$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

Les deux fonctions f et g définies par

$$\forall\, t \in [0,+\infty[, \qquad f(t) = \frac{1}{1+t^4} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t^2}{1+t^4}$$

sont continues sur l'intervalle $I = [0,+\infty[$. De plus, elles sont intégrables au voisinage de $+\infty$ car

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4} \qquad \text{et} \qquad g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

donc elles sont intégrables sur $[0,+\infty[$.

❧ L'application $\varphi = [u \mapsto 1/u]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et réalise une bijection (strictement croissante) de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. De plus,

$$dt = -\frac{du}{u^2}.$$

D'après le Théorème de changement de variable, les intégrales généralisées

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} f\big(\varphi(u)\big)|\varphi'(u)|\,du = \int_{+\infty}^{0} \frac{-\,du/u^2}{1+(1/u)^4} = \int_0^{+\infty} g(u)\,du$$

sont égales.

Pour terminer le calcul, il nous reste trois possibilités : l'astuce taupinale avec un changement de variable simple ; un changement de variable astucieux ; une décomposition en éléments simples (à savoir faire pour les jours où on manque de lucidité).
Je rappelle qu'une décomposition en éléments simples commence toujours par une factorisation du dénominateur : les pôles de f et de g sont les racines quatrièmes de -1, donc

$$1+X^4 = (1-\sqrt{2}X+X^2)(1+\sqrt{2}X+X^2)$$

en rassemblant les racines conjuguées pour obtenir une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

❧ **Avec l'astuce taupinale** — D'après ce qui précède,

$$2\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt.$$

L'astuce taupinale nous donne, sans effort, la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1+t^2}{1+t^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+\sqrt{2}t+t^2)+(1-\sqrt{2}t+t^2)}{(1+\sqrt{2}t+t^2)(1-\sqrt{2}t+t^2)}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{4}\left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1-\sqrt{2}t+t^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+\sqrt{2}t+t^2}\right)$$

et ces deux intégrales se calculent en suivant la méthode habituelle (mise sous forme canonique, puis primitive en Arctan).

❧ **Avec un changement de variable astucieux** — On commence par écrire l'intégrale sous une forme un peu différente :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{(1+1/t^2)\,dt}{t^2+1/t^2}$$

ce qui suggère un changement de variable *très* astucieux (merci Joubert !) :

$$u = \psi(t) = t - \frac{1}{t}, \qquad du = \left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt.$$

Il est clair que la fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et comme ψ est strictement croissante, elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]-\infty,+\infty[$.

L'étude de ψ ne cèle aucun mystère : la fonction ψ est la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0,+\infty[$ (ou, si on préfère, sa dérivée est strictement positive), on peut donc appliquer le Théorème de la bijection monotone. Il suffit pour conclure de déterminer les limites de ψ en 0 et en $+\infty$.

Il reste à « remarquer » que

$$u^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2.$$

On déduit alors du Théorème de changement de variable que

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+1/t^2)\,dt}{t^2+1/t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{2+u^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(\sqrt{2})^2+u^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

❧ **Avec une décomposition en éléments simples laborieuse** — La théorie nous dit qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{1+t^4} = \frac{a+bt}{1-\sqrt{2}t+t^2} + \frac{c+dt}{1+\sqrt{2}t+t^2}.$$

Après quelques minutes d'efforts, on arrive à

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}-t}{1-\sqrt{2}t+t^2} + \frac{\sqrt{2}+t}{1+\sqrt{2}t+t^2} \right).$$

Plusieurs méthodes sont possibles pour obtenir la décomposition en éléments simples, toutes ne sont pas aussi efficaces, donc entraînez-vous !

Il faut alors constater qu'aucun des deux éléments simples obtenus n'est intégrable au voisinage de $+\infty$. Il est donc impossible de calculer directement les intégrales généralisées, il faut d'abord trouver une expression simplifiée des primitives de f.

On commence avec l'astuce taupinale :

$$\sqrt{2}-t = \frac{-1}{2} \cdot (2t-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{2}-t}{1-\sqrt{2}t+t^2}\,dt &= \frac{-1}{2} \cdot \ln(1-\sqrt{2}t+t^2) + \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dt}{(t-\sqrt{2}/2)^2+(1/\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{-1}{2} \cdot \ln(1-\sqrt{2}t+t^2) + \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}t-1). \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = -t$ nous donne

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{2}+t}{1+\sqrt{2}t+t^2}\,dt &= -\int \frac{\sqrt{2}-u}{1-\sqrt{2}u+u^2}\,du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln(1+\sqrt{2}u+u^2) - \operatorname{Arctan}(-\sqrt{2}u-1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln(1+\sqrt{2}u+u^2) + \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}u+1). \end{aligned}$$

Attention au changement de variable dans la primitive : la borne aussi est modifiée, donc la nouvelle borne est $-u$ (et non pas u).

On vérifie alors que la somme des variations des deux logarithmes entre 0 et $+\infty$ est nulle et on retrouve enfin le résultat voulu.

L'expression d'une primitive de f est trop longue pour être écrite ici (air connu).