Séries entières : énoncés

Exercices CCP

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Donner le rayon et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} H_n x^n$.

2) Déterminer les rayons de convergence des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2 z^n$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \operatorname{sh} n\, z^n$ c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{\sin n}\, z^n$ d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n+n^2}{3^n-n^2}\, z^n$ e) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\, z^n$

f) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\, z^{n^2}$ g) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (\ln n)^{-\ln n} z^n$ h) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^{3n}}{(3n)!}\, z^n$ i) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \ln(n!)\, z^n$ j) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right) z^n$

3) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ pour $n \geq 0$. On admet que la série $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est de rayon $R > 0$. Pour z complexe tel que $|z| < 1$ et $|z| < R$, calculer $\dfrac{f(z)}{1-z}$. En déduire une expression de $f(z)$, puis une expression de a_n en fonction de n.

4) Calculer les sommes des séries entières :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(2n)!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+2+\cdots+n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n}{n!}\, z^n$ f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3-n}$ g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{3+(-1)^n}\right) z^n$ h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+2)n!}\, z^n$

5) Développer $f\ :\ x \longmapsto e^x \sin x$ en série entière par deux méthodes différentes.

6) Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions :

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2-x+2}$ b) $f_2(x) = \sin\left(2\operatorname{Arcsin} x\right)$ c) $f_3(x) = \dfrac{\operatorname{Argsh} x}{\sqrt{1+x^2}}$ d) $f_4(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

e) $f_5(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+t^2+1}$ f) $f_6(x) = \ln(1+x+x^2)$ g) $f_7(x) = \sin x \operatorname{ch} x$ h) $f_8(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Exercices CCP-Mines-Centrale

Calculs de rayons de convergence

7) Calculer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ définies par les suites suivantes :

a) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)^{\ln n}$ b) $a_n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ b^n & \text{sinon} \end{cases}$ c) $a_n = n^{\ln n}$ d) $a_n = \sqrt{n}^{-\sqrt{n}}$

e) $\dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$ f) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(2-2^{1/k})$ g) $\dfrac{(2n)!n^{2n}}{2^n n!(3n)!}$ h) $\begin{cases} a^{k^2} & \text{si } n \text{ est de la forme } k(k+1)/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

8) Quel est le rayon de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, où (a_n) est une suite de complexes non nuls telle que :

$$\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{a_{2n+3}}{a_{2n+1}}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$$

où ℓ_1 et ℓ_2 sont deux éléments de $[0,+\infty]$?

9) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_0,\ a_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \dfrac{4n^2+2\lambda-1}{4(n+2)^2}\, a_{n+1} + \dfrac{(n+1)^2}{4(n+2)^2}\, a_n$.

Montrer que $|a_{n+2}| \leq |a_{n+1}| + \dfrac{1}{4}\,|a_n|$ pour n assez grand puis que $R\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) \geq 2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Calculs de sommes de séries entières

10) (Centrale 2016) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}$. En utilisant une relation entre a_n et a_{n+1}, calculer le rayon et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$.

11) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathrm{Tr}(A^n)$. Exprimer a_n en fonction de a_{n-1}, a_{n-2} et a_{n-3}. Déterminer le rayon et la somme de la série entière $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

12) (Mines 2014) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}\right)x^n$.

13) (Mines 2016) Rayon de convergence et somme de $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2^{(-1)^n}}{n}x^n$.

Séries génératrices

14) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n le nombre de partitions de l'ensemble $E_n = \{1,\ldots,n\}$.

a) Calculer P_1, P_2 et P_3. On convient que $P_0 = 1$.

b) Montrer que le rayon de convergence de la série $f(x) = \sum_{n\geq 0}\dfrac{P_n}{n!}x^n$ est au moins égal à 1.

c) Exprimer P_{n+1} en fonction de $P_0,\ldots,P_n$ et en déduire l'expression de f.

d) Exprimer P_n sous forme d'une somme de série.

15) On note d_n le nombre de dérangement de $\{1, 2, \ldots, n\}$, i.e. le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sans point fixe (on convient que $d_0 = 1$).

a) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ est de rayon R non nul. On note f sa somme.

b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$ et en déduire la valeur de R, puis de $f(z)$ pour $|z| < R$. Donner une expression de d_n et en déduire une relation simple liant d_n et d_{n+1}.

16) Soit $f(t) = \dfrac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^4)}$. Développer f en série entière au voisinage de 0. De combien de façons peut-on payer une somme de 1358 euros avec des pièces de 50 centimes, de 1 euro et de 2 euros ?

17) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de façons de payer une sommes de n euros en utilisant des pièces de 1 ou de 2 euros :

$$a_n = \text{Card}\,\{(i, j) \in \mathbb{N}^2,\ i + 2j = n\}.$$

a) Donner une expression de a_n, puis le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

b) Plus généralement, pour $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ suite strictement croissante d'entiers naturels, on définit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n,\sigma} = \text{Card}\,\{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k,\ i_1\sigma_1 + i_2\sigma_2 + \cdots + i_k\sigma_k = n\}.$$

Donner le rayon de convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_{n,\sigma} z^n$.

18) Quand E est un ensemble, on note $\mathcal{I}(E)$ l'ensemble des involutions de E, i.e. l'ensemble des bijections f de E sur E telles que $f \circ f = \text{Id}_E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n = [\![1, n]\!]$ et I_n le cardinal de $\mathcal{I}(E_n)$ (avec par convention $I_0 = 1$).

a) Donner une définition par récurrence de la suite (I_n).

b) Montrer que la série entière de terme général $\dfrac{I_n}{n!} x^n$ est de rayon au moins égal à 1 et déterminer une équation différentielle vérifiée par sa somme f.

c) En déduire une expression de $f(x)$, puis une expression de I_n.

19) (Mines 2014) Soit la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par les relations : $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+2}$.

Calculer le rayon de convergence et la somme la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. En déduire une expression de a_n.

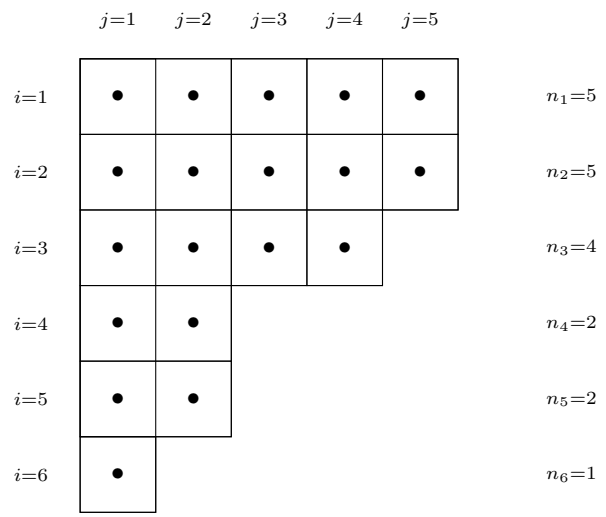
20) Pour $n \in\ N^*$, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des *partitions de* n, i.e. l'ensemble des familles $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ d'entiers telles que :

$$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1 \text{ et } n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

On note p_n le cardinal de $\mathcal{P}_n$.

Si $s = (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \mathcal{P}_n$, on dit que s est une partition de n en k parts. Nous noterons $\mathcal{P}_{n,k}$ l'ensemble des partitions de n en k parts et $p_{n,k}$ son cardinal. Par convention, $\mathcal{P}_0$ est un singleton (il contient la liste vide) et $p_0 = p_{0,0} = 1$.

On pourra représenter une partition $s = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ de n par son *diagramme de Ferrers*, qui est une représentation de l'ensemble des points (i, j) entiers avec $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq n_i$. Voici par exemple le diagramme de Ferrers de la $(5, 5, 4, 2, 2, 1)$:



a) Calculer p_k pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) Montrer que $p_{n,k}$ est aussi le nombre de partitions $s = (n_1, n_2, \ldots, n_p)$ de n telles que $n_1 = k$.

c) Donner une formule de récurrence reliant les $(p_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ et en déduire une fonction Python qui calcule p_n. Que vaut p_{1000} ?

d) Montrer que pour $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{K} \frac{1}{1-x^k}$ a une limite strictement positive quand K tend vers l'infini. Cette limite est notée $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k}$.

e) Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} p_n x^n$ est de rayon 1 avec :

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

f) Question subsidiaire : on munit l'ensemble $\mathcal{P}_n$ de l'ordre lexicographique. Voici par exemple l'ordre sur $\mathcal{P}_6$:

$$(6) > (5,1) > (4,2) > (4,1,1) > (3,3) > (3,2,1) > (3,1,1,1) > (2,2,2) > (2,2,1,1) > (2,1,1,1,1) > (1,1,1,1,1,1)$$

Écrire une fonction Python qui, appliquée à une partition qui n'est pas la dernière, renvoie celle qui la suit dans l'ordre décroissant.

Propriétés générales des sommes de séries entières

21) Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon infini. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $\rho > 0$, $a_n = \dfrac{1}{2\pi\rho^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} \, d\theta$. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$ et $\rho > 0$, $|a_n| \leq \dfrac{M_\rho}{\rho^n}$ où $M_\rho = \displaystyle\sup_{|z|=\rho} |f(z)|$.

Montrer que si f est bornée, alors f est constante. Plus généralement, montrer que si $\dfrac{|f(z)|}{|z|^N}$ est bornée au voisinage de l'infini, alors f est un polynôme de degré au plus N. En particulier, montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ne converge uniformément sur $\mathbb{C}$ que si f est un polynôme.

22) On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ est définie et continue sur le disque unité fermé, et que f est nulle sur le cercle unité. Montrer que f est nulle.

23) (Mines) Que peut-on dire d'une série entière qui converge uniformément sur tout le domaine complexe ?

24) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon R non nul, de somme f. Montrer que f est développable en série entière en tout point z_0 de son disque ouvert de convergence, en précisant le domaine de validité du développement.

25) a) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$. Montrer :

$$\forall r \in]0, R[,\ \forall z \in B(0,r),\ f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f\left(re^{it}\right)}{re^{it} - z}\,\mathrm{d}t.$$

b) Réciproquement, montrer que toute fonction f définie et continue sur $B(0,R)$ vérifiant cette propriété est la somme d'une série entière.

Développements en séries entières

26) Soit $f :]-a, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞. Montrer que pour que f soit développable en série entière au voisinage de 0, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$, $A > 0$ et $r \in]0, a[$ tels que :

$$\forall x \in]-a, a[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x| < r \Rightarrow |f^{(n)}(x)| \leq C\, A^n n!$$

27) Soit $f :]-a, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que toutes les dérivées de f soient positives. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la n-ième somme partielle de la série de Taylor de f en 0 et $R_n = f - S_n$. On note R le rayon de convergence de la série de Taylor de f en 0.

a) Montrer que pour tout $x \in [0, a[$, la suite $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente. En déduire que $R \geq a$.

b) Montrer que pour tout $x \in]-a, 0[$, $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

c) Montrer que pour tout $(x, y) \in]0, a[^2$ tel que $x \leq y$, on a $0 \leq \dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \dfrac{R_n(y)}{y^{n+1}}$.

d) En déduire que $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $x \in]0, a[$. Qu'avons nous démontré ?

28) Développer en série entière en 0 les fonctions :

a) $f_1(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \exp\left(x\mathrm{e}^{it}\right)\,\mathrm{d}t$ b) $f_2(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (1 - x\sin^2 t)^\alpha\,\mathrm{d}t$ c) $f_3(x) = \ln(1 + x + x^2)$

d) $f_4(x) = \operatorname{Arctan}\dfrac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}$ avec $0 < \alpha < \pi/2$ e) $f_5(x) = \mathrm{e}^{x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ f) $f_6(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x+n}$

29) (Mines 22) Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $p_n(z) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{z}{2^k}\right)$.

a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(\ln(p_n(-|z|)))_{n\geq 0}$ est convergente.

b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(p_n(z))_{n\geq 0}$ est bornée.

c) Montrer que la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction p vérifiant

$$p(0) = 1 \text{ et } \forall z \in \mathbb{C},\ p(z) = (1-z)p\left(\frac{z}{2}\right).$$

d) Montrer que p est continue en 0.

e) Montrer que p est développable en série entière.

30) Soit $q \in]-1,1[$.

a) Montrer que $f:\ x \longmapsto \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que c'est l'unique fonction continue en 0 vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1-qx)f(qx) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

b) En admettant que l'exponentielle d'une fonction DSE est DSE, montrer que f est DSE en 0 et calculer les coefficients de son DSE.

c) Montrer que f est DSE en 0 et donner le domaine de validité de son développement, sans admettre le résultat précédent.

31) (Mines 17) Soit $q \in]-1,1[$. Montrer que $f:\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\sin(q^n x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et DSE en 0.

Étude sur le cercle d'incertitude ou au voisinage d'un point de ce cercle

32) Théorème d'Abel :

a) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série complexe convergente. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est de rayon $R \geq 1$ et qu'elle converge uniformément sur $[0,1]$.

b) Première application : en déduire les valeurs des sommes

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n},\ B = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},\ C = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1} \text{ et } D = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}.$$

c) Seconde application : soient $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries à termes complexes convergentes. Montrer que si leur produit de Cauchy converge, sa somme est égal au produit des sommes des deux séries.

d) Généralisation : posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$. Démontrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est de rayon $R \geq 1$ et que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ tend vers S quand x tend vers 1^-.

33) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon 1. On suppose que $a_n \geq 0$ pour tout n et que $\sum a_n$ diverge.

a) Montrer que $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers 1.

b) Montrer que si $b_n \underset{+\infty}{\sim} a_n$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \underset{1^-}{\sim} f(x)$.

c) Soit $(c_n)_{n\geq 0}$ définie par la donnée de $c_0 > 0$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = \ln(1+c_n)$. Montrer que $h : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ est définie sur $[-1,1[$ et en donner un équivalent en 1^-.

34) Déterminer le rayon R de la série entière $\sum_{n\geq 0} x^{n^2}$ et donner un équivalent de sa somme quand x tend vers R^-.

35) (Mines 2016) Donner un équivalent de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ quand $x \to 1^-$.

36) (Centrale 2017) Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}}$.

a) Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$.

b) Montrer que si $\varepsilon > 0$ et si Y est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $x > 0$, on a $P(|Y-x| \geq \varepsilon x) \underset{x\to+\infty}{=} O(1/x)$.

c) En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$.

37) On définit une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ en fixant $a_0 > 0$ et en posant $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que le domaine de définition de $f :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est l'intervalle $[-1,1[$. Donner un équivalent de $f(x)$ en 1^-.

Équations différentielles et séries entières

38) Trouver les séries entières solutions des équations différentielles :

a) $(x^2+x)y'' + y' + y = 0$ b) $(ax^2+1)y'' + bxy' + cy = 0$ c) $x(x+2)y' + (x+1)y - 1 = 0$

d) $y'' + 2xy' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ e) $(1-x^2)y'' - xy' - a^2 y = 0$ (en déduire le DSE de $\mathrm{e}^{a \operatorname{Arcsin} x}$).

39) On souhaite calculer la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

a) Quel est le rayon de convergence R de la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ pour tout $n \geq 0$?

b) En utilisant une relation liant a_n et a_{n+1}, expliciter une équation différentielle (E) d'ordre 1 admettant f pour solution sur $]\,0, R\,[$.

c) Expliciter la solution générale de l'équation (E). En développant au voisinage de 0 cette solution générale, donner une expression de $f(x)$ ainsi que la valeur de S.

Divers

40) (Mines) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $r \geq R$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait :

$$A^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} \left(re^{i\theta} I_n - A\right)^{-1} \mathrm{d}\theta.$$

b) En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

41) (Centrale 17) a) Rappeler le DSE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$. On note R le rayon de convergence de cette série entière.

b) Montrer que $g : \ z \longmapsto \displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est définie et continue sur le disque fermé de centre 0 et de rayon R (on pourra utiliser l'équivalent se Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n$). Calculer g^2.

42) a) Montrer que est le rayon de la série entière $f : \ z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ est égal à 1.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. En utilisant $\varphi : \ t \longmapsto \mathrm{e}^{f(zt)}$, calculer $\mathrm{e}^{f(z)}$.

Exercices X-ENS

43) Montrer que si f est DSE_{z_0} et si $f(z_0) \neq 0$, alors $g = \dfrac{1}{f}$ est également DSE_{z_0} (on pourra se ramener au cas où $f(z_0) = 1$).

44) (X) On note I le domaine de définition de la fonction $f : \ x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)\, x^n$.

a) Déterminer I et étudier la continuité de f sur I.

b) On pose :

$$a_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1 \\ -\ln(1 - 1/n) - 1/n & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Montrer que $g : \ x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n$ est définie et continue sur $[-1, 1]$. Calculer $g(1)$ et $g(-1)$.

c) En déduire des équivalents de f aux bornes de I.

45) (ENS PLC) a) Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Pour tout $r \in]0, R[$, exprimer $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2$ en fonction de r et des a_n.

b) On suppose que les a_n sont des entiers relatifs, que $R = 1$ et que f est bornée par une constante C sur le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Montrer que $(a_n)_{n \geq 0}$ est presque nulle.

46) (X) Pour $|t| < 1$, on pose $f(t) = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - t^k}$. Montrer que f est bien définie et que pour tout $t \in]-1, 1[$, on a $f(t) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n$ où p_n est le nombre de suites $y = (y_k)_{k \geq 1}$ d'entiers naturels telles que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k y_k = n$.

47) (X 2019) On admet que si $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ et $\psi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n z^n$ sont des sommes de séries entières de rayons non nuls, $\varphi \circ \psi$ est développable en série entière en 0.

Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entières de rayon $R > 0$, avec $a_1 \neq 0$. On cherche à construire une somme de série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ de rayon non nul telle que $f \circ g(z) = z$ au voisinage de 0.

a) Montrer qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n\geq 1}$ telle que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\sum_{n=1}^{N} b_n z^n\right) = z + o(z^N).$$

b) On suppose que $F(z) = A_1 z - \sum_{n=2}^{+\infty} A_n z^n$ est de rayon non nul, avec $A_1 = |a_1|$ et $\forall n \geq 2,\ A_n \geq |a_n|$. On note $(B_n)_{n\geq 1}$ la suite vérifiant :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ F\left(\sum_{n=1}^{N} B_n z^n\right) = z + o(z^N).$$

Montrer que $B_N \geq |b_n|$ pour tout $n \geq 1$.

c) Conclure.

Séries entières : corrigés

Exercices CCP

1) En appliquant la règle de d'Alembert, on montre que $\sum_{n\geq 1} H_n x^n$ converge absolument pour $|x| < 1$ et diverge grossièrement pour $|x| > 1$: la série est donc de rayon 1.

En posant $a_0 = 0$ et $a_n = 1/n$ pour tout $n \geq 1$, nous reconnaissons un produit de Cauchy de deux séries entières de rayon 1 :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n.$$

On obtient donc :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

2) a) La règle de d'Alembert donne facilement $R = 1$. Plus généralement, on utilisera dans les exemples suivants que pour tout $a \in \mathbb{R}$, le rayon de $\sum_{n\geq 0} n^a z^n$ est égal à 1.

b) $\operatorname{sh} n \sim_{+\infty} \frac{1}{2}e^n$ donc $R = R\left(\sum_{n\geq 0} e^n z^n\right) = \frac{1}{e}$.

c) $1/e \leq e^{\sin n} \leq e$, donc $R\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{e} z^n\right) \geq R \geq R\left(\sum_{n\geq 0} z^n\right)$ et $R = 1$.

d) $\dfrac{2^n - n^2}{3^n - n^2} \sim \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ donc $R = R\left(\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2z}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{2}$.

e) $\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $R = 1$.

f) si $z = 1$, la série diverge grossièrement ; si $0 < |z| < 1$, on peut appliquer la règle de d'Alembert :

$$\frac{(n+1)|z|^{(n+1)^2}}{n|z|^{n^2}} \sim |z|^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$$

donc la série est absolument convergente : on a $R = 1$.

g) On peut se contenter d'un encadrement grossier : pour tout $n \geq 1$, $n \leq n! \leq n^n$ donc $\ln n \leq \ln(n!) \leq n \ln n$. Comme les séries $\sum_{n\geq 1} \ln n\, z^n$ et $\sum_{n\geq 1} n \ln n\, z^n$ sont de rayon 1 (par exemple grâce à la règle de d'Alembert), on a $R = 1$.

h) Soit $z \neq 0$. On a :

$$\frac{\dfrac{(n+1)^{3n+3}|z|^{n+1}}{(3n+3)!}}{\dfrac{n^{3n}|z|^n}{(3n)!}} = \frac{(n+1)^3|z|}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(\frac{e}{3}\right)^3 |z|$$

donc $R = \left(\dfrac{3}{e}\right)^3$.

i) Utilisons une nouvelle fois le théorème de d'Alembert, pour $z \neq 0$ et $n \geq 2$:

$$\frac{(\ln(n+1))^{-\ln(n+1)}|z|^{n+1}}{(\ln n)^{-\ln n}|z|^n} = e^{\ln n\, \ln\ln n - \ln(n+1)\ln\ln(n+1)}\,|z|.$$

On a :

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n) = \ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}
\ln\ln(n+1) &= \ln\left(\ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) \\
&= \ln\ln n + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)
\end{aligned}$$

et enfin :

$$\begin{aligned}
\ln n\,\ln\ln n - \ln(n+1)\ln\ln(n+1) &= \ln n\,\ln\ln n - \left(\ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\ln\ln n + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) \\
&= -\frac{\ln\ln n}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2\ln n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{\ln\ln n}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

On en déduit que $e^{\ln n\,\ln\ln n - \ln(n+1)\ln\ln(n+1)}\,|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|$, puis que $R = 1$.

j) Un calcul élémentaire donne $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+n^2} \sim_{+\infty} 2n$, donc $R = 1$.

3) Par produit de Cauchy, nous obtenons, pour z tel que $|z| < 1$ et $|z| < R$:

$$\frac{f(z)}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} z^n$$

puis $\dfrac{zf(z)}{1-z} = f(z) - a_0 = f(z) - 1$, ce qui donne :

$$f(z) = \frac{1-z}{1-2z} = 1 + \frac{z}{1-2z} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} z^n.$$

Par unicité du DSE, on en déduit que $a_0 = 1$ et $a_n = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Comme ce calcul a été fait sous l'hypothèse que $R \neq 0$, on peut démontrer que ces formules sont correctes en vérifiant que la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ définie par $b_0 = 1$ et $b_n = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$ vérifie les relations définissant $(a_n)_{n\geq 0}$:

- $b_0 = 1$;
- pour tout $n \geq 0$, $b_0 + b_1 + \cdots + b_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 1 + \frac{2^n - 1}{2-1} = 2^n = b_{n+1}$.

4) a) Pour $x \in]-1, 1[$ et $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2} \\
&= -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x^2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \ln(1-x)\right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{x + (1-x^2)\ln(1-x)}{2x^2}.
\end{aligned}$$

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ et α une racine carrée de z. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha^3)^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(\alpha^3).$$

Quand $z = x \in \mathbb{R}$, on peut ensuite différencier les cas, selon le signe de x :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(2n)!} = \begin{cases} \mathrm{ch}(\sqrt{x^3}) & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x^3}) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

c) On reconnaît un produit de Cauchy, pour $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

d) On retrouve le même type de preuve que pour le a), en écrivant (pour $x \in]-1,1[$) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+2+\cdots+n} &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \right) \\ &= 2 \left(-\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)+x}{x} \right) = 2 + 2(1-x) \frac{\ln(1-x)}{x}. \end{aligned}$$

e) Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)+2n}{n!} z^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} z^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^n = (x^2+2x)e^x.$$

f) Pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3-n} &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} \right) x^n \\ &= \frac{1}{2x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \frac{1}{2x} \left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{x}{2} \ln(1-x) + \ln(1-x) + x \\ &= -\frac{(x-1)^2 \ln(1-x)}{x} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

g) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{3+(-1)^n} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{4} z^{2n} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} z^{2n+1} = \frac{3}{4} \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{2} \frac{z}{1-z^2} = \frac{3+2z}{4(1-z^2)}.$$

h) Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+2)n!} z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)-(n+2)+1}{(n+2)!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} \\ &= e^z + \frac{e^z-1}{z} + \frac{e^z-1-z}{z^2}. \end{aligned}$$

5) On peut faire un produit de Cauchy :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{(n-k)!} \right) x^n$$

avec $\alpha_{2k} = 0$ et $\alpha_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}$, soit encore :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!} \right) x^n.$$

Cette première méthode donne une expression trop compliquée du coefficient $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!}$ du DSE de f.

Il est plus simple et plus efficace d'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{Im}\left(e^{(1+i)x}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im}((1+i)^n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n.$$

Ces deux méthodes permettent d'établir les identités :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!} = \frac{(\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}}{n!}.$$

6) a) Les racines de $X^2 - X + 2$ sont $\lambda = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ et $\overline{\lambda} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. On décompose ensuite la fraction en éléments simples sur $\mathbb{C}$, en remarquant que $\lambda\overline{\lambda} = 2$:

$$\frac{1}{x^2 - x + 2} = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\frac{1}{x - \lambda} - \frac{1}{x - \overline{\lambda}} \right) = -\frac{i\sqrt{7}}{7} \left(\frac{1}{\overline{\lambda} - x} - \frac{1}{\lambda - x} \right)$$

Pour $|x| < |\lambda| = \sqrt{2}$, on a :

$$\frac{1}{\overline{\lambda} - x} = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{1 - \frac{\lambda x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{2^{n+1}} x^n$$

et en conjuguant :

$$\frac{1}{\lambda - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{\lambda}^{n+1}}{2^{n+1}} x^n$$

On obtient donc :

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{7}}{7} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-i\left(\lambda^{n+1} - \overline{\lambda}^{n+1}\right)}{2^{n+1}} x^n = \frac{\sqrt{7}}{7} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im}(\lambda^{n+1})}{2^n} x^n$$

b) Pour $x \in [-1, 1]$:

$$f_2(x) = 2\sin(\operatorname{Arcsin} x)\cos(\operatorname{Arcsin} x) = 2x\sqrt{1 - x^2} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} x^{2n+1}.$$

c) f_3 est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(1 + x^2)y' - xy = 1$. On peut d'autre part démontrer que f_3 admet est développable en série entière en 0 et que son développement est valide sur $]-1, 1[$ (on fait le produit de Cauchy des DSE

vus en cours pour les fonction Arcsin et $x \longmapsto (1+x^2)^{-1/2}$). Il existe donc une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon ≥ 1 telle que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On a alors, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} 1 &= (1+x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1} + n a_{n-1}\right) x^n \end{aligned}$$

On peut donc identifier, et obtenir :

$$a_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 2,\ a_n = -\frac{n-1}{n}\, a_{n-2}.$$

Comme $a_0 = f_3(0) = 0$, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = -\frac{2n}{2n+1} a_{2n-1} = (-1)^n \frac{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 5\times 3}\, a_1 = (-1)^n \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

On obtient ainsi :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$$

d) On a pour tout $x \neq 0$:

$$f_4(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}.$$

égalité que l'on prolonge par continuité en $x = 0$.

e) Pour $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{(x^2-j)(x^2-j^2)} = \frac{1}{j-j^2}\,\frac{1}{x^2-j} + \frac{1}{j^2-j}\,\frac{1}{x^2-j^2} = -i\,\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{j^2}{1-j^2x^2} + \frac{j}{1-jx^2}\right) \\ &= i\frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(j^{2(n+1)} - j^{n+1}\right)x^{2n} \end{aligned}$$

d'où, toujours pour $x \in]-1,1[$:

$$f_4(x) = f_4(0) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i\sqrt{3}\left(j^{2(n+1)} - j^{n+1}\right)}{3(2n+1)}x^{2n+1} = f_4(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

avec $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \bmod 3 \\ -1 & \text{si } n \equiv 1 \bmod 3 \\ 0 & \text{si } n \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}.$

On peut calculer $f_4(0)$ en décomposant la fraction en éléments simples :

$$\begin{aligned} f_4(0) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1+x}{1+x+x^2} + \frac{1-x}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{4}\ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right)\right]_{-\infty}^{0} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{6}\pi. \end{aligned}$$

f) Pour $x \in]-1,1[$, on a :

$$f_6(x) = \ln\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^{3n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^n = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

en posant $a_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{cases} a_{3n+1} = \dfrac{1}{3n+1} \\ a_{3n+2} = \dfrac{1}{3n+2} \\ a_{3n+3} = \dfrac{1}{3n+3} - \dfrac{1}{n+1} = -\dfrac{2}{n+1} \end{cases}$$

g) On utilise l'exponentielle complexe, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_7(x) &= \frac{1}{4i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^{x} + e^{-x}\right) \\ &= \frac{1}{4i}\left(e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} - e^{(-1-i)x}\right) \\ &= \frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n - (1-i)^n + (-1+i)^n - (-1-i)^n}{n!}\, x^n \\ &= \frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{2}^{\,n}\, \frac{e^{ni\pi/4} - e^{-ni\pi/4} + e^{3ni\pi/4} - e^{-3ni\pi/4}}{n!}\, x^n \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{2}^{\,n}\, \frac{\sin(n\pi/4) + \sin(3n\pi/4)}{n!}\, x^n \end{aligned}$$

h) La fonction f_8 est, sur $I =]-1,1[$, solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' + y = 0$. La fonction $x \longmapsto 1-x^2$ est continue et ne s'annule pas sur I ; la fonction $x \longmapsto 1$ est continue sur I ; le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique : f_8 est l'unique solution de cette équation qui prend la valeur 1 en 0. Nous allons chercher une série entière vérifiant ces conditions.

Analyse : supposons que $g :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution du problème de Cauchy (E) : $\big(y(0) = 1$ et $(1-x^2)y' + y = 0\big)$ au voisinage de 0. On a alors, pour x assez proche de 0 :

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= (a_0 + a_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+1)a_{n+1} + a_n - (n-1)a_{n-1}\right] x^n \end{aligned}$$

Par unicité du DSE, on obtient :

$$a_0 = 1,\ a_1 = -1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -\frac{1}{n+2}\, a_{n+1} + \frac{n}{n+2}\, a_n.$$

Synthèse : soit $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$a_0 = 1,\ a_1 = -1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -\frac{1}{n+2}\, a_{n+1} + \frac{n}{n+2}\, a_n.$$

Une récurrence évidente prouve que $|a_n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La fonction $g :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est donc définie sur I. Le calcul fait dans l'analyse prouve que g est solution du problème de Cauchy (E) : on en déduit que $f_8 = g$. A posteriori, on en déduit que le rayon de convergence de la série est égal à 1, car $f_8(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers -1.

On peut aller plus loin dans l'étude de cette suite (a_n). On a en effet $a_{2n+1} = -a_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (récurrence évidente), ce qui permet d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+2} = -\frac{1}{2n+2}\, a_{2n+1} + \frac{2n}{2n+2}\, a_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2}\, a_{2n}$$

puis

$$a_{2n} = \frac{(2n-1)}{(2n)}\, a_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n)(2n-2)}\, a_{2n-4} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(1)}{(2n)(2n-2)\dots(2)}\, a_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(x^{2n} + x^{2n+1}\right).$$

Exercices CCP-Mines-Centrale

Calculs de rayons de convergence

7) Dans chaque exercice, nous noterons a_n le terme général de la série entière étudiée et R le rayon cherché.

a) Comme f est continue sur $[0,1]$, il existe M telle que $|f(x)| \leq M$ pour tout x : on en déduit que $|a_n| \leq \frac{M}{n+1}$ pour tout n, puis que $R \geq 1$.

Quitte à diviser a_n par $f(1)$, nous pouvons supposer que $f(1) = 1$. Par continuité de f en 1, il existe alors $\eta \in]0,1[$ tel que $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [\eta, 1]$. Nous avons alors

$$a_n = \underbrace{\int_0^\eta f(t)t^n\,\mathrm{d}t}_{b_n} + \underbrace{\int_\eta^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t}_{c_n}$$

avec $|b_n| \leq M\eta^n$ et $c_n \geq \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_\eta^1 = \dfrac{1-\eta^{n+1}}{2(n+1)}$. Ainsi, b_n est négligeable devant $1/n$ (car $\eta < 1$) et $1/n = O(c_n)$: ceci prouve que $1/n = O(a_n)$ et que R est au plus égal à 1.

Nous en déduisons que $R = 1$. On peut également démontrer un résultat plus précis : $a_n \sim_{+\infty} \dfrac{f(1)}{n+1}$.

b) Si $\alpha > 0$, a_n tend vers $\pi/2$ quand n tend vers l'infini et $R = 1$;

Si $\alpha = 0$, $a_n = \pi/4$ et $R = 1$.

Enfin, si $\alpha < 0$, $a_n \underset{+\infty}{\sim} n^\alpha$ et $R = R\left(\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n\right) = 1$ (par exemple grâce à la règle de d'Alembert).

c) On peut appliquer la règle de d'Alembert :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{\ln^2(n+1) - \ln^2(n)} = e^{(\ln n + \ln(1+1/n))^2 - \ln^2(n)}$$

Comme $(\ln n + \ln(1+1/n))^2 - \ln^2(n) = 2\ln n \ln(1+1/n) + \ln^2(1+1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $R = 1$.

d) Nous avons, pour tout $n \geq 1$, $1/n \leq a_n \leq n$, donc $1 \leq R \leq 1$: $R = 1$.

e) et f) La règle de d'Alembert donne dans les deux cas $R = 1$.

g) La règle de d'Alembert donne (après un calcul élementaire) $R = \dfrac{27}{2\,e^2}$.

h) On suppose que a est un complexe non nul ($a = 0$ est sans intérêt). La convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est équivalente à celle de la série $\sum_{k\geq 0} a^{k^2}\, z^{k(k+1)/2}$. Appliquons la règle de d'Alembert à cette série pour z non nul :

$$\left|\frac{a^{(k+1)^2}\, z^{(k+1)(k+2)/2}}{a^{k^2}\, z^{k(k+1)/2}}\right| = \frac{1}{|a|}|a^2 z|^{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1/|a|^2 \\ 1/|a| & \text{si } |z| = 1/|a|^2 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1/|a|^2 \end{cases}$$

La série étudiée est donc absolument convergente pour $|z| < 1/|a|^2$ et divergente pour $|z| > 1/|a|^2$: le rayon de convergence est $1/|a|^2$.

i) L'encadrement $\dfrac{1}{1+n^3} \leq a_n \leq a_0$ suffit pour obtenir $R = 1$.

j) $\dfrac{\ln a_n}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ donc, la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ étant croissante sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\ln a_n}{n} \leq \int_{1/n}^{1+1/n} \ln(1+t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{1+1/n} \underbrace{\ln(1+t)}_{\leq \ln 2}\,\mathrm{d}t$$

soit, en notant $K = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = 2\ln 2 - 1$:

$$K \leq \frac{\ln a_n}{n} \leq K + \frac{1}{n\ln 2}$$

On en déduit donc :

$$e^{nK} \leq a_n \leq e^{nK + \ln 2} = 2\,e^{nK}$$

Les deux termes généraux encadrant a_n donnent des séries de rayons e^{-K}, donc $R = e^{-K} = e/4$.

k) Un calcul simple donne $n^2 \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) = (-1)^n\, n - \dfrac{1}{2} + O(1/n)$ et donc $a_n \sim +\infty \dfrac{1}{\sqrt{e}}\, e^{(-1)^n\, n}$. Nous allons étudier la série en séparant les termes pairs et les termes impairs :

— la série $\sum a_{2n} z^n$ est de rayon $1/e^2$, donc $\sum a_{2n} z^{2n}$ est de rayon $1/e$;
— la série $\sum a_{2n+1} z^n$ est de rayon e^2, donc $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$ est de rayon e ;

Les deux séries étant de rayon distincts, leur somme est de rayon égal au minimum des deux rayons : $R = 1/e$.

m) Posons $b_n = a_{3n+1} = 2^{2n+1}$ et $c_n = a_{3n+2} = 2^{2n+2}$. Les séries $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ sont de rayon $1/4$, donc les séries $\sum b_n z^{3n+1}$ et $\sum c_n z^{3n+2}$ sont de rayon $\sqrt[3]{1/4}$. La série étudiée étant la somme de ces deux séries, on en déduit que $R \geq 2^{-2/3}$. Pour $z = 2^{-2/3}$, nous avons $a_{3n+1} z^{3n+1} = 2^{2n+1} 2^{-2(3n+1)/3} = 2^{1/3}$: la suite $a_n z^n$ ne tend donc pas vers 0 et la série est divergente, ce qui prouve que $R = 2^{-2/3}$.

Remarque : plus généralement, on peut démontrer que si $\sum a_{3n} z^{3n}$, $\sum a_{3n+1} z^{3n+1}$ et $\sum a_{3n+2} z^{3n+2}$ sont de rayons R_0, R_1 et R_2, la série $\sum a_n z^n$ est de rayon $R = \min(R_0, R_1, R_2)$.

n) La règle de d'Alembert donne $R = \dfrac{27}{2\,e^2}$.

8) Soit $z \in \mathbb{C}^*$; on peut appliquer le critère de d'Alembert à la série $P = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_{2n} z^{2n}$:

$$\frac{|a_{2n+2} z^{2n+2}|}{|a_{2n} z^{2n}|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1\, |z|^2$$

donc P converge absolument quand $|z|^2 < \dfrac{1}{\ell_1}$ et diverge grossièrement quand $|z|^2 > \dfrac{1}{\ell_1}$. La série P est donc de rayon $R_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\ell_1}}$.

De même, on montre que la série $I = \sum_{n\geq 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$ est de rayon $R_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\ell_2}}$.

On en déduit que $F = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = P + I$ est de rayon $R \geq \min(R_1, R_2)$.

La série $G = \sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n z^n$ est également de rayon R, donc les séries $P = \dfrac{1}{2}(F+G)$ et $I = \dfrac{1}{2}(F-G)$ sont de rayons supérieurs à $\min(R, R) = R$: on a ainsi $R_1 \geq R$ et $R_2 \geq R$.

Nous avons donc $R = \min\left(\dfrac{1}{\sqrt{\ell_1}}, \dfrac{1}{\sqrt{\ell_2}}\right)$.

9) a) $4n^2 + 2\lambda - 1 - 4(n+2)^2 = -16n - 17 + 2\lambda$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq \dfrac{4n^2 + 2\lambda - 1}{4(n+2)^2} \leq 1$ pour tout $n \geq n_0$. On a alors :

$$\forall n \geq n_0,\ |a_{n+2}| \leq \frac{4n^2 + 2\lambda - 1}{4(n+2)^2}|a_{n+1}| + \frac{(n+1)^2}{4(n+2)^2}|a_n| \leq |a_{n+1}| + \frac{1}{4}|a_n|.$$

b) Considérons la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$b_n = \begin{cases} |a_n| & \text{si } n \geq n_0 + 1 \\ b_{n-1} + \dfrac{1}{4} b_{n-2} & \text{si } n \geq n_0 + 2 \end{cases}.$$

Une récurrence élémentaire montre que $|a_n| \leq b_n$ pour tout n ; il existe ensuite deux constantes A et B telles que :

$$\forall n \geq n_0,\ b_n = A\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

puisque le polynôme caractéristique $r^2 - r - \dfrac{1}{4}$ a pour racines $\lambda = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $\mu = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. On en déduit que $b_n = O(\lambda^n)$, puisque $\mu^n = o(\lambda^n)$. Le théorème de comparaison donne alors :

$$R\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) \geq R\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right) \geq R\left(\sum_{n\geq 0} \lambda^n z^n\right) = \frac{1}{\lambda} = 2(\sqrt{2}-1).$$

Calculs de sommes de séries entières

10) On a $2(n+1)a_{n+1} = (2n+1)a_n$ pour tout $n \geq 1$. Pour z non nul, la règle de d'Alembert s'applique :

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{2n+1}{2n+2}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|$$

donc la série converge absolument quand $|z| < 1$ et diverge grossièrement quand $|z| > 1$: son rayon est égal à 1. Notons f sa somme.

On peut ensuite écrire, pour x tel que $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{2}\,a_n x^n \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2} + x f'(x) + \frac{1}{2} f(x) \end{aligned}$$

Ainsi, f est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle $(1-x)y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$. La solution générale de cette équation (sur $]-\infty,1[$) est $y(x) = \dfrac{K}{\sqrt{1-x}} - 1$. Comme $f(0) = 0$, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1.$$

La fonction $g:\ x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ car :

- elle est continue sur $]0,1[$;
- $g(x)$ est équivalent au voisinage de 1 à $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, qui est intégrable au voisinage de 1 car $1/2 < 1$;
- $g(x)$ tend vers a_1 quand x tend vers 0, donc g est intégrable au voisinage de 0.

Nous allons montrer que l'on peut calculer son intégrale en échangeant $\displaystyle\int_0^1$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}$:

- pour tout $n \geq 1$, $u_n : x \longmapsto a_n x^{n-1}$ est continue sur $]0,1[$;
- $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0,1[$ et sa somme g est continue sur $]0,1[$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1[$, on a $0 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \leq g(x)$ avec g sommable sur $]0,1[$.

Le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 a_n x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}.$$

Il reste à calculer l'intégrale, en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{1-x}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n} = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-x}}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^0 \frac{1-u}{(1-u^2)u}\,(-2u\mathrm{d}u) = \int_0^1 \frac{2}{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\,\ln 2$$

11) On calcule facilement $\chi_A(X) = X^3 - 2X^2 - X + 1$. Le théorème de Cayley-Hamilton donne $A^3 - 2A^2 - A + I_3$, puis :

$$\forall n \geq 0,\ A^{n+3} - 2A^{n+2} - A^{n+1} + A^n = 0$$

qui donne, par linéarité de la trace :

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0.$$

Une étude élémentaire de $x \longmapsto x^3 - 2x^2 - x + 1$ montre que a a trois valeurs propres réelles distinctes : $\lambda_1 \simeq -0,8$, $\lambda_2 \simeq 0,55$ et $\lambda_3 \simeq 2,25$. On en déduit :

$$a_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n \sim_{+\infty} \lambda_3^n.$$

On en déduit que f est de rayon $R = \dfrac{1}{\lambda_3}$.

On a ensuite, pour $|z| < R$:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + a_n) z^{n+3} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+3} z^{n+1} - 2z \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} z^{n+1} - z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} s^{n+1} + z^3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \\
&= f(z) - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - 2z(f(z) - a_0 - a_1 z) - z^2(f(z) - a_0) + z^3 f(z) \\
&= f(z)(1 - 2z - z^2 + z^3) - a_0 + (2a_0 - a_1)z + (a_0 + 2a_1 - a_2)z^2
\end{aligned}$$

Nous avons donc ($a_0 = 3$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 6$) :

$$f(z) = \frac{3 - 4z - z^2}{1 - 2z - z^2 + z^3}.$$

12) Notons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n} = -\ln(1-x)$ pour $x \in]-1,1[$. Par produit de Cauchy, nous avons, en posant $a_0 = 0$ et $a_n = \dfrac{1}{n}$ si $n \geq 1$:

$$\forall x \in]-1,1[,\ f^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} \right)}_{=\alpha_n} x^n.$$

Comme $f^2(x) = \ln^2(1-x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \alpha_n x^n$ est de rayon 1. Comme la série étudiée $F(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{\alpha_n}{n} x^n$ a pour dérivée $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \alpha_{n+1} x^n$, on en déduit que F est de rayon 1 avec :

$$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\ F'(x) = \sum_{n \geq 1} \alpha_{n+1} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n \geq 2} \alpha_n x^n = \frac{\ln^2(1-x)}{x}.$$

Comme $F(0) = 0$, on en déduit :

$$\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = \int_0^x \frac{\ln^2(1-t)}{t}\, \mathrm{d}t$$

(on ne peut pas donner d'expression plus simple de cette primitive).

13) Comme $\dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{2^{(-1)^n}}{n} \leq \dfrac{2}{n}$, la série étudiée est de rayon 1. On a ensuite :

$$\forall x \in]1,1[,\ f(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n} x^{2n}}_{=-\ln(1-x^2)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2(2n+1)} x^{2n+1}$$

Pour la seconde somme (si on ne connaît pas la fonction Argth), on peut écrire :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2(2n+1)} x^{2n+1} \right)' = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{2(1-x^2)} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+x}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2(2n+1)} x^{2n+1} = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

On a donc :

$$\forall x \in]1,1[,\ f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \ln(1-x^2) = \frac{1}{4} \ln \left((1-x)^5(1+x)^3\right).$$

Séries génératrices

14) a) Nous pouvons facilement faire la liste des partitions de E_n pour $n \in \{1,2,3\}$:

- $\{\{1\}\}$ est la seule partition de E_1, donc $P_1 = 1$;
- $\{\{1,2\}\}$ et $\{\{1\},\{2\}\}$ sont les deux partitions de E_2, donc $P_2 = 2$;
- Il existe 5 partitions de E_3 :

  $$\{\{1,2,3\}\},\ \{\{1\},\{2,3\}\},\ \{\{2\},\{1,3\}\},\ \{\{3\},\{1,2\}\},\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$$

  donc $P_3 = 5$.

b) À chaque partition $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k\}$ de E_n, on peut associer la permutation $\sigma(\mathcal{P})$ de E_n qui réalise sur chaque $\mathcal{P}_i$ la permutation circulaire dans l'ordre croissant de ses éléments.

Par exemple, si $n = 8$ et $\mathcal{P} = \{\{1,3\},\{2,4,8\},\{5\},\{6,7\}\}$:

$$\sigma(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 8 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1,3) \circ (2,4,8) \circ (6,7).$$

L'application $\mathcal{P} \longmapsto \sigma_(\mathcal{P})$ est alors injective (unicité de la décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints) ce qui prouve que $P_n \leq n!$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière f est de rayon $R \geq 1$.

c) Pour E ensemble fini, notons $\mathcal{P}_E$ l'ensemble des partitions de E. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque partie A de E_n, notons $\mathcal{P}^A$ l'ensemble des partitions de E_{n+1} telles que la partie à laquelle appartient $n+1$ est égale à $A \cup \{n+1\}$. Nous avons :

$$\mathcal{P}_{E_{n+1}} = \bigsqcup_{A \subset E_n} \mathcal{P}^A$$

or $\mathcal{P}^A$ est en bijection avec $\mathcal{P}_{E_n \setminus A}$ (en supprimant la partie $A \cup \{n+1\}$ d'un élément de $\mathcal{P}^A$, on obtient bijectivement un élément de $\mathcal{P}_{E_n \setminus A}$), donc avec $P_{n-\mathrm{Card}(A)}$. On a donc :

$$P_{n+1} = \sum_{A \subset E_n} \mathrm{Card}\left(P^A\right) = \sum_{A \subset E_n} P_{n-\mathrm{Card}(A)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_{n-k}$$

avec la convention $P_0 = 1$ qui donne bien $\mathrm{Card}\left(\mathcal{P}^{E_n}\right) = 1 = P_0$.

On peut ensuite écrire, pour $x \in]-R,R[$:

$$e^x f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{P_{n-k}}{(n-k)!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_{n+1}}{n!} x^n = f'(x).$$

On en déduit qu'il existe une constante K telle que $f(x) = Ke^{e^x}$ pour tout $x \in]-R,R[$. Comme $f(0) = P_0 = 1$, $K = \dfrac{1}{e}$, soit :

$$\forall x \in]-R,R[,\ f(x) = e^{e^x - 1}.$$

d) Soit $x \in]-R, R[$. Nous avons :

$$f(x) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n!} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!\,k!}\, x^k.$$

En notant $u_{n,k} = \dfrac{n^k}{n!\,k!}\, x^k$, on a (la preuve fonctionne avec $x \in \mathbb{R}$ quelconque) :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série de $\sum_{k \geq 0} |u_{n,k}|$ converge et a pour somme $U_n = \dfrac{e^{n|x|}}{n!}$;
- la série de terme général U_n converge.

On en déduit que l'on peut échanger les deux sommes infinies :

$$f(x) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{x^k}{k!}.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}.$$

On peut aussi remarquer que le calcul précédent prouve que le rayon R est infini.

15) a) Nous avons $0 \leq \dfrac{d_n}{n!} \leq 1$ donc $R \geq 1$ et R est non nul.

b) Pour A partie de $\{1, 2, \ldots, n\}$, notons $\mathfrak{S}_n(A)$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui laisse fixe les éléments de A et uniquement ceux-là :

$$\mathfrak{S}_n(A) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \sigma(k) = k \Longleftrightarrow k \in A\}.$$

Quand A décrit $\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$, les parties $\mathfrak{S}_n(A)$ forment une partition de $\mathfrak{S}_n$. Nous en déduisons :

$$n! = \operatorname{Card} \mathfrak{S}_n = \sum_{A \subset \{1,2,\ldots,n\}} \operatorname{Card} \mathfrak{S}_n(A).$$

Comme $\operatorname{Card} \mathfrak{S}_n(A) = d_{n-k}$ où k est le cardinal de A (un élément de SG_n est dans $\mathfrak{S}_n(A)$ si et seulement s'il laisse fixe les k éléments de A et induit un dérangement sur le complémentaire de A), et qu'il existe $\dbinom{n}{k}$ parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de cardinal k, nous obtenons :

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} d_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d_i.$$

Nous avons alors par produit de Cauchy :

$$\left(\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!}\, z^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}\, z^n \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{d_i}{i!(n-i)!} \right) z^n = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} z^n$$

Ceci prouve que $R \leq 1$ (le rayon de convergence du produit de Cauchy est égal à 1, et il est au moins égal au maximum des deux rayons de convergence), i.e. que $R = 1$, avec pour $|z| < 1$:

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}.$$

un nouveau produit de Cauchy donne :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!}\, z^n = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}\, z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} z^n\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right) z^n$$

et donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ d_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

On en déduit une définition plus simple de la suite (d_n) :

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

16) a) Une décomposition en éléments simples donne :

$$f(t) = \frac{a_1}{1-t} + \frac{a_2}{(1-t)^2} + \frac{a_3}{(1-t)^3} + \frac{b_1}{1+t} + \frac{b_2}{(1+t)^2} + \frac{c}{i+t} + \frac{d}{-i+t}$$

avec $a_3 = \dfrac{1}{8}$, $a_2 = \dfrac{1}{4}$, $a_1 = \dfrac{9}{32}$, $b_2 = \dfrac{1}{16}$, $b_1 = \dfrac{5}{32}$, $c = \dfrac{1+i}{16}$ et $d = \overline{c} = \dfrac{1-i}{16}$.
Les développements usuels donnent donc, pour tout $t \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n + a_2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)t^n + a_3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2}\, t^n + b_1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \\ &\qquad + b_2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) t^n - ic \sum_{n=0}^{+\infty} i^n t^n + id \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n t^n \end{aligned}$$

en posant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = a_1 + (n+1)a_2 + \frac{(n+2)(n+1)}{2}\, a_3 + (-1)^n b_n + (-1)^n (n+1) b_2 - c\, i^{n+1} - d(-i)^{n+1}$$

Avec du courage, on peut simplifier cette relation en effectuant une disjonction selon la valeur de n modulo 4 :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \begin{cases} \alpha_{4k} = (k+1)^2 \\ \alpha_{4k+1} = (k+1)^2 \\ \alpha_{4k+2} = (k+1)(k+2) \\ \alpha_{4k+3} = (k+1)(k+2) \end{cases}$$

b) On peut écrire également, pour $x \in]-1,1[$:

$$f(t) = \left(\sum_{a=0}^{+\infty} t^a\right)\left(\sum_{b=0}^{+\infty} t^{2b}\right)\left(\sum_{c=0}^{+\infty} t^{4c}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{a,b,c\in\mathbb{N} \\ a+2b+4c=n}} t^{a+2b+2c}$$

En effet, la famille $\left(t^{a+2b+2c}\right)_{a,b,c\in\mathbb{N}}$ est sommable et l'égalité précédente est obtenue en calculant sa somme de deux façons différentes. On en déduit :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n t^n$$

avec $\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \mathrm{Card}\left(\{(a,b,c) \in \mathbb{N},\ a+2b+4c=n\}\right)$. Par unicité du DSE, on en déduit que $\alpha_n = \beta_n$. Ainsi, pour tout entier n, α_n est égal au nombre de façons de payer $n/2$ euros en pièces de 50 cents, de 1 euro ou de 2 euros, puisqu'une « façon de payer »$n/2$ euros est la donnée d'un triplet (a,b,c) d'entiers naturels tel que a pièces de 50 cents, b pièces de 1 euro et c pièces de 2 euros fassent une somme de $n/2$ euros, ce qui correspond bien à la condition $a+2b+4c=n$.

Ainsi, il existe $\alpha_{2716} = \alpha(4 \times 679) = 680^2 = 7462400$ façons de payer 1358 euros avec nos trois types de pièces.

17) a) Pour payer n euros en pièces de 1 et 2 euros, on peut donner j pièces de 2 euros (pour j tel que $0 \leq 2j \leq n$) et compléter avec $i = n-2j$ pièces de un euro : on a donc $a_n = 1 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ou encore $a_{2m} = m+1 = a_{2m+1}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. On en déduit que $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est de rayon 1 avec :

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z|<1,\ f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty}(m+1)z^{2m} + \sum_{m=0}^{+\infty}(m+1)z^{2m+1} = (1+z)\sum_{m=0}^{+\infty}(m+1)(z^2)^m = \frac{1+z}{(1-z^2)^2} = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)}$$

en utilisant le produit de Cauchy :

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z|<1,\ \frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n.$$

b) Le cas général se traite facilement en utilisant la famille $\left(z^{i_1\sigma_1+i_2\sigma_2+\cdots+i_k\sigma_k}\right)_{i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N}}$. Pour z tel que $|z|<1$, cette famille est sommable car :

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N}} \left|z^{i_1\sigma_1+i_2\sigma_2+\cdots+i_k\sigma_k}\right| = \prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{i_j=0}^{+\infty}|z|^{i_j\sigma_j}\right) = \prod_{j=1}^{k}\frac{1}{1-|z|^{\sigma_j}} < +\infty.$$

En sommant par paquets, on peut exprimer la somme $f(z)$ de cette famille de deux façons différentes :

$$f(z) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{i_j=0}^{+\infty} z^{i_j\sigma_j}\right) = \prod_{j=1}^{k}\frac{1}{1-z^{\sigma_j}} \\ \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N} \\ i_1\sigma 1+\cdots+i_k\sigma_k = n}} z^{i_1\sigma_1+i_2\sigma_2+\cdots+i_k\sigma_k} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n,\sigma} z^n. \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\forall z \in \mathbb{C} \ \text{ t.q. } |z|<1,\ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n,\sigma} z^n = \frac{1}{(1-z^{\sigma_1})(1-z^{\sigma_2})\ldots(1-z^{\sigma_k})}.$$

18) Soit $n \geq 0$. On peut partitionner $\mathcal{I}(E_{n+2})$ selon l'image qu'une involution donne à $n+2$:

$$\mathcal{I}(E_{n+2}) = \bigsqcup_{1 \leq k \leq n+2} \underbrace{\{f \in \mathcal{I}(E_{n+2}),\ f(n+2)=k\}}_{=A_k}$$

- A_{n+2} est en bijection avec $\mathcal{I}(E_{n+1})$ (par l'application qui à f associe sa restriction à E_{n+1}) ;
- pour tout $k \in E_{n+1}$, A_k est en bijection avec $\mathcal{I}(E_{n+2} \setminus \{k, n+2\})$ (toujours par restriction de f : si $f \in A_k$, f échange k et $n+2$ et est involutive sur les n autres points).

Comme $\mathcal{I}(E_{n+2} \setminus \{k, n+2\})$ est de cardinal I_n (s'il existe une bijection entre deux ensembles E et F, il existe une bijection entre $\mathcal{I}(E)$ et $\mathcal{I}(F)$), on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \sum_{k=1}^{n+2} \mathrm{Card}(A_k) = (n+1)I_n + I_{n+1} \quad (\star)$$

en remarquant que la valeur choisie pour I_0 permet à cette relation d'être vraie pour $n = 0$.

Comme $\mathcal{I}(E_n) \subset \mathfrak{S}_n$, on a $0 \leq \frac{I_n}{n!} \leq 1$, donc le rayon R de la série considérée est au moins égal à 1 et la fonction f est définie sur $]-1,1[$. En multipliant $(\star)$ par $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ et en sommant (toutes les séries convergent), nous obtenons :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_{n+2}}{(n+1)!}\, x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

soit

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) - I_1 = xf(x) + f(x) - I_0$$

et f est solution, sur $]-1,1[$, de l'équation différentielle $y' = (1+x)y$. Comme $f(0) = I_0 = 1$, on en déduit que $f(x) = e^{x+x^2/2} = e^x e^{x^2/2}$ pour tout $x \in]-1,1[$. Par produit de Cauchy, on en déduit que le rayon R est en fait infini et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(n-k)!}\right) x^n$$

en posant $b_{2n} = \dfrac{1}{2^n n!}$ et $b_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par unicité du développement en série entière, nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \sum_{0 \leq 2q \leq n} \frac{n!}{2^q\, q!\, (n-2q)!}\ .$$

19) a) La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est positive et croissante, donc :

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+1} \leq a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2} \leq a_{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+2}\right).$$

On en déduit que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini, d'où $R = 1$ avec la règle de d'Alembert.

b) Pour $x \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)a_{n+1}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} + x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

d'où $f'(x) - a_1 = xf'(x) + f(x) - a_0 + xf(x)$, soit $(1-x)f'(x) = (1+x)f(x)$. On en déduit qu'il existe une constante K telle que $f(x) = K\dfrac{e^{-x}}{(1-x)^2}$, puis $f(0) = a_0 = 1$ donne $K = 1$.

On peut ensuite faire un produit de Cauchy :

$$\forall x \in]1,1[,\ f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n-k+1}{k!}\right) x^n$$

Par unicité du DSE, nous en déduisons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n-k+1}{k!}.$$

20) a) Nous avons :

$\mathcal{P}_1 = \{(1)\}$ et $p_1 = 1$

$\mathcal{P}_2 = \{(2),(1,1)\}$ et $p_2 = 2$

$\mathcal{P}_3 = \{(3),(2,1),(1,1,1)\}$ et $p_3 = 3$

$\mathcal{P}_4 = \{(4),(3,1),(2,2),(2,1,1),(1,1,1,1)\}$ et $p_4 = 5$

$\mathcal{P}_5 = \{(5),(4,1),(3,2),(3,1,1),(2,2,1),(2,1,1,1,1),(1,1,1,1,1)\}$ et $p_5 = 7$

$\mathcal{P}_6 = \{(6),(5,1),(4,2),(4,1,1),(3,3),(3,2,1),(3,1,1,1),(2,2,2),(2,2,1,1),(2,1,1,1,1),(1,1,1,1,1,1)\}$ et $p_6 = 11$

b) On peut voir le diagramme de Ferrers d'une partition $s = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ de n en k parts comme la matrice A_s de taille (k, n_1) définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,k\} \times \{1,\ldots,n_1\},\ A_s[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } j \leq n_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En notant $\mathcal{F}_n$ (resp. $\mathcal{F}_{n,k}$) l'ensemble des diagrammes de Ferrers des éléments de $\mathcal{P}_n$ (resp. de $\mathcal{P}_{n,k}$), l'application Φ : $A \longmapsto {}^tA$ est une bijection (involutive) de $\mathcal{F}_n$ sur lui-même. On a donc :

$$p_{n,k} = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_{n,k}) = \mathrm{Card}(\Phi(\mathcal{F}_{n,k}))$$

C'est le résultat demandé, car $A_s \in \Phi(\mathcal{F}_{n,k})$ si et seulement si s est une partition de n dont la plus grande part est égale à k.

Plus formellement, en notant $A \longmapsto s_A$ la réciproque de $s \longmapsto A_s$, l'application $s \longmapsto s_{{}^tA_s}$ est une bijection de $\mathcal{P}_{n,k}$ sur l'ensemble des partitions de n dont la plus grande part est égale à k.

c) Soit $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, on peut écrire $\mathcal{P}_{n,k} = \mathcal{P}^1_{n,k} \sqcup \mathcal{P}^2_{n,k}$ avec

$$s = (n_1,\ldots,n_k) \in \mathcal{P}^1_{n,k} \Longleftrightarrow s \in \mathcal{P}_{n,k} \text{ et } n_k = 1$$

L'application $(n_1,\ldots,n_k) \longmapsto (n_1,\ldots,n_{k-1})$ est une bijection de $\mathcal{P}^1_{n,k}$ sur $\mathcal{P}_{n-1,k-1}$ et l'application $(n_1,\ldots,n_k) \longmapsto (n_1-1,\ldots,n_k-1)$ est une bijection de $\mathcal{P}^2_{n,k}$ sur $\mathcal{P}_{n-k,k}$. On obtient donc :

$$p_{n,k} = p_{n-1,k-1} + p_{n-k,k}$$

Cette relation est également valable pour $k = n \geq 1$, mais on peut aussi écrire directement que $p_{n,n} = 1$ puisque $(1,1,\ldots,1)$ est la seule partition de n en n parts.

Pour programmer le calcul de $p_{n,k}$, il ne faut pas tomber dans le piège classique en traduisant récursivement résultat :

```
def pk(n,k):
    if k > n or k <= 0:
        return 0
    elif k == n:
        return 1
    else:
        return (pk(n-1,k-1)+pk(n-k,k))

def p(n):
    s = 1
    for k in range(1,n):
        s += pk(n,k)
    return s
```

car le temps de calcul de cette fonction est exponentiel. C'est d'ailleurs un bon exercice : quel est le temps de calcul $T(n,k)$ de l'appel `pk(n,k)` ?

Il faut ici utiliser une approche de type "programmation dynamique" (on parle aussi de *mémoïzation*) : comme pour le triangle de Pascal, on stocke les valeurs calculées dans un tableau, pour ne pas avoir à les recalculer de nombreuses fois. Cela donne :

```
def p(n):
    a = [[0 for j in range(n+1)] for i in range(n+1)]
    for i in range(n+1):
        a[i][i] = 1
```

```
    for m in range(2,n+1):
        for k in range(1,m):
            a[m][k] = a[m-1][k-1] + a[m-k][k]
    s = 1
    for k in range(1,n):
        s += a[n][k]
    return s

>>> p(6)
11
>>> p(100)
190569292
>>> p(1000)
24061467864032622473692149727991
>>> p(10000)
36167251325636293988820471890953695495016030339315 6
50422081868605887952568754066420592310556052906916435144
```

d) Soit $x \in]-1,1[$. Notons $P_K(x)$ le produit partiel. Nous avons :

$$\ln(P_K(x)) = -\sum_{k=1}^{K} \ln(1-x^k)$$

et comme $|x| < 1$, x^k tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Nous avons donc $-\ln(1-x^k) \sim_{+\infty} x^k$ qui est le terme général (positif) d'une série convergente. On en déduit que $\ln(P_K(x))$ a une limite ℓ quand K tend vers $+\infty$, puis que

$$P_K(x) \xrightarrow[K\to+\infty]{} e^{\ell} = P(x) > 0.$$

e) On a $p_n \geq 1$ pour tout n, donc le rayon de la série est au plus égal à 1 (rayon de la série $\sum_{n\geq 0} x^n$). Nous allons montrer que la série converge pour tout $x \in]-1,1[$ et que sa somme est égale au produit infini $P(x)$. Fixons donc $x \in]-1,1[$. L'idée simple consiste à faire une produit (infini) de DSE, en justifiant l'égalité :

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{m_k=0}^{+\infty} x^{km_k} \right) = \sum_{m\in I} x^{m_1+2m_2+3m_3+\cdots}$$

en notant I l'ensemble des suites presque nulles $(m_i)_{i\geq 1}$ d'entiers naturels. Pour justifier cette égalité, commençons par démontrer que la famille $\left(x^{m_1+2m_2+3m_3+\cdots}\right)_{m\in I}$ est sommable. Si J est une partie finie de I, il existe K et M tels que :

$$\forall m \in J,\ \forall i > K, m_i = 0 \text{ et } \forall m \in J,\ \forall i \in \mathbb{N},\ m_i \leq M.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in J} |x^m| &= \sum_{m\in J} |x|^{m_1+2m_2+\cdots+Km_K} \\
&\leq \sum_{m_1=0}^{M} \cdots \sum_{m_K=0}^{M} |x|^{m_1+2m_2+\cdots+Km_K} \\
&= \left(\sum_{m_1=0}^{M} |x|^{m_1} \right) \left(\sum_{m_2=0}^{M} |x^2|^{m_1} \right) \cdots \left(\sum_{m_K=0}^{M} |x^K|^{m_K} \right) \\
&\leq \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{1-|x|^k} \\
&\leq P(|x|) \qquad \text{car pour tout } k > K,\ \frac{1}{1-|x|^k} > 1
\end{aligned}$$

La famille étant sommable, on peut ensuite appliquer le théorème de sommation par paquets de deux façons différentes :

- En notant I_k l'ensemble des $m \in I$ tels que $m_i = 0$ pour $i > k$, nous avons $I = \bigsqcup_{k\geq 1}(I_k \setminus I_{k-1})$ donc

$$\sum_{m\in I} x^m = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{m\in I_k\setminus I_{k-1}} x^m\right) = \lim_{K\to+\infty}\sum_{m\in I_K} x^m$$

  On reconnaît ici un produit de Cauchy de K séries entières :

$$\sum_{m\in I_K} x^m = \sum_{m_1,\dots,m_K\in\mathbb{N}} x^{m1}x^{2m_2}\dots x^{Km_K} = \prod_{k=1}^{K}\frac{1}{1-x^k}$$

  et donc

$$\sum_{m\in I} x^m = \lim_{K\to+\infty}\prod_{k=1}^{K}\frac{1}{1-x^k} = P(x).$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $J_n = \{m \in I,\ m_1 + 2m_2 + \dots = n\}$. J_n est fini et, pour $n \geq 1$, son cardinal est p_n : on associe à un élément m de J_n, avec $m_k \geq 1$ et $m_i = 0$ pour $k < i$, la partition

$$s_m = (\underbrace{k,\dots\dots\dots,k}_{m_k\text{termes}},\underbrace{k-1,\dots\dots,k-1}_{m_{k-1}\text{termes}},\dots\dots,\underbrace{1,\dots\dots\dots,1}_{m_1\text{termes}})$$

  et $m \longmapsto s_m$ est une bijection de J_n sur $\mathcal{P}_n$. Pour $n = 0$, $J_0 = \{(0)_{i\geq 1}\}$ et son cardinal est également égal à $p_0 = 1$. Nous pouvons donc écrire :

$$\sum_{m\in I} x^m = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m\in J_n} x^m\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n.$$

Nous avons donc prouvé la convergence de $\sum_{n\geq 0} p_n x^n$ (et donc que le rayon de la série est égal à 1), avec :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-x^k}$$

f) Si $s = (n_1,\dots,n_k)$ est une partition non constante égale à 1, on procède de la façon suivante :

- on calcule le plus grand entier i tels que $n_i > 1$ et le nombre p de 1 qui viennent après le rang i (i.e. $p = k - i$) ;
- on remplace n_i par $n_i - 1$ et il faut ensuite partitionner $p + 1$ (ce sont les éléments que l'on a "supprimés") en une suite $(m_1,\dots,m_q)$ telle que $n_i - 1 \geq m_1 \geq \dots \geq m_p$, avec $(m_1,\dots,m_p)$ soit la plus grande possible pour l'ordre lexicographique. Il va donc falloir choisir la partition $(\underbrace{m_i-1,\dots\dots\dots,m_i-1}_{q\text{ termes}},r)$ où

$$p + 1 = q(m_i - 1) + r$$

  est la division euclidienne de $p + 1$ par $m_i - 1$.

Par exemple, avec $s = (12, 10, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, on a $p = 10$: on divise 11 par 4, ce qui donne $q = 2$ et $r = 3$ et la partition qui précède s dans l'ordre lexicographique est $s' = (12, 10, 4, 4, 4, 3)$. Pour écrire la fonction Python, on utilise l'analyse suivante :

- on supprime le dernier élément tant la liste et on s'arrête quand on a obtenu un élément différent de 1 (on compte en même temps le nombre $p + 1$) ;
- on divise $p + 1$ par $u_i - 1$ (u_i est le dernier élément supprimé), ce qui donne le couple (q, r) ;
- on ajoute à la fin de la liste $(q + 1)$ fois $u_i - 1$;

- si r et non nul, on l'ajoute à la fin de la liste.

```
def prec(s):
    k, u = 1, s.pop()
    while s != [] and u == 1:
        k, u = k+1, s.pop()
    if u == 1:
        return s
    else:
        s.append(u-1)
        q, r = k//(u-1), k % (u-1)
        for i in range(q):
            s.append(u-1)
        if r != 0:
            s.append(r)
        return s
```

La fonction suivante affiche toutes les partitions de n :

```
def affiche(n):
    s = [n]
    while s != []:
        print(s)
        prec(s)
```

qui donne le résultat attendu :

```
>>> affiche(6)
[6]
[5, 1]
[4, 2]
[4, 1, 1]
[3, 3]
[3, 2, 1]
[3, 1, 1, 1]
[2, 2, 2]
[2, 2, 1, 1]
[2, 1, 1, 1, 1]
[1, 1, 1, 1, 1, 1]
```

On peut utiliser cette fonction pour calculer le maximum des ordres des permutations de $\mathfrak{S}_n$. À une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe la partition $s = (n_1, n_2, \dots n_k) \in \mathcal{P}_n$ où les n_i sont les longueurs des cycles de la décomposition de σ en produits de cycles à supports disjoints. Par exemple, $\sigma = (7, 3, 2, 8, 5, 1, 6, 10, 4, 9)$ est la composée des cycles $(1, 7, 6)$, $(2, 3)$, $(4, 8, 10, 9)$ et (5), donc $s = (4, 3, 2, 1)$. L'ordre de σ est alors le p.p.c.m. des n_i. Nous avons donc :

$$\max\{\text{ordre}(\sigma),\ \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = \max\{n_1 \wedge \cdots \wedge n_k,\ (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}_n\}.$$

Nous pouvons donc écrire :

```
def ppcm(a,b):
    A, B = max(a,b),   min(a,b)
    while B != 0:
        A, B = B, A % B
    return(a*b//A)

def ppcm_liste(s):
    a = 1
    for x in s:
```

```
        a = ppcm(a,x)
    return(a)

from copy import copy

def calcul_max(n):
    s = [n]
    t = [n]
    M = n
    while s != []:
        prec(s)
        m = ppcm_liste(s)
        if m>M:
            M = m
            t = copy(s)
    return (M,t)
```

Cette dernière fonction calcule le maximum et une liste qui permet d'atteindre ce maximum.

```
>>> calcul_max(30)
(4620, [11, 7, 5, 4, 3])
```

L'ordre maximum d'une permutation de 30 éléments est donc 4620, atteint par la transposition :

$$\sigma = \underbrace{(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)}_{\text{11-cycle}} \circ \underbrace{(12,13,14,15,16,17,18)}_{\text{7-cycle}} \circ \underbrace{(19,20,21,22,23)}_{\text{5-cycle}} \circ \underbrace{(24,25,26,27)}_{\text{4-cycle}} \circ \underbrace{(28,29,30)}_{\text{3-cycle}}$$

Propriétés générales des sommes de séries entières

21) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\rho > 0$, on a :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi],\ f(\rho e^{i\theta})e^{-in\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \rho^k e^{i(k-n)\theta}$$

Et cette série converge normalement, donc uniformément, par rapport à θ sur le segment $[0, 2\pi]$. On peut donc échanger l'intégrale et la somme infinie :

$$\frac{1}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} f(\rho \mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\rho^n} a_k \rho^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta = a_n$$

car $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta$ vaut 0 si $k \neq n$ et 2π si $k = n$.

• On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \rho > 0,\ |a_n| \leq \frac{1}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} |f(\rho \mathrm{e}^{i\theta}|\,\mathrm{d}\theta \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}.$$

• Si f est bornée, on peut définir le réel $M = \sup_{\rho>0} M_\rho$ et on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall \rho > 0,\ |a_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} 0$$

On en déduit que $a_n = 0$ pour $n \geq 1$ et f est constante.

• Soit $N \in \mathbb{N}$ et supposons que $\dfrac{|f(z)|}{|z|^N}$ est borné au voisinage de l'infini. Il existe donc M et $\rho_0 > 0$ tel que :

$$\forall \rho \geq \rho_0,\ M_\rho \leq K\rho^N.$$

On en déduit que pour $n > N$:

$$\forall \rho > \rho_0,\ |a_n| \leq \frac{M}{\rho^{n-N}} \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} 0$$

Et donc $a_n = 0$ pour tout $n > N$: f est un polynôme de degré au plus N.

22) Le rayon R de f est au moins égal à 1 ; il faut penser ici à écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in]0,1[,\ a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

Cette égalité se prouve facilement en écrivant $f(re^{i\theta})e^{-in\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{i\theta(k-n)}$ et en échangeant l'intégrale sur le segment $[0, 2\pi]$ et la somme (il y a convergence normale sur $[0, 2\pi]$ car $r < R$).

Il reste à montrer que cette égalité est encore valable quand $r = 1$. Posons donc :

$$\forall r \in [0,1],\ G(r) = \int_0^{2\pi} \underbrace{f(re^{i\theta})e^{-in\theta}}_{=g(r,\theta)}\, \mathrm{d}\theta.$$

On peut appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres :

- $\forall r \in [0,1]$, $\theta \longmapsto g(r,\theta)$ est continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$;
- $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, $r \longmapsto g(r,\theta)$ est continue sur $[0,1]$;
- $\forall r \in [0,1],\ \forall \theta \in [0, 2\pi],\ |g(r,\theta)| \leq \sup_{|z|\leq 1} |f(z)| = M$ (M est fini car f est continue sur le disque unité fermé qui est compact) et l'application constante égale à M est continue par morceaux et intégrable sur $[0, 2\pi]$.

On en déduit que G est continue sur $[0,1]$ et on obtient, en faisant tendre r vers 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{2\pi} G(1) = 0$$

soit $f = 0$.

23) Démontrons un lemme classique : si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est la somme d'une série entière de rayon $R > 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \rho > 0,\ a_n = \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} f(\rho \mathrm{e}^{i\theta}) \mathrm{e}^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

Ce résultat s'obtient simplement : la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\rho e^{i\theta})^k$ converge normalement (donc uniformément) par rapport à θ sur le segment $[0, 2\pi]$, donc nous pouvons échanger intégrale et somme :

$$\int_0^{2\pi} f(\rho \mathrm{e}^{i\theta}) \mathrm{e}^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \rho^m \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}\, \mathrm{d}\theta}_{=2\pi\delta_{n,m}} = 2\pi a_n \rho^n.$$

Si $R = +\infty$ et si la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$, il existe n_0 tel que $\left| \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a_n z^n \right| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En appliquant le lemme à $g(z) = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a_n z^n$, nous obtenons :

$$\forall n > n_0,\ \forall \rho > 0,\ |a_n| = \left| \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} g(\rho \mathrm{e}^{i\theta}) \mathrm{e}^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} |g(\rho \mathrm{e}^{i\theta})|\, \mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{\rho^n}$$

ce qui donne $a_n = 0$ pour $n > n_0$ en faisant tendre ρ vers l'infini.

Nous avons ainsi démontré qu'une série entière qui converge uniformément sur $\mathbb{C}$ est un polynôme et la réciproque est évidente.

24) Soit $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| < R - |z_0|$. Nous avons $|z_0 + h| \leq |z_0| + |h| < R$, donc nous pouvons écrire :

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0 + h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} a_n \binom{n}{m} h^m z_0^{n-m}.$$

La famille $\left(a_n \binom{n}{m} h^m z_0^{n-m} \right)_{0 \leq m \leq n}$ est sommable :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} \left| a_n \binom{n}{m} h^m z_0^{n-m} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (|z_0| + |h|)^n < +\infty$$

car $\rho = |z_0| + |h| < R$ donc $a_n \rho^n$ est le terme général d'une série absolument convergente. Nous pouvons donc intervertir les deux $\sum$:

$$f(z_0 + h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=m}^{+\infty} a_n \binom{n}{m} z_0^{n-m} \right) h^m$$

Nous obtenons donc le résultat demandé, avec :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ b_m = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n \binom{n}{m} z_0^{n-m} = \frac{1}{m!} f^{(m)}(z_0)$$

où $f^{(m)}$ est la dérivée formelle m-ième de la série entière f.

25) a) Fixons $r \in]0, R[$ et $z \in B(0, r)$ et notons $g :\ t \longmapsto re^{it} \dfrac{f\left(re^{it}\right)}{re^{it} - z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{r^{n+1} e^{i(n+1)t}}{re^{it} - z}$.

Comme re^{it} est sur le cercle de rayon r, nous avons $|re^{i-t} - z| \geq r - |z|$, ce qui permet d'écrire :

$$\forall t \in [0, 2\pi],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left| a_n \frac{r^{n+1} e^{i(n+1)t}}{re^{it} - z} \right| \leq \frac{|a_n| r^{n+1}}{r - |z|}.$$

Ce majorant est indépendant de t et est le terme général d'une série convergente (car $|z| < R$) : on en déduit que la série qui définit g converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 2\pi]$. Il est donc permis d'échanger l'intégrale et la somme :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{r^{n+1} e^{i(n+1)t}}{re^{it} - z}\, \mathrm{d}t}_{= I_n}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, nous avons ensuite, en posant $q = z/r$ et en remarquant que $|qe^{-it}| < 1$:

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{r^n e^{int}}{1 - qe^{-it}}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{r^n e^{int} q^k e^{-ikt}}_{= v_k(t)}\, \mathrm{d}t.$$

Comme $|v_k(t)| \leq r^n |q|^k$ avec $|q| < 1$, nous avons une nouvelle fois convergence normale sur $[0, 2\pi]$, ce qui permet d'écrire :

$$I_n = \sum_{k=0}^{+\infty} r^n q^k \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\, \mathrm{d}t}_{= 2\pi \delta_{k,n}} = 2\pi r^n q^n = 2\pi z^n$$

ce qui achève la preuve.

b) Soit f continue sur $B(0,R)$ et vérifiant cette propriété. Fixons $r \in]0,R[$; nous avons pour tout $z \in B(0,r)$, toujours en posant $q = z/r$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f\left(re^{it}\right)}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(re^{it}\right)q^k e^{-ikt}\,\mathrm{d}t.$$

Comme f est continue, elle est bornée par une constante M_r sur le compact $\{u \in \mathbb{C},\ |u| = r\}$, ce qui assure la convergence normale de la série sur $[0,2\pi]$:

$$\forall t \in [0,2\pi],\ \forall k \in \mathbb{N},\ |f\left(re^{it}\right)q^k e^{-ikt}| \leq M_r|q|^k \qquad \text{avec } |q| < 1.$$

Il est une nouvelle fois possible d'échanger intégrale et somme, ce qui donne :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right)\frac{z^k}{r^k}.$$

Il existe donc une suite $(b_{k,r})_{k\geq 0}$ telle que :

$$\forall z \in B(0,r),\ f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{k,r}z^k.$$

Par unicité du DSE, cette suite ne dépend pas de r et le développement est valide sur tout le disque ouvert $B(0,R)$.

Développements en séries entières

26) • Supposons qu'il existe $C > 0$, $A > 0$ et $r \in]0,a[$ tels que :

$$\forall x \in]-a,a[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x| < r \Rightarrow |f^{(n)}(x)| \leq C\,A^n n!$$

Pour $x \in]-r,r[$ et $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[0,x]}|f^{(n+1)}(t)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,C\,A^{n+1}\,(n+1)! = C\,(A|x|)^{n+1}.$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| < \min\left(r, \frac{1}{A}\right),\ \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

f est donc développable en série entière en 0 et son développement est valide sur $]-r_0,r_0[$ avec $r_0 = \min\left(r, \dfrac{1}{A}\right)$.

• Supposons réciproquement que f est DSE en 0, avec :

$$\forall x \in]-r_0,r_0[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

où $0 < r_0 \leq a$ et $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon $R \geq r_0$. Fixons $r \in]0,r_0[$ et $\rho \in]r,r_0[$. Il existe $M \geq 0$ tel que $|a_n\rho^n| \leq M$ pour tout n (le terme général d'une série convergente est borné) et on peut écrire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-r,r[$:

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{+\infty}(k+n)(k+n-1)\dots(k+1)a_{k+n}x^k\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty}(k+n)(k+n-1)\dots(k+1)|a_{k+n}|r^k \\
&\leq \frac{M}{\rho^n}\sum_{k=0}^{+\infty}(k+n)(k+n-1)\dots(k+1)\left(\frac{r}{\rho}\right)^k \\
&= \frac{M}{\rho^n}\frac{n!}{\left(1-\dfrac{r}{\rho}\right)^{n+1}} \\
&= \frac{\rho}{\rho-r}\frac{n!}{(\rho-r)^n}
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat recherché, avec $C = \dfrac{\rho}{\rho - r}$ et $A = \dfrac{1}{\rho - r}$.

27) a) Pour $x \in [0, a[$, la suite $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est croissante et la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

donc $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est majorée par $f(x)$: la suite est bien convergente et le rayon R de la série de Taylor de f en 0 est supérieur ou égal à a.

b) Pour $x \in]-a, 0[$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f(x) - S_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\leq t\leq 0} |f^{(n+1)}(t)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\leq t\leq 0} f^{(n+1)}(t) = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)$$

car $f^{(n+1)}$ est positive et croissante. Comme $|x| < R$, $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)$ est le terme général d'une série convergente, donc tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On en déduit que $R_n(x)$ converge vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini.

c) On peut écrire, pour $x \in]0, a[$:

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$

en posant $t = ux$. Comme $f^{(n+1)}$ est positive et croissante, on en déduit :

$$0 \leq \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u \leq \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(yu)\,\mathrm{d}u = \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$$

d) Pour $x \in]0, a[$, on peut fixer $y \in]x, a[$ et on a :

$$0 \leq R_n(x) \leq R_n(y) \left(\frac{y}{x}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $R_n(y)$ a une limite finie et $y/x \in [0, 1[$.

Nous avons donc démontrer que $S_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in]-a, a[$ (la propriété est évidente si $x = 0$) : f est donc DSE en 0 et le développement est valide sur tout le domaine de définition de f.

Cas particulier : la fonction tangente est DSE en 0 et son développement est valide sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

28) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(xe^{it}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{int}$ pour tout $t \in [0, \pi]$; cette série converge normalement, donc uniformément, sur $[0, \pi]$: il est donc possible d'échanger somme et intégrale, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^\pi e^{int}\,\mathrm{d}t = \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{e^{in\pi} - 1}{in} = \pi + 2i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,(2k+1)!}$$

b) Fixons $x \in]-1, 1[$. Comme $|x \sin^2 t| < 1$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on peut écrire :

$$f_2(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n x^n \sin^{2n} t\,\mathrm{d}t.$$

La série converge normalement (par rapport à t) sur $[0, \pi/2]$:

$$\forall t \in [0, \pi/2],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left| \binom{\alpha}{n} (-1)^n x^n \sin^{2n} t \right| \leq \left| \binom{\alpha}{n} x^n \right| = \alpha_n$$

avec α_n terme général de série convergente (car la série entière $\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}z^n$ est de rayon au moins égal à 1). Il est donc possible d'échanger la somme et l'intégrale, ce qui donne :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}(-1)^n W_{2n} x^n$$

avec $W_{2n} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \,\mathrm{d}t$.

c) On peut écrire, pour $x \in]-1,1[$:

$$f_3(x) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

en posant $a_n = -\dfrac{2}{n}$ quand n est un multiple de 3 et $a_n = \dfrac{1}{n}$ sinon.

La série obtenue est de rayon 1 donc le développement ne peut être prolongé (sauf peut-être en 1 ou -1).

d) La fonction f_4 est dérivable sur $I =]-1/\cos\alpha, 1/\cos\alpha[$ et :

$$\begin{aligned}
\forall x \in I,\ f_4'(x) &= \frac{\sin\alpha}{(e^{i\alpha}-x)(e^{-i\alpha}-x)} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{e^{i\alpha}-x} - \frac{1}{e^{-i\alpha}-x}\right) \\
&= -\mathrm{Im}\left(e^{-i\alpha}\frac{1}{1-xe^{-i\alpha}}\right) = -\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-(n+1)\alpha}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1)\alpha)\, x^n
\end{aligned}$$

En intégrant, nous obtenons :

$$\forall x \in I,\ f_4(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\alpha)}{n+1}\, x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n}\, x^n.$$

e) Il est possible de faire un produit de Cauchy de deux séries entières :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ f_5(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\,n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2(n-k)}}{(n-k)!}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}\binom{n}{k}\right)\frac{x^{2n+1}}{n!}
\end{aligned}$$

mais le terme général du DSE obtenu n'est pas très simple.

Maintenant que l'on sait que f_5 est DSE, on peut aussi remarquer qu'elle est solution de l'équation différentielle : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_5'(x) = 1 + 2xf_5(x)$; en remplaçant $f_5(x)$ par $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$, nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{2n+2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1}x^{2n}.$$

Par identification, on obtient $a_0 = 1$ et $a_n = \frac{2}{2n+1}\, a_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, ce qui donne $a_n = \frac{2^n}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3} = \frac{4^n\, n!}{(2n+1)!}$. Nous avons ainsi obtenu :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_5(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n\, n!}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$$

ce qui prouve d'autre part l'identité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \binom{n}{k} \right) = \frac{4^n\, (n!)^2}{(2n+1)!}$$

f) L'idée est de faire une somme (infinie) de DSE. Le problème, c'est qu'il faut ensuite échanger les deux sommations, ce qui n'est pas facile car nous ne sommes pas dans le cas d'une famille sommable :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_6(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{n}\right)^k$$

mais $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-1)^k \left(\frac{x}{n}\right)^k \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n - |x|} = +\infty$.

L'astuce va consister à utiliser cette même méthode mais après avoir dérivé f_6. En effet, le théorème de dérivation s'applique :

- pour tout $n \geq 1$, $u_n :\ x \longmapsto \frac{(-1)^{n+1}}{x+n}$ est de classe C^1 sur $]-1,1[$;
- la série des $u_n(x)$ converge simplement sur $]-1,1[$;
- pour tout $a \in]0,1[$, $\sum u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-a,a]$:

$$\forall x \in [-a,a],\ \forall n \geq 2,\ |u_n'(x)| = \frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{(n-a)^2} \text{ qui est un terme général de série convergente}$$

f_6 est donc de classe C^1 sur $]-1,1[$, avec :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_8'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(-1)^k \left(\frac{x}{n}\right)^k$$

Nous avons cette fois, pour $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} (k+1)(-1)^k \left(\frac{x}{n}\right)^k \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{(1-|x|/n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-|x|)^2} < +\infty$$

La famille étudiée est donc sommable, ce qui permet d'échanger les deux sommes dans l'expression de f_8' :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_6'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[(-1)^k (k+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{k+2}} \right] x^k$$

Il reste à intégrer ce DSE pour obtenir :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_6(x) = f_6(0) + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{k+2}} x^{k+1}$$

On reconnait la fonction "Zeta alternée" $\eta :\ s \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$, définie sur $]0,+\infty[$. Nous avons donc (en posant $m = k+1$) :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_6(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \eta(m+1)\, x^m$$

29) a) $\ln(p_n(|z|)) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{|z|}{2^k}\right)$ converge car $0 \leq \ln(1+\frac{|z|}{2^k}) \sim_{+\infty} \frac{|z|}{2^k}$ qui est le terme général d'une série convergente.

b) On en déduit que $|p_n(z)| = \prod_{k=0}^{n} \left|1-\frac{z}{2^k}\right| \leq p_n(|z|) \leq e^{\ell}$ où ℓ est la limite de $\ln(p_n(|z|))$ quand n tend vers $+\infty$.

c) Si z est une puissance de 2, $p_n(z) = 0$ à partir d'un certain rang et la suite converge vers 0. Sinon, $(p_n(z))_{n\geq 0}$ étant bornée, il suffit, pour montrer qu'elle converge, de démontrer qu'elle possède une unique valeur d'adhérence. Soient donc λ et μ deux valeurs d'adhérence, avec $|\mu| \geq |\lambda|$. On peut construire deux extractrices φ et ψ telles que $p_{\varphi(n)}(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$ et $p_{\psi(n)}(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu$, en imposant $\varphi(n) < \psi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons alors :

$$a_n = \prod_{k=\varphi(n)+1}^{\psi(n)} \left(1-\frac{z}{2^k}\right) = \frac{p_{\psi(n)}(z)}{p_{\varphi(n)}(z)}.$$

D'autre part, pour toute famille $(u_k)_{1\leq k\leq N}$ de nombres complexes, nous avons :

$$\prod_{k=1}^{N}(1+u_k) - 1 = \sum_{\substack{K\subset[\![1,N]\!]\\ K\neq\emptyset}} \prod_{k\in K} u_k$$

donc

$$\left|\prod_{k=1}^{N}(1+u_k) - 1\right| \leq \sum_{\substack{K\subset[\![1,k]\!]\\ K\neq\emptyset}} \prod_{k\in K} |u_k| = \prod_{k=1}^{N}(1+|u_k|) - 1$$

On en déduit :

$$|a_n - 1| \leq \prod_{k=\varphi(n)+1}^{\psi(n)} \left(1+\frac{|z|}{2^k}\right) - 1 = \frac{p_{\psi(n)}(|z|)}{p_{\varphi(n)}(|z|)} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

i.e. $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Si $\mu \neq 0$, a_n tend vers $\frac{\lambda}{\mu}$, donc $\lambda = \mu$; sinon, $0 \leq |\lambda| \leq |\mu| = 0$ et $\lambda = 0 = \mu$.

On a ensuite $p_n(0) = 1$ et $p_{n+1}(z) = (1-z)p_n(z/2)$ pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, ce qui donne $p(0) = 1$ et $p(z) = (1-z)p(z/2)$ en faisant tendre n vers $+\infty$.

d) Pour $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire comme à la question précédente :

$$\forall n \in N,\ |p_n(z) - 1| \leq \prod_{k=0}^{n} \left(1+\frac{|z|}{2^k}\right) - 1 = p_n(|z|) - 1 \leq p(|z|) - p(0)$$

ce qui donne $|p(z) - 1| \leq p(|z|) - p(0)$ en faisant tendre n vers l'infini.

Or l'application $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+\frac{x}{2^n})$ est continue sur $[0, 1/2]$ (il y a convergence normale et chaque application $x \longmapsto \ln(1+\frac{x}{2^n})$ est continue sur $[0, 1/2]$. On en déduit que l'application p est continue sur $[0, 1/2]$ en composant par l'application exponentielle. Ainsi, $p(|z|)$ tend vers $p(0)$ quand z tend vers 0 : p est donc continue en 0.

e) **Analyse :** supposons que p admette un DSE valide sur $\mathbb{C}$:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

En injectant dans la relation du c), nous obtenons :

$$a_0 = 1 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} z^{n+1} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - 2a_{n-1}}{2^n} z^n$$

Par unicité du DSE, nous pouvons identifier ces deux sommes, ce qui donne :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{2}{2^n - 1} a_{n-1}$$

soit $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k - 1}$.

Synthèse : soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation précédente. Les a_n sont tous non nuls et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2}{2^{n+1}-1}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini : la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est donc de rayon infini : notons f sa somme. En reprenant les calculs faits dans l'analyse, nous avons $g(z) = (1-z)g(z/2)$ pour tout $z \in C$. Cela donne, pour z complexe quelconque :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(z) = (1-z)f(z/2) = (1-z)(1-z/2)f(z/4) = \cdots = p_n(z)f(z/2^{n+1}).$$

Comme f est continue (en tant que somme d'une série entière), elle est continue en 0 et nous obtenons $f(z) = p(z)$ en faisant tendre n vers l'infini.

Nous avons donc démontré que p est DSE en 0 et que son développement est valide sur tout $\mathbb{C}$:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{z}{2^k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{\prod_{k=1}^{n}(2^k-1)} z^n.$$

30) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe n_0 tel que $1 - q^n x > 0$ pour tout $n \geq n_0$. On a alors :

$$\forall N \geq n_0,\ \ln\left(\prod_{n=n_0}^{N} (1 - q^n x)\right) = \sum_{n=n_0}^{N} \ln(1 - q^n x).$$

Comme $|\ln(1-q^n x)| \sim_{+\infty} |q^n x|$, la série de terme général $\ln(1-q^n x)$ est absolument convergente (théorème de comparaison des séries à termes positifs). On en déduit que $\displaystyle\prod_{n=n_0}^{N} (1 - q^n x)$ a une limite strictement positive quand N tend vers $+\infty$: $f(x)$ est donc bien défini.

f vérifie trivialement l'équation fonctionnelle ; d'autre part, la série $\sum_{n\geq 0} \ln(1 - q^n x)$ converge normalement sur $[-a, a]$ pour $a < 1/|q|$:

$$\forall x \in]-1/q, 1/q[, \forall n \in \mathbb{N},\ |\ln(1 - q^n x)| = \left| -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^{nk} x^k}{k} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|q|^{nk} a^k}{k} = -\ln(1 - |q|^n a) = \alpha_n$$

et $\alpha_n \sim_{+\infty} |q|^n a$ qui est un terme général de série convergente. On en déduit que $x \longmapsto \ln(f(x))$ est continue sur $[-a, a]$, puis que f est continue sur $[-a, a]$, donc en particulier en 0.

Si g est une autre solution continue en 0 de cette équation, nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = (1 - qx)f(qx) = (1 - qx)(1 - q^2 x)f(q^2 x) = \cdots = (1 - qx)(1 - q^2 x)\ldots(1 - q^n x)f(q^n x)$$

ce qui donne $f = g$ en faisant tendre n vers $+\infty$ ($q^n x$ tend vers 0 et g est continue en 0).

b) En reprenant le calcul précédent, nous avons pour $|x| < \dfrac{1}{|q|}$:

$$\ln f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - q^n x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^{nk} x^k}{k}$$

La famille $\left(\dfrac{q^{nk} x^k}{k}\right)_{n,k\geq 1}$ est sommable, puisque :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \left|\frac{q^{nk} x^k}{k}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|q|^{nk}|x|^k}{k} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\ln(1 - |q|^n |x|) < +\infty$$

On peut donc échanger les deux sommes, ce qui donne :

$$\ln f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\sum_{n=1}^{+\infty} q^{nk} \right) \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{q^k}{1-q^k} \frac{x^k}{k}$$

La propriété admise prouve donc que f est DSE en 0 et il existe une suite (a_n) telle que :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{|q|}, \frac{1}{|q|} \right[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

En injectant cette égalité dans l'équation fonctionnelle, on obtient, au voisinage de 0 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1-qx) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^{n+1} x^{n+1} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1}) q^n x^n.$$

Par unicité du DSE, nous obtenons :

$$\forall n \geq 1, \ a_n = (a_n - a_{n-1}) q^n.$$

La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est donc définie par :

$$a_0 = f(0) = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, \ a_n = -\frac{q^n}{1-q^n} a_{n-1}$$

ce qui donne $a_n = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{q^k}{1-q^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Définissons la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ comme précédemment. Comme $\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \left|\frac{q^n}{1-q^n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de rayon infinie et sa somme g est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On a $g(0) = a_0 = 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ (1-qx) g(qx) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^{n+1} x^{n+1} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1}) q^n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = g(x)$$

donc $g = f$ d'après le a. Ceci démontre que f est DSE en 0 avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{q^k}{1-q^k} \right) x^n.$$

31) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(q^n x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(q^n x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$. On peut donc écrire :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{q^{n(2k+1)} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right).$$

Notons $\alpha_{n,k} = \left((-1)^k \frac{q^{n(2k+1)} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)_{n\geq 0, k\geq 0}$. Nous avons :

- pour tout n, $\sum_{k\geq 0} |\alpha_{n,k}|$ est convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_{n,k}| = \operatorname{sh}(|q^n x|),$$

- comme $|\operatorname{sh}(q^n x)| \sim |q^n x|$ quand n tend vers l'infini, avec $|q| < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_{n,k}| \right)$ est convergente,

donc la famille $(\alpha_{n,k})_{n\geq 0, k\geq 0}$ est sommable et nous pouvons échanger l'ordre de sommation, ce qui permet d'écrire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^{n(2k+1)} \right) x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{1-q^{2k+1}} x^{2k+1}.$$

f est donc développable en série entière en 0 et son développement est valide sur tout $\mathbb{R}$.

Étude sur le cercle d'incertitude ou au voisinage d'un point de ce cercle

32) a) Comme il y a convergence pour $x = 1$, on a $R \geq 1$. Pour montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[0, 1]$, il suffit de montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[0, 1[$ (car il y a convergence en 1). Comme souvent, un théorème d'Abel se prouve en faisant une transformation d'Abel ! Pour $x \in [0, 1[$, nous allons montrer que le reste de la série de terme général $a_n x^n$ tend uniformément vers 0 sur $[0, 1[$. Posons donc $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\forall N \geq n+1, \sum_{k=n+1}^{N} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{N} (R_{k-1} - R_k) x^k = R_n x^{n+1} - \underbrace{R_N x^N}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0} - \sum_{k=n+1}^{N-1} R_k (x^k - x^{k-1})$$

Comme le terme de droite de l'égalité a une limite quand N tend vers l'infini, il en est de même du terme de gauche, ce qui donne en faisant tendre N vers l'infini :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = R_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k (x^{k-1} - x^k)$$

On obtient donc :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq |R_n| + (1 - x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} |R_k| x^{k-1}$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ |R_k| \leq \varepsilon$. On a alors, pour $n \geq n_0$:

$$\forall x \in [0, 1[, \ \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq \varepsilon + (1 - x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon x^{k-1} = \varepsilon \left(1 + x^n\right) \leq 2\varepsilon$$

Nous avons ainsi montré que $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1[$, puis sur $[0, 1]$.

On en déduit que f est continue sur $[0, 1]$, comme limite uniforme d'une suite de fonction continue (les sommes partielles sont continues car polynomiales).

b) Nous sommes dans chaque cas dans le cadre du a) et en particulier $f(x)$ tend vers $f(1)$ quand x tend vers 1^-.

- Exemple 1 : $\forall x \in [0, 1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1 + x)$ donc $A = f(1) = \ln 2$;

- Exemple 2 : $\forall x \in [0, 1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \operatorname{Arctan}(x)$ donc $B = f(1) = \dfrac{\pi}{4}$;

- Exemple 3 : $\forall x \in [0, 1[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} = \frac{1}{1 + x^4}$ donc, par intégration de ce DSE :

$$\forall x \in [0, 1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1} = \int_0^x \frac{1}{1 + t^4} \, \mathrm{d}t$$

  ce qui donne $C = f(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + t^4} \, \mathrm{d}t$. Les courageux pourront terminer le calcul :

$$\frac{1}{1 + x^4} = \frac{1}{4} \frac{2 - \sqrt{2}\, x}{x^2 - \sqrt{2}\, x + 1} + \frac{1}{4} \frac{2 + \sqrt{2}\, x}{x^2 + \sqrt{2}\, x + 1} \text{ puis } C = \frac{\sqrt{8}}{8} \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8} \pi.$$

- Exemple 4 : on a $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{4}{2n+1} + \dfrac{1}{n+1}$. Nous allons multiplier ce terme par x^{2n+1} et sommer,

pour que les séries obtenues se calculent (un peu) plus facilement :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,1[,\ f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= -x\ln(1-x^2) - \frac{\ln(1-x^2)}{x} - x - 4\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - x\right) \\
&= -\ln(1-x)\,\frac{(x-1)^2}{x} - \ln(1+x)\,\frac{(x+1)^2}{x} + 3x
\end{aligned}$$

ce qui donne enfin $D = f(1) = \lim\limits_{1^-}\left[-\frac{\ln(1-x)}{x}(x-1)^2 - \ln(1+x)\,\frac{(x+1)^2}{x} + 3x\right] = 3 - 4\ln 2.$

c) En posant $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, supposons que les séries de termes généraux a_n, b_n et c_n soient convergentes. D'après le a), les fonctions

$$f:\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ g:\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ et } h:\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

sont définies et continues sur $[0,1]$. Comme $f(x)g(x) = h(x)$ pour tout $x \in [0,1[$, la continuité de f, g et h donne $f(1)g(1) = h(1)$: le produit de Cauchy des deux séries a pour somme le produit des deux sommes.

Autrement-dit, pour deux séries à termes complexes convergentes, le produit de Cauchy des deux séries ne peut converger que vers le produit des deux sommes.

d) Supposons que $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} S_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ et notons $\sigma_{-1} = 0$. Nous avons alors $\sigma_n = O(1)$ puisque σ_n tend vers S. Comme $S_n = (n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}$, on en déduit que $S_n = O(n)$, puis $a_n = S_n - S_{n-1} = O(n)$. Par théorème de comparaison, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de la série $\sum_{n\geq 0} n z^n$: on a bien $R \geq 1$.

Pour faire apparaître naturellement les S_n puis les σ_n, nous allons faire un produit de Cauchy avec la série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$. Nous pouvons écrire :

$$\begin{cases}
\forall x \in [0,1[,\ \dfrac{1}{1-x}\,f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\, x^n \\
\forall x \in [0,1[,\ \dfrac{1}{(1-x)^2}\,f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n (n+1) x^n
\end{cases}$$

On peut écrire $\sigma_n = S + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui donne :

$$\forall x \in [0,1[,\ f(x) = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (S+\varepsilon_n)\,(n+1)\,x^n = \underbrace{S\,(1-x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n}_{=S} + \underbrace{(1-x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n\,(n+1)x^n}_{=R(x)}$$

Il reste donc à montrer que $R(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1, ce qui se fait avec une preuve de type Cesàro : fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,1[,\ |R(x)| &\leq (1-x)^2 \sum_{n=0}^{n_0-1} |\varepsilon_n|(n+1)x^n + \varepsilon\,(1-x)^2 \sum_{n=n_0}^{+\infty} (n+1)x^n \\
&\leq (1-x)^2 \sum_{n=0}^{n_0-1} |\varepsilon_n|(n+1)x^n + \varepsilon\,\underbrace{(1-x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n}_{=1} \\
&\leq (1-x)^2 \sum_{n=0}^{n_0-1} |\varepsilon_n|(n+1)x^n + \varepsilon
\end{aligned}$$

Quand x tend vers 1^-, $(1-x)^2 \sum_{n=0}^{n_0-1} |\varepsilon_n|(n+1)x^n$ tend vers 0. Il existe donc $\eta \in]0,1[$ tel que

$$\forall x \in]1-\eta, 1[,\ (1-x)^2 \sum_{n=0}^{n_0-1} |\varepsilon_n|(n+1)x^n \leq \varepsilon.$$

Nous avons donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta \in]0,1[, \forall x \in]1-\eta, 1[,\ |R(x)| \leq 2\varepsilon$$

ce qui est la définition de la convergence de $R(x)$ vers 0 quand x tend vers 1^-.

Remarque : dans cette question, on compare deux généralisations de la notion de convergence d'une série (ces notions ont été introduites dans le cadre de l'étude des séries de Fourier). Quand une série $\sum_{n\geq} a_n$ ne converge pas, on peut essayer de définir une convergence en un sens plus général :

- on dit que la série converge *au sens de Cesàro* si la suite $\sigma_n = \dfrac{S_0 + \cdots + S_n}{n+1}$ converge : la limite de cette suite est alors appelée *somme de la série* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *au sens de Cesàro* et notée $\sum_{\substack{n=0\\C}}^{+\infty} a_n$; le théorème de Cesàro affirme que si la série converge au sens usuel, elle converge au sens de Cesàro avec $\sum_{\substack{n=0\\C}}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$;

- on dit que la série converge *au sens d'Abel* si la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est de rayon $R \geq 1$ et si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a une limite S quand x tend vers 1^- ; la valeur S est alors appelée *somme de la série* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *au sens d'Abel* et notée $\sum_{\substack{n=0\\A}}^{+\infty} a_n$. La question a) prouve que si la série converge au sens usuel, elle converge au sens d'Abel avec $\sum_{\substack{n=0\\A}}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

La question d) prouve que si la série converge au sens de Cesàro, elle converge au sens d'Abel avec $\sum_{\substack{n=0\\A}}^{+\infty} a_n = \sum_{\substack{n=0\\C}}^{+\infty} a_n$. Ainsi, la convergence d'une série au sens d'Abel est plus générale que celle au sens de Cesàro.

En exercice, on pourra s'amuser à généraliser encore Cesàro : la série converge au sens de Cesàro "d'ordre 2" si $\sigma_{n,2} = \dfrac{\sigma_0 + \cdots + \sigma_n}{n+1}$ a une limite S quand n tend vers l'infini. Plus généralement, on peut parler de convergence de Cesàro "d'ordre k" si $\sigma_{n,k}$ a une limite quand n tend vers l'infini, où on a posé :

$$\begin{cases} \sigma_{n,0} = S_n & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,; \\ \sigma_{n,k+1} = \dfrac{\sigma_{0,k} + \cdots + \sigma_{n,k}}{n+1} & \text{pour tous } n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si la série converge au sens de Cesàro d'ordre k, on note $\sum_{\substack{n=0\\C_k}}^{+\infty} a_n$ la limite de $\sigma_{n,k}$ quand n tend vers l'infini. La convergence de Cesàro d'ordre 0 est la convergence usuelle, celle d'ordre 1 est la convergence au sens de Cesàro.

On a alors d'après le théorème de Cesàro

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{\substack{n=0\\C_k}}^{+\infty} a_n \text{ existe} \Longrightarrow \sum_{\substack{n=0\\C_{k+1}}}^{+\infty} a_n \text{ existe et } \sum_{\substack{n=0\\C_{k+1}}}^{+\infty} a_n = \sum_{\substack{n=0\\C_k}}^{+\infty} a_n$$

et en généralisant la preuve du d) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{\substack{n=0\\C_k}}^{+\infty} a_n \text{ existe} \Longrightarrow \sum_{\substack{n=0\\A}}^{+\infty} a_n \text{ existe et } \sum_{\substack{n=0\\A}}^{+\infty} a_n = \sum_{\substack{n=0\\C_k}}^{+\infty} a_n$$

33) a) La fonction f est croissante sur $[0,1[$, donc elle a une limite ℓ (finie ou infinie) en 1. Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leq f(x)$$

donc, en faisant tendre x vers 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \ell.$$

Ceci impose $\ell = +\infty$, puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.

b) Nous allons faire une preuve de type Cesàro : fixons $\varepsilon > 0$; il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ |a_n - b_n| \leq \varepsilon a_n.$$

On a alors, pour $x \in [0,1[$:

$$|f(x) - g(x)| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n - b_n| x^n + \varepsilon \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n - b_n| x^n + \varepsilon\, f(x).$$

Comme $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 et $\displaystyle\sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n - b_n| x^n$ a une limite finie en 1, il existe $\eta \in]0,1[$ tel que :

$$\forall x \in]1-\eta, 1[,\ \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n - b_n| x^n \leq \varepsilon\, f(x).$$

On a alors :

$$\forall x \in]1-\eta, 1[,\ |f(x) - g(x)| \leq 2\varepsilon\, f(x),$$

ce qui traduit que $g(x)$ est équivalent à $f(x)$ quand x tend vers 1^-.

c) La fonction $\varphi :\ x \longmapsto \ln(1+x)$ est continue et croissante sur $I = [0,\infty[$, qui est stable par φ. On en déduit que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et monotone. Comme $\varphi(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$, $(c_n)_{n\geq 0}$ est décroissante : elle converge donc vers 0, qui est le seul point fixe de φ.

Nous allons calculer un équivalent de c_n, à l'aide d'une méthode assez classique :

$$\frac{1}{c_{n+1}} = \frac{1}{\ln(1+c_n)} = \frac{1}{c_n - c_n^2/2 + o(c_n^2)} = \frac{1}{c_n}\left(1 + \frac{c_n}{2} + o(c_n)\right) = \frac{1}{c_n} + \frac{1}{2} + o(1).$$

On en déduit que $\dfrac{1}{c_{n+1}} - \dfrac{1}{c_n}$ converge vers $1/2$ et le théorème de Cesàro donne $\dfrac{1}{c_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$, soit $c_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.

Le rayon de convergence de f est donc égal à 1 et la série diverge pour $x = 1$ (comparaison avec la série harmonique). Par contre, il y a convergence en -1 d'après le théorème spécial des séries alternées (a_n décroit vers 0).

On peut ensuite appliquer le b) avec $b_0 = 0$ et $\forall n \geq 1,\ b_n = \frac{2}{n}$:

$$f(x) \sim_{1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} x^n = -2\,\ln(1-x).$$

34) Notons $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cette série entière (on pose donc $a_n = 1$ si n est un carré, $a_n = 0$ sinon).

La série diverge quand $x = 1$, donc $R \leq 1$, et $|a_n| \leq 1$ donc $R \geq R\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right) = 1$, donc $R = 1$.

Soit $x \in]0,1[$. L'application $\varphi : \ t \longmapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln x}$ est continue, décroissante et intégrable sur $[0,+\infty[$. On peut donc écrire :

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(n) \leq \varphi(0) + \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

On a ensuite, en posant $u = t\sqrt{-\ln x}$:

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

Comme $\varphi(0)$ est négligeable devant cette quantité quand x tend vers 1, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \underset{1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

35) Soit $x \in]0,1[$. L'application $t \longmapsto \frac{x^t}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$, donc la méthode de comparaison intégrale-série donne l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq x + \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = -t\ln x$ donne ensuite :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{-\ln x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$$

Quand x tend vers 1^-, $\displaystyle\int_{-\ln x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \neq 0$; on en déduit :

$$f(x) \sim_{1^-} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\ln x}}$$

puisque x est négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{-\ln x}}$ au voisinage de 1.

36) a) On fait une preuve de type Cesàro : pour $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\sqrt{K}} \leq \varepsilon$. On a alors, pour tout $x > 0$:

$$0 \leq f(x)e^{-x} \leq e^{-x} \sum_{k=1}^{K-1} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}} + \varepsilon\, e^{-x} \underbrace{\sum_{k=K}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}_{\leq e^x} \leq e^{-x} \underbrace{\sum_{k=1}^{K-1} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}}}_{=P_K(x)} + \varepsilon$$

Comme P_K est un polynôme, il existe $a > 0$ tel que :

$$\forall x \geq a,\ e^{-x} \sum_{k=1}^{K-1} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}} \leq \varepsilon.$$

On en déduit donc :

$$\forall x \geq a,\ 0 \leq f(x)e^{-x} \leq 2\varepsilon$$

ce qui prouve que $f(x)$ est négligeable devant e^x au voisinage de $+\infty$.

b) Y admet un moment d'ordre 2, donc on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall a > 0,\ P(|Y - E(Y)| \geq a) \leq \frac{V(Y)}{a^2}$$

Comme $E(Y) = V(Y) = x$, cela donne :

$$P(|Y - x| \geq \varepsilon x) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 x} = O(1/x) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

c) Nous devons montrer que $\varphi(x) = f(x)e^{-x}\sqrt{x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$. Fixons $\alpha > 0$ et choisissons $\varepsilon \in]0,1[$ tel que $\dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \leq 1+\alpha$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \geq 1-\alpha$. Le résultat précédent prouve qu'il existe $a > 0$ et $M \geq 0$ tels que :

$$\forall x \geq a, \sum_{|k-x|\geq \varepsilon x} e^{-x}\frac{x^k}{k!} \leq \frac{M}{x}.$$

Écrivons alors, pour $x \geq a$:

$$\varphi(x) = \underbrace{\sqrt{x}\sum_{|k-x|\geq \varepsilon x} e^{-x}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}}_{=\varphi_1(x)} + \underbrace{\sqrt{x}\sum_{|k-x|< \varepsilon x} e^{-x}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}}_{=\varphi_2(x)}$$

Nous avons ($\sqrt{k} \geq 1$) :

$$0 \leq \varphi_1(x) \leq \sqrt{x}\sum_{|k-x|\geq \varepsilon x} e^{-x}\frac{x^k}{k!} \leq \frac{M}{\sqrt{x}}.$$

Il existe donc $b \geq a$ tel que :

$$\forall x \geq b, 0 \leq \varphi_1(x) \leq \alpha.$$

La somme qui définit φ_2 porte sur les k compris entre $(1-\varepsilon)x$ et $(1+\varepsilon)x$. Nous pouvons donc encadrer $\sqrt{k}$ pour obtenir, toujours pour $x \geq a$:

$$\underbrace{(1-\alpha)\sum_{|k-x|<\varepsilon x} e^{-x}\frac{x^k}{k!}}_{=A(x)} \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1+\varepsilon)x}}\sum_{|k-x|<\varepsilon x} e^{-x}\frac{x^k}{k!} \leq \varphi_2(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-\varepsilon)x}}\underbrace{\sum_{|k-x|<\varepsilon x} e^{-x}\frac{x^k}{k!}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \leq 1+\alpha$$

Or $A(x) = (1-\alpha)\left(1 - \sum_{|k-x|\geq \varepsilon x} e^{-x}\dfrac{x^k}{k!}\right) = (1-\alpha)(1+O(1/x)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1-\alpha$, donc il existe $c \geq 0$ tel que

$$\forall x \geq c,\ A(x) \geq 1-2\alpha.$$

On en déduit :

$$\forall x \geq \max(b,c),\ 1-2\alpha \leq \varphi(x) \leq 1+2\alpha$$

ce qui achève la preuve.

37) Une étude élémentaire de la fonction $\varphi :\ x \longmapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle stable $[0,+\infty[$ montre que (a_n) est positive, décroissante et de limite nulle (0 est le seul point fixe de φ). On en déduit que a_{n+1} est équivalent à a_n, et donc le rayon de la série entière est égal à 1 (critère de d'Alembert). Quand $x = -1$, la série est convergente car (a_n) décroît vers 0 (théorème spécial des séries alternées). Pour étudier la convergence quand $x = 1$, nous allons calculer un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$. Nous avons :

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n\ln(1+a_n)} = \frac{a_n - (a_n - a_n^2/2 + o(a_n^2))}{a_n\ln(1+a_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

En appliquant le théorème de Cesàro, on en déduit que $\dfrac{1}{na_n} - \dfrac{1}{na_0} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$, soit $a_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2n}$.

Ceci prouve que $f(x)$ n'est pas définie quand $x = 1$ et que

$$f(x) \sim_{1^-} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n} = -\frac{\ln(1-x)}{2},$$

en appliquant le lemme classique :

Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ sont deux séries entières de rayon 1 avec $a_n \sim_{+\infty} b_n$, $b_n \geq 0$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ divergente, alors $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1^- et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est équivalent à $g(x)$ au voisinage de 1.

Preuve du lemme :

- La fonction g est croissante sur $[0,1[$; si elle ne tendait pas vers $+\infty$, elle aurait une limite finie ℓ et on pourrait écrire :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \leq g(x) \leq \ell.$$
En faisant tendre x vers 1, on aurait :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \ell$$
ce qui contredirait la divergence de la série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} b_n$ serait convergente.

- Soit $\varepsilon > 0$; il existe n_0 tel que $|a_n - b_n| \leq \varepsilon b_n$ pour tout $n \geq n_0$. On a alors, pour tout $x \in [0,1[$:
$$|f(x) - g(x)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k - b_k| x^k + \varepsilon \underbrace{\sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k}_{\leq g(x)}$$
Comme $\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k - b_k| x^k$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de 1 (car $g(x)$ tend vers $+\infty$), il existe $\eta \in]0,1[$ tel que :
$$\forall x \in]1-\eta, 1[,\ \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k - b_k| x^k \leq \varepsilon g(x).$$

On a donc :
$$\forall x \in]1-\eta, 1[,\ |f(x) - g(x)| \leq 2\varepsilon g(x)$$
Ce qui prouve que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ quand x tend vers 1^-.

Équations différentielles et séries entières

38) On procède par analyse synthèse : détaillons la méthode avec la première équation.

a) Supposons que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit une solution non nulle de l'équation sur un intervalle $]-r, r[$ avec $r > 0$. On a alors :
$$\forall x \in]-r, r[,\ (x^2 + x) \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$
que l'on peut écrire sous la forme :
$$\forall x \in]-r, r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n(n-1)a_n + (n+1)n a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_n\right) x^n = 0$$
Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle sur $]-r, r[$, nous obtenons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = -\frac{n^2 - n + 1}{(n+1)^2}\, a_n$$
soit
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = a_0 \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \prod_{k=0}^{n-1} (k^2 - k + 1).$$
Comme f est non nulle, a_0 est non nul et il ne semble pas possible de trouver une expression plus simple de a_n.

Réciproquement, soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par la donnée de $a_0 \in \mathbb{R}^*$ et la relation de récurrence précédente. La suite (a_n) ne s'annule pas et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. La fonction $f :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est alors définie

et de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et le calcul fait dans l'analyse prouve que f est solution sur cet intervalle de l'équation $(x+x^2)y''+y'+y=0$.

Nous avons ainsi démontré que les solutions DSE de l'équation sont définies sur $]-1,1[$ et proportionnelles à la fonction :

$$f_0 : \ x \longmapsto K \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k^2-k+1)}{(n!)^2}\, x^n.$$

b) La relation s'écrit cette fois : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)(n+1)a_{n+2} = -(an^2+(b-a)n+c)a_n$. Il est plus simple d'étudier séparément les termes paires et impairs : pour α et β quelconque, nous pouvons définir les suites (α_p) et (β_p) par :

$$\alpha_0 = 1\ \beta_0 = 1,\ \alpha_{p+1} = -\frac{4ap^2+2(b-a)p+c}{(2p+2)(2p+1)}\,\alpha_p \text{ et } \beta_{p+1} = -\frac{a(2p+1)^2+(b-a)(2p+1)+c}{(2p+3)(2p+2)}\,\beta_p$$

et les séries $\sum_{p\geq 0}\alpha_p z^p$ et $\sum_{p\geq 0}\beta_p z^p$ sont de rayon 1 par la règle de d'Alembert (sauf si α ou β). Les fonctions

$$f_1 : \ x \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty}\alpha_p x^{2p} \text{ et } f_2 : \ x \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty}\beta_p x^{2p+1}$$

sont alors deux solutions DSE sur $]-1,1[$ qui engendre l'espace des solutions DSE.

c) On obtient ici $a_0 = 1$ et $a_n = -\dfrac{n}{2n+1}a_{n-1} = (-1)^n\dfrac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}$. Toujours avec la règle de d'Alembert, ceci permet de définir une série entière de rayon 2 et sa somme $f : \ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^n$ est solution du problème de Cauchy sur $]-2,2[$.

d) On obtient cette fois : $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et $a_{n+2} = \frac{2}{n+2}a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous obtenons ici une série entière de rayon infini dont la somme est bien connue :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(2n)(2n-2)\dots(2)}\,x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\,x^{2n} = e^{-x^2}.$$

e) Ce calcul est un cas particulier de la question b), en remplaçant (a,b,c) par $(-1,-1,-a^2)$. On vérifie facilement que la fonction $f : \ x \longmapsto e^{a\,\mathrm{Arcsin}\,x}$ est solution de l'équation sur $]-1,1[$. Comme $f(0) = 1$ et $f'(0) = a$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique (les fonctions $x \longmapsto 1-x^2$, $x \longmapsto -x$ et $x \longmapsto -a^2$ sont continues sur $]-1,1[$ et la première fonction ne s'annule pas) et $f = f_1 + af_2$. Nous avons donc ici

$$\forall x \in]-1,1[,\ e^{a\,\mathrm{Arcsin}\,x} = \sum_{p=0}^{+\infty}\alpha_p x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty}\beta_p x^{2p+1}$$

en posant $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = a$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_{p+1} = \frac{(2p-a)(2p+a)}{(2p+2)(2p+1)}\,\alpha_p \text{ et } \beta_{p+1} = \frac{(2p+1-a)(2p+1+a)}{(2p+3)(2p+2)}\,\beta_p.$$

39) a) On a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \dfrac{n+1}{2(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/4$ donc $R = 4$ (critère de d'Alembert).

b) Nous avons donc, pour $x \in]-4,4[$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2(2n+1)a_{n+1}x^{n+1} = (n+1)a_n x^{n+1}$$

donc

$$4\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}na_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n+1}$$

soit $4xf'(x) - 2(f(x) - a_0) = x^2 f'(x) + xf(x)$. Comme $a_0 = 1$, f est donc solution sur $]-4, 4[$ de l'équation différentielle :

$$x(4-x)y' = (2+x)y - 2$$

c) On résout l'équation sur $I =]0, 4[$ (intervalle sur lequel le terme qui est en facteur de y' ne s'annule pas) : l'équation homogène a pour solution $y = K\,\dfrac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}$ et la méthode de variation de la constante conduit à :

$$K' = -2\frac{\sqrt{4-x}}{x^{3/2}} = -\frac{2}{x}\sqrt{\frac{4-x}{x}}.$$

On intègre cette fonction en posant $u = \sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$:

$$K(x) = -2\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 4(u - \operatorname{Arctan} u) + Cte.$$

Il existe donc une constante réelle C telle que :

$$\forall x \in]0,1[,\ f(x) = \left(4\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) + C\right)\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}.$$

On fait ensuite un développement asymptotique au voisinage de 0 :

- $\sqrt{\dfrac{4-x}{x}} = \dfrac{2+O(x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + O(\sqrt{x})$;
- $\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{4-x}{x}} = \dfrac{\pi}{2} + o(1)$;
- $\dfrac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}} = \dfrac{\sqrt{x}}{8}\,(1 + O(x))$;

donc

$$f(x) = \left(\frac{8}{\sqrt{x}} + C - 2\pi + o(1)\right)\frac{\sqrt{x}}{8}\,(1+O(x)) = 1 + \frac{C-2\pi}{8}\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

Comme f est dérivable en 0, on a $\dfrac{C-2\pi}{8} = 0$, soit $C = 2\pi$. Ainsi :

$$f(x) = \left(4\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) + 2\pi\right)\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}$$

ce qui donne enfin :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\dbinom{2n}{n}} = f(1) = \left(4\left(\sqrt{3} - \operatorname{Arctan}\sqrt{3}\right) + 2\pi\right)\frac{1}{3^{3/2}} = \frac{4}{3} + \frac{2}{27}\,\pi\sqrt{3}$$

Divers

40) a) Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme d'algèbre. Nous avons, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $||M|| < 1$:

$$\forall N \in \mathbb{N},\ (I_n - M) \times \left(\sum_{k=0}^{N} M^k\right) = I_n - M^{N+1} \qquad (1)$$

Comme $||M^k|| \leq \underbrace{||M||^k}_{\text{TGSC}}$, la série de terme général M^k converge et M^{N+1} tend vers 0 quand N tend vers l'infini. En faisant tendre n vers l'infini dans (1), nous obtenons donc

$$(I_n - M) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} M^k \right) = I_n$$

Ceci prouve que $I_n - M$ est inversible et donne le DSE de la fonction inverse au voisinage de I_n :

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ ||M|| < 1 \Longrightarrow (I_n - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} M^k.$$

En choisissant $R > ||A||$, $re^{i\theta} I_n - A = r\, e^{i\theta}(I_n - \frac{e^{-i\theta}}{r} A)$ est inversible pour $r \geq R$ et $\theta \in\ [0, 2\pi]$, avec :

$$(re^{i\theta} I_n - A)^{-1} = \frac{e^{-i\theta}}{r} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{-ip\theta}}{r^p} A^p = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{-i(p+1)\theta}}{r^{p+1}} A^p$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $r \geq R$, la série $\sum_{p \geq 0} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} \frac{e^{-i(p+1)\theta}}{r^{p+1}} A^p$ converge normalement, et donc uniformément, par rapport à θ sur $[0, 2\pi]$. Sa somme est donc une fonction continue de θ et il est possible de l'intégrer sur $[0, 2\pi]$ et d'échanger l'intégrale et la somme infinie :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} \left(re^{i\theta} I_n - A\right)^{-1} \mathrm{d}\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} r^{k-p} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-p)\theta}\, \mathrm{d}\theta \right)}_{=\delta_{k,p}} A^p = A^k$$

b) Notons $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n = \det(XI_n - A)$ le polynôme caractéristique (normalisé) de A ($a_n = 1$). Nous avons alors, pour $r \geq R$:

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} \left(re^{i\theta} I_n - A\right)^{-1} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} re^{i\theta} \sum_{k=0}^{n} a_k (re^{i\theta})^k \left(re^{i\theta} I_n - A\right)^{-1} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} re^{i\theta} \frac{P(re^{i\theta})}{\det(re^{i\theta} I_n - A)} \big(\mathrm{Com}(re^{i\theta} I_n - A)\big)^\top \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} re^{i\theta} \big(\mathrm{Com}(re^{i\theta} I_n - A)\big)^\top \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$re^{i\theta} \big(\mathrm{Com}(re^{i\theta} I_n - A)\big)^\top = \sum_{p=1}^{n} r^p M_p(\theta)$$

où $M_1(\theta), \ldots, M_n(\theta)$ sont des matrices qui dépendent continument de θ. En intégrant, nous obtenons

$$P(A) = \sum_{p=1}^{n} r^p M_p = 0$$

avec $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Chaque coefficient de la matrice $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} r^p M_p$ est un polynôme en r de valuation ≥ 1 et constant pour $r \geq R$: ces polynômes sont nuls et $P(A) = 0$.

41) a) On a , pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 1}{n!\,2^n}\, x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!}\, x^n.$$

b) Nous avons :

$$|a_n| = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi(2n-2)}\, e^{-2n+2}(2n-2)^{2n-2}}{2^{2n-1}\, n \left(\sqrt{2\pi(n-1)}\, e^{-n+1}(n-1)^{n-1}\right)^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, n^{-3/2}.$$

On en déduit que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est de rayon 1 et qu'il y a converge normale sur le disque fermé $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}$. La fonction g est donc en partiuclier continue sur D, comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

On a $g^2(x) = 1 + x$ pour tout $x \in]1,1[$; comme $h :\ z \longmapsto 1+z$ et g^2 sont sommes de séries entières de rayons au moins égaux à 1, on en déduit que g et h coïncident sur le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Par continuité de g et h sur D, nous avons :

$$\forall z \in D,\ g^2(z) = 1 + z.$$

42) a) Il y a convergence pour $z = -1$ (série harmonique alternée) et divergence pour $z = 1$ (série harmonique), donc le rayon est égal à 1.

b) Remarquons tout d'abord que pour $x \in]-1,1[$, on a $f(x) = \ln(1+x)$ et $e^{f(x)} = 1 + x$. Nous allons montrer que cette résultat se prolonge au domaine complexe.

L'application $\psi :\ t \longmapsto f(zt)$ est de classe C^1 sur $[0,1]$, avec

$$\forall t \in [0,1],\ \psi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} z^n = \frac{z}{1+tz}.$$

En notant $\psi(t) = a(t) + ib(t)$, a et b sont de classe C^1 et $\varphi(t) = e^{a(t)}\left(\cos b(t) + i \sin b(t)\right)$; on en déduit que φ est de classe C^1 sur $[0,1]$, avec

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= a'(t)e^{a(t)}\left(\cos b(t) + i\sin b(t)\right) + e^{a(t)} b'(t)\left(-\sin b(t) + i \cos b(t)\right) \\ &= (a'(t) + ib'(t))e^{a(t)}\left(\cos b(t) + i \sin b(t)\right) \\ &= \psi'(t)\varphi(t) = \frac{z}{1+tz}\,\varphi(t). \end{aligned}$$

Ainsi, φ est solution sur $[0,1]$ du problème de Cauchy

$$\mathcal{P} :\ \left(y' = \frac{z}{1+tz}\, y,\ y(0) = 1\right)$$

Comme l'application $t \longmapsto \dfrac{z}{1+tz}$ est continue sur $[0,1]$, $\mathcal{P}$ possède une unique solution : comme $t \longmapsto 1 + tz$ est solution de $\mathcal{P}$, on en déduit que $\varphi(t) = 1 + tz$ pour tout $t \in [0,1]$. Ainsi, pour $t = 1$, on obtient $e^{f(z)} = 1 + z$.

Exercices X-ENS

43) Quitte à diviser f par $f(z_0)$, nous pouvons supposer que $f(z_0) = 1$. f est ainsi définie au voisinage de z_0 et il existe $r > 0$ et une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon R au moins r tels que :

$$\forall h \in \mathbb{C},\ |h| < r \Longrightarrow f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n.$$

La fonction g est bien définie au voisinage de z_0 et la relation $f(z_0+h)g(z_0+h)=1$, valable pour $|h|$ assez petit, nous invite à chercher une série entière $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ qui soit l'inverse de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ pour le produit de Cauchy formel. Comme $a_0=1$, il existe une unique suite (b_n) telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k = 0$$

Si nous montrons que la série $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ est de rayon non nul R', nous aurons par produit de Cauchy :

$$\forall h\in\mathbb{C},\ |h|<\min(r,R'),\ f(z_0+h)\sum_{n=0}^{+\infty} b_n h^n = 1$$

ce qui prouvera le résultat demandé :

$$\forall h\in\mathbb{C},\ |h|<\min(r,R'),\ g(z_0+h)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n h^n = 1$$

Comme R est non nul, fixons $\rho\in]0,R[$. La suite $(a_n\rho^n)_{n\geq 0}$ est alors bornée par un réel $M\geq 0$, ce qui donne :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |a_n|\leq \frac{M}{\rho^n}.$$

Nous avons $b_0=1$, puis :

- $|b_1| = |-a_1b_0| = |a_1| \leq \dfrac{M}{\rho}$;
- $|b_2| = |-a_2b_0 - a_1b_1| \leq \dfrac{M}{\rho^2} + \dfrac{M}{\rho}\,\dfrac{M}{\rho} = \dfrac{M(1+M)}{\rho^2}$;
- $|b_3| = |-a_3b_0 - a_2b_1 - a_1b_2| \leq \dfrac{M}{\rho^3} + \dfrac{M}{\rho^2}\,\dfrac{M}{\rho} + \dfrac{M}{\rho}\,\dfrac{M(1+M)}{\rho^2} = \dfrac{M(1+M)^2}{\rho^3}$.

ce qui permet de conjecturer l'inégalité :

$$\forall n\geq 1,\ |b_n|\leq \frac{M(1+M)^{n-1}}{\rho^n}$$

que nous prouvons par récurrence forte : la propriété est vraie pour $n=1$, 2 et 3. Soit $n\geq 1$ et supposons qu'elle est vraie pour tout entier compris entre 1 et n. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
|b_{n+1}| &= |-a_{n+1}b_0 - a_nb_1 - \cdots - a_1b_n| \\
&\leq \frac{M}{\rho^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{M}{\rho^{n+1-k}}\,\frac{M(1+M)^{k-1}}{\rho^k} \\
&= \frac{M}{\rho^{n+1}}\left(1+M\sum_{k=0}^{n-1}(1+M)^k\right) \\
&= \frac{M}{\rho^{n+1}}\left(1+M\,\frac{(1+M)^n-1}{(1+M)-1}\right) \\
&= \frac{M(1+M)^n}{\rho^{n+1}}
\end{aligned}$$

et la propriété est vérifiée au rang $n+1$.

Nous avons ainsi démontré que $R'\geq R\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{M(1+M)^{n-1}}{\rho^n}z^n\right) = \dfrac{\rho}{1+M} > 0$, ce qui achève la preuve.

44) a) On a $1 \leq \ln n \leq n$ pour tout $n \geq 2$, donc $1 = R\left(\sum z^n\right) \geq R(f) \geq R\left(\sum nz^n\right) = 1$: f est de rayon 1. Comme la série diverge grossièrement quand $x = \pm 1$, f est définie sur $I =]-1, 1[$ et elle y est de classe C^∞.

b) On a $a_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$ donc g est de rayon 1 et il y a convergence normale sur $[-1, 1]$; g est donc définie et continue sur $[-1, 1]$. On a, pour tout $N \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} a_n &= -1 + \sum_{n=2}^{N} \left[\ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n}\right] = \ln N - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \\
\sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^n a_n &= 1 + \sum_{n=2}^{2N+1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{2N} (-1)^n \ln \frac{n}{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{2N}{2N-1} \times \frac{2N}{2N+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ln\left(\left[\frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2N)}{1 \times 3 \times \cdots \times (2N-1)}\right]^2 \times \frac{1}{2N+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ln\left(\frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N+1)[(2N)!]^2}\right)
\end{aligned}$$

On a donc $g(1) = -\gamma$ (constante d'Euler) et $g(-1) = \ln(2) + \ln\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \ln(\pi)$ en utilisant l'équivalent de Stirling :

$$\frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N+1)[(2N)!]^2} \sim \frac{2^{4N}(\sqrt{2\pi N} N^N e^{-N})^4}{2N[\sqrt{4\pi N}(2N)^{2N} e^{-2N}]^2} = \frac{\pi}{2}.$$

c) Pour $x \in]-1, 1[$, on a :

$$g(x) = -x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n}\right) x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln n) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = (1-x) f(x) + \ln(1-x)$$

d'où $f(x) = \dfrac{g(x) - \ln(1-x)}{1-x}$. On en déduit :

- $f(x) \xrightarrow[x \to -1]{} \dfrac{g(-1) + \ln 2}{2} \neq 0$, donc $f(x) \underset{-1}{\sim} \ln \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.
- $f(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

On peut retrouver cet équivalent en utilisant le résultat classique : en posant $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \geq 0$, on a :

- $\ln n \sim S_n$;
- $\forall n \geq 0,\ S_n \geq 0$;
- $\displaystyle\sum_{n \geq 0} S_n$ diverge ;

donc $f(x) \underset{1^-}{\sim} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

45) a) Nous avons :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nr^ne^{in\theta}\overline{f(re^{i\theta})}\,\mathrm{d}\theta=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nr^n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{in\theta}\overline{f(re^{i\theta})}\,\mathrm{d}\theta$$

car il y a convergence normale par rapport à θ sur $[0,2\pi]$:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall\theta\in[0,2\pi],\ |a_nr^ne^{in\theta}\overline{f(re^{i\theta})}|\leq|a_nr^n|M_r$$

où M_r est la borne supérieure de f sur le compact $\{z,\ |z|=r\}$, et $|a_nr^n|M_r$ est le terme général d'une série convergente. De la même façon, nous obtenons pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{in\theta}\,\overline{f(re^{i\theta})}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{in\theta}\sum_{m=0}^{+\infty}\overline{a_m}\,r^m\,e^{-im\theta}\,\mathrm{d}\theta=\sum_{m=0}^{+\infty}\overline{a_m}\,r^m\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta=\overline{a_n}\,r^n$$

car $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta=\delta_{n,m}$. Nous obtenons donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta=\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2r^{2n}.$$

b) Le résultat précédent donne donc :

$$\forall r\in[0,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta\leq C^2.$$

Pour tout $N\in\mathbb{N}$, nous pouvons donc écrire :

$$\forall r\in[0,1[,\ \sum_{n=0}^{N}|a_n|^2r^{2n}\leq C^2$$

puis

$$\sum_{n=0}^{N}|a_n|^2\leq M^2$$

en faisant tendre r vers 1. Ceci prouve que $\displaystyle\sum_{n\geq0}|a_n|^2$ converge : comme les a_n sont des entiers, ils sont nuls à partir d'un certain rang.

46) Soit $t\in]-1,1[$; on a $\displaystyle\frac{1}{1-t^k}>0$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{K}\frac{1}{1-t^k}\right)=\sum_{k=1}^{K}-\ln(1-t^k).$$

Comme $0\leq-\ln(1-t^k)\sim_{+\infty}t^k$ qui est le terme général d'une série convergente, le produit partiel converge et $f(t)$ est bien défini.

Soit $t\in]-1,1[$ et $K\in\mathbb{N}^*$; on peut écrire, en faisant des produits de Cauchy de séries de rayon 1 :

$$f_K(t)=\prod_{k=1}^{K}\frac{1}{1-t^k}=\prod_{k=1}^{K}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}t^{kn}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,K}t^mn$$

Il est cependant plus facile d'obtenir une expression des $p_{n,K}$ en utilisant le cours sur les familles sommables : la famille $\left(\dfrac{1}{t^{n_1+2n_2+\cdots+Kn_K}}\right)_{n_1,n_2,\ldots,n_K\in\mathbb{N}}$ est sommable, puisque :

$$\sum_{n_1=0}^{+\infty}\cdots\sum_{n_K=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{t^{n_1+2n_2+\cdots+Kn_K}}\right|=\prod_{k=1}^{K}\frac{1}{1-|t|^k}<+\infty.$$

On peut ensuite faire une sommation par paquets :

$$\begin{aligned} f_K(t) &= \sum_{n_1,\dots,n_K\in\mathbb{N}} \frac{1}{t^{n_1+2n_2+\cdots+Kn_K}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{n_1,n_2,\dots,n_K\in\mathbb{N} \\ \text{t.q. } n_1+2n_2+\cdots+Kn_K=n}} t^{n_1+2n_2+\cdots+Kn_K} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,K}t^n \end{aligned}$$

avec $\forall n\in\mathbb{N},\ p_{n,K} = \text{Card}\left(\left\{(n_1,n_2,\dots,n_K)\in\mathbb{N}^K,\ n_1+2n_2+\cdots+Kn_K=n\right\}\right)$.

On remarque ensuite que $p_{n,K}=p_n$ dès que $K>n$. On a donc $p_{n,K}t^n \xrightarrow[K\to+\infty]{} p_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Nous avons d'autre part :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall K\in\mathbb{N}^*,\ |p_{n,K}t^n|\le p_n|t|^n \qquad (1)$$

Comme :

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\ \forall K\ge N,\ \sum_{n=0}^{N} p_n|t|^n = \sum_{n=0}^{N} p_{n,K}|t|^n \le \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,K}|t|^n = f_k(|t|)\le f(|t|)$$

$p_n|t|^n$ est un terme général de série convergente (série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées). L'inégalité (1) prouve donc que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,K}t^n$ converge normalement, donc uniformément, par rapport à K. Nous avons donc le droit d'échanger la somme infinie et la limite :

$$f(t) = \lim_{+\infty} f_K(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} p_{n,K}t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n.$$

47) a) Soit $(b_n)_{n\ge1}$ une suite complexe quelconque et $N\ge1$. f admet un DL à l'ordre N en 0 :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n z^n + o(z^N)$$

et nous pouvons composer f et $g_N = \sum_{n=1}^{N} b_n z^n$ au voisinage de 0 (car $g(0)=0$) et composer les deux DL :

$$f\circ g_N(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{k=1}^{N} b_k z^k\right)^n + o(g(z)^N) = \sum_{n=1}^{N} c_n z^n + o(z^N)$$

avec pour $1\le n\le N$:

$$c_n = a_1b_n + a_2\left(\sum_{i_1+i_2=n} b_{i_1}b_{i_2}\right) + \cdots + a_n\left(\sum_{i_1+\cdots+i_n=n} b_{i_1}\dots b_{i_n}\right).$$

En particulier, $c_1=a_1b_1$. Par identification, on obtient qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n\ge1}$ vérifiant la propriété imposée, définie par :

$$b_1 = \frac{1}{a_1} \text{ et } \forall n\ge2,\ b_n = -\frac{1}{a_1}\sum_{k=2}^{n} a_k \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\in\mathbb{N}^* \\ i_1+\cdots+i_k=n}} b_{i_1}\dots b_{i_k}.$$

Cette définition est cohérente car pour $k\in\{2\dots,n\}$ et $i_1,\dots,i_k\ge1$ avec $i_1+\cdots+i_k=n$, on a $i_1,\dots,i_k<n$, donc b_n est défini en fonction des termes précédents $b_1,\dots,b_{n-1}$.

b) Remarquons tout d'abord que $(B_n)_{n\ge1}$ est une suite de réels positifs, puisque $B_1=\dfrac{1}{A1}>0$ et

$$\forall n\ge2,\ B_n = -\frac{1}{A_1}\sum_{k=2}^{n}(-A_k)\left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\in\mathbb{N}^* \\ i_1+\cdots+i_k=n}} B_{i_1}\dots B_{i_k}\right) = \frac{1}{A_1}\sum_{k=2}^{n} A_k\left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\in\mathbb{N}^* \\ i_1+\cdots+i_k=n}} B_{i_1}\dots B_{i_k}\right) \ge 0 \text{ par récurrence}$$

On a ensuite :

- $B_1 = \dfrac{1}{A_1} = \dfrac{1}{|a_1|} = |b_1|$;
- soit $n \geq 2$ et supposons que $B_i \geq |b_i|$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. On a :

$$\begin{aligned}
|b_n| &= \frac{1}{A_1} \left| \sum_{k=2}^{n} a_k \left(\sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^* \\ i_1 + \cdots + i_k = n}} b_{i_1} \ldots b_{i_k} \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{A_1} \sum_{k=2}^{n} |a_k| \left(\sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^* \\ i_1 + \cdots + i_k = n}} |b_{i_1}| \ldots |b_{i_k}| \right) \\
&\leq \frac{1}{A_1} \sum_{k=2}^{n} A_k \left(\sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^* \\ i_1 + \cdots + i_k = n}} B_{i_1} \ldots B_{i_k} \right) = B_n
\end{aligned}$$

Nous avons donc montré par récurrence que $|b_n| \leq B_n$ pour tout $n \geq 1$.

c) En définissant les b_n comme à la question a), le premier problème consiste à démontrer que le rayon de $\sum_{n \geq 2} b_n z^n$ est non nul. D'après la question b), il suffira pour cela de démontrer que celui de la série $\sum_{n \geq 2} B_n z^n$ est de rayon non nul. L'idée, c'est que dans le cas particulier de la fonction F, on va être capable de calculer une fonction G telle que $F \circ G(z) = z$ avec G DSE : ce sera la somme de la série de terme général $B_n z^n$, qui sera ainsi de rayon non nul.

Fixons $r \in]0, R[$. Comme $\sum_{n \geq 1} a_n r^n$ converge, il existe $M > 0$ tel que $|a_n r^n| \leq M$ pour tout $n \geq 1$. Posons donc $A_1 = |a_1|$ et $A_n = \dfrac{M}{r^n}$ pour tout $n \geq 2$; nous sommes bien dans la situation de la question b), avec :

$$F(z) = A_1 z - \sum_{n=2}^{+\infty} M \left(\frac{z}{r} \right)^n = A_1 z - \frac{M}{r^2} \frac{z^2}{1 - z/r}.$$

Pour avoir $F(G(z)) = z$, il faut définir $G(z) = Z$ tel que

$$A_1 Z - \frac{M}{r^2} \frac{Z^2}{1 - Z/r} = z.$$

On obtient ici une équation de degré 2 d'inconnue Z, dont les solutions s'écrivent :

$$Z = \frac{1}{2(A_1 + M/r)} \left(A_1 + \frac{z}{r} + \delta(z) \right) \text{ avec } \delta^2(z) = (A_1 r - z)^2 - 4zM.$$

Ainsi, il suffit de définir une série entière $\delta(z)$ de rayon non nul telle que $\delta^2(z) = (A_1 r - z)^2 - 4zM$ pour définir G. Avec une notation impropre, nous voulons définir :

$$\delta(z) = \sqrt{A_1^2 r^2 - 2(A_1 r + 2M)z + z^2} = A_1 r \sqrt{1 - 2\frac{A_1 r + 2M}{A_1^2 r^2} z + \frac{z^2}{A_1^2 r^2}}.$$

Par analogie avec le DSE usuel, nous définissons :

$$\delta(z) = A_1 r \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} \left(-2\frac{A_1 r + 2M}{A_1^2 r^2} z + \frac{1}{A_1^2 r^2} z^2 \right)^n$$

D'après le résultat admis, δ est somme d'une série entière sur un voisinage de 0.

On sait que $\sqrt{1+u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} u^n$ pour tout $u \in]-1, 1[$. On en déduit que

$$\forall u \in]-1, 1[, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} u^n \right)^2 = 1 + u$$

Par produit de Cauchy, cela traduit que deux sommes de séries entières coïncident sur $]-1,1[$: elles coïncident donc sur $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Pour z assez proche de 0, $u = -2\dfrac{A_1 r + 2M}{A_1^2 r^2} z + \dfrac{1}{A_1^2 r^2} z^2$ est de module strictement plus petit que 1 et $\delta(z)$ est défini, avec $\delta^2(z) = 1 + u = 1 - 2\dfrac{A_1 r + 2M}{A_1^2 r^2} z + \dfrac{1}{A_1^2 r^2} z^2$. On peut donc définir :

$$G(z) = \frac{1}{2(A_1 + M/r)} \left(A_1 + \frac{z}{r} + \delta(z) \right)$$

au voisinage de 0 et G est la somme d'une série entière : $G(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} C_n z^n$ et d'après le a), on a $C_n = B_n$ pour tout n. Ceci prouve que $R(\sum_{n\geq 0} B_n z^n)$ est non nul, puis que $R(\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n z^n)$ l'est également. On peut donc définir la fonction $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ sur un voisinage de 0.

D'après le résultat admis, $f \circ g$ est DSE en 0. Il existe donc une suite (c_n) telle que pour z proche de 0 :

$$f \circ g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

et comme $f \circ g(z) = z + o(z^N)$ pour tout $N \geq 2$, on a $c_1 = 1$ et $c_n = 0$ pour tout $n \geq 2$. On a donc bien construit une série entière g de rayon non nul telle que $f \circ g(z) = z$ au voisinage de 0.