Séries entières : énoncés

Exercices CCP

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $H_n x^n$.

2) Déterminer les rayons de convergence des séries suivantes :

a) $\sum_{n\geq 0} n^2 z^n$ b) $\sum_{n\geq 0} \operatorname{sh} n\, z^n$ c) $\sum_{n\geq 0} e^{\sin n}\, z^n$ d) $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n+n^2}{3^n-n^2}\, z^n$ e) $\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\, z^n$

f) $\sum_{n\geq 0} n\, z^{n^2}$ g) $\sum_{n\geq 2} (\ln n)^{-\ln n} z^n$ h) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^{3n}}{(3n)!}\, z^n$ i) $\sum_{n\geq 0} \ln(n!)\, z^n$ j) $\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right) z^n$

3) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k$ pour $n \geq 0$. On admet que la série $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est de rayon $R > 0$. Pour z complexe tel que $|z| < 1$ et $|z| < R$, calculer $\frac{f(z)}{1-z}$. En déduire une expression de $f(z)$, puis une expression de a_n en fonction de n.

4) Calculer les sommes des séries entières :

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(2n)!}$ c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$ d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+2+\cdots+n}$

e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n}{n!}\, z^n$ f) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3-n}$ g) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{3+(-1)^n}\right) z^n$ h) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+2)n!}\, z^n$

5) Développer $f : x \longmapsto e^x \sin x$ en série entière par deux méthodes différentes.

6) Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions :

a) $f_1(x) = \frac{1}{x^2-x+2}$ b) $f_2(x) = \sin(2\operatorname{Arcsin} x)$ c) $f_3(x) = \frac{\operatorname{Argsh} x}{\sqrt{1+x^2}}$ d) $f_4(x) = \frac{\sin x}{x}$

e) $f_5(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+t^2+1}$ f) $f_6(x) = \ln(1+x+x^2)$ g) $f_7(x) = \sin x\, \operatorname{ch} x$ h) $f_8(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

Exercices CCP-Mines-Centrale

Calculs de rayons de convergence

7) Calculer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ définies par les suites suivantes :

a) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)^{\ln n}$ b) $a_n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ b^n & \text{sinon} \end{cases}$ c) $a_n = n^{\ln n}$ d) $a_n = \sqrt{n}^{-\sqrt{n}}$

e) $\dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$ f) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(2-2^{1/k})$ g) $\dfrac{(2n)!n^{2n}}{2^n n!(3n)!}$ h) $\begin{cases} a^{k^2} & \text{si } n \text{ est de la forme } k(k+1)/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

8) Quel est le rayon de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, où (a_n) est une suite de complexes non nuls telle que :

$$\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{a_{2n+3}}{a_{2n+1}}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$$

où ℓ_1 et ℓ_2 sont deux éléments de $[0,+\infty]$?

9) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$a_0,\ a_1 \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \frac{4n^2+2\lambda-1}{4(n+2)^2}\, a_{n+1} + \frac{(n+1)^2}{4(n+2)^2}\, a_n \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

a) Montrer que $|a_{n+2}| \leq |a_{n+1}| + \dfrac{1}{4}\,|a_n|$ pour n assez grand.

b) Montrer que le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est au moins égal à $2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Calculs de sommes de séries entières

10) (Centrale 2016) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}$. En utilisant une relation entre a_n et a_{n+1}, calculer le rayon et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$.

11) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \operatorname{Tr}(A^n)$. Exprimer a_n en fonction de a_{n-1}, a_{n-2} et a_{n-3}. Déterminer le rayon et la somme de la série entière $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

12) (Mines 2014) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}\right)x^n$.

13) (Mines 2016) Rayon de convergence et somme de $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2^{(-1)^n}}{n}x^n$.

Séries génératrices

14) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n le nombre de partitions de l'ensemble $E_n = \{1, \dots, n\}$.

a) Calculer P_1, P_2 et P_3. On convient que $P_0 = 1$.

b) Montrer que le rayon de convergence de la série $f(x) = \sum_{n \geq 0} \dfrac{P_n}{n!} x^n$ est au moins égal à 1.

c) Exprimer P_{n+1} en fonction de $P_0, \dots, P_n$ et en déduire l'expression de f.

d) Exprimer P_n sous forme d'une somme de série.

15) On note d_n le nombre de dérangement de $\{1, 2, \dots, n\}$, i.e. le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sans point fixe (on convient que $d_0 = 1$).

a) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ est de rayon R non nul. On note f sa somme.

b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$ et en déduire la valeur de R, puis de $f(z)$ pour $|z| < R$. Donner une expression de d_n et en déduire une relation simple liant d_n et d_{n+1}.

16) Soit $f(t) = \dfrac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^4)}$. Développer f en série entière au voisinage de 0. De combien de façons peut-on payer une somme de 1358 euros avec des pièces de 50 centimes, de 1 euro et de 2 euros ?

17) (Mines 2014) Soit la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par les relations : $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+2}$.

Calculer le rayon de convergence et la somme la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. En déduire une expression de a_n.

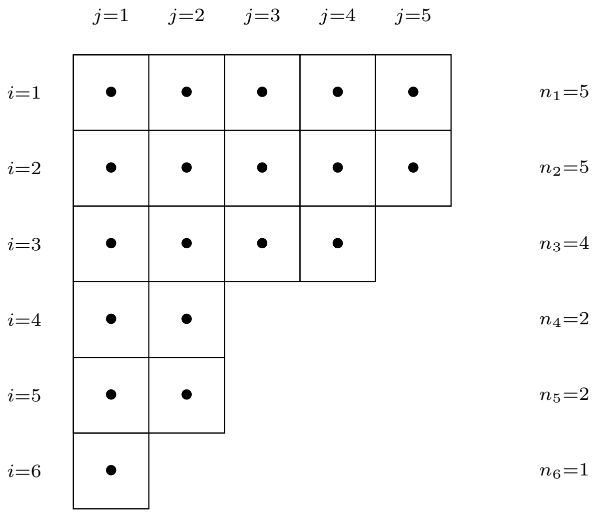
18) Pour $n \in\ N^*$, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des *partitions de n*, i.e. l'ensemble des familles $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ d'entiers telles que :

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1 \text{ et } n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

On note p_n le cardinal de $\mathcal{P}_n$.

Si $s = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathcal{P}_n$, on dit que s est une partition de n en k parts. Nous noterons $\mathcal{P}_{n,k}$ l'ensemble des partitions de n en k parts et $p_{n,k}$ son cardinal. Par convention, $\mathcal{P}_0$ est un singleton (il contient la liste vide) et $p_0 = p_{0,0} = 1$.

On pourra représenter une partition $s = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ de n par son *diagramme de Ferrers*, qui est une représentation de l'ensemble des points (i, j) entiers avec $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq n_i$. Voici par exemple le diagramme de Ferrers de la $(5, 5, 4, 2, 2, 1)$:



a) Calculer p_k pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) Montrer que $p_{n,k}$ est aussi le nombre de partitions $s = (n_1, n_2, \ldots, n_p)$ de n telles que $n_1 = k$.

c) Donner une formule de récurrence reliant les $(p_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ et en déduire une fonction Python qui calcule p_n. Que vaut p_{1000} ?

d) Montrer que pour $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{K} \frac{1}{1-x^k}$ a une limite strictement positive quand K tend vers l'infini. Cette limite est notée $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k}$.

e) Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n x^n$ est de rayon 1 avec :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

f) Question subsidiaire : on munit l'ensemble $\mathcal{P}_n$ de l'ordre lexicographique. Voici par exemple l'ordre sur $\mathcal{P}_6$:

$(6) > (5,1) > (4,2) > (4,1,1) > (3,3) > (3,2,1) > (3,1,1,1) > (2,2,2) > (2,2,1,1) > (2,1,1,1,1) > (1,1,1,1,1,1)$

Écrire une fonction Python qui, appliquée à une partition qui n'est pas la dernière, renvoie celle qui la suit dans l'ordre décroissant.

Propriétés générales des sommes de séries entières

19) Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon infini. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $\rho > 0$, $a_n = \dfrac{1}{2\pi\rho^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta$. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$ et $\rho > 0$, $|a_n| \leq \dfrac{M_\rho}{\rho^n}$ où $M_\rho = \sup\limits_{|z|=\rho} |f(z)|$.

Montrer que si f est bornée, alors f est constante. Plus généralement, montrer que si $\dfrac{|f(z)|}{|z|^N}$ est bornée au voisinage de l'infini, alors f est un polynôme de degré au plus N. En particulier, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ne converge uniformément sur $\mathbb{C}$ que si f est un polynôme.

20) On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est définie et continue sur le disque unité fermé, et que f est nulle sur le cercle unité. Montrer que f est nulle.

Développements en séries entières

21) Soit $f :]-a,a[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞. Montrer que pour que f soit développable en série entière au voisinage de 0, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$, $A > 0$ et $r \in]0,a[$ tels que :

$$\forall x \in]-a,a[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x| < r \Rightarrow |f^{(n)}(x)| \leq C\, A^n n!$$

22) Soit $f :]-a,a[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que toutes les dérivées de f soient positives. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la n-ième somme partielle de la série de Taylor de f en 0 et $R_n = f - S_n$. On note R le rayon de convergence de la série de Taylor de f en 0.

a) Montrer que pour tout $x \in [0,a[$, la suite $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente. En déduire que $R \geq a$.

b) Montrer que pour tout $x \in]-a,0[$, $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

c) Montrer que pour tout $(x,y) \in]0,a[^2$ tel que $x \leq y$, on a $0 \leq \dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \dfrac{R_n(y)}{y^{n+1}}$.

d) En déduire que $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $x \in]0,a[$. Qu'avons nous démontré ?

23) (Mines 17) Soit $q \in]-1,1[$. Montrer que $f :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(q^n x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et développable en série entière en 0.

Étude sur le cercle d'incertitude ou au voisinage d'un point de ce cercle

24) Étudier $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^{\mathrm{E}(\sqrt{n})}}{n} z^n$, en particulier sur le cercle d'incertitude. On majorera en fonction de n la quantité $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{\mathrm{E}\sqrt{k}}$.

25) Théorème d'Abel :

a) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série complexe convergente. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est de rayon $R \geq 1$ et qu'elle converge uniformément sur $[0,1]$.

b) Première application : en déduire les valeurs des sommes

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},\ S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ et } S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$$

c) Seconde application : soient $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries à termes complexes convergentes. Montrer que si leur produit de Cauchy converge, sa somme est égal au produit des sommes des deux séries.

26) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon 1. On suppose que $a_n \geq 0$ pour tout n et que $\sum a_n$ diverge.

a) Montrer que $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers 1.

b) Montrer que si $b_n \underset{+\infty}{\sim} a_n$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \underset{1^-}{\sim} f(x)$.

c) Soit $(c_n)_{n\geq 0}$ définie par la donnée de $c_0 > 0$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = \ln(1+c_n)$. Montrer que $h : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ est définie sur $[-1, 1[$ et en donner un équivalent en 1^-.

27) Déterminer le rayon R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^{n^2}$ et donner un équivalent de sa somme quand x tend vers R^-.

28) (Centrale 2017) Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}}$.

a) Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$.

b) Montrer que si $\varepsilon > 0$ et si Y est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $x > 0$, on a $P(|Y - x| \geq \varepsilon x) \underset{x\to+\infty}{=} O(1/x)$.

c) En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$.

29) On définit une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ en fixant $a_0 > 0$ et en posant $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que le domaine de définition de $f :\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est l'intervalle $[-1, 1[$. Donner un équivalent de $f(x)$ en 1^-.

Équations différentielles et séries entières

30) On souhaite calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

a) Quel est le rayon de convergence R de la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$ pour tout $n \geq 0$?

b) En utilisant une relation liant a_n et a_{n+1}, expliciter une équation différentielle (E) d'ordre 1 admettant f pour solution sur $]\,0, R\,[$.

c) Expliciter la solution générale de l'équation (E). En développant au voisinage de 0 cette solution générale, donner une expression de $f(x)$ ainsi que la valeur de S.

Divers

31) (Mines) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $r \geq R$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait :

$$A^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} \left(re^{i\theta} I_n - A\right)^{-1} \mathrm{d}\theta.$$

b) En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

Indication : pour la première question, développez $(re^{i\theta}I_n - A)^{-1}$ en série entière. Pour la seconde, écrire $\chi_A(A)$ à l'aide du a) sous forme d'un polynôme en r.

32) (Centrale 17) a) Rappeler le DSE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$. On note R le rayon de convergence de cette série entière.

b) Montrer que $g:\ z \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est définie et continue sur le disque fermé de centre 0 et de rayon R (on pourra utiliser l'équivalent se Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n$). Calculer g^2.

33) a) Montrer que est le rayon de la série entière $f:\ z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ est égal à 1.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. En utilisant $\varphi:\ t \longmapsto \mathrm{e}^{f(zt)}$, calculer $\mathrm{e}^{f(z)}$.

Exercices X-ENS

34) (X) On note I le domaine de définition de la fonction $f:\ x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)\, x^n$.

a) Déterminer I et étudier la continuité de f sur I.

b) On pose :

$$a_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1 \\ -\ln(1-1/n) - 1/n & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Montrer que $g:\ x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n$ est définie et continue sur $[-1, 1]$. Calculer $g(1)$ et $g(-1)$.

c) En déduire des équivalents de f aux bornes de I.

35) (ENS PLC) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers relatifs. On suppose que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ est de rayon 1 et que sa somme est bornée sur le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ est presque nulle.

Indication : On utilisera l'égalité de Parseval pour montrer que la série de terme général a_n^2 est convergente.

36) (X 2019) On admet que si $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ et $\psi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n z^n$ sont des sommes de séries entières de rayons non nuls, $\varphi \circ \psi$ est développable en série entière en 0.

Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entières de rayon $R > 0$, avec $a_1 \neq 0$. On cherche à construire une somme de série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ de rayon non nul telle que $f \circ g(z) = z$ au voisinage de 0.

a) Montrer qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n\geq 1}$ telle que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\sum_{n=1}^{N} b_n z^n\right) = z + o(z^N).$$

b) On suppose que $F(z) = A_1 z - \sum_{n=2}^{+\infty} A_n z^n$ est de rayon non nul, avec $A_1 = |a_1|$ et $\forall n \geq 2,\ A_n \geq |a_n|$. On note $(B_n)_{n\geq 1}$ la suite vérifiant :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ F\left(\sum_{n=1}^{N} B_n z^n\right) = z + o(z^N).$$

Montrer que $B_N \geq |b_n|$ pour tout $n \geq 1$.

c) Conclure.

Séries entières : corrigés

Exercices CCP

1) En appliquant la règle de d'Alembert, on montre que $\sum_{n\geq 1} H_n x^n$ converge absolument pour $|x|<1$ et diverge grossièrement pour $|x|>1$: la série est donc de rayon 1.

En posant $a_0=0$ et $a_n=1/n$ pour tout $n\geq 1$, nous reconnaissons un produit de Cauchy de deux séries entières de rayon 1 :

$$\forall x\in]-1,1[,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)x^n=\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n.$$

On obtient donc :

$$\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

2) a) La règle de d'Alembert donne facilement $R=1$. Plus généralement, on utilisera dans les exemples suivants que pour tout $a\in\mathbb{R}$, le rayon de $\sum_{n\geq 0} n^a z^n$ est égal à 1.

b) $\operatorname{sh} n\sim_{+\infty}\frac{1}{2}e^n$ donc $R=R\left(\sum_{n\geq 0} e^n z^n\right)=\frac{1}{e}$.

c) $1/e\leq e^{\sin n}\leq e$, donc $R\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{e}z^n\right)\geq R\geq R\left(\sum_{n\geq 0} z^n\right)$ et $R=1$.

d) $\dfrac{2^n-n^2}{3^n-n^2}\sim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ donc $R=R\left(\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2z}{3}\right)^n\right)=\frac{3}{2}$.

e) $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\sim\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $R=1$.

f) si $z=1$, la série diverge grossièrement ; si $0<|z|<1$, on peut appliquer la règle de d'Alembert :

$$\frac{(n+1)|z|^{(n+1)^2}}{n|z|^{n^2}}\sim|z|^{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0<1$$

donc la série est absolument convergente : on a $R=1$.

g) On peut se contenter d'un encadrement grossier : pour tout $n\geq 1$, $n\leq n!\leq n^n$ donc $\ln n\leq\ln(n!)\leq n\ln n$. Comme les séries $\sum_{n\geq 1}\ln n\, z^n$ et $\sum_{n\geq 1} n\ln n\, z^n$ sont de rayon 1 (par exemple grâce à la règle de d'Alembert), on a $R=1$.

h) Soit $z\neq 0$. On a :

$$\frac{\dfrac{(n+1)^{3n+3}|z|^{n+1}}{(3n+3)!}}{\dfrac{n^{3n}|z|^n}{(3n)!}}=\frac{(n+1)^3|z|}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\left(\frac{e}{3}\right)^3|z|$$

donc $R=\left(\dfrac{3}{e}\right)^3$.

i) Utilisons une nouvelle fois le théorème de d'Alembert, pour $z\neq 0$ et $n\geq 2$:

$$\frac{(\ln(n+1))^{-\ln(n+1)}|z|^{n+1}}{(\ln n)^{-\ln n}|z|^n}=e^{\ln n\,\ln\ln n-\ln(n+1)\ln\ln(n+1)}|z|.$$

On a :

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n) = \ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis

$$\begin{aligned} \ln\ln(n+1) &= \ln\left(\ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) \\ &= \ln\ln n + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \end{aligned}$$

et enfin :

$$\begin{aligned} \ln n\,\ln\ln n - \ln(n+1)\ln\ln(n+1) &= \ln n\,\ln\ln n - \left(\ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\ln\ln n + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) \\ &= -\frac{\ln\ln n}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2\ln n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{\ln\ln n}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $e^{\ln n\,\ln\ln n - \ln(n+1)\ln\ln(n+1)}\,|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|$, puis que $R = 1$.

j) Un calcul élémentaire donne $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+n^2} \sim_{+\infty} 2n$, donc $R = 1$.

3) Par produit de Cauchy, nous obtenons, pour z tel que $|z| < 1$ et $|z| < R$:

$$\frac{f(z)}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} z^n$$

puis $\dfrac{zf(z)}{1-z} = f(z) - a_0 = f(z) - 1$, ce qui donne :

$$f(z) = \frac{1-z}{1-2z} = 1 + \frac{z}{1-2z} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} z^n.$$

Par unicité du DSE, on en déduit que $a_0 = 1$ et $a_n = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Comme ce calcul a été fait sous l'hypothèse que $R \neq 0$, on peut démontrer que ces formules sont correctes en vérifiant que la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ définie par $b_0 = 1$ et $b_n = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$ vérifie les relations définissant $(a_n)_{n\geq 0}$:

- $b_0 = 1$;
- pour tout $n \geq 0$, $b_0 + b_1 + \cdots + b_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 1 + \frac{2^n - 1}{2-1} = 2^n = b_{n+1}$.

4) a) Pour $x \in]-1, 1[$ et $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2} \\ &= -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x^2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \ln(1-x)\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{x + (1-x^2)\ln(1-x)}{2x^2}. \end{aligned}$$

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ et α une racine carrée de z. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha^3)^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}(\alpha^3).$$

Quand $z = x \in \mathbb{R}$, on peut ensuite différencier les cas, selon le signe de x :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(2n)!} = \begin{cases} \operatorname{ch}(\sqrt{x^3}) & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x^3}) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

c) On reconnaît un produit de Cauchy, pour $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

d) On retrouve le même type de preuve que pour le a), en écrivant (pour $x \in]-1,1[$) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+2+\cdots+n} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \right) \\ &= 2\left(-\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)+x}{x} \right) = 2 + 2(1-x)\,\frac{\ln(1-x)}{x}. \end{aligned}$$

e) Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)+2n}{n!} z^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} z^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^n = (x^2+2x)e^x.$$

f) Pour tout $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3-n} &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} \right) x^n \\ &= \frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \frac{1}{2x}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{x}{2}\ln(1-x) + \ln(1-x) + x \\ &= -\frac{(x-1)^2\ln(1-x)}{x} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

g) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{3+(-1)^n} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{4} z^{2n} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} z^{2n+1} = \frac{3}{4}\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{2}\frac{z}{1-z^2} = \frac{3+2z}{4(1-z^2)}.$$

h) Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+2)n!} z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)-(n+2)+1}{(n+2)!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} \\ &= e^z + \frac{e^z-1}{z} + \frac{e^z-1-z}{z^2}. \end{aligned}$$

5) On peut faire un produit de Cauchy :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{(n-k)!} \right) x^n$$

avec $\alpha_{2k} = 0$ et $\alpha_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}$, soit encore :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!} \right) x^n.$$

Cette première méthode donne une expression trop compliquée du coefficient $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!}$ du DSE de f.

Il est plus simple et plus efficace d'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{Im}\left(e^{(1+i)x}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im}((1+i)^n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}}{n!} x^n.$$

Ces deux méthodes permettent d'établir les identités :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!} = \frac{(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}}{n!}.$$

6) a) Les racines de $X^2 - X + 2$ sont $\lambda = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ et $\overline{\lambda} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. On décompose ensuite la fraction en éléments simples sur $\mathbb{C}$, en remarquant que $\lambda\overline{\lambda} = 2$:

$$\frac{1}{x^2 - x + 2} = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\frac{1}{x - \lambda} - \frac{1}{x - \overline{\lambda}} \right) = -\frac{i\sqrt{7}}{7} \left(\frac{1}{\overline{\lambda} - x} - \frac{1}{\lambda - x} \right)$$

Pour $|x| < |\lambda| = \sqrt{2}$, on a :

$$\frac{1}{\overline{\lambda} - x} = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{1 - \frac{\lambda x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{2^{n+1}} x^n$$

et en conjuguant :

$$\frac{1}{\lambda - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{\lambda}^{n+1}}{2^{n+1}} x^n$$

On obtient donc :

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{7}}{7} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-i\left(\lambda^{n+1} - \overline{\lambda}^{n+1}\right)}{2^{n+1}} x^n = \frac{\sqrt{7}}{7} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im}(\lambda^{n+1})}{2^n} x^n$$

b) Pour $x \in [-1, 1]$:

$$f_2(x) = 2\sin(\operatorname{Arcsin} x)\cos(\operatorname{Arcsin} x) = 2x\sqrt{1 - x^2} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} x^{2n+1}.$$

c) f_3 est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(1 + x^2)y' - xy = 1$. On peut d'autre part démontrer que f_3 admet est développable en série entière en 0 et que son développement est valide sur $]-1, 1[$ (on fait le produit de Cauchy des DSE vus en cours pour les fonction Arcsin et $x \longmapsto (1+x^2)^{-1/2}$). Il existe donc une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon ≥ 1 telle que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On a alors, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
1 &= (1+x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n \\
&= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1} + n a_{n-1}\right) x^n
\end{aligned}$$

On peut donc identifier, et obtenir :

$$a_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 2,\ a_n = -\frac{n-1}{n}\, a_{n-2}.$$

Comme $a_0 = f_3(0) = 0$, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = -\frac{2n}{2n+1}a_{2n-1} = (-1)^n \frac{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 5\times 3}\, a_1 = (-1)^n \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

On obtient ainsi :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$$

d) On a pour tout $x \neq 0$:

$$f_4(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}.$$

égalité que l'on prolonge par continuité en $x = 0$.

e) Pour $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
f_4'(x) &= \frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{(x^2-j)(x^2-j^2)} = \frac{1}{j-j^2}\,\frac{1}{x^2-j} + \frac{1}{j^2-j}\,\frac{1}{x^2-j^2} = -i\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{j^2}{1-j^2x^2} + \frac{j}{1-jx^2}\right) \\
&= i\frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(j^{2(n+1)} - j^{n+1}\right)x^{2n}
\end{aligned}$$

d'où, toujours pour $x \in]-1,1[$:

$$f_4(x) = f_4(0) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i\sqrt{3}\left(j^{2(n+1)} - j^{n+1}\right)}{3(2n+1)}x^{2n+1} = f_4(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

avec $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \bmod 3 \\ -1 & \text{si } n \equiv 1 \bmod 3 \\ 0 & \text{si } n \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$.

On peut calculer $f_4(0)$ en décomposant la fraction en éléments simples :

$$\begin{aligned}
f_4(0) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1+x}{1+x+x^2} + \frac{1-x}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{4}\ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right)\right]_{-\infty}^{0} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{6}\,\pi.
\end{aligned}$$

f) Pour $x \in]-1,1[$, on a :

$$f_6(x) = \ln\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^{3n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^n = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

en posant $a_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{cases} a_{3n+1} = \dfrac{1}{3n+1} \\ a_{3n+2} = \dfrac{1}{3n+2} \\ a_{3n+3} = \dfrac{1}{3n+3} - \dfrac{1}{n+1} = -\dfrac{2}{n+1} \end{cases}$$

g) On utilise l'exponentielle complexe, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_7(x) &= \frac{1}{4i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^x + e^{-x}\right) \\ &= \frac{1}{4i}\left(e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} - e^{(-1-i)x}\right) \\ &= \frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n - (1-i)^n + (-1+i)^n - (-1-i)^n}{n!}\, x^n \\ &= \frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{2}^{\,n}\, \frac{e^{ni\pi/4} - e^{-ni\pi/4} + e^{3ni\pi/4} - e^{-3ni\pi/4}}{n!}\, x^n \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{2}^{\,n}\, \frac{\sin(n\pi/4) + \sin(3n\pi/4)}{n!}\, x^n \end{aligned}$$

h) La fonction f_8 est, sur $I =]-1,1[$, solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' + y = 0$. La fonction $x \longmapsto 1-x^2$ est continue et ne s'annule pas sur I ; la fonction $x \longmapsto 1$ est continue sur I ; le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique : f_8 est l'unique solution de cette équation qui prend la valeur 1 en 0. Nous allons chercher une série entière vérifiant ces conditions.

Analyse : supposons que $g :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution du problème de Cauchy (E) : $\big(y(0) = 1$ et $(1-x^2)y' + y = 0\big)$ au voisinage de 0. On a alors, pour x assez proche de 0 :

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= (a_0 + a_1) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[(n+1)a_{n+1} + a_n - (n-1)a_{n-1}\right] x^n \end{aligned}$$

Par unicité du DSE, on obtient :

$$a_0 = 1,\ a_1 = -1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -\frac{1}{n+2}\, a_{n+1} + \frac{n}{n+2}\, a_n.$$

Synthèse : soit $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$a_0 = 1,\ a_1 = -1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -\frac{1}{n+2}\, a_{n+1} + \frac{n}{n+2}\, a_n.$$

Une récurrence évidente prouve que $|a_n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La fonction $g :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est donc définie sur I. Le calcul fait dans l'analyse prouve que g est solution du problème de Cauchy (E) : on en déduit que $f_8 = g$.

A posteriori, on en déduit que le rayon de convergence de la série est égal à 1, car $f_8(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers -1.

On peut aller plus loin dans l'étude de cette suite (a_n). On a en effet $a_{2n+1} = -a_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (récurrence évidente), ce qui permet d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+2} = -\frac{1}{2n+2}\, a_{2n+1} + \frac{2n}{2n+2}\, a_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2}\, a_{2n}$$

puis

$$a_{2n} = \frac{(2n-1)}{(2n)}\, a_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n)(2n-2)}\, a_{2n-4} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(1)}{(2n)(2n-2)\dots(2)}\, a_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(x^{2n} + x^{2n+1}\right).$$

Exercices CCP-Mines-Centrale

Calculs de rayons de convergence

7) Dans chaque exercice, nous noterons a_n le terme général de la série entière étudiée et R le rayon cherché.

a) Comme f est continue sur $[0,1]$, il existe M telle que $|f(x)| \leq M$ pour tout x : on en déduit que $|a_n| \leq \frac{M}{n+1}$ pour tout n, puis que $R \geq 1$.

Quitte à diviser a_n par $f(1)$, nous pouvons supposer que $f(1) = 1$. Par continuité de f en 1, il existe alors $\eta \in]0,1[$ tel que $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [\eta, 1]$. Nous avons alors

$$a_n = \underbrace{\int_0^{\eta} f(t)t^n\,\mathrm{d}t}_{b_n} + \underbrace{\int_{\eta}^{1} f(t)t^n\,\mathrm{d}t}_{c_n}$$

avec $|b_n| \leq M\eta^n$ et $c_n \geq \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{\eta}^{1} = \dfrac{1-\eta^{n+1}}{2(n+1)}$. Ainsi, b_n est négligeable devant $1/n$ (car $\eta < 1$) et $1/n = O(c_n)$: ceci prouve que $1/n = O(a_n)$ et que R est au plus égal à 1.

Nous en déduisons que $R = 1$. On peut également démontrer un résultat plus précis : $a_n \sim_{+\infty} \dfrac{f(1)}{n+1}$.

b) Si $\alpha > 0$, a_n tend vers $\pi/2$ quand n tend vers l'infini et $R = 1$;

Si $\alpha = 0$, $a_n = \pi/4$ et $R = 1$.

Enfin, si $\alpha < 0$, $a_n \underset{+\infty}{\sim} n^{\alpha}$ et $R = R\left(\sum_{n\geq 1} n^{\alpha} z^n\right) = 1$ (par exemple grâce à la règle de d'Alembert).

c) On peut appliquer la règle de d'Alembert :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{\ln^2(n+1) - \ln^2(n)} = e^{(\ln n + \ln(1+1/n))^2 - \ln^2(n)}$$

Comme $(\ln n + \ln(1+1/n))^2 - \ln^2(n) = 2\ln n \ln(1+1/n) + \ln^2(1+1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $R = 1$.

d) Nous avons, pour tout $n \geq 1$, $1/n \leq a_n \leq n$, donc $1 \leq R \leq 1$: $R = 1$.

e) et f) La règle de d'Alembert donne dans les deux cas $R = 1$.

g) La règle de d'Alembert donne (après un calcul élementaire) $R = \dfrac{27}{2\,e^2}$.

h) On suppose que a est un complexe non nul ($a = 0$ est sans intérêt). La convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est équivalente à celle de la série $\sum_{k\geq 0} a^{k^2}\, z^{k(k+1)/2}$. Appliquons la règle de d'Alembert à cette série pour z non nul :

$$\left|\frac{a^{(k+1)^2}\, z^{(k+1)(k+2)/2}}{a^{k^2}\, z^{k(k+1)/2}}\right| = \frac{1}{|a|}|a^2 z|^{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1/|a|^2 \\ 1/|a| & \text{si } |z| = 1/|a|^2 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1/|a|^2 \end{cases}$$

La série étudiée est donc absolument convergente pour $|z| < 1/|a|^2$ et divergente pour $|z| > 1/|a|^2$: le rayon de convergence est $1/|a|^2$.

i) L'encadrement $\dfrac{1}{1+n^3} \leq a_n \leq a_0$ suffit pour obtenir $R = 1$.

j) $\dfrac{\ln a_n}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ donc, la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ étant croissante sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\ln a_n}{n} \leq \int_{1/n}^{1+1/n} \ln(1+t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{1+1/n} \underbrace{\ln(1+t)}_{\leq \ln 2}\,\mathrm{d}t$$

soit, en notant $K = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = 2\ln 2 - 1$:

$$K \leq \frac{\ln a_n}{n} \leq K + \frac{1}{n\ln 2}$$

On en déduit donc :

$$e^{nK} \leq a_n \leq e^{nK + \ln 2} = 2\,e^{nK}$$

Les deux termes généraux encadrant a_n donnent des séries de rayons e^{-K}, donc $R = e^{-K} = e/4$.

k) Un calcul simple donne $n^2 \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) = (-1)^n\, n - \dfrac{1}{2} + O(1/n)$ et donc $a_n \sim +\infty \dfrac{1}{\sqrt{e}}\, e^{(-1)^n\, n}$. Nous allons étudier la série en séparant les termes pairs et les termes impairs :

— la série $\sum a_{2n} z^n$ est de rayon $1/e^2$, donc $\sum a_{2n} z^{2n}$ est de rayon $1/e$;
— la série $\sum a_{2n+1} z^n$ est de rayon e^2, donc $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$ est de rayon e ;

Les deux séries étant de rayon distincts, leur somme est de rayon égal au minimum des deux rayons : $R = 1/e$.

m) Posons $b_n = a_{3n+1} = 2^{2n+1}$ et $c_n = a_{3n+2} = 2^{2n+2}$. Les séries $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ sont de rayon $1/4$, donc les séries $\sum b_n z^{3n+1}$ et $\sum c_n z^{3n+2}$ sont de rayon $\sqrt[3]{1/4}$. La série étudiée étant la somme de ces deux séries, on en déduit que $R \geq 2^{-2/3}$. Pour $z = 2^{-2/3}$, nous avons $a_{3n+1} z^{3n+1} = 2^{2n+1} 2^{-2(3n+1)/3} = 2^{1/3}$: la suite $a_n z^n$ ne tend donc pas vers 0 et la série est divergente, ce qui prouve que $R = 2^{-2/3}$.

Remarque : plus généralement, on peut démontrer que si $\sum a_{3n} z^{3n}$, $\sum a_{3n+1} z^{3n+1}$ et $\sum a_{3n+2} z^{3n+2}$ sont de rayons R_0, R_1 et R_2, la série $\sum a_n z^n$ est de rayon $R = \min(R_0, R_1, R_2)$.

n) La règle de d'Alembert donne $R = \dfrac{27}{2\,e^2}$.

8) Soit $z \in \mathbb{C}^*$; on peut appliquer le critère de d'Alembert à la série $P = \sum_{n \geq 0} a_{2n} z^{2n}$:

$$\frac{|a_{2n+2} z^{2n+2}|}{|a_{2n} z^{2n}|} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_1 |z|^2$$

donc P converge absolument quand $|z|^2 < \dfrac{1}{\ell_1}$ et diverge grossièrement quand $|z|^2 > \dfrac{1}{\ell_1}$. La série P est donc de rayon $R_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\ell_1}}$.

De même, on montre que la série $I = \sum_{n \geq 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$ est de rayon $R_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\ell_2}}$.

On en déduit que $F = \sum_{n \geq 0} a_n z^n = P + I$ est de rayon $R \geq \min(R_1, R_2)$.

La série $G = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n z^n$ est également de rayon R, donc les séries $P = \dfrac{1}{2}(F + G)$ et $I = \dfrac{1}{2}(F - G)$ sont de rayons supérieurs à $\min(R, R) = R$: on a ainsi $R_1 \geq R$ et $R_2 \geq R$.

Nous avons donc $R = \min\left(\dfrac{1}{\sqrt{\ell_1}}, \dfrac{1}{\sqrt{\ell_2}}\right)$.

9) a) $4n^2 + 2\lambda - 1 - 4(n+2)^2 = -16n - 17 + 2\lambda$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq \dfrac{4n^2 + 2\lambda - 1}{4(n+2)^2} \leq 1$ pour tout $n \geq n_0$. On a alors :

$$\forall n \geq n_0,\ |a_{n+2}| \leq \frac{4n^2 + 2\lambda - 1}{4(n+2)^2} |a_{n+1}| + \frac{(n+1)^2}{4(n+2)^2} |a_n| \leq |a_{n+1}| + \frac{1}{4} |a_n|.$$

b) Considérons la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$b_n = \begin{cases} |a_n| & \text{si } n \geq n_0 + 1 \\ \\ b_{n-1} + \dfrac{1}{4} b_{n-2} & \text{si } n \geq n_0 + 2 \end{cases}.$$

Une récurrence élémentaire montre que $|a_n| \leq b_n$ pour tout n ; il existe ensuite deux constantes A et B telles que :

$$\forall n \geq n_0,\ b_n = A \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)^n + B \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right)^n$$

puisque le polynôme caractéristique $r^2 - r - \dfrac{1}{4}$ a pour racines $\lambda = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$ et $\mu = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$. On en déduit que $b_n = O(\lambda^n)$, puisque $\mu^n = o(\lambda^n)$. Le théorème de comparaison donne alors :

$$R\left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n\right) \geq R\left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n\right) \geq R\left(\sum_{n \geq 0} \lambda^n z^n\right) = \frac{1}{\lambda} = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Calculs de sommes de séries entières

10) On a $2(n+1) a_{n+1} = (2n+1) a_n$ pour tout $n \geq 1$. Pour z non nul, la règle de d'Alembert s'applique :

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{2n+1}{2n+2} |z| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |z|$$

donc la série converge absolument quand $|z| < 1$ et diverge grossièrement quand $|z| > 1$: son rayon est égal à 1. Notons f sa somme.

On peut ensuite écrire, pour x tel que $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{2}\,a_n x^n \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2} + x f'(x) + \frac{1}{2}f(x) \end{aligned}$$

Ainsi, f est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle $(1-x)y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$. La solution générale de cette équation (sur $]-\infty,1[$) est $y(x) = \dfrac{K}{\sqrt{1-x}} - 1$. Comme $f(0) = 0$, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1.$$

La fonction $g :\ x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ car :

- elle est continue sur $]0,1[$;
- $g(x)$ est équivalent au voisinage de 1 à $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, qui est intégrable au voisinage de 1 car $1/2 < 1$;
- $g(x)$ tend vers a_1 quand x tend vers 0, donc g est intégrable au voisinage de 0.

Nous allons montrer que l'on peut calculer son intégrale en échangeant $\displaystyle\int_0^1$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}$:

- pour tout $n \geq 1$, $u_n : x \longmapsto a_n x^{n-1}$ est continue sur $]0,1[$;
- $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0,1[$ et sa somme g est continue sur $]0,1[$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1[$, on a $0 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \leq g(x)$ avec g sommable sur $]0,1[$.

Le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 a_n x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}.$$

Il reste à calculer l'intégrale, en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{1-x}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n} = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-x}}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^0 \frac{1-u}{(1-u^2)u}\,(-2u\mathrm{d}u) = \int_0^1 \frac{2}{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\ln 2$$

11) On calcule facilement $\chi_A(X) = X^3 - 2X^2 - X + 1$. Le théorème de Cayley-Hamilton donne $A^3 - 2A^2 - A + I_3$, puis :

$$\forall n \geq 0,\ A^{n+3} - 2A^{n+2} - A^{n+1} + A^n = 0$$

qui donne, par linéarité de la trace :

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0.$$

Une étude élémentaire de $x \longmapsto x^3 - 2x^2 - x + 1$ montre que a a trois valeurs propres réelles distinctes : $\lambda_1 \simeq -0,8$, $\lambda_2 \simeq 0,55$ et $\lambda_3 \simeq 2,25$. On en déduit :

$$a_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n \sim_{+\infty} \lambda_3^n.$$

On en déduit que f est de rayon $R = \dfrac{1}{\lambda_3}$.

On a ensuite, pour $|z| < R$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + a_n)z^{n+3} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+3}z^{n+1} - 2z\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}z^{n+1} - z^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}s^{n+1} + z^3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \\ &= f(z) - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - 2z(f(z) - a_0 - a_1 z) - z^2(f(z) - a_0) + z^3 f(z) \\ &= f(z)(1 - 2z - z^2 + z^3) - a_0 + (2a_0 - a_1)z + (a_0 + 2a_1 - a_2)z^2 \end{aligned}$$

Nous avons donc ($a_0 = 3$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 6$) :

$$f(z) = \frac{3 - 4z - z^2}{1 - 2z - z^2 + z^3}.$$

12) Notons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n} = -\ln(1-x)$ pour $x \in]-1,1[$. Par produit de Cauchy, nous avons, en posant $a_0 = 0$ et $a_n = \dfrac{1}{n}$ si $n \geq 1$:

$$\forall x \in]-1,1[,\ f^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^n = \sum_{n=2}^{+\infty}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}\right)}_{=\alpha_n}x^n.$$

Comme $f^2(x) = \ln^2(1-x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\alpha_n x^n$ est de rayon 1. Comme la série étudiée $F(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{\alpha_n}{n}x^n$ a pour dérivée $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\alpha_{n+1}x^n$, on en déduit que F est de rayon 1 avec :

$$\forall x \in]-1,1[\backslash\{0\},\ F'(x) = \sum_{n\geq 1}\alpha_{n+1}x^n = \frac{1}{x}\sum_{n\geq 2}\alpha_n x^n = \frac{\ln^2(1-x)}{x}.$$

Comme $F(0) = 0$, on en déduit :

$$\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = \int_0^x \frac{\ln^2(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

(on ne peut pas donner d'expression plus simple de cette primitive).

13) Comme $\dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{2^{(-1)^n}}{n} \leq \dfrac{2}{n}$, la série étudiée est de rayon 1. On a ensuite :

$$\forall x \in]1,1[,\ f(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{2n}x^{2n}}_{=-\ln(1-x^2)} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2(2n+1)}x^{2n+1}$$

Pour la seconde somme (si on ne connaît pas la fonction Argth), on peut écrire :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2(2n+1)} x^{2n+1}\right)' = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{2(1-x^2)} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+x}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2(2n+1)} x^{2n+1} = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

On a donc :

$$\forall x \in]1,1[,\ f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \ln(1-x^2) = \frac{1}{4} \ln \left((1-x)^5 (1+x)^3\right).$$

Séries génératrices

14) a) Nous pouvons facilement faire la liste des partitions de E_n pour $n \in \{1, 2, 3\}$:

- $\{\{1\}\}$ est la seule partition de E_1, donc $P_1 = 1$;
- $\{\{1, 2\}\}$ et $\{\{1\}, \{2\}\}$ sont les deux partitions de E_2, donc $P_2 = 2$;
- Il existe 5 partitions de E_3 :

$$\{\{1,2,3\}\},\ \{\{1\},\{2,3\}\},\ \{\{2\},\{1,3\}\},\ \{\{3\},\{1,2\}\},\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$$

  donc $P_3 = 5$.

b) À chaque partition $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k\}$ de E_n, on peut associer la permutation $\sigma(\mathcal{P})$ de E_n qui réalise sur chaque $\mathcal{P}_i$ la permutation circulaire dans l'ordre croissant de ses éléments.

Par exemple, si $n = 8$ et $\mathcal{P} = \{\{1, 3\}, \{2, 4, 8\}, \{5\}, \{6, 7\}\}$:

$$\sigma(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 8 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1,3) \circ (2,4,8) \circ (6,7).$$

L'application $\mathcal{P} \longmapsto \sigma_(\mathcal{P})$ est alors injective (unicité de la décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints) ce qui prouve que $P_n \leq n!$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière f est de rayon $R \geq 1$.

c) Pour E ensemble fini, notons $\mathcal{P}_E$ l'ensemble des partitions de E. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque partie A de E_n, notons $\mathcal{P}^A$ l'ensemble des partitions de E_{n+1} telles que la partie à laquelle appartient $n+1$ est égale à $A \cup \{n+1\}$. Nous avons :

$$\mathcal{P}_{E_{n+1}} = \bigsqcup_{A \subset E_n} \mathcal{P}^A$$

or $\mathcal{P}^A$ est en bijection avec $\mathcal{P}_{E_n \setminus A}$ (en supprimant la partie $A \cup \{n+1\}$ d'un élément de $\mathcal{P}^A$, on obtient bijectivement un élément de $\mathcal{P}_{E_n \setminus A}$), donc avec $P_{n-\mathrm{Card}(A)}$. On a donc :

$$P_{n+1} = \sum_{A \subset E_n} \mathrm{Card}\left(P^A\right) = \sum_{A \subset E_n} P_{n-\mathrm{Card}(A)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_{n-k}$$

avec la convention $P_0 = 1$ qui donne bien $\mathrm{Card}\left(\mathcal{P}^{E_n}\right) = 1 = P_0$.

On peut ensuite écrire, pour $x \in]-R, R[$:

$$e^x f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{P_{n-k}}{(n-k)!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_{n+1}}{n!} x^n = f'(x).$$

On en déduit qu'il existe une constante K telle que $f(x) = Ke^{e^x}$ pour tout $x \in]-R, R[$. Comme $f(0) = P_0 = 1$, $K = \dfrac{1}{e}$, soit :

$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = e^{e^x - 1}.$$

d) Soit $x \in]-R, R[$. Nous avons :

$$f(x) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n!} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!\,k!}\, x^k.$$

En notant $u_{n,k} = \dfrac{n^k}{n!\,k!}\, x^k$, on a (la preuve fonctionne avec $x \in \mathbb{R}$ quelconque) :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série de $\sum_{k\geq 0} |u_{n,k}|$ converge et a pour somme $U_n = \dfrac{e^{n|x|}}{n!}$;
- la série de terme général U_n converge.

On en déduit que l'on peut échanger les deux sommes infinies :

$$f(x) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{x^k}{k!}.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}.$$

On peut aussi remarquer que le calcul précédent prouve que le rayon R est infini.

15) a) Nous avons $0 \leq \dfrac{d_n}{n!} \leq 1$ donc $R \geq 1$ et R est non nul.

b) Pour A partie de $\{1, 2, \dots, n\}$, notons $\mathfrak{S}_n(A)$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui laisse fixe les éléments de A et uniquement ceux-là :

$$\mathfrak{S}_n(A) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \forall\, k \in \{1, 2, \dots, n\},\ \sigma(k) = k \Longleftrightarrow k \in A\}.$$

Quand A décrit $\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\})$, les parties $\mathfrak{S}_n(A)$ forment une partition de $\mathfrak{S}_n$. Nous en déduisons :

$$n! = \operatorname{Card} \mathfrak{S}_n = \sum_{A \subset \{1,2,\dots,n\}} \operatorname{Card} \mathfrak{S}_n(A).$$

Comme $\operatorname{Card} \mathfrak{S}_n(A) = d_{n-k}$ où k est le cardinal de A (un élément de SG_n est dans $\mathfrak{S}_n(A)$ si et seulement s'il laisse fixe les k éléments de A et induit un dérangement sur le complémentaire de A), et qu'il existe $\dbinom{n}{k}$ parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ de cardinal k, nous obtenons :

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} d_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d_i.$$

Nous avons alors par produit de Cauchy :

$$\left(\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n \right) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{d_i}{i!(n-i)!} \right) z^n = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} z^n$$

Ceci prouve que $R \leq 1$ (le rayon de convergence du produit de Cauchy est égal à 1, et il est au moins égal au maximum des deux rayons de convergence), i.e. que $R = 1$, avec pour $|z| < 1$:

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}.$$

un nouveau produit de Cauchy donne :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!}\, z^n = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}\, z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} z^n\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right) z^n$$

et donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ d_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

On en déduit une définition plus simple de la suite (d_n) :

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

16) a) Une décomposition en éléments simples donne :

$$f(t) = \frac{a_1}{1-t} + \frac{a_2}{(1-t)^2} + \frac{a_3}{(1-t)^3} + \frac{b_1}{1+t} + \frac{b_2}{(1+t)^2} + \frac{c}{i+t} + \frac{d}{-i+t}$$

avec $a_3 = \dfrac{1}{8}$, $a_2 = \dfrac{1}{4}$, $a_1 = \dfrac{9}{32}$, $b_2 = \dfrac{1}{16}$, $b_1 = \dfrac{5}{32}$, $c = \dfrac{1+i}{16}$ et $d = \overline{c} = \dfrac{1-i}{16}$.

Les développements usuels donnent donc, pour tout $t \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n + a_2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)t^n + a_3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2}\, t^n + b_1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \\ &\qquad + b_2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) t^n - ic \sum_{n=0}^{+\infty} i^n t^n + id \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n t^n \end{aligned}$$

en posant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = a_1 + (n+1)a_2 + \frac{(n+2)(n+1)}{2}\, a_3 + (-1)^n b_n + (-1)^n (n+1) b_2 - c\, i^{n+1} - d(-i)^{n+1}$$

Avec du courage, on peut simplifier cette relation en effectuant une disjonction selon la valeur de n modulo 4 :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \begin{cases} \alpha_{4k} = (k+1)^2 \\ \alpha_{4k+1} = (k+1)^2 \\ \alpha_{4k+2} = (k+1)(k+2) \\ \alpha_{4k+3} = (k+1)(k+2) \end{cases}$$

b) On peut écrire également, pour $x \in]-1,1[$:

$$f(t) = \left(\sum_{a=0}^{+\infty} t^a\right)\left(\sum_{b=0}^{+\infty} t^{2b}\right)\left(\sum_{c=0}^{+\infty} t^{4c}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{a,b,c\in\mathbb{N} \\ a+2b+4c=n}} t^{a+2b+2c}$$

En effet, la famille $\left(t^{a+2b+2c}\right)_{a,b,c\in\mathbb{N}}$ est sommable et l'égalité précédente est obtenue en calculant sa somme de deux façons différentes. On en déduit :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n t^n$$

avec $\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \text{Card}\left(\{(a,b,c) \in \mathbb{N},\ a+2b+4c = n\}\right)$. Par unicité du DSE, on en déduit que $\alpha_n = \beta_n$. Ainsi, pour tout entier n, α_n est égal au nombre de façons de payer $n/2$ euros en pièces de 50 cents, de 1 euro ou de 2 euros, puisqu'une « façon de payer »$n/2$ euros est la donnée d'un triplet (a,b,c) d'entiers naturels tel que a pièces de 50 cents, b pièces de 1 euro et c pièces de 2 euros fassent une somme de $n/2$ euros, ce qui correspond bien à la condition $a+2b+4c = n$.

Ainsi, il existe $\alpha_{2716} = \alpha(4\times 679) = 680^2 = 7462400$ façons de payer 1358 euros avec nos trois types de pièces.

17) a) La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est positive et croissante, donc :

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+1} \leq a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2} \leq a_{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+2}\right).$$

On en déduit que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini, d'où $R = 1$ avec la règle de d'Alembert.

b) Pour $x \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)a_{n+1}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} + x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

d'où $f'(x) - a_1 = xf'(x) + f(x) - a_0 + xf(x)$, soit $(1-x)f'(x) = (1+x)f(x)$. On en déduit qu'il existe une constante K telle que $f(x) = K\dfrac{e^{-x}}{(1-x)^2}$, puis $f(0) = a_0 = 1$ donne $K = 1$.

On peut ensuite faire un produit de Cauchy :

$$\forall x \in]1,1[,\ f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n-k+1}{k!}\right)x^n$$

Par unicité du DSE, nous en déduisons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n-k+1}{k!}.$$

18) a) Nous avons :

$\mathcal{P}_1 = \{(1)\}$ et $p_1 = 1$

$\mathcal{P}_2 = \{(2),(1,1)\}$ et $p_2 = 2$

$\mathcal{P}_3 = \{(3),(2,1),(1,1,1)\}$ et $p_3 = 3$

$\mathcal{P}_4 = \{(4),(3,1),(2,2),(2,1,1),(1,1,1,1)\}$ et $p_4 = 5$

$\mathcal{P}_5 = \{(5),(4,1),(3,2),(3,1,1),(2,2,1),(2,1,1,1,1),(1,1,1,1,1)\}$ et $p_5 = 7$

$\mathcal{P}_6 = \{(6),(5,1),(4,2),(4,1,1),(3,3),(3,2,1),(3,1,1,1),(2,2,2),(2,2,1,1),(2,1,1,1,1),(1,1,1,1,1,1)\}$ et $p_6 = 11$

b) On peut voir le diagramme de Ferrers d'une partition $s = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ de n en k parts comme la matrice A_s de taille (k, n_1) définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,k\}\times\{1,\ldots,n_1\},\ A_s[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } j \leq n_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En notant $\mathcal{F}_n$ (resp. $\mathcal{F}_{n,k}$) l'ensemble des diagrammes de Ferrers des éléments de $\mathcal{P}_n$ (resp. de $\mathcal{P}_{n,k}$), l'application $\Phi:\ A \longmapsto {}^tA$ est une bijection (involutive) de $\mathcal{F}_n$ sur lui-même. On a donc :

$$p_{n,k} = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_{n,k}) = \mathrm{Card}(\Phi(\mathcal{F}_{n,k}))$$

C'est le résultat demandé, car $A_s \in \Phi(\mathcal{F}_{n,k})$ si et seulement si s est une partition de n dont la plus grande part est égale à k.

Plus formellement, en notant $A \longmapsto s_A$ la réciproque de $s \longmapsto A_s$, l'application $s \longmapsto s_{{}^tA_s}$ est une bijection de $\mathcal{P}_{n,k}$ sur l'ensemble des partitions de n dont la plus grande part est égale à k.

c) Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on peut écrire $\mathcal{P}_{n,k} = \mathcal{P}^1_{n,k} \sqcup \mathcal{P}^2_{n,k}$ avec

$$s = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathcal{P}^1_{n,k} \Longleftrightarrow s \in \mathcal{P}_{n,k} \text{ et } n_k = 1$$

L'application $(n_1, \ldots, n_k) \longmapsto (n_1, \ldots, n_{k-1})$ est une bijection de $\mathcal{P}^1_{n,k}$ sur $\mathcal{P}_{n-1,k-1}$ et l'application $(n_1, \ldots, n_k) \longmapsto (n_1 - 1, \ldots, n_k - 1)$ est une bijection de $\mathcal{P}^2_{n,k}$ sur $\mathcal{P}_{n-k,k}$. On obtient donc :

$$p_{n,k} = p_{n-1,k-1} + p_{n-k,k}$$

Cette relation est également valable pour $k = n \geq 1$, mais on peut aussi écrire directement que $p_{n,n} = 1$ puisque $(1, 1, \ldots, 1)$ est la seule partition de n en n parts.

Pour programmer le calcul de $p_{n,k}$, il ne faut pas tomber dans le piège classique en traduisant récursivement résultat :

```
def pk(n,k):
    if k > n or k <= 0:
        return 0
    elif k == n:
        return 1
    else:
        return (pk(n-1,k-1)+pk(n-k,k))

def p(n):
    s = 1
    for k in range(1,n):
        s += pk(n,k)
    return s
```

car le temps de calcul de cette fonction est exponentiel. C'est d'ailleurs un bon exercice : quel est le temps de calcul $T(n,k)$ de l'appel `pk(n,k)` ?

Il faut ici utiliser une approche de type "programmation dynamique" (on parle aussi de *mémoïzation*) : comme pour le triangle de Pascal, on stocke les valeurs calculées dans un tableau, pour ne pas avoir à les recalculer de nombreuses fois. Cela donne :

```
def p(n):
    a = [[0 for j in range(n+1)] for i in range(n+1)]
    for i in range(n+1):
        a[i][i] = 1
    for m in range(2,n+1):
        for k in range(1,m):
            a[m][k] = a[m-1][k-1] + a[m-k][k]
    s = 1
    for k in range(1,n):
        s += a[n][k]
    return s

>>> p(6)
11
```

```
>>> p(100)
190569292
>>> p(1000)
24061467864032622473692149727991
>>> p(10000)
361672513256362939888204718909536954950160303393156
50422081868605887952568754066420592310556052906916435144
```

d) Soit $x \in]-1,1[$. Notons $P_K(x)$ le produit partiel. Nous avons :

$$\ln(P_K(x)) = -\sum_{k=1}^{K} \ln(1-x^k)$$

et comme $|x|<1$, x^k tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Nous avons donc $-\ln(1-x^k) \sim_{+\infty} x^k$ qui est le terme général (positif) d'une série convergente. On en déduit que $\ln(P_K(x))$ a une limite ℓ quand K tend vers $+\infty$, puis que

$$P_K(x) \xrightarrow[K\to+\infty]{} e^{\ell} = P(x) > 0.$$

e) On a $p_n \geq 1$ pour tout n, donc le rayon de la série est au plus égal à 1 (rayon de la série $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$). Nous allons montrer que la série converge pour tout $x \in]-1,1[$ et que sa somme est égale au produit infini $P(x)$. Fixons donc $x \in]-1,1[$. L'idée simple consiste à faire une produit (infini) de DSE, en justifiant l'égalité :

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k} = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{m_k=0}^{+\infty} x^{km_k}\right) = \sum_{m\in I} x^{m_1+2m_2+3m_3+\cdots}$$

en notant I l'ensemble des suites presque nulles $(m_i)_{i\geq 1}$ d'entiers naturels. Pour justifier cette égalité, commençons par démontrer que la famille $\left(x^{m_1+2m_2+3m_3+\cdots}\right)_{m\in I}$ est sommable. Si J est une partie finie de I, il existe K et M tels que :

$$\forall m \in J,\ \forall i > K, m_i = 0 \text{ et } \forall m \in J,\ \forall i \in \mathbb{N},\ m_i \leq M.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in J} |x^m| &= \sum_{m\in J} |x|^{m_1+2m_2+\cdots+Km_K} \\
&\leq \sum_{m_1=0}^{M} \cdots \sum_{m_K=0}^{M} |x|^{m_1+2m_2+\cdots+Km_K} \\
&= \left(\sum_{m_1=0}^{M} |x|^{m_1}\right)\left(\sum_{m_2=0}^{M} |x^2|^{m_1}\right)\cdots\left(\sum_{m_K=0}^{M} |x^K|^{m_K}\right) \\
&\leq \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{1-|x|^k} \\
&\leq P(|x|) \qquad \text{car pour tout } k > K,\ \frac{1}{1-|x|^k} > 1
\end{aligned}$$

La famille étant sommable, on peut ensuite appliquer le théorème de sommation par paquets de deux façons différentes :

- En notant I_k l'ensemble des $m \in I$ tels que $m_i = 0$ pour $i > k$, nous avons $I = \bigsqcup\limits_{k\geq 1} (I_k \setminus I_{k-1})$ donc

$$\sum_{m\in I} x^m = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{m\in I_k\setminus I_{k-1}} x^m\right) = \lim_{K\to+\infty} \sum_{m\in I_K} x^m$$

On reconnaît ici un produit de Cauchy de K séries entières :

$$\sum_{m\in I_K} x^m = \sum_{m_1,\dots,m_K\in\mathbb{N}} x^{m1}x^{2m_2}\dots x^{Km_K} = \prod_{k=1}^{K}\frac{1}{1-x^k}$$

et donc

$$\sum_{m\in I} x^m = \lim_{K\to+\infty}\prod_{k=1}^{K}\frac{1}{1-x^k} = P(x).$$

- Pour $n\in\mathbb{N}$, notons $J_n = \{m\in I,\ m_1+2m_2+\cdots = n\}$. J_n est fini et, pour $n\geq 1$, son cardinal est p_n : on associe à un élément m de J_n, avec $m_k\geq 1$ et $m_i = 0$ pour $k<i$, la partition

$$s_m = (\underbrace{k,\dots\dots\dots,k}_{m_k\text{termes}},\underbrace{k-1,\dots\dots,k-1}_{m_{k-1}\text{termes}},\dots\dots,\underbrace{1,\dots\dots\dots,1}_{m_1\text{termes}})$$

et $m\longmapsto s_m$ est une bijection de J_n sur $\mathcal{P}_n$. Pour $n=0$, $J_0 = \{(0)_{i\geq 1}\}$ et son cardinal est également égal à $p_0 = 1$. Nous pouvons donc écrire :

$$\sum_{m\in I} x^m = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m\in J_n} x^m\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n.$$

Nous avons donc prouvé la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} p_n x^n$ (et donc que le rayon de la série est égal à 1), avec :

$$\forall x\in\,]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-x^k}$$

f) Si $s = (n_1,\dots,n_k)$ est une partition non constante égale à 1, on procède de la façon suivante :

- on calcule le plus grand entier i tels que $n_i > 1$ et le nombre p de 1 qui viennent après le rang i (i.e. $p = k-i$) ;
- on remplace n_i par $n_i - 1$ et il faut ensuite partitionner $p+1$ (ce sont les éléments que l'on a "supprimés") en une suite $(m_1,\dots,m_q)$ telle que $n_i - 1\geq m_1\geq\cdots\geq m_p$, avec $(m_1,\dots,m_p)$ soit la plus grande possible pour l'ordre lexicographique. Il va donc falloir choisir la partition $(\underbrace{m_i-1,\dots\dots\dots,m_i-1}_{q\text{ termes}},r)$ où

$$p+1 = q(m_i-1)+r$$

est la division euclidienne de $p+1$ par $m_i - 1$.

Par exemple, avec $s = (12,10,5,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$, on a $p = 10$: on divise 11 par 4, ce qui donne $q = 2$ et $r = 3$ et la partition qui précède s dans l'ordre lexicographique est $s' = (12,10,4,4,4,3)$. Pour écrire la fonction Python, on utilise l'analyse suivante :

- on supprime le dernier élément tant la liste et on s'arrête quand on a obtenu un élément différent de 1 (on compte en même temps le nombre $p+1$) ;
- on divise $p+1$ par $u_i - 1$ (u_i est le dernier élément supprimé), ce qui donne le couple (q,r) ;
- on ajoute à la fin de la liste $(q+1)$ fois $u_i - 1$;
- si r et non nul, on l'ajoute à la fin de la liste.

```
def prec(s):
    k, u = 1, s.pop()
    while s != [] and u == 1:
        k, u = k+1, s.pop()
```

```
    if u == 1:
        return s
    else:
        s.append(u-1)
        q, r = k//(u-1), k % (u-1)
        for i in range(q):
            s.append(u-1)
        if r != 0:
            s.append(r)
        return s
```

La fonction suivante affiche toutes les partitions de n :

```
def affiche(n):
    s = [n]
    while s != []:
        print(s)
        prec(s)
```

qui donne le résultat attendu :

```
>>> affiche(6)
[6]
[5, 1]
[4, 2]
[4, 1, 1]
[3, 3]
[3, 2, 1]
[3, 1, 1, 1]
[2, 2, 2]
[2, 2, 1, 1]
[2, 1, 1, 1, 1]
[1, 1, 1, 1, 1, 1]
```

On peut utiliser cette fonction pour calculer le maximum des ordres des permutations de $\mathfrak{S}_n$. À une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe la partition $s = (n_1, n_2, \dots n_k) \in \mathcal{P}_n$ où les n_i sont les longueurs des cycles de la décomposition de σ en produits de cycles à supports disjoints. Par exemple, $\sigma = (7, 3, 2, 8, 5, 1, 6, 10, 4, 9)$ est la composée des cycles $(1, 7, 6)$, $(2, 3)$, $(4, 8, 10, 9)$ et (5), donc $s = (4, 3, 2, 1)$. L'ordre de σ est alors le p.p.c.m. des n_i. Nous avons donc :

$$\max\{\text{ordre}(\sigma),\ \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = \max\{n_1 \wedge \cdots \wedge n_k,\ (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}_n\}.$$

Nous pouvons donc écrire :

```
def ppcm(a,b):
    A, B = max(a,b),  min(a,b)
    while B != 0:
        A, B = B, A % B
    return(a*b//A)

def ppcm_liste(s):
    a = 1
    for x in s:
        a = ppcm(a,x)
    return(a)

from copy import copy
```

```
def calcul_max(n):
    s = [n]
    t = [n]
   M = n
    while s != []:
        prec(s)
        m = ppcm_liste(s)
        if m>M:
            M = m
             t = copy(s)
    return (M, t)
```

Cette dernière fonction calcule le maximum et une liste qui permet d'atteindre ce maximum.

```
>>> calcul_max(30)
(4620, [11, 7, 5, 4, 3])
```

L'ordre maximum d'une permutation de 30 éléments est donc 4620, atteint par la transposition :

$$\sigma = \underbrace{(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)}_{\text{11-cycle}} \circ \underbrace{(12,13,14,15,16,17,18)}_{\text{7-cycle}} \circ \underbrace{(19,20,21,22,23)}_{\text{5-cycle}} \circ \underbrace{(24,25,26,27)}_{\text{4-cycle}} \circ \underbrace{(28,29,30)}_{\text{3-cycle}}$$

Propriétés générales des sommes de séries entières

19) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\rho > 0$, on a :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi],\ f(\rho e^{i\theta})e^{-in\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \rho^k e^{i(k-n)\theta}$$

Et cette série converge normalement, donc uniformément, par rapport à θ sur le segment $[0, 2\pi]$. On peut donc échanger l'intégrale et la somme infinie :

$$\frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} f(\rho \mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\rho^n} a_k \rho^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta = a_n$$

car $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta$ vaut 0 si $k \neq n$ et 2π si $k = n$.

• On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \rho > 0,\ |a_n| \leq \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} |f(\rho \mathrm{e}^{i\theta}|\,\mathrm{d}\theta \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}.$$

• Si f est bornée, on peut définir le réel $M = \sup_{\rho > 0} M_\rho$ et on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall \rho > 0,\ |a_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} 0$$

On en déduit que $a_n = 0$ pour $n \geq 1$ et f est constante.

• Soit $N \in \mathbb{N}$ et supposons que $\dfrac{|f(z)|}{|z|^N}$ est borné au voisinage de l'infini. Il existe donc M et $\rho_0 > 0$ tel que :

$$\forall \rho \geq \rho_0,\ M_\rho \leq K\rho^N.$$

On en déduit que pour $n > N$:

$$\forall \rho > \rho_0,\ |a_n| \leq \frac{M}{\rho^{n-N}} \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} 0$$

Et donc $a_n = 0$ pour tout $n > N$: f est un polynôme de degré au plus N.

20) Le rayon R de f est au moins égal à 1 ; il faut penser ici à écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in]0,1[,\ a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Cette égalité se prouve facilement en écrivant $f(re^{i\theta})e^{-in\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{i\theta(k-n)}$ et en échangeant l'intégrale sur le segment $[0,2\pi]$ et la somme (il y a convergence normale sur $[0,2\pi]$ car $r < R$).
Il reste à montrer que cette égalité est encore valable quand $r = 1$. Posons donc :

$$\forall r \in [0,1],\ G(r) = \int_0^{2\pi} \underbrace{f(re^{i\theta})e^{-in\theta}}_{=g(r,\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$

On peut appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres :

- $\forall r \in [0,1]$, $\theta \longmapsto g(r,\theta)$ est continue par morceaux sur $[0,2\pi]$;
- $\forall \theta \in [0,2\pi]$, $r \longmapsto g(r,\theta)$ est continue sur $[0,1]$;
- $\forall r \in [0,1],\ \forall \theta \in [0,2\pi],\ |g(r,\theta)| \leq \sup_{|z|\leq 1} |f(z)| = M$ (M est fini car f est continue sur le disque unité fermé qui est compact) et l'application constante égale à M est continue par morceaux et intégrable sur $[0,2\pi]$.

On en déduit que G est continue sur $[0,1]$ et on obtient, en faisant tendre r vers 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{2\pi} G(1) = 0$$

soit $f = 0$.

Développements en séries entières

21) • Supposons qu'il existe $C > 0$, $A > 0$ et $r \in]0,a[$ tels que :

$$\forall x \in]-a,a[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x| < r \Rightarrow |f^{(n)}(x)| \leq C\,A^n n!$$

Pour $x \in]-r,r[$ et $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[0,x]} |f^{(n+1)}(t)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} C\,A^{n+1}\,(n+1)! = C\,(A|x|)^{n+1}.$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| < \min\left(r, \frac{1}{A}\right),\ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

f est donc développable en série entière en 0 et son développement est valide sur $]-r_0, r_0[$ avec $r_0 = \min\left(r, \dfrac{1}{A}\right)$.

• Supposons réciproquement que f est DSE en 0, avec :

$$\forall x \in]r_0, r_0[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

où $0 < r_0 \leq a$ et $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon $R \geq r_0$. Fixons $r \in]0, r_0[$ et $\rho \in]r, r_0[$. Il existe $M \geq 0$ tel que $|a_n\rho^n| \leq M$ pour tout n (le terme général d'une série convergente est borné) et on peut écrire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-r, r[$:

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{+\infty}(k+n)(k+n-1)\dots(k+1)a_{k+n}x^k\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty}(k+n)(k+n-1)\dots(k+1)|a_{k+n}|r^k \\
&\leq \frac{M}{\rho^n}\sum_{k=0}^{+\infty}(k+n)(k+n-1)\dots(k+1)\left(\frac{r}{\rho}\right)^k \\
&= \frac{M}{\rho^n}\frac{n!}{\left(1-\dfrac{r}{\rho}\right)^{n+1}} \\
&= \frac{\rho}{\rho-r}\,\frac{n!}{(\rho-r)^n}
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat recherché, avec $C = \dfrac{\rho}{\rho-r}$ et $A = \dfrac{1}{\rho-r}$.

22) a) Pour $x \in [0, a[$, la suite $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est croissante et la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

donc $(S_n(x)$ est majorée par $f(x)$: la suite est bien convergente et le rayon R de la série de Taylor de f en 0 est supérieur ou égal à a.

b) Pour $x \in]-a, 0[$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f(x) - S_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{x\leq t\leq 0}|f^{(n+1)}(t)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{x\leq t\leq 0} f^{(n+1)}(t) = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)$$

car $f^{(n+1)}$ est positive et croissante. Comme $|x| < R$, $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)$ est le terme général d'une série convergente, donc tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On en déduit que $R_n(x)$ converge vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini.

c) On peut écrire, pour $x \in]0, a[$:

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$

en posant $t = ux$. Comme $f^{(n+1)}$ est positive et croissante, on en déduit :

$$0 \leq \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u \leq \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(yu)\,\mathrm{d}u = \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$$

d) Pour $x \in]0, a[$, on peut fixer $y \in]x, a[$ et on a :

$$0 \leq R_n(x) \leq R_n(y)\,\left(\frac{y}{x}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $R_n(y)$ a une limite finie et $y/x \in [0, 1[$.

Nous avons donc démontrer que $S_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in]-a, a[$ (la propriété est évidente si $x = 0$) : f est donc DSE en 0 et le développement est valide sur tout le domaine de définition de f.

Cas particulier : la fonction tangente est DSE en 0 et son développement est valide sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

23) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(q^n x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \, \frac{(q^n x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$. On peut donc écrire :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \, \frac{q^{n(2k+1)}x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right).$$

Notons $\alpha_{n,k} = \left((-1)^k \, \dfrac{q^{n(2k+1)}x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)_{n\geq 0, k\geq 0}$. Nous avons :

- pour tout n, $\sum_{k\geq 0}|\alpha_{n,k}|$ est convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}|\alpha_{n,k}| = \mathrm{sh}(|q^n x|)\,,$$

- comme $|\,\mathrm{sh}(q^n x)| \sim |q^n x|$ quand n tend vers l'infini, avec $|q| < 1$, la série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|\alpha_{n,k}|\right)$ est convergente,

donc la famille $(\alpha_{n,k})_{n\geq 0, k\geq 0}$ est sommable et nous pouvons échanger l'ordre de sommation, ce qui permet d'écrire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}q^{n(2k+1)}\right)x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,\frac{1}{1-q^{2k+1}}\,x^{2k+1}.$$

f est donc développable en série entière en 0 et son développement est valide sur tout $\mathbb{R}$.

Étude sur le cercle d'incertitude ou au voisinage d'un point de ce cercle

24) a) Comme il y a convergence pour $x = 1$, on a $R \geq 1$. Pour montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[0,1]$, il suffit de montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[0,1[$ (car il y a convergence en 1). Comme souvent, un théorème d'Abel se prouve en faisant une transformation d'Abel ! Pour $x \in [0,1[$, nous allons montrer que le reste de la série de terme général $a_n x^n$ tend uniformément vers 0 sur $[0,1[$.

Pour $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\forall N \geq n+1,\ \sum_{k=n+1}^{N}a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{N}(R_{k-1}-R_k)x^k = R_n x^{n+1} - \underbrace{R_N x^N}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{}0} - \sum_{k=n+1}^{N-1}R_k(x^k - x^{k-1})$$

Comme le terme de droite de l'égalité a une limite quand N tend vers l'infini, il en est de même du terme de gauche, ce qui donne en faisant tendre N vers l'infini :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k x^k = R_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}R_k(x^{k-1}-x^k)$$

On obtient donc :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k x^k\right| \leq |R_n| + (1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty}|R_k|x^{k-1}$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ |R_k| \leq \varepsilon$. On a alors, pour $n \geq n_0$:

$$\forall x \in [0,1[,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k x^k\right| \leq \varepsilon + (1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty}\varepsilon x^{k-1} = \varepsilon\,(1+x^n) \leq 2\varepsilon$$

Nous avons ainsi montré que $\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1[$, puis sur $[0,1]$.

On en déduit que f est continue sur $[0,1]$, comme limite uniforme d'une suite de fonction continue (les sommes partielles sont continues car polynomiales).

b) Nous sommes dans chaque cas dans le cadre de la question a) et en particulier $f(x)$ tend vers $f(1)$ quand x tend vers 1^-.

- Exemple 1 : $\forall x \in [0,1[,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ donc $A = f(1) = \ln 2$;

- Exemple 2 : $\forall x \in [0,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \mathrm{Arctan}(x)$ donc $B = f(1) = \frac{\pi}{4}$;

- Exemple 3 : $\forall x \in [0,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}$ donc, par intégration de ce DSE :

$$\forall x \in [0,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne $C = f(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$. Les courageux pourront terminer le calcul :

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{4}\,\frac{2-\sqrt{2}\,x}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} + \frac{1}{4}\,\frac{2+\sqrt{2}\,x}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} \quad \text{puis } C = \frac{\sqrt{8}}{8}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8}\pi.$$

- Exemple 4 : on a $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{4}{2n+1} + \frac{1}{n+1}$. Nous allons multiplier ce terme par x^{2n+1} et sommer, pour que les séries obtenues se calculent (un peu) plus facilement :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,1[,\ f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= -x\ln(1-x^2) - \frac{\ln(1-x^2)}{x} - x - 4\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - x\right) \\
&= -\ln(1-x)\,\frac{(x-1)^2}{x} - \ln(1+x)\,\frac{(x+1)^2}{x} + 3x
\end{aligned}$$

ce qui donne enfin $D = f(1) = \lim_{1^-}\left[-\frac{\ln(1-x)}{x}\,(x-1)^2 - \ln(1+x)\,\frac{(x+1)^2}{x} + 3x\right] = 3 - 4\ln 2.$

c) En posant $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, supposons que les séries de termes généraux a_n, b_n et c_n soient convergentes. D'après le a), les fonctions

$$f :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ \ g :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \ \text{ et } \ h :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

sont définies et continues sur $[0,1]$. Le théorème sur les produits de Cauchy de séries entières prouve que $f(x)g(x) = h(x)$ pour tout $x \in [0,1[$: pas continuité, $f(1)g(1) = h(1)$, i.e. que le produit de Cauchy des deux séries a pour somme le produit des deux sommes.
Autrement-dit, pour deux séries à termes complexes convergentes, le produit de Cauchy des deux séries ne peut converger que vers le produit des deux sommes.

d) Nous supposons maintenant que $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$ et nous voulons démontrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est de rayon $R \geq 1$ et que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ tend vers S quand x tend vers 1^-.

Notons $\sigma_n = \frac{S_0 + \cdots + S_n}{n+1}$ (en particulier, $\sigma_{-1} = 0$). Nous avons alors $\sigma_n = O(1)$ puisque σ_n tend vers S. Comme $S_n = (n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}$, on en déduit que $S_n = O(n)$, puis $a_n = S_n - S_{n-1} = O(n)$. Par théorème de comparaison, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de la série $\sum_{n\geq 0} n z^n$: on a bien $R \geq 1$.

Pour faire apparaître naturellement les S_n puis les σ_n, nous allons faire un produit de Cauchy avec la série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$. Nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1[,\ \dfrac{1}{1-x}\, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\, x^n \\ \forall x \in [0,1[,\ \dfrac{1}{(1-x)^2}\, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n (n+1) x^n \end{cases}$$

On peut écrire $\sigma_n = S + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui donne :

$$\forall x \in [0,1[,\ f(x) = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (S+\varepsilon_n)\,(n+1)\, x^n = \underbrace{S\,(1-x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n}_{=S} + \underbrace{(1-x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n\,(n+1)x^n}_{=R(x)}$$

Il reste donc à montrer que $R(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1, ce qui se fait avec une preuve de type Cesàro : fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1[,\ |R(x)| &\leq (1-x)^2 \sum_{n=0}^{n_0-1} |\varepsilon_n|(n+1)x^n + \varepsilon\,(1-x)^2 \sum_{n=n_0}^{+\infty} (n+1)x^n \\ &\leq (1-x)^2 \sum_{n=0}^{n_0-1} |\varepsilon_n|(n+1)x^n + \varepsilon\, \underbrace{(1-x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n}_{=1} \\ &\leq (1-x)^2 \sum_{n=0}^{n_0-1} |\varepsilon_n|(n+1)x^n + \varepsilon \end{aligned}$$

Quand x tend vers 1^-, $(1-x)^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{n_0-1} |\varepsilon_n|(n+1)x^n$ tend vers 0. Il existe donc $\eta \in]0,1[$ tel que

$$\forall x \in]1-\eta, 1[,\ (1-x)^2 \sum_{n=0}^{n_0-1} |\varepsilon_n|(n+1)x^n \leq \varepsilon.$$

Nous avons donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta \in]0,1[, \forall x \in]1-\eta, 1[,\ |R(x)| \leq 2\varepsilon$$

ce qui est la définition de la convergence de $R(x)$ vers 0 quand x tend vers 1^-.

Remarque : dans cette question, on compare deux généralisations de la notion de convergence d'une série (ces notions ont été introduites dans le cadre de l'étude des séries de Fourier). Quand une série $\sum_{n\geq} a_n$ ne converge pas, on peut essayer de définir une convergence en un sens plus général :

- on dit que la série converge *au sens de Cesàro* si la suite $\sigma_n = \dfrac{S_0 + \cdots + S_n}{n+1}$ converge : la limite de cette suite est alors appelée *somme de la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ *au sens de Cesàro* et notée $\displaystyle\sum_{\substack{n=0\\C}}^{+\infty} a_n$; le théorème de Cesàro affirme que si la série converge au sens usuel, elle converge au sens de Cesàro avec $\displaystyle\sum_{\substack{n=0\\C}}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$;
- on dit que la série converge *au sens d'Abel* si la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est de rayon $R \geq 1$ et si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a une limite S quand x tend vers 1^- ; la valeur S st alors appelée *somme de la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ *au sens*

d'Abel et notée $\sum_{\substack{n=0\\A}}^{+\infty} a_n$. La question a) prouve que si la série converge au sens usuel, elle converge au sens d'Abel avec $\sum_{\substack{n=0\\A}}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

La question d) prouve que si la série converge au sens de Cesàro, elle converge au sens d'Abel avec $\sum_{\substack{n=0\\A}}^{+\infty} a_n = \sum_{\substack{n=0\\C}}^{+\infty} a_n$. Ainsi, la convergence d'une série au sens d'Abel est plus générale que celle au sens de Cesàro.

En exercice, on pourra s'amuser à généraliser encore Cesàro : la série converge au sens de Cesàro "d'ordre 2" si $\sigma^{n,2} = \dfrac{\sigma_0 + \cdots + \sigma_n}{n+1}$ a une limite S quand n tend vers l'infini. Plus généralement, on peut parler de convergence de Cesàro "d'ordre k" si $\sigma_{n,k}$ a une limite quand n tend vers l'infini, où on a posé :

$$\begin{cases} \sigma_{n,0} = S_n & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,; \\ \sigma_{n,k+1} = \dfrac{\sigma_{0,k} + \cdots + \sigma_{n,k}}{n+1} & \text{pour tous } n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si la série converge au sens de Cesàro d'ordre k, on note $\sum_{\substack{n=0\\C_k}}^{+\infty} a_n$ la limite de $\sigma_{n,k}$ quand n tend vers l'infini. La convergence de Cesàro d'ordre 0 est la convergence usuelle, la convergence d'ordre 1 est la convergence au sens de Cesàro.

On a alors d'après le théorème de Cesàro

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{\substack{n=0\\C_k}} a_n \text{ existe} \Longrightarrow \sum_{\substack{n=0\\C_{k+1}}} a_n \text{ existe et } \sum_{\substack{n=0\\C_{k+1}}} a_n = \sum_{\substack{n=0\\C_k}} a_n$$

et en généralisant la preuve du d) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{\substack{n=0\\C_k}} a_n \text{ existe} \Longrightarrow \sum_{\substack{n=0\\A}} a_n \text{ existe et } \sum_{\substack{n=0\\A}} a_n = \sum_{\substack{n=0\\C_k}} a_n$$

25) a) Comme la série converge en $x = 1$, on a $R \geq 1$ et la série converge simplement sur $[0, 1]$: nous allons montrer que le reste $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers 0 quand n tend vers l'infini. Nous noterons $A_n = R_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui permet d'écrire :

$$\forall n \geq 1,\ a_n = A_{n-1} - A_n$$

Et nous pouvons faire une transformation d'Abel sur $R_n(x)$:

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in [0, 1[,\ R_n(x) = \sum_{k=n+1} (A_{k-1} - A_k)x^k = A_n x^n - (1-x)\sum_{k=n}^{+\infty} A_k x^k$$

en séparant la somme en deux (les deux séries convergent car $x \in [0, 1[$).

Comme (A_n) converge vers 0 quand n tend vers l'infini, on peut, pour $\varepsilon > 0$, fixer n_ε tel que $|A_n| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_\varepsilon$. On a alors :

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in [0, 1[,\ |R_n(x)| \leq |A_n|x^n + (1-x)\sum_{k=n}^{+\infty} |A_k|x^k \leq \varepsilon + \varepsilon(1-x)\sum_{k=n}^{+\infty} x^k \leq 2\varepsilon$$

car $\sum_{k=n}^{+\infty} x^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$.

Nous avons donc $|R_n(x)| \leq 2\varepsilon$ pour tout $x \in [0,1]$ (l'inégalité est également vraie quand $x = 1$ car $|R_n(1)| = |A_n| \leq \varepsilon$) et pour tout $n \geq n_\varepsilon$: la convergence uniforme sur $[0,1]$ est démontrée.

Ceci prouve en particulier que la fonction $f :\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[0,1]$.

b) i) Premier exemple : $f_1 :\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ est définie et continue sur $[0,1]$, avec $f_1(x) = \ln(1+x)$ pour $x \in [0,1[$, donc $S_1 = f_1(1) = \ln 2$.

ii) Deuxième exemple : $f_2 :\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est définie et continue sur $[0,1]$, avec $f_2(x) = \operatorname{Arctan} x$ pour $x \in [0,1[$, donc $S_2 = f_2(1) = \operatorname{Arctan} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

iii) Troisième exemple : $f_3 :\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ est définie et continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1[$ avec $f_3'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}$ pour $x \in [0,1[$, donc

$$S_3 = f_3(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\pi + \ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) \qquad \text{(après calculs)}$$

c) Supposons que le produit de Cauchy des deux séries convergent. Les applications

$$f :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ \ g :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ et } h :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

sont donc définies et continues sur $[0,1]$. Comme il y a convergence absolue des séries $f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in [0,1[$, le théorème sur les produits de Cauchy donne $f(x)g(x) = h(x)$ pour $x \in [0,1[$, puis $f(1)g(1) = h(1)$ par passage à la limite. Nous avons donc démontré :

Si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$ convergent, alors

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

26) a) La fonction f est croissante sur $[0,1[$, donc elle a une limite ℓ (finie ou infinie) en 1. Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leq f(x)$$

donc, en faisant tendre x vers 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \ell.$$

Ceci impose $\ell = +\infty$, puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.

b) Nous allons faire une preuve de type Cesàro : fixons $\varepsilon > 0$; il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ |a_n - b_n| \leq \varepsilon a_n.$$

On a alors, pour $x \in [0,1[$:

$$|f(x)-g(x)| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n-b_n|x^n + \varepsilon \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n-b_n|x^n + \varepsilon\, f(x).$$

Comme $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 et $\displaystyle\sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n-b_n|x^n$ a une limite finie en 1, il existe $\eta \in]0,1[$ tel que :

$$\forall x \in]1-\eta, 1[,\ \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n-b_n|x^n \leq \varepsilon\, f(x).$$

On a alors :

$$\forall x \in]1-\eta, 1[,\ |f(x)-g(x)| \leq 2\varepsilon\, f(x),$$

ce qui traduit que $g(x)$ est équivalent à $f(x)$ quand x tend vers 1^-.

c) La fonction $\varphi :\ x \longmapsto \ln(1+x)$ est continue et croissante sur $I=[0,\infty[$, qui est stable par φ. On en déduit que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et monotone. Comme $\varphi(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$, $(c_n)_{n\geq 0}$ est décroissante : elle converge donc vers 0, qui est le seul point fixe de φ.

Nous allons calculer un équivalent de c_n, à l'aide d'une méthode assez classique :

$$\frac{1}{c_{n+1}} = \frac{1}{\ln(1+c_n)} = \frac{1}{c_n - c_n^2/2 + o(c_n^2)} = \frac{1}{c_n}\left(1+\frac{c_n}{2}+o(c_n)\right) = \frac{1}{c_n}+\frac{1}{2}+o(1).$$

On en déduit que $\dfrac{1}{c_{n+1}} - \dfrac{1}{c_n}$ converge vers $1/2$ et le théorème de Cesàro donne $\dfrac{1}{c_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$, soit $c_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.

Le rayon de convergence de f est donc égal à 1 et la série diverge pour $x=1$ (comparaison avec la série harmonique). Par contre, il y a convergence en -1 d'après le théorème spécial des séries alternées (a_n décroit vers 0).

On peut ensuite appliquer le b) avec $b_0 = 0$ et $\forall n \geq 1,\ b_n = \frac{2}{n}$:

$$f(x) \sim_{1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}\, x^n = -2\,\ln(1-x).$$

27) Notons $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cette série entière (on pose donc $a_n = 1$ si n est un carré, $a_n = 0$ sinon).

La série diverge quand $x=1$, donc $R \leq 1$, et $|a_n| \leq 1$ donc $R \geq R\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right) = 1$, donc $R=1$.

Soit $x \in]0,1[$. L'application $\varphi :\ t \longmapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln x}$ est continue, décroissante et intégrable sur $[0,+\infty[$. On peut donc écrire :

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(n) \leq \varphi(0) + \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

On a ensuite, en posant $u = t\sqrt{-\ln x}$:

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

Comme $\varphi(0)$ est négligeable devant cette quantité quand x tend vers 1, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \underset{1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

28) a) On fait une preuve de type Cesàro : pour $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\sqrt{K}} \leq \varepsilon$. On a alors, pour tout $x > 0$:

$$0 \leq f(x)e^{-x} \leq e^{-x} \sum_{k=1}^{K-1} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}} + \varepsilon\, e^{-x} \underbrace{\sum_{k=K}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}_{\leq e^x} \leq e^{-x} \underbrace{\sum_{k=1}^{K-1} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}}}_{=P_K(x)} + \varepsilon$$

Comme P_K est un polynôme, il existe $a > 0$ tel que :

$$\forall x \geq a,\ e^{-x} \sum_{k=1}^{K-1} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}} \leq \varepsilon.$$

On en déduit donc :

$$\forall x \geq a,\ 0 \leq f(x)e^{-x} \leq 2\varepsilon$$

ce qui prouve que $f(x)$ est négligeable devant e^x au voisinage de $+\infty$.

b) Y admet un moment d'ordre 2, donc on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall a > 0,\ P(|Y - E(Y)| \geq a) \leq \frac{V(Y)}{a^2}$$

Comme $E(Y) = V(Y) = x$, cela donne :

$$P(|Y - x| \geq \varepsilon x) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 x} = O(1/x) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

c) Nous devons montrer que $\varphi(x) = f(x)e^{-x}\sqrt{x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$. Fixons $\alpha > 0$ et choisissons $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $\dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \leq 1 + \alpha$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \geq 1 - \alpha$. Le résultat précédent prouve qu'il existe $a > 0$ et $M \geq 0$ tels que :

$$\forall x \geq a,\ \sum_{|k-x| \geq \varepsilon x} e^{-x} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{M}{x}.$$

Écrivons alors, pour $x \geq a$:

$$\varphi(x) = \underbrace{\sqrt{x} \sum_{|k-x| \geq \varepsilon x} e^{-x} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}}}_{=\varphi_1(x)} + \underbrace{\sqrt{x} \sum_{|k-x| < \varepsilon x} e^{-x} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}}}_{=\varphi_2(x)}$$

Nous avons ($\sqrt{k} \geq 1$) :

$$0 \leq \varphi_1(x) \leq \sqrt{x} \sum_{|k-x| \geq \varepsilon x} e^{-x} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{M}{\sqrt{x}}.$$

Il existe donc $b \geq a$ tel que :

$$\forall x \geq b, 0 \leq \varphi_1(x) \leq \alpha.$$

La somme qui définit φ_2 porte sur les k compris entre $(1-\varepsilon)x$ et $(1+\varepsilon)x$. Nous pouvons donc encadrer $\sqrt{k}$ pour obtenir, toujours pour $x \geq a$:

$$\underbrace{(1-\alpha) \sum_{|k-x| < \varepsilon x} e^{-x} \frac{x^k}{k!}}_{=A(x)} \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1+\varepsilon)x}} \sum_{|k-x| < \varepsilon x} e^{-x} \frac{x^k}{k!} \leq \varphi_2(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-\varepsilon)x}} \underbrace{\sum_{|k-x| < \varepsilon x} e^{-x} \frac{x^k}{k!}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \leq 1 + \alpha$$

Or $A(x) = (1-\alpha)\left(1 - \displaystyle\sum_{|k-x| \geq \varepsilon x} e^{-x} \frac{x^k}{k!}\right) = (1-\alpha)(1 + O(1/x)) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 - \alpha$, donc il existe $c \geq 0$ tel que

$$\forall x \geq c,\ A(x) \geq 1 - 2\alpha.$$

On en déduit :

$$\forall x \geq \max(b,c),\ 1-2\alpha \leq \varphi(x) \leq 1+2\alpha$$

ce qui achève la preuve.

29) Une étude élémentaire de la fonction $\varphi :\ x \longmapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle stable $[0,+\infty[$ montre que (a_n) est positive, décroissante et de limite nulle (0 est le seul point fixe de φ). On en déduit que a_{n+1} est équivalent à a_n, et donc le rayon de la série entière est égal à 1 (critère de d'Alembert). Quand $x=-1$, la série est convergente car (a_n) décroît vers 0 (théorème spécial des séries alternées). Pour étudier la convergence quand $x=1$, nous allons : calculer un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$. Nous avons :

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n\ln(1+a_n)}=\frac{a_n-(a_n-a_n^2/2+o(a_n^2))}{a_n\ln(1+a_n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}.$$

En appliquant le théorème de Cesàro, on en déduit que $\dfrac{1}{na_n}-\dfrac{1}{na_0}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}$, soit $a_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2n}$. Ceci prouve que $f(x)$ n'est pas définie quand $x=1$ et que

$$f(x)\sim_{1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n}=-\frac{\ln(1-x)}{2},$$

en appliquant le lemme classique :

Si $\sum_{n\geq 0} a_nx^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_nx^n$ sont deux séries entières de rayon 1 avec $a_n \sim_{+\infty} b_n$, $b_n\geq 0$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ divergente, alors $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1^- et $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ est équivalent à $g(x)$ au voisinage de 1.

Preuve du lemme :

- La fonction g est croissante sur $[0,1[$; si elle ne tendait pas vers $+\infty$, elle aurait une limite finie ℓ et on pourrait écrire :

  $$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\ \sum_{k=0}^{n} b_kx^k \leq g(x)\leq \ell.$$

  En faisant tendre x vers 1, on aurait :

  $$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} b_k\leq \ell$$

  ce qui contredirait la divergence de la série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} b_n$ serait convergente.

- Soit $\varepsilon>0$; il existe n_0 tel que $|a_n-b_n|\leq \varepsilon b_n$ pour tout $n\geq n_0$. On a alors, pour tout $x\in[0,1[$:

  $$|f(x)-g(x)|\leq \sum_{k=0}^{n_0-1}|a_k-b_k|x^k+\varepsilon\underbrace{\sum_{k=n_0}^{+\infty} b_kx^k}_{\leq g(x)}$$

  Comme $\sum_{k=0}^{n_0-1}|a_k-b_k|x^k$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de 1 (car $g(x)$ tend vers $+\infty$), il existe $\eta\in]0,1[$ tel que :

  $$\forall x\in]1-\eta,1[,\ \sum_{k=0}^{n_0-1}|a_k-b_k|x^k\leq \varepsilon g(x).$$

On a donc :

$$\forall x\in]1-\eta,1[,\ |f(x)-g(x)|\leq 2\varepsilon g(x)$$

Ce qui prouve que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ quand x tend vers 1^-.

Équations différentielles et séries entières

30) a) On a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \dfrac{n+1}{2(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/4$ donc $R = 4$ (critère de d'Alembert).

b) Nous avons donc, pour $x \in]-4,4[$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2(2n+1)a_{n+1}x^{n+1} = (n+1)a_n x^{n+1}$$

donc

$$4\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$

soit $4xf'(x) - 2(f(x) - a_0) = x^2 f'(x) + xf(x)$. Comme $a_0 = 1$, f est donc solution sur $]-4,4[$ de l'équation différentielle :

$$x(4-x)y' = (2+x)y - 2$$

c) On résout l'équation sur $I =]0,4[$ (intervalle sur lequel le terme qui est en facteur de y' ne s'annule pas) : l'équation homogène a pour solution $y = K\,\dfrac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}$ et la méthode de variation de la constante conduit à :

$$K' = -2\frac{\sqrt{4-x}}{x^{3/2}} = -\frac{2}{x}\sqrt{\frac{4-x}{x}}.$$

On intègre cette fonction en posant $u = \sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$:

$$K(x) = -2\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 4(u - \operatorname{Arctan} u) + Cte.$$

Il existe donc une constante réelle C telle que :

$$\forall x \in]0,1[,\ f(x) = \left(4\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) + C\right)\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}.$$

On fait ensuite un développement asymptotique au voisinage de 0 :

- $\sqrt{\dfrac{4-x}{x}} = \dfrac{2+O(x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + O(\sqrt{x})$;
- $\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{4-x}{x}} = \dfrac{\pi}{2} + o(1)$;
- $\dfrac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}} = \dfrac{\sqrt{x}}{8}(1+O(x))$;

donc

$$f(x) = \left(\frac{8}{\sqrt{x}} + C - 2\pi + o(1)\right)\frac{\sqrt{x}}{8}(1+O(x)) = 1 + \frac{C-2\pi}{8}\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

Comme f est dérivable en 0, on a $\dfrac{C-2\pi}{8} = 0$, soit $C = 2\pi$. Ainsi :

$$f(x) = \left(4\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) + 2\pi\right)\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}$$

ce qui donne enfin :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}} = f(1) = \left(4\left(\sqrt{3} - \operatorname{Arctan}\sqrt{3}\right) + 2\pi\right)\frac{1}{3^{3/2}} = \frac{4}{3} + \frac{2}{27}\pi\sqrt{3}$$

Divers

31) a) Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme d'algèbre. Nous avons, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $||M|| < 1$:

$$\forall N \in \mathbb{N},\ (I_n - M) \times \left(\sum_{k=0}^{N} M^k\right) = I_n - M^{N+1} \qquad (1)$$

Comme $||M^k|| \leq \underbrace{||M||^k}_{\text{TGSC}}$, la série de terme général M^k converge et M^{N+1} tend vers 0 quand N tend vers l'infini. En faisant tendre n vers l'infini dans (1), nous obtenons donc

$$(I_n - M) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} M^k\right) = I_n$$

Ceci prouve que $I_n - M$ est inversible et donne le DSE de la fonction inverse au voisinage de I_n :

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ ||M|| < 1 \Longrightarrow (I_n - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} M^k.$$

En choisissant $R > ||A||$, $re^{i\theta} I_n - A = r\, e^{i\theta}(I_n - \frac{e^{-i\theta}}{r} A)$ est inversible pour $r \geq R$ et $\theta \in\ [0, 2\pi]$, avec :

$$(re^{i\theta} I_n - A)^{-1} = \frac{e^{-i\theta}}{r} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{-ip\theta}}{r^p} A^p = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{-i(p+1)\theta}}{r^{p+1}} A^p$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $r \geq R$, la série $\sum_{p \geq 0} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} \frac{e^{-i(p+1)\theta}}{r^{p+1}} A^p$ converge normalement, et donc uniformément, par rapport à θ sur $[0, 2\pi]$. Sa somme est donc une fonction continue de θ et il est possible de l'intégrer sur $[0, 2\pi]$ et d'échanger l'intégrale et la somme infinie :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} (re^{i\theta} I_n - A)^{-1}\, \mathrm{d}\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} r^{k-p} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-p)\theta}\, \mathrm{d}\theta\right)}_{=\delta_{k,p}} A^p = A^k$$

b) Notons $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n = \det(X I_n - A)$ le polynôme caractéristique (normalisé) de A ($a_n = 1$). Nous avons alors, pour $r \geq R$:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} (re^{i\theta} I_n - A)^{-1}\, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} re^{i\theta} \sum_{k=0}^{n} a_k (re^{i\theta})^k (re^{i\theta} I_n - A)^{-1}\, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} re^{i\theta} \frac{P(re^{i\theta})}{\det(re^{i\theta} I_n - A)} {}^t\mathrm{Com}(re^{i\theta} I_n - A)\, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} re^{i\theta}\, {}^t\mathrm{Com}(re^{i\theta} I_n - A)\, \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$re^{i\theta}\, {}^t\mathrm{Com}(re^{i\theta} I_n - A) = \sum_{p=1}^{n} r^p M_p(\theta)$$

où $M_1(\theta), \dots, M_n(\theta)$ sont des matrices qui dépendent continument de θ. En intégrant, nous obtenons

$$P(A) = \sum_{p=1}^{n} r^p M_p = 0$$

avec $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Chaque coefficient de la matrice $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} r^p M_p$ est un polynôme en r de valuation ≥ 1 et constant pour $r \geq R$: ces polynômes sont nuls et $P(A) = 0$.

Indication : pour la première question, développez $(re^{i\theta} I_n - A)^{-1}$ en série entière. Pour la seconde, écrire $\chi_A(A)$ à l'aide du a) sous forme d'un polynôme en r.

32) a) On a , pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 1}{n!\, 2^n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} x^n.$$

b) Nous avons :

$$|a_n| = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi(2n-2)}\, e^{-2n+2}(2n-2)^{2n-2}}{2^{2n-1}\, n\, \left(\sqrt{2\pi(n-1)}\, e^{-n+1}(n-1)^{n-1}\right)^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} n^{-3/2}.$$

On en déduit que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est de rayon 1 et qu'il y a converge normale sur le disque fermé $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}$. La fonction g est donc en partiuclier continue sur D, comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

On a $g^2(x) = 1 + x$ pour tout $x \in]1, 1[$; comme $h :\ z \longmapsto 1 + z$ et g^2 sont sommes de séries entières de rayons au moins égaux à 1, on en déduit que g et h coïncident sur le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Par continuité de g et h sur D, nous avons :

$$\forall z \in D,\ g^2(z) = 1 + z.$$

33) a) Il y a convergence pour $z = -1$ (série harmonique alternée) et divergence pour $z = 1$ (série harmonique), donc le rayon est égal à 1.

b) Remarquons tout d'abord que pour $x \in]-1, 1[$, on a $f(x) = \ln(1 + x)$ et $e^{f(x)} = 1 + x$. Nous allons montrer que cette résultat se prolonge au domaine complexe.

L'application $\psi :\ t \longmapsto f(zt)$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$, avec

$$\forall t \in [0,1],\ \psi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} z^n = \frac{z}{1+tz}.$$

En notant $\psi(t) = a(t) + ib(t)$, a et b sont de classe C^1 et $\varphi(t) = e^{a(t)} (\cos b(t) + i \sin b(t))$; on en déduit que φ est de classe C^1 sur $[0, 1]$, avec

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= a'(t)e^{a(t)} (\cos b(t) + i \sin b(t)) + e^{a(t)} b'(t) (-\sin b(t) + i \cos b(t)) \\ &= (a'(t) + ib'(t))e^{a(t)} (\cos b(t) + i \sin b(t)) \\ &= \psi'(t)\varphi(t) = \frac{z}{1+tz} \varphi(t). \end{aligned}$$

Ainsi, φ est solution sur $[0, 1]$ du problème de Cauchy

$$\mathcal{P} :\ \left(y' = \frac{z}{1+tz}\, y,\ y(0) = 1\right)$$

Comme l'application $t \longmapsto \dfrac{z}{1+tz}$ est continue sur $[0, 1]$, $\mathcal{P}$ possède une unique solution : comme $t \longmapsto 1 + tz$ est solution de $\mathcal{P}$, on en déduit que $\varphi(t) = 1 + tz$ pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi, pour $t = 1$, on obtient $e^{f(z)} = 1 + z$.

Exercices X-ENS

34) a) On a $1 \leq \ln n \leq n$ pour tout $n \geq 2$, donc $1 = R\left(\sum z^n\right) \geq R(f) \geq R\left(\sum nz^n\right) = 1$: f est de rayon 1. Comme la série diverge grossièrement quand $x = \pm 1$, f est définie sur $I =]-1,1[$ et elle y est de classe C^∞.

b) On a $a_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$ donc g est de rayon 1 et il y a convergence normale sur $[-1,1]$; g est donc définie et continue sur $[-1,1]$. On a, pour tout $N \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} a_n &= -1 + \sum_{n=2}^{N}\left[\ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n}\right] = \ln N - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \\
\sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^n a_n &= 1 + \sum_{n=2}^{2N+1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{2N}(-1)^n \ln\frac{n}{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{2N}{2N-1}\times\frac{2N}{2N+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ln\left(\left[\frac{2\times 4\times\cdots\times(2N)}{1\times 3\times\cdots\times(2N-1)}\right]^2\times\frac{1}{2N+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ln\left(\frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N+1)[(2N)!]^2}\right)
\end{aligned}$$

On a donc $g(1) = -\gamma$ (constante d'Euler) et $g(-1) = \ln(2) + \ln\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \ln(\pi)$ en utilisant l'équivalent de Stirling :

$$\frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N+1)[(2N)!]^2} \sim \frac{2^{4N}(\sqrt{2\pi N}N^N e^{-N})^4}{2N[\sqrt{4\pi N}(2N)^{2N}e^{-2N}]^2} = \frac{\pi}{2}.$$

c) Pour $x \in]-1,1[$, on a :

$$g(x) = -x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n}\right)x^n = \sum_{n=2}^{+\infty}(\ln n)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = (1-x)f(x) + \ln(1-x)$$

d'où $f(x) = \dfrac{g(x) - \ln(1-x)}{1-x}$. On en déduit :

- $f(x) \xrightarrow[x\to -1]{} \dfrac{g(-1)+\ln 2}{2} \neq 0$, donc $f(x) \underset{-1}{\sim} \ln\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.
- $f(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

On peut retrouver cet équivalent en utilisant le résultat classique : en posant $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ pour tout $n \geq 0$, on a :

- $\ln n \sim S_n$;
- $\forall n \geq 0,\ S_n \geq 0$;
- $\displaystyle\sum_{n\geq 0} S_n$ diverge ;

donc $f(x) \underset{1^-}{\sim} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$

35) Pour $|z| < R$, notons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ et M un majorant de f sur le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Pour tout $\rho \in [0, 1[$, la fonction $\varphi :\ \theta \longmapsto f(\rho\, e^{i\theta})$ est continue et 2π-périodique. Nous avons :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \varphi(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n e^{in\theta}$$

et la convergence normale de cette somme permet d'affirmer que cette somme est la série de Fourier de φ :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ c_n(\varphi) = \begin{cases} a_n \rho^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

La formule de Parseval donne alors :

$$\forall \rho \in [0, 1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \rho^n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^2 \, \mathrm{d}\theta \leq M^2.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, nous pouvons donc écrire :

$$\forall \rho \in [0, 1[,\ \sum_{n=0}^{N} |a_n \rho^n|^2 \leq M^2$$

puis

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 \leq M^2$$

en faisant tendre ρ vers 1. Ceci prouve que $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2$ converge : comme les a_n sont des entiers, ils sont nuls à partir d'un certain rang.

Indication : On utilisera l'égalité de Parseval pour montrer que la série de terme général a_n^2 est convergente.

36) a) Soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite complexe quelconque et $N \geq 1$. f admet un DL à l'ordre N en 0 :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n z^n + o(z^N)$$

et nous pouvons composer f et $g_N = \sum_{n=1}^{N} b_n z^n$ au voisinage de 0 (car $g(0) = 0$) et composer les deux DL :

$$f \circ g_N(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{k=1}^{N} b_k z^k \right)^n + o(g(z)^N) = \sum_{n=1}^{N} c_n z^n + o(z^N)$$

avec pour $1 \leq n \leq N$:

$$c_n = a_1 b_n + a_2 \left(\sum_{i_1 + i_2 = n} b_{i_1} b_{i_2} \right) + \cdots + a_n \left(\sum_{i_1 + \cdots + i_n = n} b_{i_1} \ldots b_{i_n} \right).$$

En particulier, $c_1 = a_1 b_1$. Par identification, on obtient qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n \geq 1}$ vérifiant la propriété imposée, définie par :

$$b_1 = \frac{1}{a_1} \text{ et } \forall n \geq 2,\ b_n = -\frac{1}{a_1} \sum_{k=2}^{n} a_k \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}^* \\ i_1 + \cdots + i_k = n}} b_{i_1} \ldots b_{i_k}.$$

Cette définition est cohérente car pour $k \in \{2 \ldots, n\}$ et $i_1, \ldots, i_k \geq 1$ avec $i_1 + \cdots + i_k = n$, on a $i_1, \ldots, i_k < n$, donc b_n est défini en fonction des termes précédents $b_1, \ldots, b_{n-1}$.

b) Remarquons tout d'abord que $(B_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs, puisque $B_1 = \dfrac{1}{A1} > 0$ et

$$\forall n \geq 2,\ B_n = -\frac{1}{A_1}\sum_{k=2}^{n}(-A_k)\left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\in\mathbb{N}^*\\ i_1+\dots+i_k=n}} B_{i_1}\dots B_{i_k}\right) = \frac{1}{A_1}\sum_{k=2}^{n}A_k\left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\in\mathbb{N}^*\\ i_1+\dots+i_k=n}} B_{i_1}\dots B_{i_k}\right) \geq 0 \text{ par récurrence}$$

On a ensuite :

- $B_1 = \dfrac{1}{A_1} = \dfrac{1}{|a_1|} = |b_1|$;
- soit $n \geq 2$ et supposons que $B_i \geq |b_i|$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. On a :

$$\begin{aligned}
|b_n| &= \frac{1}{A_1}\left|\sum_{k=2}^{n}a_k\left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\in\mathbb{N}^*\\ i_1+\dots+i_k=n}} b_{i_1}\dots b_{i_k}\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{A_1}\sum_{k=2}^{n}|a_k|\left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\in\mathbb{N}^*\\ i_1+\dots+i_k=n}} |b_{i_1}|\dots |b_{i_k}|\right) \\
&\leq \frac{1}{A_1}\sum_{k=2}^{n}A_k\left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\in\mathbb{N}^*\\ i_1+\dots+i_k=n}} B_{i_1}\dots B_{i_k}\right) = B_n
\end{aligned}$$

Nous avons donc montré par récurrence que $|b_n| \leq B_n$ pour tout $n \geq 1$.

c) En définissant les b_n comme à la question a), le premier problème consiste à démontrer que le rayon de $\sum_{n\geq 2} b_n z^n$ est non nul. D'après la question b), il suffira pour cela de démontrer que celui de la série $\sum_{n\geq 2} B_n z^n$ est de rayon non nul. L'idée, c'est que dans le cas particulier de la fonction F, on va être capable de calculer une fonction G telle que $F \circ G(z) = z$ avec G DSE : ce sera la somme de la série de terme général $B_n z^n$, qui sera ainsi de rayon non nul.

Fixons $r \in]0, R[$. Comme $\sum_{n\geq 1} a_n r^n$ converge, il existe $M > 0$ tel que $|a_n r^n| \leq M$ pour tout $n \geq 1$. Posons donc $A_1 = |a_1|$ et $A_n = \dfrac{M}{r^n}$ pour tout $n \geq 2$; nous sommes bien dans la situation de la question b), avec :

$$F(z) = A_1 z - \sum_{n=2}^{+\infty} M\left(\frac{z}{r}\right)^n = A_1 z - \frac{M}{r^2}\,\frac{z^2}{1 - z/r}.$$

Pour avoir $F(G(z)) = z$, il faut définir $G(z) = Z$ tel que

$$A_1 Z - \frac{M}{r^2}\,\frac{Z^2}{1 - Z/r} = z.$$

On obtient ici une équation de degré 2 d'inconnue Z, dont les solutions s'écrivent :

$$Z = \frac{1}{2(A_1 + M/r)}\left(A_1 + \frac{z}{r} + \delta(z)\right) \text{ avec } \delta^2(z) = (A_1 r - z)^2 - 4zM.$$

Ainsi, il suffit de définir une série entière $\delta(z)$ de rayon non nul telle que $\delta^2(z) = (A_1 r - z)^2 - 4zM$ pour définir G. Avec une notation impropre, nous voulons définir :

$$\delta(z) = \sqrt{A_1^2 r^2 - 2(A_1 r + 2M)z + z^2} = A_1 r\sqrt{1 - 2\frac{A_1 r + 2M}{A_1^2 r^2}z + \frac{z^2}{A_1^2 r^2}}.$$

Par analogie avec le DSE usuel, nous définissons :

$$\delta(z) = A_1 r \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} \left(-2\frac{A_1 r + 2M}{A_1^2 r^2} z + \frac{1}{A_1^2 r^2}\, z^2\right)^n$$

D'après le résultat admis, δ est somme d'une série entière sur un voisinage de 0.

On sait que $\sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} u^n$ pour tout $u \in]-1,1[$. On en déduit que

$$\forall u \in]-1,1[, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} u^n\right)^2 = 1+u$$

Par produit de Cauchy, cela traduit que deux sommes de séries entières coïncident sur $]-1,1[$: elles coïncident donc sur $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Pour z assez proche de 0, $u = -2\frac{A_1 r + 2M}{A_1^2 r^2} z + \frac{1}{A_1^2 r^2}\, z^2$ est de module strictement plus petit que 1 et $\delta(z)$ est défini, avec $\delta^2(z) = 1 + u = 1 - 2\frac{A_1 r + 2M}{A_1^2 r^2} z + \frac{1}{A_1^2 r^2}\, z^2$. On peut donc définir :

$$G(z) = \frac{1}{2(A_1 + M/r)} \left(A_1 + \frac{z}{r} + \delta(z)\right)$$

au voisinage de 0 et G est la somme d'une série entière : $G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n z^n$ et d'après le a), on a $C_n = B_n$ pour tout n. Ceci prouve que $R(\sum_{n\geq 0} B_n z^n)$ est non nul, puis que $R(\sum_{n\geq 0} b_n z^n)$ l'est également. On peut donc définir la fonction $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ sur un voisinage de 0.

D'après le résultat admis, $f \circ g$ est DSE en 0. Il existe donc une suite (c_n) telle que pour z proche de 0 :

$$f \circ g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

et comme $f \circ g(z) = z + o(z^N)$ pour tout $N \geq 2$, on a $c_1 = 1$ et $c_n = 0$ pour tout $n \geq 2$. On a donc bien construit une série entière g de rayon non nul telle que $f \circ g(z) = z$ au voisinage de 0.