1}{n!} \text{ terme général de série convergente.}$$

Les u_n sont de classe C^1, avec :

$$u_0' = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ u_{n+1}'(x) = u_n(x-x^2).$$

La série $\sum_{n\geq 0} u_n'$ converge également normalement, donc uniformément sur $[0,1]$; le théorème de dérivation s'applique : S est de classe C^1 avec $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x-x^2) = S(x-x^2)$ pour tout $x \in [0,1]$: ceci est une équation fonctionnelle vérifiée par S.

14) Soit $M = \sup_{a\leq x\leq b} |f(t)|$. On a $|f_0(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, puis $|f_1(x)| \leq M(x-a)$ et par récurrence $|f_n(x)| \leq M\frac{(x-a)^n}{n!}$ pour tout $x \in [a,b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$. La preuve de l'hérédité est évidente : si l'inégalité est vraie au rang $n \geq 0$, on a :

$$\forall x \in [a,b],\ |f_{n+1}(x)| \leq \int_a^x |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x \frac{(t-a)^n}{n}!\,\mathrm{d}t = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$, puisque $\|f_n\|_\infty \leq \dfrac{(b-a)^n}{n!}$ qui est un terme général de série convergente.

On peut ensuite appliquer le théorème de dérivation :

- pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe C^1 sur $[a,b]$ et $f_n' = f_{n-1}$,
- la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$,

donc $\varphi = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 avec $\varphi' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f + \varphi$. Comme $\varphi(a) = 0$, on en déduit que φ est la solution du problème de Cauchy $\big(y' = f + y, y(a) = 0\big)$. La méthode de variation de la constante donne :

$$\forall x \in [a,b],\ \varphi(x) = e^x \int_a^x f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et l'on obtient :

$$\forall x \in [a,b],\ S(x) = f(x) + e^x \int_a^x f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

15) Comme $\overline{f}$ est continue sur le segment $[a,b]$, il existe une suite $(P_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $\overline{f}$ quand n tend vers l'infini. On en déduit que (fP_n) converge uniformément vers $|f|^2$ sur $[a,b]$, puisque $\|fP_n - |f|^2\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|P_n - \overline{f}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On peut alors échanger limite et intégrale sur le segment $[a,b]$:

$$0 = \int_a^b f(t)P_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

et donc $f = 0$, puisque $|f|^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur l'intervalle $[a,b]$ (qui n'est pas réduit à un point).

Avec l'hypothèse affaiblie, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_a^b t^{2k_0} f(t)P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

car les monômes de $X^{2k_0}P_n$ sont de degrés $\geq k_0$. On a toujours convergence uniforme sur $[a,b]$, ce qui prouve que $t^{2k_0}|f(t)|^2 = 0$ pour tout $t \in [a,b]$, soit $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b] \setminus \{0\}$ et $f = 0$ par continuité.

16) a) Il y convergence normale, car $\left|\dfrac{f_{r_n}(x)}{2^n}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}$, qui est un terme général de série convergente. Chaque fonction sommée étant croissante, les sommes partielles sont croissantes : f est donc croissante (toute limite simple de fonction croissante est croisante).

Si $x \notin D$, chaque fonction $\frac{f_{r_n}}{2^n}$ est continue en x : comme la convergence est uniforme, f est donc continue en x.

Si $x \in D$, il existe un unique k tel que $x = r_k$. On peut alors écrire :

$$f = \underbrace{\frac{f_{r_k}}{2^k}}_{=g} + \underbrace{\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\neq k}} \frac{f_{r_n}}{2^n}}_{=h}$$

Comme h est continue en r_k (même argument que précédemment) et g est discontinue en r_k, f est discontinue en x. On peut calculer le *saut* de f en x :

$$f(x^+) - f(x^-) = g(x^+) - g(x^-) = \frac{1}{2^k}.$$

b) Comme f est croissante, f est intégrable au sens de Riemann sur tout segment : F est bien définie et continue (intégrale fonction de la borne supérieure). Comme f a des limites à droite et à gauche en tout point, F admet des dérivées à gauche et à droite en tout point, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'_g(x) = f(x^-) \text{ et } F'_d(x) = f(x^+).$$

En particulier, F est dérivable en x pour $x \in \mathbb{R} \setminus D$ et non dérivable en x si $x \in D$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Posons $c = \dfrac{a+b}{2}$; comme $c \geq a$, on a $f(t) \leq f(t+c-a)$ pour tout t, d'où :

$$F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^c f(t+c-a)\,\mathrm{d}t = \int_c^b f(s)\,\mathrm{d}s = F(b) - F(c)$$

en posant $s = t + c - a$: cela donne l'inégalité demandée.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et L l'application affine vérifiant $L(a) = F(a)$ et $L(b) = F(b)$. Nous devons démontrer que $F(x) \leq L(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Notons donc :

$$A = \{x \in [a,b], F(x) \leq L(x)\}.$$

Nous avons :

- A est un fermé de $[a, b]$ car F et L sont continues ;
- A est stable par milieu : si $x, y \in A$, on a :

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{F(x)+F(y)}{2} \leq \frac{L(x)+L(y)}{2} = L\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

  donc $\dfrac{x+y}{2} \in A$;
- $a, b \in A$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A contient donc tous les points de la subdivision régulière de $[a, b]$ en 2^n morceaux. Comme l'ensemble de ces points, pour n décrivant $\mathbb{N}$, est dense dans $[a, b]$, $A = [a, b]$ et F est convexe.

Remarque : on peut prouver que toute fonction croissante (resp. convexe) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ a un ensemble de points de discontinuité (resp. de non dérivabilité) au plus dénombrable. Cette construction démontre que l'on ne peut pas en dire plus sur l'ensemble des points de discontinuité (resp. de non dérivabilité). Par exemple, il existe fonction croissante continue en chaque irrationnel et discontinue en chaque rationnel et une fonction convexe dérivable en chaque irrationnel et non dérivable en chaque rationnel.

17) a) On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n \, x = \Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Si I est fini, f est polynomiale, donc $x^2 f(x)$ est négligeable devant e^x au voisinage de $+\infty$. Supposons que I soit infini et que $f(x)$ soit équivalent à $\dfrac{e^x}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geq 0,\ 0 \leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \in I}} \frac{x^k}{k!} e^{-x} \leq f(x) e^{-x} = \varphi(x)$$

avec φ continue sur $[0, +\infty[$ et sommable, puisque $\varphi(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$. Comme $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \in I}} \frac{x^k}{k!} e^{-x}$ converge simplement vers $f(x)e^{-x}$ qui est continue sur $[0, +\infty[$, le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \in I}} \frac{x^k}{k!} e^{-x} \, \mathrm{d}x \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

ce qui est absurde car $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \in I}} \frac{x^k}{k!} e^{-x} \, \mathrm{d}x = \mathrm{Card} I \cap [\![0, n]\!] \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

18) a) La série ζ converge normalement sur $[2, +\infty[$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geq 2,\ 0 \leq u_n(x) = \frac{1}{n^x} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{TGSC}}.$$

Pour tout $n \geq 1$, le terme général $u_n(x)$ tend vers 0 (si $n \geq 2$) ou vers 1 (si $n = 1$), le théorème de la double limite permet d'écrire :

$$\zeta(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

b) Appliquons le théorème de dérivation sur l'intervalle $I =]-1, 1[$:

- pour tout $p \geq 2$, $u_p :\ x \longmapsto \dfrac{\zeta(p)}{p} x^p$ est de classe C^1 sur I ;

- pour tout $x \in I$, la série de terme général $u_p(x)$ est convergente (car $u_p(x) = o(|x|^p)$ et $\sum_{p\geq 2} |x|^p$ est convergente car $|x| < 1$) ;

- pour $[-a, a] \subset I$, la série de terme général u'_p converge normalement, donc uniformément :

$$\forall p \geq 2,\ \forall x \in [-a, a],\ |u'_p(x)| = \left|\zeta(p)x^{p-1}\right| \leq \zeta(p)a^{p-1} \leq \zeta(2)a^{p-1}$$

avec a^{p-1} terme général de série convergente car $a \in [0, 1[$.

La fonction F est donc de classe C^1 sur $]-1, 1[$, avec :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ F'(x) = \sum_{p=2}^{+\infty} \zeta(p)x^{p-1}.$$

Pour montrer que F est continue en -1, nous allons montrer que la convergence est uniforme sur $[-1, 0]$, grâce au théorème spécial des séries alternées : pour tout $x \in [-1, 0]$, la suite de terme général $\frac{\zeta(p)}{p}\, x^p$ a un signe qui alterne ; comme la fonction ζ est décroissante, la suite $\frac{\zeta(p)}{p}\, |x|^p$ décroît vers 0 quand p tend vers l'infini et il y a convergence simple de F sur $[-1, 0]$, avec majoration du reste :

$$\forall p \geq 2,\ \forall x \in [-1, 0],\ \left| \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{\zeta(k)}{k}\, x^k \right| \leq \frac{\zeta(p+1)}{p+1}\, |x|^{p+1} \leq \frac{\zeta(p+1)}{p+1}.$$

Ce majorant ne dépend pas de x et tend vers 0 quand p tend vers l'infini, donc la série qui définit F converge uniformément sur $[-1, 0]$. Comme les fonction $x \longmapsto \frac{\zeta(p)}{p}\, x^p$ sont continues sur $[-1, 0]$, la fonction F est également continue sur $[-1, 0]$, donc sur $[-1, 1[$.

c) Nous avons :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ F'(x) = \sum_{p=2}^{+\infty} \zeta(p)x^{p-1} = \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}\, x^{p-1} \right).$$

Pour $x \in [-1, 1[$, la famille $\left(\dfrac{x^{p-1}}{n^p} \right)_{p\geq 2,\ n\geq 1}$ est sommable, puisque :

- pour tout $p \geq 2$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{|x|^{p-1}}{n^p}$ et a pour somme $\zeta(p)|x|^{p-1}$;

- $\sum_{p\geq 2} \zeta(p)|x|^{p-1}$ converge et a pour somme $F'(|x|)$.

On peut donc échanger l'ordre de sommation, ce qui donne, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{n^p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^p \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n-x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n-x)}$$

Il reste à intégrer cette relation pour retrouver $F(x)$. Pour $x \in]-1, 1[$:

$$F(x) = F(0) + \int_0^x F'(t)\, \mathrm{d}t$$

Comme F est continue en -1, $F(x)$ tend vers $F(-1)$ quand x tend vers -1, donc $\displaystyle\int_0^{-1} F'(t)\, \mathrm{d}t$ converge et la relation précédente se prolonge à $[-1, 1[$. Nous avons donc, pour $x \in [-1, 1[$:

$$F(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t}{n(n-t)} \right) \mathrm{d}t$$

On a :

$$\forall t \in [0,x],\ \forall n \geq 2,\ \left|\frac{t}{n(n-t)}\right| = \frac{|t|}{n(n-t)} \leq \underbrace{\frac{1}{n(n-1)}}_{\text{TGSC}}$$

donc $\sum_{n\geq 2} \frac{t}{n(n-t)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,x]$. On peut donc échanger intégration et sommation (on intègre sur un segment) :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{t}{n(n-t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n-t}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{x}{n} - \Big[-\ln(n-t)\Big]_0^x = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{x}{n} - \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right).$$

19) Pour tout $t > 0$, on a :

$$t - 1 = e^{\ln t} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{n!}.$$

Pour $x > 0$, cette série converge normalement, donc uniformément sur $[1,x]$:

$$\forall n \geq 1,\ \forall t \in [1,x],\ \left|\frac{(\ln t)^n}{n!}\right| \leq \frac{M^n}{n!}$$

avec $M = \max_{t\in[1,x]} |\ln(t)| = |\ln(x)|$. Comme les fonctions $t \longmapsto \frac{(\ln t)^n}{n!}$ et $t \longmapsto t-1$ sont continues sur $[1,x]$, on peut échanger la somme infinie et l'intégrale :

$$\frac{(x-1)^2}{2} = \int_1^x (t-1)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^x \frac{(\ln t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_1^x (\ln t)^n\,\mathrm{d}t.$$

20) Pour $t \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right)\right)_{n\geq 1}$ décroit vers 0, donc $s(t)$ est défini d'après le théorème spécial des séries alternées. On a ensuite, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ (toujours grâce au théorème spécial des séries alternées) :

$$\left|s(t) - \sum_{k=1}^{n} f_k(t)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{t^2}{k(1+t^2)}\right)\right| \leq \ln\left(1 + \frac{t^2}{(n+1)(1+t^2)}\right) \leq \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}_{\text{indépendant de } t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On peut alors appliquer le théorème de la double limite : chaque $f_n(t)$ a une limite $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ quand t tend vers $+\infty$, donc la série de terme général u_n converge et $s(t)$ tend vers sa somme quand t tend vers l'infini. Nous avons ensuite :

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{3}{4} \ldots \frac{2N-1}{2N}\,\frac{2N+1}{2N}\right) = \ln \frac{3^2 5^2 \ldots (2N-1)^2(2N+1)}{2^2 4^2 \ldots (2N)^2} = \ln\left(\frac{(2N)!^2(2N+1)}{2^{4N} N!^4}\right)$$

Il reste à utiliser l'équivalent de Stirling : $n! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n!$ pour obtenir :

$$\frac{(2N)!^2(2N+1)}{2^{4N} N!^4} \sim_{+\infty} \frac{4\pi N e^{-4N} (2N)^{4N} (2N)}{2^{4N} 4\pi N^2 e^{-4N} N^{4N}} = \frac{2}{\pi},$$

soit $s(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

21) Le domaine de définition de u_n : $x \longmapsto (x-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x-1}{n}\right)$ est $]1-n, +\infty[$: nous étudions donc la série sur le domaine $I =]0, +\infty[$. Un calcul de DL donne facilement :

$$u_n(x) =_{+\infty} \frac{(x-1)(x-2)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série converge simplement sur I. Montrons qu'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a,b] \subset I$.

La fonction u_n est de classe C^1 et un calcul simple montre que u_n' s'annule en l'unique valeur

$$x_n = -n + 1 + \frac{1}{\ln(1+1/n)}.$$

Comme u_n tend vers $+\infty$ en 0^+ et en $+\infty$, u_n est décroissante sur $]0, x_n]$ et croissante sur $[x_n, +\infty[$. On a ensuite :

$$x_n = -n + 1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{-1} = -n + 1 + n\left(1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{3}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

En choisissant $a < \dfrac{3}{2} < b$, on a donc $a < x_n < b$ à partir d'un certain rang n_0, ce qui donne :

$$\forall n \geq n_0,\ \sup_{a \leq x \leq b} |u_n(x)| = \max(|u_n(a)|, |u_n(x_n)|, |u_n(b)|).$$

Un dernier calcul donne :

$$\begin{aligned} u_n(x_n) &= (x_n - 1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x_n - 1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Comme $u_n(a)$ et $u_n(b)$ sont également des $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, on en déduit que $\sup_{a \leq x \leq b} |u_n(x)|$ est un terme général de série convergente : la série converge donc normalement, donc uniformément, sur $[a,b]$. Les applications u_n étant continues, on en déduit que la somme f est continue sur tout $[a,b] \subset I$, donc sur I.

Pour relier $f(x)$ à $f(x+1)$, nous aurons besoin de passer par la dérivée de f. Montrons donc que l'on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme :

- Les fonctions u_n sont de classe C^1 sur I, avec $u_n' :\ x \longmapsto \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n + x - 1}$.
- Soit $[a,b] \subset I$. Pour tout n, u_n' est croissante sur $[a,b]$, donc :

  $$\sup_{a \leq x \leq b} |u_n'(x)| = \max\left(\left|\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+a-1}\right|, \left|\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+b-1}\right|\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

  et la série $\sum_{n \geq 1} u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur chaque $[a,b] \subset I$.

On peut donc affirmer que f est de classe C^1 sur I, avec :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n + x - 1}\right].$$

Nous avons alors, pour tout $N \geq 1$ et pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}\right] &= \sum_{n=1}^{N} \ln\frac{n+1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+x} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \ln\frac{n+1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n+x-1} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{N+x} + \sum_{n=1}^{N} \left[\ln\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+x-1}\right] \end{aligned}$$

ce qui donne $f'(x+1) = f'(x) + \dfrac{1}{x}$ en faisant tendre N vers $+\infty$. On en déduit qu'il existe une constante K telle que $f(x+1) = f(x) + \ln x + K$ pour tout $x > 0$. Comme $f(2) = f(1) = 0$, on a $K = 0$, d'où la relation :

$$\forall x > 0,\ f(x+1) = f(x) + \ln x.$$

Commençons par étudier $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La relation précédente donne, par récurrence immédiate :

$$\forall n \geq 1,\ f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln k$$

Une comparaison avec une intégrale (la fonction ln est croisante sur $[1, n]$) donne :

$$(n-1)\ln(n-1) - n + 2 = \int_1^{n-1} \ln t \,\mathrm{d} \leq \sum_{k=2}^{n-1} \ln k = f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln k \leq \int_1^n \ln t \,\mathrm{d}t = n \ln n - n + 1$$

donc $f(n) \sim_{+\infty} n \ln n$.

Enfin, f est convexe (somme de fonctions convexes) et comme $f(1) = f(2) = 0$, il existe $c \in]1, 2[$ (théorème de Rolle) tel que $f'(c) = 0$; on en déduit que f' est positive, i.e. que f est croissante, sur $[c, +\infty[$. Pour tout $x \geq 2$, on peut donc écrire $f(n_x) \leq f(x) \leq f(n_x + 1)$ avec $n_x = \lfloor x \rfloor$. Comme

$$f(n_x) \sim_{+\infty} n_x \ln n_x \sim_{+\infty} x \ln x \text{ et } f(n_x + 1) \sim_{+\infty} (n_x + 1)\ln(n_x + 1) \sim_{+\infty} x \ln x,$$

on en déduit que $f(x)$ est équivalent à $x \ln x$ quand x tend vers $+\infty$.

22) Les applications $u_n :\ x \longmapsto \ln(1 + e^{-nx})$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$. Pour $x \leq 0$, la série de terme général $u_n(x)$ diverge grossièrement. Pour $a > 0$, on a :

$$\forall n \geq 1, \forall x \geq a,\ 0 \leq u_n(x) \leq u_n(a) \sim_{+\infty} e^{-na}$$

donc il y a convergence normale sur $[a, +\infty[$ (comparaison avec une série géométrique de raison $e^{-a} \in [0, 1[$). On en déduit que S est définie et continue sur chaque $[a, +\infty[$, donc sur $]0, +\infty[$.

Pour $x > 0$, l'application $t \longmapsto \ln(1 + e^{-tx})$ est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$. Une comparaison intégrale-série donne :

$$\int_1^{+\infty} \ln(1 + e^{-tx}) \,\mathrm{d}t \leq S(x) \leq \int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-tx}) \,\mathrm{d}t$$

puis le changement de variable $y = e^{-tx}$ donne :

$$\frac{1}{x} \int_0^{e^{-x}} \frac{\ln(1+y)}{y} \,\mathrm{d}y \leq S(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} \,\mathrm{d}y$$

Comme $\displaystyle\int_0^{e^{-x}} \frac{\ln(1+y)}{y} \xrightarrow[x \to 0]{} \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} \neq 0$, on en déduit l'équivalent demandé.

23) a) Par changement de variable, θ_η est sommable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_\eta(y) \,\mathrm{d}y = 1$. On a d'autre part :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(x-t)\theta_\eta(t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x-t)\theta_\eta(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- pour tous $t, x \in \mathbb{R}$, $|f(x-t)\theta_\eta(t)| \leq ||f||_\infty\, |\theta_\eta(t)|$ et la fonction majorante est continue et sommable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que f_η est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) On peut écrire, pour tout $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}
|f_\eta(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x))\theta_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)| \left|\theta\left(\frac{t}{\eta}\right)\right| \frac{\mathrm{d}t}{\eta} \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(x-\eta y) - f(x)|\,|\theta(y)|\,\mathrm{d}y \qquad \text{en posant } y = \frac{t}{\eta}
\end{aligned}$$

En fixant $A > 0$, on a, toujours pour tout $x \in [a,b]$:

$$|f_\eta(x) - f(x)| \leq 2||f||_\infty \left(\int_{-\infty}^{-A} |\theta(y)|\,\mathrm{d}y + \int_A^{+\infty} |\theta(y)|\,\mathrm{d}y \right) + \int_{-A}^{A} |f(x-\eta y) - f(x)|\,|\theta(y)|\,\mathrm{d}y$$

Soit $\varepsilon > 0$. On peut fixer $A > 0$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-A} |\theta(y)|\,\mathrm{d}y + \int_A^{+\infty} |\theta(y)|\,\mathrm{d}y < \varepsilon$ (cette quantité tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$). Quand x varie entre a et b et y entre $-A$ et A, $x - \eta y \in [a - A\eta, b + A\eta]$. Nous resterons donc dans l'intervalle $I = [a - A, b + A]$ si nous imposons la condition $\eta \leq 1$. Comme f est continue, elle est uniformément continue sur le segment I ; il existe donc $\mu > 0$ tel que :

$$\forall x, x' \in I,\ |x - x'| \leq \mu \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $\eta \leq \min\left(1, \dfrac{\mu}{A}\right) = \eta_0$, on a :

$$\forall x \in [a,b],\ |f_\eta(x) - f(x)| \leq 2||f||_\infty\,\varepsilon + \int_{-A}^{A} \underbrace{|f(x-\eta y) - f(x)|}_{\leq \varepsilon}\,|\theta(y)|\,\mathrm{d}y$$

puisque pour $y \in [-A, A]$, on a $x \in I$, $x' = x - \eta y \in I$ (car $0 \leq \eta \leq 1$) et $|x - x'| = |\eta y| \leq \eta A \leq \mu$.

Nous avons donc démontré que pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_0 > 0,\ \forall \eta \in]0, \eta_0],\ \forall x \in [a,b],\ |f_\eta(x) - f(x)| \leq (2||f||_\infty + ||\theta||_1)\,\varepsilon$$

ce qui traduit que f_η converge vers f uniformément sur tout segment quand η tend vers 0^+.

24) Nous allons utiliser une comparaison intégrale-série : pour $x > 0$, la fonction $t \longmapsto \ln\left(1 + \frac{x^2}{t^2\pi^2}\right)$ est continue, décroissante et sommable sur $[1, +\infty[$, donc :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{t^2\pi^2}\right) dt \leq f(x) \leq \ln\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right) + \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{t^2\pi^2}\right) \mathrm{d}t.$$

Une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{t^2\pi^2}\right) \mathrm{d}t &= \left[t\,\ln\left(1 + \frac{x^2}{t^2\pi^2}\right) + \frac{2x}{\pi}\ \mathrm{Arctan}\,\frac{t\pi}{x} \right]_1^{+\infty} \\
&= x - \ln\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right) - \frac{2x}{\pi}\ \mathrm{Arctan}\,\frac{\pi}{x} \\
&\underset{+\infty}{=} x - 2\ln x + o(\ln x) - 2 + o(1) \underset{+\infty}{\sim} x
\end{aligned}$$

Comme $\ln\left(1 + \dfrac{x^2}{\pi^2}\right) \sim 2\ln x = o(x)$, on en déduit que les deux termes qui encadrent $f(x)$ sont équivalents à x au voisinage de $+\infty$, et donc donc $f(x) \sim x$ au voisinage de $+\infty$.

25) Soit $x > 0$. La fonction $\varphi_x : \ t \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(tx)}$ est continue, décroissante et sommable sur $]0, +\infty[$. On peut donc écrire :

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_x(n) \leq \varphi_x(1) + \int_1^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \qquad (1)$$

On a, en posant $u = e^{xt}$, puis en travaillant au voisinage de 0^+ :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{e^x}^{+\infty} \frac{2}{x(u^2-1)}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x}\left(\ln(e^x+1) - \ln(e^x-1)\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(\ln(2) + o(1) - \ln(x + O(x^2))\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(\ln(2) + o(1) - \ln(x) - \ln(1 + O(x))\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(-\ln x + O(1)\right) \\
&\underset{0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}.
\end{aligned}$$

On a ensuite $\varphi_x(1) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}\, x} \sim_{0^+} \dfrac{1}{x}$, qui est négligeable devant $-\dfrac{\ln x}{x}$, donc l'encadrement (1) nous donne :

$$f(x) \sim_{0^+} -\frac{\ln x}{x}.$$

L'étude de g est beaucoup plus simple : pour chaque $n \geq 1$, $\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)}$ est équivalent à $\dfrac{1}{n^2x^2}$ quand x tend vers 0^+, et il est raisonnable de penser que l'on pourra additionner ces équivalents, qui sont tous de l'ordre de $\dfrac{1}{x^2}$. On doit pour cela échanger une limite et une somme infinie :

$$\forall x > 0,\ x^2 g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{sh}^2(nx)}$$

Cette série converge normalement, donc uniformément, sur $]0, +\infty[$:

$$\forall n \geq 1,\ \forall x > 0,\ 0 \leq \frac{x^2}{\mathrm{sh}^2(nx)} \leq \frac{1}{n^2} = \alpha_n$$

avec α_n indépendant de x et terme général d'une série convergente. On peut donc échanger limite et somme infinie : comme chaque $\dfrac{x^2}{\mathrm{sh}^2(nx)}$ tend vers $\dfrac{1}{n^2}$ quand x tend vers 0^+, on a $xg(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, ce qui donne :

$$g(x) \sim_{0^+} \frac{\pi^2}{6x^2}.$$

26) Si $0 < a < b$ la suite $f_n g$ converge uniformément vers 0 sur $[a, b]$:

$$\forall t \in [a, b],\ |f_n(t)g(t)| \leq \frac{n}{1 + na^2}\,||g||_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

donc on peut échanger cette limite et intégrale : I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

De la même façon, on démontre que I_n tend vers 0 si $a < b < 0$.

Supposons maintenant que $0 = a < b$. On peut écrire :

$$I_n = \int_0^b f_n(t)(g(t) - g(0))\,\mathrm{d}t + g(0)\int_0^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nous avons ensuite :

- $\displaystyle\int_0^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Arctan}(nb) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$;
- pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta \in]0, b]$ tel que $|g(t) - g(0)| \leq \varepsilon$ pour $t \in [0, \eta]$. On en déduit :

$$\left|\int_0^b f_n(t)(g(t) - g(0))\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon \int_0^\eta f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_\eta^b f_n(t)|g(t) - g(0)|\,\mathrm{d}t$$

Comme dans le premier cas, la seconde intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il existe donc n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \left|\int_0^b f_n(t)(g(t) - g(0))\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon\mathrm{Arctan}(n\eta) + \varepsilon \leq \varepsilon\left(\frac{\pi}{4} + 1\right).$$

Nous avons démontré que $\displaystyle\int_0^b f_n(t)(g(t) - g(0))\,\mathrm{d}t$ tendait vers 0 à l'infini.

ceci qui prouve que I_n tend vers $\frac{\pi}{2}g(0)$ quand n tend vers l'infini.

Par symétrie, nous obtenons que pour $a < b = 0$, I_n tend vers $\frac{\pi}{2}g(0)$. Nous avons donc ainsi obtenu :

- si $0 \notin [a, b]$, $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;
- si $a = 0$ ou $b = 0$, $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}g(0)$;
- si $a < 0 < b$, $\displaystyle I_n = \int_a^b f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi g(0)$.

27) a) Comme f' est continue sur le segment $[a, b]$, il existe une suite $(Q_n)_{n\geq 0}$ de polynômes telle que Q_n converge uniformément vers f' sur $[a, b]$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, b],\ P_n(x) = f(a) + \int_a^x Q_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Les P_n sont des polynômes et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x\ in[a, b],\ |P_n(x) - f(x)| \leq \int_a^x |Q'_n(t) - f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \underbrace{(b - a)||Q_n - f'||_\infty}_{\text{indépendant de } x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc P_n converge uniformément vers f et $P'_n = Q_n$ converge uniformément vers f' sur $[a, b]$.

b) Il suffit de faire une preuve par récurrence sur k : on montré que le résultat était vrai pour $k = 1$. Si $k \geq 2$ et si on suppose le résultat vrai au rang $k - 1$, on peut l'appliquer à f' : il existe une suite $(Q_n)_{n\geq 0}$ de polynômes telle que $Q_n^{(i)}$ converge uniformément vers $f^{(i+1)}$ sur $[a, b]$ pour tout $i \in \{0, \ldots, k - 1\}$. La suite (P_n) définie comme ci-dessus est alors une suite de polynômes telle que $P_n^{(i)}$ converge uniformément vers $f^{(i)}$ sur $[a, b]$ pour tout $i \in \{0, \ldots, k\}$.

c) On peut traduire le résultat précédent sous la forme : pour toute fonction f de classe C^k sur $[a, b]$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que :

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, k\},\ ||P^{(i)} - f^{(i)}||_\infty \leq \varepsilon,$$

puisqu'il suffit de choisir pour P un terme P_n de la suite obtenue à la question b avec n suffisamment grand. Si f est de classe C^∞ sur $[a,b]$, on peut donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, appliquer cette propriété avec $k=n$ et $\varepsilon=\dfrac{1}{n+1}$: il existe une suite (P_n) de polynômes telle que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall i\in\{0,1,\dots,n\},\ ||P_n^{(i)}-f^{(i)}||_\infty\le\frac{1}{n+1}$$

et on a bien que pour tout i, $P_n^{(i)}\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}}f^{(i)}$ puisque $||P_n^{(i)}-f^{(i)}||_\infty\le\frac{1}{n+1}$ dès que $n\ge i$.

d) On reprend le même argument que précédemment, mais en faisant varier l'intervalle d'approximation en même temps que l'ordre des dérivations et le ε : pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f étant de classe C^n sur l'intervalle $[-n,n]$, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall i\in\{0,1,\dots,n\},\ \sup_{-n\le x\le n}|P_n^{(i)}(x)-f^{(i)}(x)|\le\frac{1}{n+1}$$

et la suite (P_n) vérifie les hypothèses demandées : pour $[a,b]\subset\mathbb{R}$ et pour $i\in\mathbb{N}$, on a :

$$\forall n\ge\max(|a|,|b|,i),\ \sup_{a\le x\le b}|P_n^{(i)}(x)-f^{(i)}(x)|\le\frac{1}{n+1}$$

donc $P_n^{(i)}$ converge uniformément vers $f^{(i)}$ sur $[a,b]$.

28) a) L'application $T(f)$ est bien définie et continue sur $[0,1]$; l'application T est trivialement linéaire et vérifie :

$$\forall f\in E,\ \|T(f)\|_\infty\le 2\,\|f\|_\infty$$

avec égalité pour la fonction $\mathbf{1}$ constante égale à 1. T est donc continue de norme égale à 2.

b) Si λ est une valeur propre de T, associée à un vecteur propre f, on a $|\lambda|\,\|f\|_\infty=\|T(f)\|_\infty\le 2\,\|f\|_\infty$, donc $|\lambda|\le 2$ (car f est non nulle). Comme $T(\mathbf{1})=2\,\mathbf{1}$, 2 est valeur propre donc la valeur 2 est optimale :

$$\rho(T)=\sup_{\lambda\in Sp(T)}|\lambda|=2.$$

c) L'application β est continue sur $]0,1[$.

Les séries $\displaystyle\sum_{n\ge2}\frac{1}{(x-n)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\ge1}\frac{1}{(x+n)^2}$ convergent normalement sur $[0,1]$, puisque :

$$\forall n\ge2,\ \forall x\in[0,1],\ 0\le\frac{1}{(x-n)^2}\le\frac{1}{(n-1)^2}\ \text{et}\ \forall n\ge1,\ \forall x\in[0,1],\ 0\le\frac{1}{(x+n)^2}\le\frac{1}{n^2}$$

(avec $\dfrac{1}{(n-1)^2}$ et $\dfrac{1}{n^2}$ termes généraux de séries convergentes). On en déduit que les applications $\alpha_1:\ x\longmapsto\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(x-n)^2}$ et $\alpha_2:\ x\longmapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^2}$ sont définies et continues sur $]0,1[$. L'application α est donc définie et continue sur $]0,1[$, avec $\alpha(x)=\alpha_1(x)+\alpha_2(x)+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$. On a d'autre part, au voisinage de 0 :

$$\alpha(x)=\frac{1}{x^2}+\alpha_1(0)+\alpha_2(0)+1+o(1)\ \text{et}\ \beta(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{\pi^2}{3}+o(1)$$

donc $\alpha-\beta$ est prolongeable par continuité en 0. On a de même, au voisinage de 1 :

$$\alpha(x)=\frac{1}{(1-x)^2}+\alpha_1(1)+\alpha_2(1)+1+o(1)\ \text{et}\ \beta(x)=\beta(1-x)=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{\pi^2}{3}+o(1)$$

donc $\alpha-\beta$ est également prolongeable par continuité en 1 : $\alpha-\beta$ se prolonge donc à $[0,1]$ en une fonction $\gamma\in E$. On a ensuite :

$$\forall x\in]0,1[,\ \alpha\left(\frac{x}{2}\right)+\alpha\left(\frac{x+1}{2}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{4}{(x-2n)^2}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{4}{(x-2n+1)^2}=4\,\alpha(x).$$

On a d'autre part, toujours pour $x \in]0,1[$:

$$\beta\left(\frac{x}{2}\right)+\beta\left(\frac{x+1}{2}\right)=\pi^2\left(\sin^{-2}\left(\pi\frac{x}{2}\right)+\sin^{-2}\left(\pi\frac{x+1}{2}\right)\right)=\pi^2\left(\sin^{-2}\left(\pi\frac{x}{2}\right)+\cos^{-2}\left(\pi\frac{x}{2}\right)\right)=4\,\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$$

On en déduit que $T(\gamma)(x)=4\gamma(x)$ pour tout $x \in]0,1[$, donc par continuité, que $T(\gamma)=4\gamma$; comme 4 n'est pas une valeur propre de T, ceci impose $\gamma=0$. Nous avons donc démontré :

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-n)^2}.$$

29) a) Pour $a>1$ et $z=x+iy\in\mathbb{C}$ avec $x\geq a$, on a :

$$\left|\frac{1}{n^z}\right|=\frac{1}{n^x}\leq\frac{1}{n^a}$$

donc la série qui définit ζ converge normalement donc uniformément sur la partie $A_a=\{z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z)\geq a\}$. On en déduit que ζ est définie et continue sur A_a pour tout $a>1$: elle est donc définie et continue sur A (pour tout $z\in A$, il existe $a>1$ tel que z est un point intérieur à A_a, donc ζ est continue en z).

b) Pour $z=x+iy\in B$ et $N\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^z}=\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n-A_{n-1}}{n^z}=-A_0+\frac{A_N}{N^z}+\sum_{n=1}^{N-1}A_n\left(\frac{1}{n^z}-\frac{1}{(n+1)^z}\right)=\frac{A_N}{N^z}+\sum_{n=1}^{N-1}\underbrace{A_n\,\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z-1}{(n+1)^z}}_{=v_n(z)}$$

On a :

- $\dfrac{A_N}{N^z}$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini car $x>0$ et $A_N\in\{0,1\}$;
- $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^z-1=e^{z\ln(1+1/n)}-1=_{+\infty}O(\ln(1+1/n))=O(1/n)$ et donc :

$$v_n(z)=_{+\infty}O\left(\frac{1}{n^{x+1}}\right)$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geq1}v_n(z)$ est absolument convergente, donc convergente.

Ceci prouve que η est définie sur B, avec $\eta(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(z)$ pour tout $z\in B$.

Pour montrer que η est continue, on va affiner la preuve de la convergence en montrant que $\displaystyle\sum_{n\geq1}v_n$ convergence normalement sur chaque partie $B_{a,R}=\{z\in\mathbb{C},\ |z|\leq R \text{ et } \mathrm{Re}(z)\geq a\}$ avec $a>0$ et $R>0$. Il faut pour cela majorer précisément, pour $z\in B_{a,R}$, le module de $(1+1/n)^z-1$, ce qui se fait en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\varphi:\ t\longmapsto(1+t)^z$. φ est de classe C^1 sur $[0,1/n]$ avec :

$$\forall t\in[0,1/n],\ |\varphi'(t)|=\left|z(1+t)^{z-1}\right|=|z|(1+t)^{x-1}\leq R\,(1+1/n)^{R-1}$$

On en déduit :

$$\forall z\in B_{a,R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ |v_n(z)|=\frac{|A_n(\varphi(1/n)-\varphi(0))|}{(n+1)^x}\leq\frac{1}{n}\,\frac{R(1+1/n)^{R-1}}{(n+1)^a}=\alpha_n$$

α_n est indépendant de z et est le terme général d'une série convergente (équivalent à $\dfrac{R}{n^{a+1}}$ au voisinage de $+\infty$, avec $a+1>1$). On en déduit donc que la série $\sum_{n\geq1}v_n$ est normalement, donc uniformément, convergente sur $B_{a,R}$. Comme les fonctions v_n sont continues, η est continue sur chaque $B_{a,R}$, donc sur B (une nouvelle fois, pour tout $z \in B$, il existe $a > 0$ et $R > 0$ tel que z soit un point intérieur à $B_{a,R}$, donc η est continue en z).

c) On a, pour $z \in A$ (on peut séparer la somme en deux car les deux séries convergent) :

$$\eta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^z} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^z} = \zeta(z) - \frac{2}{2^z}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = \zeta(z)\left(1 - 2^{1-z}\right).$$

Comme η est continue en 1 avec $\eta(1) = \ln(2) \neq 0$, on a $\eta(z) \sim_{z\to 1} \ln(2)$, ce qui donne :

$$\zeta(z) \underset{z\to 1}{\sim} \frac{\ln 2}{1 - 2^{1-z}} = \frac{\ln 2}{1 - e^{(1-z)\ln(2)}} \underset{z\to 1}{\sim} \frac{1}{z-1}$$

en utilisant que $e^u - 1$ est équivalent à u quand u (complexe) tend vers 0.

30) a) Soit $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ (la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est définie que pour $x \in A$). Soit $x \in A$ et fixons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x > -n_0$. On a :

$$\forall n \geq n_0, f_n(x) = \frac{n_0!}{x(1+x)\dots(n_0+x)} \underbrace{\frac{n_0+1}{n_0+1+x} \cdots \frac{n}{n+x} n^x}_{=\alpha_n}$$

Tous les termes de ce produit sont strictement positifs, on peut donc travailler sur $\beta_n = \ln(\alpha_n)$:

$$\forall n \geq n_0,\ \beta_n = x\ln n - \sum_{k=n_0+1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

et on transforme l'étude de cette suite en celle d'une série, puis on fait un développement asympotitique :

$$\forall n > n_0,\ \beta_n - \beta_{n-1} = x(\ln n - \ln(n-1)) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = -x\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x}{n} + O(1/n^2)$$

Ainsi, $\beta_n - \beta_{n-1}$ est le terme général d'une série absolument convergente, donc (β_n) est convergente. Nous avons ainsi montré que la suite (f_n) converge simplement sur A.

b) Soit $x \in A$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x+1) = \frac{n!\, n^{x+1}}{(1+x)(2+x)\dots(n+1+x)} = \frac{nx}{(n+1+x)} \frac{n!\, n^{x+1}}{(1+x)\dots(n+1+x)} = \frac{nx}{(n+1+x)} f_n(x)$$

et donc $f(x+1) = xf(x)$ en faisant tendre n vers l'infini.

c) Les fonctions $\ln \circ f_n$ sont convexes sur $]0, +\infty[$, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ \ln(f_n(x)) = \ln(n!) + x\ln n - \sum_{k=0}^{n} \ln(k+x)$$

et les fonctions $x \longmapsto \ln(k+x)$ sont concaves. Par limite simple, on en déduit que $\ln \circ f$ est également convexe.

d) Nous avons :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} &= \ln n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+x} \\
&= \underbrace{\ln n - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)}_{=\gamma_n} - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \\
&= \gamma_n - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k(k+x)}
\end{aligned}$$

Soit I un des intervalles constituant A (i.e. $I =]-n-1, -n[$ avec $n \in \mathbb{N}$ ou $I =]0, +\infty[$) et $a \in I$. La série $\sum_{k \geq 1} \frac{x}{k(k+x)}$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$. En effet, en fixant k_0 tel que $k_0 > -a$, on a :

$$\forall k \geq k_0,\ \forall x \in I,\ \left| \frac{x}{k(k+x)} \right| = \frac{|x|}{k(k+x)} \leq \frac{\max(|a|, |b|)}{k(k+a)} \text{ qui est un T.G.S.C.}$$

Ainsi, la série $\sum_{k \geq k_0} \frac{x}{k(k+x)}$ converge normalement donc uniformément sur $[a, b]$ et on en déduit que $\sum_{k \geq 1} \frac{x}{k(k+x)}$ converge également uniformément sur $[a, b]$. En posant :

$$\forall x \in I,\ \forall n \geq 1,\ g_n(x) = \gamma_n - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k(k+x)}$$

la suite g_n converge uniformément sur tout segment de I vers $g :\ x \longmapsto \gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k(k+x)}$ (ga est la constante d'Euler). g est continue et la convergence uniforme permet d'échanger intégration et somme infinie :

$$\forall x \in I,\ \ln\left(\frac{f_n(x)}{f_n(a)}\right) = \int_a^x \frac{f_n'(t)}{f_n(t)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = G(x).$$

On a donc :

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a)e^{G(x)}$$

et f est C^1 sur I car G est C^1, avec $f'(x) = f(a)e^{G(x)}G'(x) = f(x)g(x)$.

Ceci étant vérifié pour tout I, f est de classe C^1 sur A avec :

$$\forall x \in A,\ f'(x) = f(x)\left(\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k(k+x)}\right).$$

Remarque : on peut démontrer que la fonction Γ (sur $]0, +\infty[$) est l'unique fonction vérifiant

- $\Gamma(1) = 1$;
- $\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;
- $x \longmapsto \ln(\Gamma(x))$ est convexe sur $]0, +\infty[$.

Nous avons bien $f(1) = \lim_{+\infty} \frac{n\,n!}{(n+1)!} = 1$ donc f coïncide sur $]0, +\infty[$ avec la fonction Γ étudiée en cours :

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{+\infty} \frac{n^x\,n!}{x(1+x)\ldots(n+x)}.$$

31) a) Soit $a \geq 0$ et $M = \sup_{0 \leq x \leq a} |u_0(x)|$. On a :

$$\forall x \in [0, a],\ |u_1(x)| \leq M\,x$$

puis

$$\forall x \in [0, a],\ |u_2(x)| \leq \int_0^x M\,t\,\mathrm{d}t = M\,\frac{x^2}{2}$$

et une récurrence immédiate donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,\forall x \in [0, a],\ |u_n(x)| \leq M\,\frac{x^n}{n!}.$$

On en déduit :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,a],\ |u_n(x)| \leq M\,\frac{a^n}{n!} = \alpha_n$$
ce qui prouve que la série de terme général u_n converge normalement, donc uniformément, sur $[0,a]$, puisque α_n est un terme général de série convergente.

Comme les u_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que S est définie et continue sur chaque $[0,a]$, donc sur $\mathbb{R}^+$.

b) Nous pouvons ensuite appliquer le théorème de dérivation :

- pour tout $n \geq 1$, u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ avec $u_n' = u_{n-1}$;
- la série des u_n converge simplement ;
- la série des u_n' converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$

donc $S - u_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $(S-u_0)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n' = S$. On en déduit que $S - u_0$ est solution de l'équation différentielle $y' = y + u_0$. La méthode de la variation de la constante prouve qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :
$$(S-u_0)(x) = K\,e^x + e^x \int_0^x u_0(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
et $K = 0$ car $S - u_0$ est nulle en 0. On a donc :
$$\forall x \geq 0,\ S(x) = u_0(x) + e^x \int_0^x u_0(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

c) Supposons que u_0 ait une limite ℓ en $+\infty$. La fonction $t \longmapsto e^{-t}u_0(t)$ est alors intégrable sur $\mathbb{R}^*$ et $\displaystyle\int_0^x u_0(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ tend vers $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} u_0(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$. Si $I \neq 0$, $S(x)$ tend vers $\pm\infty$ (selon le signe de I) quand x tend vers $+\infty$. Sinon, on peut écrire :
$$\int_0^x u_0(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\int_x^{+\infty} u_0(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\int_x^{+\infty} (\ell + \varepsilon(t))e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\ell\,e^{-x} + o(e^{-x})$$
d'après le théorème d'intégration des relations de comparaison :

- Si $\varphi(t) = o(\psi(t))$ au voisinage de $+\infty$,
- si ψ est positive et intégrable au voisinage de $+\infty$,

alors $\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est négligeable devant $\displaystyle\int_x^{+\infty} \psi(t)\,\mathrm{d}t$ au voisinage de $+\infty$.

On obtient ainsi :
$$S(x) = u_0(x) + e^x(-\ell e^{-x} + o(e^{-x})) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Nous avons donc démontré, quand u_0 a une limite en $+\infty$:
$$S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } I > 0 \\ 0 & \text{si } I = 0 \\ -\infty & \text{si } I < 0 \end{cases}$$
où $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} u_0(t)e^{-t}\mathrm{d}t$.

32) Pour $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\dfrac{n}{n^2+x^2}\right)_{n\geq 1}$ décroit à partir d'un certain rang (dès que $n \geq |x|$) et tend vers 0, donc $f(x)$ est défini (théorème spécial des séries alternées). On a $f(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ (série harmonique alternée).

On a, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]0,+\infty[$:

$$\frac{\cos(xt)}{1+e^t} = \frac{\cos(xt)}{e^t}\frac{1}{1+e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(xt)(-1)^n e^{-(n+1)t}$$

en utilisant la série géométrique de raison $q = e^{-t} \in]0,1[$. Nous avons :

- $u_n :\ t \longmapsto \cos(xt)(-1)^n e^{-(n+1)t}$ est continue sur $I =]0,+\infty[$;
- la série de terme général u_n converge simplement sur I et sa somme $t \longmapsto \dfrac{\cos(xt)}{1+e^t}$ est continue sur I ;
- comme $\left(e^{-(n+1)t}\right)_{n\geq 0}$ décroit vers 0, on peut appliquer le théorème des séries alternées :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \cos(xt)(-1)^k e^{-(k+1)t}\right| = \underbrace{|\cos(xt)|}_{\leq 1} \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-(k+1)t}\right| \leq e^{-t}$$

  et la fonction $t \longmapsto e^{-t}$ est continue et sommable sur I,

donc nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \cos(xt)(-1)^n e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t.$$

On a ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t &= Re\left(\int_0^{+\infty} e^{t(ix-(n+1))}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= Re\left(\left[\frac{1}{ix-n-1}\,e^{t(ix-(n+1))}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= Re\left(\frac{1}{n+1-ix}\right) = \frac{n+1}{n+1+x^2}
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = f(x).$$

Pour $x > 0$, on fait ensuite trois intégrations par parties en intégrant $\cos(xt)$ ou $\sin(xt)$ et en vérifiant les convergences des formes indéterminées :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^t}{(1+e^t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)e^t(1-e^t)}{(1+e^t)^3}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x^3}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^t(e^{2t}-4e^t+1)}{(1+e^t)^4}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On en déduit que $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{4x^2}$ au voisinage de $+\infty$, car

$$\forall x > 0,\ \left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^t(e^{2t}-4e^t+1)}{(1+e^t)^4}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^t\,|e^{2t}-4e^t+1|}{(1+e^t)^4}\,\mathrm{d}t$$

donc $f(x) - \dfrac{1}{4x^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^3}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

33) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$. Une décomposition en éléments simples donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{1}{x+k}$$

Nous pouvons donc introduire la famille $\left(\dfrac{(-1)^k}{k!(n-k)!(x+k)}\right)_{0 \le k \le n}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, la famille $\left(\left|\dfrac{(-1)^k}{k!(n-k)!(x+k)}\right|\right)_{k \le n}$ est sommable et sa somme vaut

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{k!(n-k)!|x+k|} = \frac{e}{k!|x+k|}$$

Ce terme est ensuite le terme général d'une série convergente, puisqu'il est négligeable devant $1/k!$. On en déduit que la famille est sommable. Ceci prouve que $f(x)$ est bien défini et que l'on peut échanger l'ordre de sommation :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{1}{x+k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{1}{x+k} = e \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)}$$

On peut ensuite appliquer le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions. Montrons que pour $n_0 \in \mathbb{N}$, $f_{n_0} :\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est de classe C^∞ sur $[-n_0, +\infty[$.

Comme $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{n_0} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est de classe C^∞ sur $[-n_0, +\infty[\setminus \mathbb{Z}^-$, nous aurons prouvé que f est de classe C^∞ sur $]-n_0, -n_0+1[\cup]-n_0+1, -n_0+2[\cup \cdots \cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, donc sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ puisque n_0 est quelconque.

Posons $A = [-n_0, +\infty[$ et, pour tout $n \ge n_0 + 1$ et $x \in A$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$. Nous avons :

- chaque u_n est de classe C^1 sur l'intervalle A ;
- la série $\displaystyle\sum_{n \ge n_0} u_n$ converge simplement sur A ;
- pour $n \ge n_0 + 1$ et $x \in A$, $|u_n'(x)| = \dfrac{1}{n!(x+n)^2} \le \dfrac{1}{n!}$ qui est un terme général de série convergente : la série $\displaystyle\sum_{n \ge n_0} u_n'$ converge normalement donc uniformément sur A.

On en déduit que f_{n_0} est de classe C^1 sur A avec :

$$\forall x \ge -n_0,\ f_{n_0}'(x) = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}.$$

On montre ensuite par une récurrence évidente que f_{n_0} est de classe C^k pour tout k, avec :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \ge -n_0,\ f_{n_0}^{(k)}(x) = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k} k!}{n!(x+n)^{k+1}}$$

en utilisant la domination

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \ge n_0 + 1,\ \forall x \in A,\ |u_n^{(k)}(x)| = \frac{k!}{n!(x+n)^{k+1}} \le \frac{k!}{n!}$$

Nous avons donc démontré que f est de classe C^∞ avec :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-,\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k} k!}{n!(x+n)^{k+1}}$$

34) a) On a, pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$:

$$\sin(x/2)S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \sin(x/2)\sin(nx) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \cos((n-1/2)x) - \cos((n+1/2)x) = \frac{1}{2}\left(\cos(x/2) - \cos((N+1/2)x\right) = \sin\frac{(N+1)}{2}x \text{ s}$$

d'où l'inégalité demandée.

b) Si $x = 0$ ou 2π, la convergence est évidente puisque $\sigma_n(x) = 0$ pour tout n. Pour $x \in]0, 2\pi[$, on a (transformation d'Abel) :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(S_n(x) - S_{n-1}(x)) = a_N S_N(x) + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1})S_n(x)$$

Comme S_N est bornée par $\dfrac{1}{\sin(x/2)}$, on a :

- $a_N S_N(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$;
- $\forall n \geq 1,\ |(a_n - a_{n+1})S_n(x)| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}(a_n - a_{n+1})$ qui est un terme général de série convergente (car (a_n) converge).

On en déduit que $\sigma_n(x)$ converge quand n tend vers l'infini : la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ converge donc simplement sur $[0, 2\pi]$.

c) On effectue une seconde transformation d'Abel :

$$\forall N, M \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0, 2\pi[,\ \sum_{n=N+1}^{N+M} a_n \sin nx = a_{N+M} S_{N+M}(x) - a_{N+1} S_N(x) + \sum_{n=N+1}^{N+M-1} (a_n - a_{n+1})S_n(x)$$

et en faisant tendre M vers $+\infty$:

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0, 2\pi[,\ R_N(x) = -a_{N+1}S_N(x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})S_n(x).$$

On en déduit :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0, 2\pi[,\ |R_N(x)| \leq \frac{a_{N+1}}{\sin x/2} + \frac{1}{\sin x/2} \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})}_{=a_{N+1}} \leq 2\,\frac{a_{N+1}}{\sin x/2}.$$

On en déduit, pour $a \in]0, \pi[$:

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, 2\pi - a],\ |R_N(x)| \leq 2\,\frac{a_{N+1}}{\sin a/2}.$$

Ce majorant est indépendant de x et tend vers 0 quand N tend vers l'infini : il y a bien convergence uniforme sur $[a, 2\pi - a]$.

d) Soit $x \in]0,\pi]$, $N \geq N_\varepsilon$ et $M \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
|R_N(x)| &= \left| \left(\sum_{n=N+1}^{N+M} a_n \sin nx \right) + R_{N+M}(x) \right| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{N+M} \underbrace{|a_n|}_{\leq \frac{\varepsilon}{n}} \underbrace{|\sin nx|}_{\leq nx} + \underbrace{|R_{N+M}(x)|}_{\leq \frac{2a_{N+M+1}}{\sin x/2}} \\
&\leq M\varepsilon x + \frac{2a_{N+M+1}}{\sin x/2} \\
&\leq M\varepsilon x + \frac{2\pi\varepsilon}{(N+M+1)x} \qquad \sin u \geq \frac{2}{\pi} u \text{ pour } u \in [0,\pi/2] \text{ par concavité de la fonction sinus} \\
&\leq \left(M\,x + \frac{2\pi}{M\,x} \right) \varepsilon
\end{aligned}$$

Il faut maintenant trouver un majorant indépendant de x, pour assurer la convergence uniforme. Comme nous avons trouvé un majorant qui dépend de M, il est naturel de chercher la valeur de M pour laquelle le majorant est le plus petit possible. La fonction $M \longmapsto M\,x + \frac{2\pi}{M\,x}$ atteint son minimum, sur $]0,+\infty[$, en $M_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{x}$. En posant $M = \lceil M_0 \rceil$, on a $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$ et $M - 1 < \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \leq M$, ce qui donne

$$Mx < x + \sqrt{2\pi} \leq \pi + \sqrt{2\pi} \text{ et } \frac{1}{Mx} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ainsi, nous avons :

$$\forall N \geq N_\varepsilon,\ \forall x \in]0,\pi],\ |R_N(x)| \leq \left(M\,x + \frac{2\pi}{M\,x} \right) \varepsilon \leq \left(\pi + \sqrt{2\pi} + \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}} \right) \varepsilon = (\pi + 2\sqrt{2\pi})\,\varepsilon.$$

Comme $R_N(2\pi - x) = R_N(x)$ et $R_N(0) = R_N(2\pi) = 0$, nous avons démontré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall N \geq N_\varepsilon,\ \forall x \in [0, 2\,\pi],\ |R_N(x)| \leq (\pi + 2\sqrt{2\pi})\,\varepsilon$$

ce qui traduit que la série converge uniformément sur $[0,2\pi]$ (et donc également sur $\mathbb{R}$ par périodicité).

e) Comme $R_n(x)$ converge uniformément vers 0, il en est de même de $(R_n - R_{2n})(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \sin kx$. L'idée est de choisir x tel que les $\sin kx$ de cette somme soient tous minoré par une même constante non nulle. Par exemple, avec $x_n = \frac{\pi}{3n}$, on a $\frac{\pi}{3} \leq kx_n \leq \frac{2\pi}{3}$, et donc $\sin kx_n \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$. On en déduit, en utilisant la décroissante de (a_n) :

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} |(R_n - R_{2n})(x)| \geq (R_n - R_{2n})(x_n) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geq \frac{\sqrt{3}}{2} n a_{2n} \geq 0$$

ce qui prouve que $2n\,a_{2n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On a ensuite $0 \leq (2n+1)a_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n}$, donc $(2n+1)a_{2n+1}$ tend également vers 0 quand n tend vers l'infini : nous avons prouvé que a_n est négligeable devant $1/n$ au voisinage de l'infini.

35) Soit $a > 0$ et notons $f :\ (x,t) \longmapsto \frac{\sin t}{e^{xt}-1}$. Nous avons :

- pour tout $x \geq a$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$;
- pour tout $t > 0$, $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$;

- pour tout $t > 0$ et pour tout $x \geq a$, $|f(x,t)| \leq \dfrac{|\sin t|}{e^{at}-1} = \varphi(t)$; l'application φ est continue sur $]0,+\infty[$ avec
  - — $\varphi(t)$ tend vers $\frac{1}{a}$ quand t tend vers 0^+, donc φ est intégrable au voisinage de 0 ;
  - — $\varphi(t) = O(e^{-at})$ au voisinage de $+\infty$, avec $a > 0$, donc φ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

On en déduit que F est définie et continue sur chaque $[a,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$.

Pour $x > 0$ et $t > 0$, on peut ensuite écrire $\frac{\sin t}{e^{xt}-1} = \sin t e^{-xt} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nxt}$, puisque $e^{-xt} \in [0,1[$. On a donc :

$$\forall x > 0,\ F(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin t\, e^{-nxt}\right)\, dt.$$

On a :

- pour tout $n \geq 1$, $f_n :\ t \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \left(\sin t\, e^{-kxt}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$;
- la suite f_n converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $f :\ t \longmapsto \frac{\sin t}{e^{xt}-1}$ qui est continue sur $]0,+\infty[$;
- $\forall t > 0$, $|f_n(t)| \leq |f(t)|$ et $|f|$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée et échanger intégrale et somme :

$$\forall x > 0,\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-nxt}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{e^{-nxt}(\cos t + nx \sin t)}{n^2x^2+1}\right]_0^{+\infty} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x^2+1}.$$

36) a) Si une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une application f, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0,\ \|f - P_n\|_\infty \leq 1$$

et donc

$$\forall n \geq n_0,\ \|P_n - P_{n_0}\|_\infty \leq 2.$$

Ainsi, pour $n \geq n_0$, le polynôme $P_n - P_{n_0}$ est borné donc constant. On peut donc écrire $P_n = P_{n_0} + C_n$ avec $C_n \in \mathbb{R}$. Comme $P_n(0)$ tend vers $f(0)$ quand n tend vers l'infini, on en déduit que C_n a une limite C quand n tend vers l'infini, ce qui donne $f = P_{n_0} + C$ et f est un polynôme.

Les seules fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limites uniformes sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes sont dons les polynômes (la condition est trivialement suffisante).

b) Si f est limite uniforme sur tout segment d'une suite de polynômes, f est C^0 sur tout segment, donc sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, supposons que f est continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut appliquer le théorème d'approximation de Weierstrass à f sur le segment $[-n,n]$: il existe un polynôme P_n tel que $\sup\limits_{|x|\leq n} |f(x) - P_n(x)| \leq 1/n$.

La suite $(P_n)_{n\geq 1}$ est une suite de polynôme qui converge uniformément vers f sur tout segment $[a,b]$ puisque :

$$\forall n \geq max(|a|,|b|),\ \sup_{a\leq x\leq b} |f(x) - P_n(x)| \leq \sup_{-n\leq x\leq n} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

37) a) On reconnaît une somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4n}.$$

b) Pour $t > 0$, $\dfrac{1}{e^t - 1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kt}$. On a donc :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(nt)\, e^{-kt}\, \mathrm{d}t.$$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée :

- pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, $S_K : \ t \longmapsto \sum_{k=1}^{K} \sin(nt)\, e^{-kt}$ est continue sur $I =]0, +\infty[$;

- S_k converge simplement sur I vers l'application continue $t \longmapsto \dfrac{\sin(nt)}{e^t - 1}$;

- $\forall K \in \mathbb{N}^*, \ \forall t \in I, \ |S_K(t)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\sin(nt)|\, e^{-kt} = \dfrac{|\sin(nt)|}{e^t - 1} = \varphi(t)$;

- φ est continue et sommable sur I (car $\varphi(t) = O(e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$ et $\varphi(t)$ a une limite finie n quand t tend vers 0).

ce qui permet d'échanger intégrale et somme :

$$I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(nt)\, e^{-kt}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(in-k)t}}{(in-k)} \right]_0^{+\infty} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{k^2 + n^2}.$$

D'après la première question, $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{k^2 + n^2}$ tend vers $\dfrac{\pi}{4}$ quand n tend vers l'infini ; l'autre partie de la somme s'étudie par comparaison à une intégrale (la fonction $t \longmapsto \frac{n}{t^2+n^2}$ est décroissante sur $[n, +\infty[$:

$$\frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + n^2}\, \mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n}{k^2 + n^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{n}{t^2 + n^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

Nous avons ainsi montré que I_n convergeait vers $\dfrac{\pi}{2}$, ce qui s'écrit aussi $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$.

c) Nous avons ensuite, en posant $u = nt$:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{t}\, \mathrm{d}t$$

donc :

$$I_n - I = \int_0^{+\infty} \sin(nt) \underbrace{\left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right)}_{=\psi(t)} \mathrm{d}t$$

L'application ψ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\psi'(t)$ tend vers $\dfrac{1}{12}$ quand t tend vers 0 car

$$\psi'(t) = -\frac{e^t}{(e^t - 1)^2} + \frac{1}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{(e^t - 1)^2 - t^2 e^t}{t^4}$$

et $(e^t - 1)^2 - t^2 e^t = (t + t^2/2 + t^3/6 + o(t^3))^2 - t^2(1 + t + t^2/2 + o(t^2)) = t^4/12 + o(t^4)$.

Le théorème de prolongement C^1 prouve donc que Ψ admet un prolongement de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. L'expression de ψ' montre qu'elle est sommable sur $[0, +\infty[$ (car $\psi'(t)$ est équivalent à $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$). On peut donc faire une intégration par parties (les formes indéterminées sont bien convergentes) :

$$I_n - I = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\, \psi(t) \right] + \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \cos(nt) \psi'(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\, \psi(0) + \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \cos(nt) \psi'(t)\, \mathrm{d}t$$

et cette quantité tend vers 0 quand n tend vers l'infini, puisque $\left| \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(nt) \psi'(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} |\psi'(t)|\, \mathrm{d}t$. Nous avons donc prouvé que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{\pi}{2}.$$

38) On peut écrire :

$$\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right) = \left(I_n + \frac{A}{p} + o(1/p)\right)\left(I_n + \frac{B}{p} + o(1/p)\right) = I_n + \frac{1}{p}\left(A + B + \varepsilon(p)\right)$$

où $\varepsilon(p)$ est une matrice qui tend vers 0 quand p tend vers l'infini.

Comme les matrices I_n et $\frac{1}{p}\left(A + B + \varepsilon(p)\right)$ commutent, on peut utiliser la formule du binôme :

$$\left(\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \underbrace{\binom{p}{k}\frac{1}{p^k}\left(A + B + o(1)\right)^k}_{=u_k(p)} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(p)$$

en posant $u_k(p) = 0$ si $k > p$. Il reste à montrer que l'on peut échanger la somme infinie et la limite quand p tend vers l'infini :

- la suite $\left(A + B + \varepsilon(p)\right)_{p\geq 1}$ est convergente, donc bornée par une constante K :

  $$\forall p \geq 1,\ \|A + B + \varepsilon(p)\| \leq K$$

  où $\|\ \|$ est une norme d'algèbre quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On en déduit :

  $$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \leq p,\ \|u_k(p)\| \leq \binom{k}{p} K^p = \underbrace{\frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{p^k}}_{\leq 1}\frac{K^k}{k!} \leq \frac{K^k}{k!} = \alpha_k$$

  et cette inégalité est également vérifiée pour $k > p$. On en déduit que la série $\sum_{k\geq 0} u_k(p)$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{N}^*$, puisque α_k est le terme général d'une série convergente.

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a pour $p \geq k$:

  $$u_k(p) = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{p^k}\frac{\left(A + B + \varepsilon(p)\right)^k}{k!} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{(A+B)^k}{k!}.$$

Le théorème de la double limite s'applique donc :

$$\left(\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\right)^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(A+B)^k}{k!} = \exp(A+B).$$

39) a) On utilise la fonction `integrate` du module `scipy` et le calcul de S_n se fait sans aucun problème :

```
import numpy as np

import scipy.integrate as integr

def f(x):
    return(np.exp(-x)*(np.log(x))**2)

x,e = integr.quad(f, 0, np.inf)

def S(n):
    a = 0
    for i in range(1,n+2):
        a += 1/i
```

```
    a = (np.log(n))**2 - 2 * np.log(n) * a
    for i in range(1,n+2):
        for j in range(i,n+2):
            a += 2/(i*j)
    return(a)
```

On obtient :

```
>>> x
1.9781119906490818
>>> S(100)
1.9856741944760607
>>> S(500)
1.9795852481082543
>>> S(1000)
1.9788461327606404
>>> S(5000)
1.9782584199936379
```

On peut donc conjecturer que S_n converge (lentement) vers I quand n tend vers l'infini.

b) C'est une question de cours : Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et on peut dériver sous le signe intégral. En particulier :

$$\forall x > 0,\ \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\ \ln^2 t\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

et $\Gamma''(1) = I$.

c) Pour appliquer le théorème de convergence dominée,nous posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0,+\infty[,\ f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ln^2 t & \text{si } 0 < t \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- chaque fonction f_n est continue par morceaux sur $J =]0,+\infty[$;
- pour $t \in I$, $f_n(t)$ est égal à $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ln^2 t$ dès que $n \geq t$, qui converge vers $e^{-t}\ \ln^2 t = f(t)$ quand n tend vers l'infini : la suite (f_n) converge donc simplement vers la fonction f sur J ;
- f est continue, donc continue par morceaux sur J ;
- la fonction ln est convexe sur $]0,+\infty[$; on en déduit que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$ (le graphe de la fonction ln est “sous” sa tangente au point d'abscisse 1). Nous avons donc :

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0,n],\ \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$$

  et donc (n et $\ln^2 t$ sont positifs et la fonction exp est croissante) :

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0,n[,\ f_n(t) = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \ln^2 t \leq e^{-t}\ \ln^2 t = f(t).$$

  Cette inégalité est également valable pour $t > n$ et la fonction f est sommable sur J (propriété qui est déjà utilisée dans la preuve de l'existence de Γ'').

Le théorème de convergence dominée s'applique : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, soit

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln^2 t\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} I.$$

d) En posant $t = ns$, nous obtenons pour $n \geq 1$:

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln^2 t\,\mathrm{d}t = n\int_0^1 (1-s)^n \left(\ln n + \ln s\right)^2\,\mathrm{d}s$$

ce qui donne le résultat demandé, en remarquant que $\displaystyle\int_0^1 (1-s)^n\,\mathrm{d}s = \frac{1}{n+1}$.

Posons :

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \\ b_n &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n+1} \frac{1}{ij} \\ c_n &= -n\int_0^1 (1-s)^n \ln s\,\mathrm{d}s \\ d_n &= \frac{n}{2}\int_0^1 (1-s)^n \ln^2 s\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

On a donc $S_n = \ln^2 n - 2a_n \ln n + 2b_n$ et $I_n = \dfrac{n\ln^2 n}{n+1} - 2c_n \ln n + 2d_n$. En calculant les premiers termes de ces quatre suites, on devine que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{n+1}{n}c_n \text{ et } b_n = \frac{n+1}{n}d_n.$$

Une fois ces relations démontrées, on aura :

$$S_n = \frac{n}{n+1}I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I$$

et le résultat conjecturé à la question a) sera démontré.

Pour la première relation, nous avons :

$$\frac{n+1}{n}c_n = -(n+1)\int_0^1 t^n \ln(1-t)\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{n+k}}{k}\right)\mathrm{d}t$$

en utilisant le développement $\ln(1+u) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{u^k}{k}$, valable sur $]-1,1[$. On peut ensuite appliquer le théorème de sommation terme à terme :

- chaque fonction $u_k :\ t \longmapsto \dfrac{t^{n+k}}{k}$ est continue sur $]0,1]$;
- la série de terme général u_k converge simplement et sa somme est continue sur $]0,1]$;
- $\displaystyle\int_0^1 |u_k(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k(n+k+1)}$ est le terme général d'une série convergente.

On en déduit, en utilisant le caractère téléscopique de la somme :

$$\frac{n+1}{n}c_n = (n+1)\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^1 \frac{t^{n+k+1}}{k}\,\mathrm{d}t = (n+1)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+k+1)k}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} = a_n.$$

On procède de la même façon pour la seconde identité : par produit de Cauchy, on a

$$\forall t \in [0,1[,\ \ln^2(1-t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i(k-i)} \right) t^k$$

On a ensuite

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i(k-i)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{k-i} \right) = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i}$$

d'où

$$\forall t \in [0,1[,\ \ln^2(1-t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \right) t^k.$$

En montrant comme ci-dessus que l'on peut échanger intégrale et somme, on a :

$$\frac{n+1}{n}\, d_n = \frac{n+1}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \right) \frac{1}{n+k+1}$$

Comme on somme une famille de termes positifs, on peut échanger les deux sommes :

$$\frac{n+1}{n}\, d_n = (n+1) \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} \sum_{k=i+1}^{+\infty} \frac{1}{k(n+k+1)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} \sum_{k=i+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k+1} \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} \sum_{k=i+1}^{n+i+1} \frac{1}{k}$$

Nous devons donc démontrer :

$$\forall n \geq 1, \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} \sum_{k=i+1}^{n+i+1} \frac{1}{k} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n+1} \frac{1}{ij}$$

ce qui s'écrit encore, en posant $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$:

$$\forall n \geq 1, \alpha_n = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{H_{n+i+1} - H_i}{i} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{H_j}{j} = b_n$$

On a

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} \left(H_{i+2} - H_i \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+2)} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{7}{4} = b_1$$

en remarquant que les deux séries sont téléscopiques (décomposition en éléments simples). On a d'autre part, pour tout $n \geq 1$:

- $b_{n+1} - b_n = \dfrac{H_{n+2}}{n+2}$;
- $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} \left(H_{n+i+2} - H_{n+i-1} \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i(n+i+2)} = \frac{1}{n+2} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+i+2} \right) = \frac{H_{n+2}}{n+2}$

donc $\alpha_n = b_n$ pour tout n et la conjecture est démontrée : S_n converge vers I quand n tend vers l'infini.

40) a) Notons $u_n :\ x \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$. Nous pouvons appliquer le théorème de dérivation :

- les u_n sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, avec $u_n' :\ x \longmapsto \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+x)^{3/2}}$;
- la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ (théorème spécial des séries alternées : $\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$ décroit vers 0) ;

- pour tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$, on a :

$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in [a,b],\ |u_n'(x)| \leq \frac{1}{2(n+a)^{3/2}} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a,b]$.

On en déduit que f est définie et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, avec :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+x)^{3/2}}.$$

b) L'application $g:\ x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ (même preuve que pour le a), donc au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{1}{x} + g(x) = \frac{1}{x} + g(0) + o(1) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Commençons par calculer un équivalent de $f(2N)$ (pour $N \in \mathbb{N}^*$) au voisinage de l'infini. On a, en groupant les termes deux par deux :

$$f(2N) = \sum_{n=2N}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2N}} = \sum_{q=N}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2q}} - \frac{1}{\sqrt{2q+1}}\right)$$

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{2q}} - \dfrac{1}{\sqrt{2q+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2q}}\left(1 - \left(1+\dfrac{1}{2q}\right)^{-1/2}\right) \sim \dfrac{\sqrt{2}}{8\,q^{3/2}}$, le théorème de sommation des relations de comparaison (les termes généraux considérés sont positifs) donne :

$$f(2N) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{8} \sum_{q=N}^{+\infty} \frac{1}{q^{3/2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{8} \int_N^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{N}}.$$

Pour $x \geq 2$, on peut ensuite fixer $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $2N \leq x < 2(N+1)$. Le théorème des accroissements finis assure l'existence de $y \in [2N,x]$ tel que $f(x) - f(2N) = (x-2N)f'(y)$. Le théorème spécial des séries alternées donne :

$$|(x-2N)f'(y)| = (x-2N)\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+y)^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{y^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

et donc $f(x) = f(2N) + (2N-x)f'(y) = \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{N}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\right) + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercices X-ENS

41) a) Il est classique que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a<b$, l'application $\varphi_{a,b} : x \longmapsto \varphi(x-a)\varphi(b-x)$ est alors de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec φ nulle sur $\mathbb{R}\backslash]a,b[$ et $0 < \varphi \leq 1$ sur $]a,b[$. La fonction $\psi_{a,b}:\ x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi_{a,b}(t),\mathrm{d}t$ est alors de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty,a]$, strictement croissante sur $[a,b]$ et constante sur $[b,+\infty[$. En la divisant par $\psi_{a,b}(b)$, on obtient une fonction $\theta_{a,b}$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty,a]$, strictement croissante sur $[a,b]$ et égale à 1 sur $[b,+\infty[$.

La fonction $\theta:\ x \longmapsto \theta_{1/2,1}(x) + \theta_{1/2,1}(-x)$ vérifie alors les conditions demandées.

b) Nous allons définir une suite (k_n) telle que l'on puisse appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\sum$ à tout ordre à la série de fonction $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n:\ x \longmapsto \dfrac{a_n}{n!}\theta(k_n x)x^n$. Pour cela, nous allons demander à avoir convergence normale (donc uniforme) sur $\mathbb{R}$ des séries de termes généraux $u_n^{(m)}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Nous avons[1] :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n > m,\ u_n^{(m)}(x) = \frac{1}{k_n^n n!}\, g_n(k_n x)$$

où nous avons posé $g_n :\ x \longmapsto a_n \theta(x) x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (chaque fonction g_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-1, 1]$: les dérivées successives de g_n sont donc toutes bornées) ; cela donne :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n > m,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |u_n^{(m)}(x)| = \left| \frac{k_n^m}{k_n^n\, n!}\, g_n^{(m)}(k_n x) \right| \leq \frac{\|g_n^{(m)}\|_\infty}{n! k_n^{n-m}}$$

Si nous imposons $k_n \geq 1$, nous pourrons minorer k_n^{n-m} par k_n (ce qui explique que l'on ait imposé d'avoir $n > m$), il suffira ensuite de majorer k_n par $\|g_n^{(m)}\|_\infty$ pour obtenir une majoration de $\|u_n^{(m)}\|_\infty$ par $1/n!$, terme général d'une série convergente. Comme la majoration doit fonctionner avec $n > m$, il suffit donc de poser :

$$k_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ k_n = \max(1, \|g_n^{(0)}\|_\infty, \|g_n^{(1)}\|_\infty, \ldots, \|g_n^{(n-1)}\|_\infty)$$

et nous aurons

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n > m,\ \|u_n^{(m)}\|_\infty \leq \frac{1}{n!}$$

Cela prouve que pour tout m, la série $\displaystyle\sum_{n>m} u_n^{(m)}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$, et donc que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^{(m)}$ converge également uniformément sur $\mathbb{R}$ pour tout m. Le théorème de dérivation s'applique (avec une récurrence évidente) et f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(m)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(m)}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Il reste à remarquer $u_n^{(m)}$ coïncide avec $x \longmapsto \dfrac{a_n}{n!} x^n$ sur un voisinage de 0 : on en déduit que $u_n^{(m)}(0) = \begin{cases} a_n & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, ce qui donne :

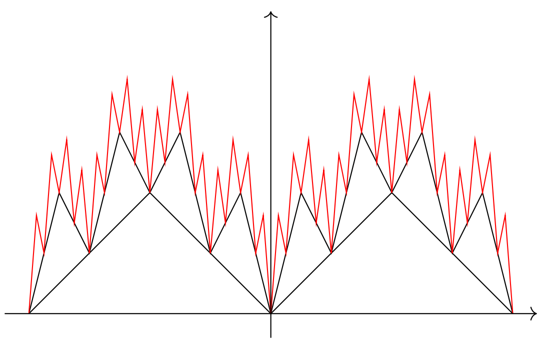
$$\forall m \in \mathbb{N},\ f^{(m)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(m)}(0) = a_m.$$

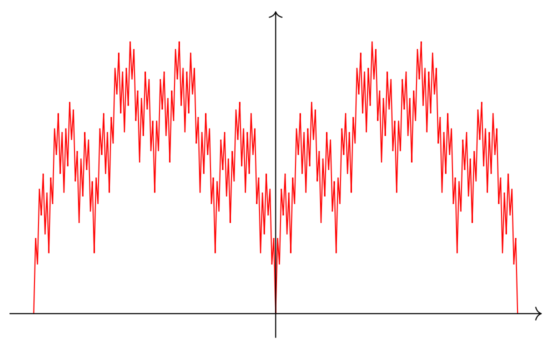
42) a) Les fonctions sommées sont continues sur $\mathbb{R}$ et il y a convergence normale :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n x) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

avec $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ terme général d'une série convergente. f est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Voici les graphes sur $[-2, 2]$ des sommes partielles S_0, S_1 et S_2 (superposées à gauche) et S_3 (à droite).





1. Merci à mon élève Matéo Leccia d'avoir pensé à introduire les fonctions g_n, qui évitent une preuve un peu plus technique utilisant la formule de Leibniz.

b) Pour $\varepsilon > 0$, il existe alors $\eta > 0$ tel que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*,\ |h| < \eta \Longrightarrow F'(x) - \varepsilon < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < F'(x) + \varepsilon$$

Pour h, k tels que $0 < h < \eta$ et $0 < k < \eta$, on a :

$$f'(x) - \varepsilon < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} <= F'(x) + \varepsilon \text{ et } F'(x) - \varepsilon < \frac{F(x-k) - F(x)}{-k} < F'(x) + \varepsilon$$

Comme

$$\frac{F(x+h) - F(x-k)}{h+k} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \times \frac{h}{h+k} + \frac{F(x-k) - F(x)}{-k} \times \frac{k}{h+k}$$

avec $\dfrac{h}{h+k}$ et $\dfrac{k}{h+k}$ positifs de somme égale à 1, on obtient

$$F'(x) - \varepsilon < \frac{F(x+h) - F(x-k)}{h+k} < F'(x) + \varepsilon$$

ce qui prouve que $\dfrac{F(x+h) - F(x-k)}{h+k}$ tend vers $F'(x)$ quand (h, k) tend vers $(0^+, 0^+)$.

c) Les séries qui définissent $f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont des sommes finies, car $g(4^k a_n) = g(4^k b_n) = 0$ pour $k > n$. Nous pouvons donc écrire, en notant $k_n = E(4^n x)$:

$$T_n = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \underbrace{4^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(g(4^k b_n) - g(4^k a_n)\right)}_{=R_n} + 3^n \left(g(k_n + 1) - g(k_n)\right).$$

Nous allons montrer que T_n tend, en valeur absolue, vers $+\infty$. L'idée est que dernier terme de la somme va dominer R_n (on utilise que g est 1-lipschitzienne) :

$$\left| 4^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(g(4^k b_n) - g(4^k a_n)\right) \right| \leq 4^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k 4^k (b_n - a_n) = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{3^n - 1}{2}$$

On a donc :

- si k_n est pair, $T_n = 3^n + R_n \geq 3^n - \dfrac{3^n - 1}{2} = \dfrac{3^n + 1}{2}$;
- si k_n est impair, $T_n = -3^n + R_n \leq -3^n + \dfrac{3^n - 1}{2} = -\dfrac{3^n + 1}{2}$.

On en déduit que $|T_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, ce qui prouve que g n'est pas dérivable en x, car $T_n = \dfrac{f(x + h_n) - f(x - k_n)}{h_n + k_n}$ avec $h_n = b_n - x$ et $k_n = x - a_n$ qui tendent vers 0 par valeurs supérieures.

43) a) Par le théorème d'approximation de Weïerstrass, on sait qu'il existe une suite $(Q_n)_{n \geq 0}$ de polynômes qui converge uniformément vers f. La suite de polynômes $(P_n) = (Q_n - Q_n(0))$ converge alors uniformément vers f (car $Q_n(0)$ tend vers $f(0) = 0$) et on a bien $P_n(0) = 0$ pour tout n.

b) Soit $f \in F$; l'application $g :\ x \longmapsto f(-\ln x)$ est continue sur $]0, 1]$ et tend vers 0 en 0 : on peut donc la prolonger par continuité à $[0, 1]$. Comme $g(0) = 0$, il existe une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de polynômes qui converge uniformément vers g. En posant $Q_n(t) = P_n(e^{-t})$ pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\sup_{t \geq 0} |Q_n(t) - f(t)| = \sup_{x \in]0,1]} |P_n(x) - g(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc (Q_n) converge uniformément vers f et les Q_n sont bien des éléments de $\mathcal{Q}$.

c) L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle entre 0 et $-x$ donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x^k} k\, x^k\right| = \left|e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\, x^k\right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{-x} = \varphi_n(x)$$

φ_n est dérivable et $\varphi'(x) = e^{-x}\,\dfrac{x^n}{(n+1)!}\,(n+1-x)$: φ_n atteint donc son maximum quand $x = n+1$, ce qui donne, avec l'équivalent de Stirling :

$$\sup_{x\geq 0} |f_n(x)| \leq \varphi_n(n+1) = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{-n-1} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc f_n converge uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$.

d) $\mathcal{Q}$ étant dense dans F, il suffit de montrer que $\mathcal{Q} \subset \overline{\mathcal{P}}$ pour montrer que $\mathcal{P}$ est également dense dans F. D'autre part, $\overline{\mathcal{P}}$ est un sous-espace vectoriel de F (car $\mathcal{P}$ en est un), donc il suffit de démontrer que $\varphi_n \in \overline{\mathcal{P}}$ pour tout $n \geq 1$. Montrons donc par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{R}[X],\ \exists f \in F,\ \varphi_n = P\varphi_1 + f \text{ avec } \|f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

- $\varphi_1 \in \mathcal{P}$, donc la propriété est vérifiée au rang $n = 1$.
- D'après le c), $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k\right)\, e^{-x}$ converge uniformément vers φ_2, donc la propriété est vérifiée au rang $n = 2$.
- Soit $n \geq 3$ tel que la propriété est vérifiée au rang $n-1$. Pour $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' > 0$, il existe donc deux polynômes P et Q et deux éléments f et g de F tels que :

$$\begin{cases} \varphi_{n-1} = P\varphi_1 + f & \text{avec } \|f\|_\infty \leq \varepsilon \qquad (\star) \\ \varphi_2 = Q\varphi_1 + g & \text{avec } \|g\|_\infty \leq \varepsilon' \qquad (\star\star) \end{cases}$$

  On a alors :

$$\varphi_n = \varphi_{n-1}\varphi_1 = (P\varphi_1 + f)\varphi_1 = P\varphi_2 + f\varphi_1 = P(Q\varphi_1 + g) + f\varphi_1 = \underbrace{PQ\varphi_1}_{\in\mathcal{P}} + Pg + f\varphi_1$$

  mais cela ne suffit pas pour conclure car P n'étant pas borné, on n'a aucun renseignement sur $\|Pg\|_\infty$. La preuve va être un peu plus subtile. On commence par écrire $(\star\star)$ en $nx/2$:

$$\forall x \geq 0,\ \varphi_n(x) = e^{-nx} = \varphi_2\left(\frac{nx}{2}\right) = Q\left(\frac{nx}{2}\right) e^{-nx/2} + g\left(\frac{nx}{2}\right) = Q\left(\frac{nx}{2}\right) \varphi_n(x/2) + g\left(\frac{nx}{2}\right)$$

  puis on utilise $(\star)$ en $x/2$:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= Q\left(\frac{nx}{2}\right) \left[P\left(\frac{x}{2}\right) \underbrace{\varphi_2\left(\frac{x}{2}\right)}_{=\varphi_1(x)} + f\left(\frac{x}{2}\right) \varphi_1(x/2) \right] + g\left(\frac{nx}{2}\right) \\ &= \underbrace{Q\left(\frac{nx}{2}\right) P\left(\frac{x}{2}\right)}_{R(x)} \varphi_1(x) + \underbrace{Q\left(\frac{nx}{2}\right) e^{-x/2} f\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{nx}{2}\right)}_{=h(x)} \end{aligned}$$

  La fonction $x \longmapsto Q\left(\dfrac{nx}{2}\right) e^{-x/2}$ est bornée par une constante M (qui dépend de Q, donc de ε) ; en choisissant ε' tel que $M\varepsilon' \leq \varepsilon$, on a $\|h\|_\infty \leq 2\varepsilon$, ce qui donne :

$$\varphi_n = R\varphi_1 + h \text{ avec } R \in \mathbb{R}[X] \text{ et } \|h\|_\infty \leq 2\varepsilon$$

  La propriété est ainsi démontrée au rang n.

44) Soit f une solution. Pour $a \in]0,1[$, f est continue sur $[0,a]$ donc y est bornée et atteint ses bornes : ils existent $b_1, b_2 \in [0,a]$ tels que $f(b_1) \leq f(x) \leq f(b_2)$ pour tout $x \in [0,a]$. Comme $b_1^n \in [0,a]$ pour tout n, on en déduit

$$f(b_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(b_1^n)}{2^n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(b_1)}{2^n} = f(b_1).$$

Ainsi, les inégalités $\dfrac{f(b_1^n)}{2^n} \geq \dfrac{f(b_1)}{2^n}$ sont toutes des égalités, ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(b_1^n) = f(b_1)$$

soit, en passant à la limite quand n tend vers l'infini, $f(0) = f(b_1)$ (car $0 \leq b_1 \leq a < 1$) ; de même, on montre que $f(0) = f(b_2)$, ce qui prouve que f est constante sur $[0,a]$, pour tout $a \in [0,1[$; comme f est continue en 1, on a que f est constante sur $[0,1]$.

Réciproquement, les constantes sont solutions du problème.

45) La difficulté de cette question est qu'il ne faut utiliser ni la continuité des f_n, ni la compacité de K pour montrer que f est continue !

Remarquons que l'hypothèse entraîne la convergence simple de (f_n) vers f (on peut choisir une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ constante).

Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in K$ telle que f soit discontinue en x. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et $(x_n)_{n \geq \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ tels que :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ |f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

Par convergence simple, on a $f_k(x_0) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x_0)$ donc on peut choisir $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left|f_{\varphi(0)}(x_0) - f(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a ensuite $f_k(x_1) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x_1)$ donc on peut choisir une entier $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que :

$$\left|f_{\varphi(1)}(x_1) - f(x_1)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par itération, on construit ainsi une extractrice $\varphi :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left|f_{\varphi(k)}(x_k) - f(x_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $|f(x_k) - f(x)| \geq \varepsilon$ pour tout k, on en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left|f_{\varphi(k)}(x_k) - f(x)\right| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

La dernière astuce consiste à remplacer $(x_k)_{k\geq 0}$ par une nouvelle suite ; on définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \begin{cases} x_p & \text{s'il existe un } p \text{ (unique) tel que } n = \varphi(p)\,; \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

(y_n) est une suite d'élément de K qui converge vers x, donc $f_n(y_n)$ converge vers $f(x)$: c'est absurde car $f_{\varphi(k)}(y_{\varphi(k)}) = f_{\varphi(k)}(x_k)$ ne tend pas vers $f(x)$ quand k tend vers l'infini.

Nous avons ainsi démontré que f était continue.

Pour montrer que la convergence de f_n vers f est uniforme, procédons une nouvelle fois par l'absurde ; supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists x \in K,\ \exists m \geq N,\ |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

On peut donc construire une extractrice $\varphi :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et une suite $(x_n)_{n\geq 0} \in K^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_{\varphi(n)}(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon.$$

La construction se fait par récurrence : on choisit $N = 0$ pour construire $(x_0, \varphi(0))$, puis, en supposant $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ construits, on obtient $(x_{n+1}, \varphi(n+1))$ avec $N = \varphi(n) + 1$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite du compact K, il existe une extractrice ψ et un élément x de K tel que $x_{\psi(k)}$ converge vers x. Nous avons alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_{\varphi(\psi(n))}(x_{\psi(n)}) - f(x_{\psi(n)})| \geq \varepsilon \qquad (*)$$

On utilise la même méthode que dans la preuve précédente : on définit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \begin{cases} x_{\psi(p)} & \text{s'il existe un } p \text{ (unique) tel que } n = \varphi(\psi(p))\,; \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers x ; on en déduit que $f_n(y_n)$ converge vers $f(x)$ et en utilisant la continuité de f en x :

$$|f_{\varphi(\psi(p))}(x_{\psi(p)}) - f(x_{\psi(p)})| = |f_{\varphi\circ\psi(n)}(y_{\varphi\circ\psi(p)}) - f(x_{\psi(p)})| \xrightarrow[p\to+\infty]{} |f(x) - f(x)| = 0$$

ce qui contredit $(*)$.

46) a) Ce résultat se prouve par densité (pour $\|\ \|_\infty$) en se ramenant à des fonctions simples. On peut donner deux preuves :

- on commence par prouver le résultat pour g de classe C^1 (preuve classique par IPP) ; si g est continue, on approxime g par une fonction de classe C^1, par exemple grâce au théorème de Weierstrass. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $|g(t) - P(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [a, b]$. Comme P est de classe C^1, il existe A tel que :

  $$\forall \lambda \geq A,\ \left|\int_a^b P(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon.$$

  On a alors, pour $\lambda \geq A$:

  $$\begin{aligned} \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b (g(t) - P(t))\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b P(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_a^b |g(t) - P(t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_a^b P(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq (b - a + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

  ce qui prouve que $\displaystyle\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

  Il reste ensuite à généraliser au cas où g n'est que continue par morceaux : il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_k)$ de $[a, b]$ et des applications $g_0, \ldots, g_{k-1}$ continues respectivement sur $[a_0, a_1], \ldots, [a_{k-1}, a_k]$ telles que chaque g_i coïncide avec g sur $]a_i, a_{i+1}[$. On a alors :

  $$\forall i \in \{0, \ldots, k-1\},\ \int_{a_i}^{a_{i+1}} g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \int_{a_i}^{a_{i+1}} g_i(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

  et donc

  $$\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0.$$

- en théorie de la mesure, on utilise plutôt une approximation de g par des fonctions en escaliers ; on démontre d'abord le résultat pour $h :\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ en escalier (preuve immédiate), puis on utilise le théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par morceaux : si g est continue par morceaux sur $[a, b]$ et si $\varepsilon > 0$, il existe h en escalier telle que $\|g - h\|_\infty \leq \varepsilon$. On termine ensuite comme dans la première preuve ; il existe A tel que :

  $$\forall \lambda \geq A,\ \left|\int_a^b h(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour $\lambda \geq A$:

$$\left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) \, \mathrm{d}t \right| \leq (b - a + 1)\varepsilon$$

b) On a :

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-s) \sum_{k=-n}^{n} e^{iks} \, \mathrm{d}s$$

en posant $s = x - t$ et en utilisant la 2π-périodicité. Le calcul est ensuite classique :

$$\begin{aligned}
\sin \frac{s}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{iks} &= \sin\left(\frac{s}{2}\right) + 2 \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{s}{2}\right) \cos(ks) \\
&= \sin \frac{s}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) s\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right) s\right) \\
&= \sin \frac{s}{2} + \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) s\right) - \sin\left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) s\right) \qquad \text{(somme téléscopique)} \\
&= \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) s\right)
\end{aligned}$$

Nous avons donc la forme demandée, avec $D_n(s) = \dfrac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) s\right)}{2\pi \sin(s/2)}$.

c) En appliquant le résultat précédent à la fonction g constante égale à 1, pour laquelle $c_0 = 1$ et $c_k = 0$ pour $k \neq 0$, nous avons :

$$1 = S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(s) \, \mathrm{d}s$$

et le résultat demandé est une conséquence de la parité de D_n.

d) Nous devons démontrer que $\int_{-\pi}^{0} g(x-s) D_n(s) \, \mathrm{d}s$ converge vers $\dfrac{1}{2} f(x^+)$ quand n tend vers l'infini, l'étude de l'autre partie de l'intégrale étant symétrique. Ce résultat est une conséquence directe de la question a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{0} g(x-s) D_n(s) \, \mathrm{d}s - \frac{1}{2} f(x^+) &= \int_{-\pi}^{0} \left(g(x-s) - g(x^+)\right) D_n(s) \, \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \frac{g(x-s) - g(x^+)}{\sin(s/2)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) s\right) \mathrm{d}s \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0
\end{aligned}$$

car l'application $s \longmapsto \dfrac{g(x-s) - g(x^+)}{\sin(s/2)}$ est continue par morceaux sur $[-\pi, 0[$ et admet une limite en 0. En effet, g est de classe C^1 par morceaux, donc $\dfrac{g(x-s) - g(x^+)}{-s}$ a une limite quand s tend vers 0^-.

e) La fonction g de période 2π définie par $g(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$ est de classe C^1 par morceaux (et continue). On peut donc lui appliquer le résultat précédent. Avec deux intégrations par parties, nous avons :

$$c_0 = \frac{\pi^2}{3} \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}^*, \; c_n = 2 \, \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Nous avons donc :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \; x^2 = g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(e^{-inx} + e^{inx}\right) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

Avec $x = \pi$, nous obtenons $\pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, soit $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$.