# Probabilités et dénombrement : énoncés

## Exercices CCP

**1)** On mélange un paquet de 52 cartes. Quelle est la probabilité que les deux premières cartes du paquet soient des as ?

**2)** Une expérience aléatoire consiste à calculer le nombre de lancer d'une pièce équilibrées nécessaires pour obtenir la séquence "FFP". Décrire l'espace probabilisé associé à cette expérience.

**3)** On jette deux dés qui ont la même distribution de probabilités. Montrer que la probabilité d'obtenir un double est toujours supérieure ou égale à $1/6$.

**4)** Soient deux évènements $A$ et $B$ tels que $A \cup B = \Omega$. Montrer que $P(A \bigcap B) = P(A)P(B) - P\left(\overline{A}\right) P\left(\overline{B}\right)$.

**5)** Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

a) Si $\Omega'$ est une partie de $\Omega$, montrer que $\{A \cap \Omega',\ A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur $\Omega'$.

b) Si $f :\ \Omega' \to \Omega$ est une application, montrer que $\{f^{-1}(A),\ A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur $\Omega'$.

**6)** Soit $\Omega$ un ensemble et $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega,\ A$ ou $\overline{A}$ est fini ou dénombrable$\}$.

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\Omega$ et que c'est la plus petite tribu contenant tous les singletons. Que vaut $\mathcal{A}$ si $\Omega$ est dénombrable ?

b) On suppose que $\Omega$ n'est pas dénombrable. Montrer que l'application $P :\ A \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } \overline{A} \text{ est dénombrable} \end{cases}$ est une probabilité sur $\mathcal{A}$.

**7)** Montrer que si $f :\ \Omega \to \Omega'$ est une application, $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \mid A = f^{-1}(f(A))\}$ est une tribu sur $\Omega$.

**8)** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que $P(A_n)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini.

**9)** On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$. L'urne $U_1$ contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne $U_2$ contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne $U_1$. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne $U_2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $B_n$ l'évènement "la boule tirée au $n$-ième tirage est blanche" et on pose $p_n = P(B_n)$.

a) Calculer $p_1$.

b) Donner une relation de récurrence vérifiée par la suite $(p_n)$ et en déduire une expression de $p_n$.

**10)** Soit $f :\ [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continue. Donner une C.N.S. pour que la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une distribution de probabilité sur $\mathbb{N}$.

## Exercices Mines-Centrale

**11)** On dispose de $N$ urnes ($N \geq 1$) notées $U_1, \ldots, U_N$. Pour tout $k$ compris entre 1 et $N$, l'urne $U_k$ contient $k$ boules rouges et $N-k$ boules blanches. On choisit au hasard une urne avec une probabilité proportionnelle au nombre de boules rouges qu'elle contient, puis on procède à une suite de tirages d'une seule boule avec remise dans l'urne qui a été choisie.

a) Quel est l'univers $\Omega$ associé à cette expérience aléatoire ? Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, quel est la probabilité de choisir l'urne $U_k$ ?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n$ l'évènement "au cours des $2n$ premiers tirages, on a obtenu autant de boules rouges que de boules blanches" et $R_{2n+1}$ l'évènement "on a obtenu une boucle rouge au $(2n+1)$-ième tirage".

b) Exprimer $P(E_n)$ sous forme d'une somme et donner une expression de $P(R_{2n+1} \,|\, E_n)$.

c) Pour $n, p \in \mathbb{N}$, donner une expression de $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n (1-x)^p \, \mathrm{d}x$.

d) Montrer que $P(R_{2n+1} \,|\, E_n) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \dfrac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}} = \dfrac{n+2}{2n+3}$.

**12)** On considère $n$ boules ($n \geq 1$) numérotées de 1 à $n$ que l'on place au hasard dans $n$ urnes, chaque urne pouvant recevoir de 0 à $n$ boules.

a) Calculer la probabilité $p_n$ que chaque urne reçoive exactement une boule.

b) Montrer que la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et calculer sa limite.

**13)** Soit $n$ un entier supérieur au égal à 2. On lance une pièce de monnaie équilibrées $n$ fois. Montrer qu'il existe une valeur de $n$ pour laquelle les évènements "on obtient Face au plus une fois" et "on obtient Face et Pile au moins une fois" sont indépendants.

**14)** Soit $N$ un entier supérieur ou égal à deux. Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules noires et $N$ boules bleues. On tire simultanément 2 boules dans cette urne.

a) Quel est l'espace probabilisé associé à cette expérience aléatoire ?

b) Quelle est la probabilité $p$ d'obtenir un tirage unicolore ?

c) Pour quelle valeur de $N$ la probabilité d'obtenir 2 boules bleues vaut-elle $1/6$ ? Quelle est dans ce cas la valeur de $p$ ?

**15) Loi de succession de Laplace** On dispose de $N+1$ urnes numérotées de 0 à $N$, l'urne de numéro $k$ contenant $k$ boules rouges et $N-k$ boules blanches. On choisit une urne au hasard et on en tire $n$ fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage. Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule rouge sachant que les $n$ premiers tirages ont donné des boules rouges ? Calculer la limite de cette probabilité quand $N$ tend vers l'infini.

**16) Transmission de l'information** Une information binaire (Oui ou Non) se transmet de la personne $P_0$ à la personne $P_n$, en passant par les personnes $P_1, \ldots, P_{n-1}$. On admet que chaque personne transmet l'information qu'elle a reçue avec la probabilité $p$, et son contraire avec la probabilité $1-p$, et qu'il y a indépendance des transmissions. Calculer la probabilité que l'information soit correctement transmise à $P_n$. Que se passe-t-il quand $n$ tend vers l'infini ?

**17) Formule de Bayes** Une maladie $M$ affecte un français sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte $M$ avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente, mais qui donne un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit effectivement malade quand elle est testée positive ? Conclusion ?

**18)** a) Mon voisin a deux enfants et je sais qu'il a une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

b) Mon voisin a deux enfants, dont le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon ?

c) Mon voisin a deux enfants. Je sonne chez lui et c'est une petite fille qui m'ouvre la porte. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

**19) Indicatrice d'Euler** On appelle indicatrice d'Euler la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n) = \mathrm{Card}\left(\{k \in [\![1, n]\!],\ k \wedge n = 1\}\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit au hasard avec équiprobabilité un entier compris entre 1 et $n$. Pour $m$ entier naturel non nul, on note $A_m$ l'évènement "le nombre choisi est divisible par $m$".

a) Calculer $P(A_m)$ quand $m$ divise $n$.

b) Montrer que si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont les diviseurs premiers de $n$, les évènements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_k}$ sont indépendants.

c) En déduire que $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

**20)** Soient $A, B, C$ trois évènements d'un même espace probabilisé. On suppose que $P(C) \neq 0$. On dit que $A$ et $B$ sont *indépendants conditionnellement* à $C$ si $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C) \times P(B \mid C)$. Montrer que $A$ et $B$ peuvent être indépendants sans être indépendants conditionnellement à $C$.

**21)** Quelle est la probabilité que deux personnes d'une population totale de taille $n$ soient nées le même jour (on suppose que $n \leq 365$ et on oublie le problème posé par le 29 février) ? À partir de quelle valeur de $n$ cette probabilité est-elle supérieure à $0,5$ ? à $0,99$ ?

**22)** On choisit au hasard une permutation $\sigma$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ et on s'intéresse à la probabilité $p_n$ de l'évènement : "$\sigma$ n'a pas de point fixe". Nous noterons $D_n$ l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ sans point fixe (i.e. l'ensemble des *dérangements*) et $d_n$ son cardinal. On pose $d_0 = 1$.

a) Calculer $d_1$, $d_2$, $d_3$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$. Écrire une fonction `Python` qui, quand on l'applique à un entier naturel $n$, renvoie $d_n$.

On pose $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ pour $x \in ]-1, 1[$. Pour $n$ quelconque, $f$ admet un DL à l'ordre $n$ au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^n).$$

c) Exprimer $a_n$ sous forme d'une somme.

d) En écrivant $f(x)e^x = \dfrac{1}{1-x}$, montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) En déduire une expression de $p_n$. Quel est le comportement de $p_n$ quand $n$ tend vers l'infini ?

**23)** On considère un polygone convexe $\mathcal{P} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ ($n \geq 4$). On appelle *diagonale* du polygone un segment joignant deux sommets non voisins de $\mathcal{P}$. Quelle est la probabilité que deux diagonales choisies au hasard soient sécantes ?

**24)** Soit $p_n$ la probabilité qu'il faille tirer exactement $n$ fois à pile ou face pour obtenir deux piles à la suite, et soit $q_n = \sum_{k \geq n} p_k$. Trouvez des expressions de $p_n$ et $q_n$ en fonction des nombres de Fibonacci.

**25) Lemme de Borel-Cantelli**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'évènements de $\Omega$. On note $A = \bigcap_{n\geq 0}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$.

a) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge, alors $P(A) = 0$.

b) On suppose que les évènements $A_n$ sont indépendants et que $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ diverge. Montrer que $P(A) = 1$. En déduire que si on tape un texte de longueur infini de façon aléatoire (les caractères sont indépendants les uns des autres et le $n$-ème caractère suit une loi uniforme sur l'ensemble des caractères usuels), alors la probabilité d'obtenir le texte intégral du roman de Victor Hugo "Notre-dame de Paris" est égale à 1.

**26)** On considère un dé pipé à 6 faces. La probabilité d'obtenir la face $k$ est notée $p_k$. On lance ce dé $n$ fois et on note, pour $k$ compris entre 1 et 6, $N_k$ le nombre d'apparitions de la face $k$ lors de ces $n$ lancers.

a) Que peut-on dire de $N_k$ quand $n$ tend vers l'infini ?

b) En supposant que, pour tout $k$, $np_k$ soit entier, quelle est la probabilité d'obtenir $N_k = np_k$ pour tout $k$ ?

**27)** On note $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de sa structure d'espace probabilisé correspondant à une suite infinie de tirages à PILE ou FACE (resp. 1 ou 0), indépendants et avec même probabilité de tirage.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n$ l'évènement "les tirages ne sont plus des PILES après le $n$-ème tirage" et $A$ est l'évènement "les tirages ne sont plus que des PILES à partir d'un certain moment ". Montrer que $P(A_n) = 0$ pour tout $n$ et en déduire que $P(A) = 0$. Montrer que $A$ est dénombrable.

b) On note $B$ l'évènement "on ne tire jamais deux FACES consécutivement". Écrire une fonction Python qui, pour $l \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donne la proportion des cas où la séquence 00 n'apparaît pas dans les $\ell$ premiers tirages pour $n$ essais. Le tester pour $\ell \in \{2,3,4\}$ et pour des valeurs de $n$ bien choisies. Retrouver les résultats par le calcul.

c) On donne une famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'évènements mutuellement indépendants et on définit leur *limite supérieure* :

$$\overline{\lim}\, C_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} C_k\right).$$

Montrer que si $\displaystyle\sum_{n\geq 1} P(C_n)$ diverge, $P(\overline{\lim}\, C_n) = 1$.

**28)** Deux archers tirent à tour de rôle sur une cible : le premier qui touche la cible a gagné la partie. On suppose que l'archer qui commence à la probabilité $p_1 \in ]0,1[$ de toucher la cible et que le second archer a la probabilité $p_2 \in ]0,1[$ de la toucher.

a) Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?

b) Montrer que le jeu se termine presque sûrement.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de $p_1$ existe-t-il une valeur de $p_2$ pour laquelle le jeu est équitable ?

**29)** Trois joueurs $A$, $B$ et $C$ s'affrontent à un jeu selon les règles suivantes :

- à chaque partie, deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité ;
- la première partie oppose les joueurs $A$ et $B$ ;
- le gagnant de la $n$-ième partie affronte à la partie suivante le joueur n'ayant pas participé à la $n$-ième partie.
- le premier joueur qui gagne deux parties consécutives est déclaré vainqueur.

Établir que le jeu s'arrête presque sûrement et calculer les probabilités de gain de chaque joueur.

**30)** Soit un réel $s > 1$. On note $P$ la probabilité sur $\mathbb{N}^*$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s}.$$

a) Que vaut la constante $\lambda$ ?

b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer simplement la probabilité de $A_p = p\mathbb{N}^*$.

c) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que la famille $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est constituée d'évènements mutuellement indépendants.

d) En étudiant $P(\{1\})$, démontrer l'identité d'Euler $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{p^s}{p^s-1}$ et en déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$.

**31)** (Centrale 2016) Soient $p \in ]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. On effectue une suite infinie de tirages à pile ou face. Les tirages sont indépendants et la probabilité de tirer face, à chaque tirage, vaut $p$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $F_n$ l'événement "face sort au $n$-ième tirage" et $P_n$ l'événement "pile sort au $n$-ième tirage". Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n$ l'événement : "au $n$-ième tirage, on obtient $r$ faces consécutives pour la première fois".

On pose $p_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(E_n)$.

a) Déterminer $E_1, \dots, E_{r-1}$ et $E_r$.

b) Montrer que chaque $E_n$ est un événement.

c) Montrer que $\sum p_n$ converge.

d) Écrire une fonction en Python qui prend en paramètre $(p, r)$, qui simule cette expérience aléatoire et qui renvoie l'entier $n$ tel que $E_n$ est réalisé.

e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+r+1} = p^r(1-p)\left(1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i\right)$.

f) En déduire une expression de $G(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k$.

**32)** (Mines 2016) On considère une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$ dans laquelle on effectue $n$ tirages sans remise.

a) Quelle est la probabilité que 1, 2 et 3 soient tirés dans cet ordre (pas forcément consécutivement) ?

b) Quelle est la probabilité que 1, 2 et 3 soient tirés dans cet ordre et consécutivement ?

**33)** (Mines 2016) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

a) Soient $A_1$ et $A_2$ dans $\mathcal{T}$ . Calculer $P(A_1 \cup A_2) + P(A_1 \cup \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cup A_2) + P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2})$.

b) Soient $A_1, \dots, A_n$ dans $\mathcal{T}$. On pose $\Gamma = \{A_1, \overline{A_1}\} \times \cdots \times \{A_n, \overline{A_n}\}$. Calculer $\displaystyle\sum_{(B_1,\dots,B_n)\in\Gamma} P(B_1 \cup \cdots \cup B_n)$.

**34)** (Centrale - Python) On note $r_n$ la probabilité que deux entiers de $[\![1, n]\!]$ soient premiers entre eux. On souhaite montrer que $r_n$ tend vers $\dfrac{6}{\pi^2}$ quand $n$ tend vers l'infini.

a) À l'aide de Python, vérifier cette conjecture.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_1, \dots, p_k$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à $n$. On définit ensuite :

$$A_n = \{(a,b) \in [\![1,n]\!],\ a \wedge b = 1\}$$

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier} \\ 1 & \text{si } n \text{ est le produit d'un nombre pair de nombres premiers distincts} \\ -1 & \text{si } n \text{ est le produit d'un nombre impair de nombres premiers distincts} \end{cases}$$

$$\forall i \in [\![1,k]\!],\ U_i = \{(a,b) \in [\![1,n]\!],\ p_i \,|\, a \text{ et } p_i \,|\, b\}$$

$\mu$ est appelée *fonction de Möbius*.

b) Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, déterminer le nombre de multiples de $\ell$ dans $[\![1,n]\!]$

c) En déduire le cardinal de $\bigcap_{i\in I} U_i$ où $I$ est une partie non vide de $[\![1,k]\!]$.

d) Montrer que $\mathrm{Card}(A_n) = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$. On utilisera la formule du crible : pour toute famille de parties finies $(A_i)_{1\leq i\leq N}$ d'un ensemble $E$, on a :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{\substack{I\subset[\![1,N]\!] \\ I\neq\emptyset}} (-1)^{\mathrm{Card}(I)-1}\, \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

e) Montrer que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$ et conclure.

**35)** (Mines 2018) On donne un entier $N \geq 1$ ; on effectue $2N$ lancers d'une pièce équilibrée : Pauline (resp. Flore) marque un point chaque fois que la pièce tombe sur "Pile" (resp. sur "Face"). Quelle est la probabilité que Pauline ait toujours été strictement en avance sur Flore ?

**36)** Quelle est la probabilité qu'une permutation de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ ne possède que des cycles de longueurs paires dans sa décomposition en produit de cycles disjoints ?

**37)** (Centrale 2019) a) Montrer que $P = X^3 - X^2 - X - 1$ a trois racines $a$, $b$ et $\bar{b}$ avec $a \in ]1,2[$ et $|b| < 1$.

b) On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note $p_n$ la probabilité pour que la séquence PPP apparaisse pour la première fois au $n$-ième lancer. Exprimer $p_{n+3}$ en fonction de $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}$.

c) Donner une expression et un équivalent de $p_n$.

**38)** Quelle est la probabilité $p_n$ qu'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ choisie au hasard contienne dans sa décomposition en produit de cycle deux à deux disjoints un cycle de longueur strictement supérieure à $n/2$ ? Donner un équivalent de $p_n$ au voisinage de $+\infty$.

## Exercices X-ENS

**39)** (P) Soient $A_1,\dots A_n$ des évènements d'un même espace probabilisé. Pour $k \in \{1,\dots n\}$, on note $C_k$ l'évènement "appartenir à $A_i$ pour au moins $k$ valeurs de l'indice $i$". Montrer :

$$\prod_{k=1}^{n} P(C_k) \leq \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

**40)** (X 2015) Pour $A$ partie de $\mathbb{N}^*$, on note $\mu(A)$, sous réserve d'existence, la limite de $a_n = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{Card}(A \cap \{1,\dots,n\})$ quand $n$ tend vers l'infini. On note $\mathcal{L}$ le domaine de définition de la fonction $\mu$.

a) Donner des parties $A$ pour lesquelles $\mu(A) = 0$, $\mu(A) = 1$ et $\mu(A) = 1/2$.

b) Montrer que $\mathcal{L} \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. $\mathcal{L}$ est-il une tribu sur $\mathbb{N}^*$ ?

c) Existe-t-il une structure d'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathcal{A}, P)$ telle que $P$ soit un prolongement de $\mu$ ?

**41)** Soit $\Omega$ un ensemble infini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de $\Omega$ (les $A_n$ sont donc des parties non vides de $\Omega$, deux à deux disjointes dont la réunion est égale à $\Omega$). On pose $\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{n\in T} A_n,\ T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right\}$.

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\Omega$ et que si $\Omega$ est dénombrable, toute tribu infinie sur $\Omega$ est de cette forme.

b) Existe-t-il une tribu infinie dénombrable ?

**42)** On considère le jeu suivant, opposant deux joueurs $A$ et $B$ : on dispose de $n$ pièces non nécessairement équilibrées, que l'on lance l'une après l'autre. Le joueur $A$ gagne la partie si on obtient un nombre pair de `Pile` ; sinon, c'est le joueur $B$ qui gagne. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce jeu soit équitable.

# Probabilités et dénombrement : corrigés

## Exercices CCP

**1)** L'univers est l'ensemble des 52! permutations de l'ensemble des 52 cartes. Le nombre de ces permutation dont les deux premiers éléments sont des as est $4 \times 3 \times 50!$ (on a 4 choix pour la première carte, puis 3 choix pour la deuxième, puis 50! façons de répartir les 50 cartes restantes). La probabilité cherchée est donc égale à $\frac{3\times 4}{51\times 52}$, soit $\frac{1}{221}$.

**2)** Il faut choisir l'espace probabilisé $(\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{A}, P)$ qui modélise d'une suite infinie de tirages indépendants de même loi de Bernoulli de paramètre 1/2. Le problème consiste alors à calculer, pour chaque $n \geq 3$, la probabilité de l'évènement :

$$A_n = \{(\varepsilon_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*},\ (\varepsilon_{n-2}, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n) = (0,0,1) \text{ et } \forall k \in [\![3, n-1]\!],\ (\varepsilon_{n-2}, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n) \neq (0,0,1)\}.$$

On pourrait aussi choisir $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, mais il faudrait définir la probabilité $P$ en calculant dès le début de l'exercice, pour tout $n \geq 3$, la probabilité $p_n$ d'obtenir "FFP" pour la première fois au $n$-ième tirage.

**3)** Pour $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, notons $p_i$ la probabilité que le dé tombe sur la face $i$. L'expérience est modélise par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ :

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ ;
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ;
- $\forall (i,j) \in \Omega$, $p_{i,j} = P(\{(i,j)\} = p_i p_j$.

L'évènement étudié est donc $A = \{(i,i),\ i \in \Omega\}$ et $P(A) = \sum_{i=1}^{6} p_i^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{6} p_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{6} 1^2 \times \sum_{i=1}^{6} p_i^2 = 6P(A)$$

et donc $P(A) \geq 1/6$.

**4)** Nous avons $P(A)P(B) - P(A^c)P(B^c) = P(A)P(B) - (1-P(A))(1-P(B)) = P(A) + P(B) - 1 = P(A) + P(B) - P(\Omega) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A \cap B)$.

**5)** a) On a sans problème :

- $\Omega \in \mathcal{A}$ donc $\Omega' = \Omega \cap \Omega' \in \mathcal{A}'$ ;
- si $A' \in \mathcal{A}'$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $A' = A \cap \Omega'$. On a alors : $\Omega' \setminus A' = (\Omega \setminus A) \cap \Omega' \in \mathcal{A}'$ car $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire ;
- si $(A'_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}'$, il existe $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $A'_n = A_n \cap \Omega'$ pour tout $n$ et $\bigcup_{n\geq 0} A'_n = \left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) \cap \Omega' \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable.

b) De la même façon :

- $\Omega' = f{-}1(\Omega) \in \mathcal{A}'$ ;
- si $A' \in \mathcal{A}'$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $A' = f^{-1}(A)$. On a alors : $\Omega' \setminus A' = f^{-1}(\Omega \setminus A) \in \mathcal{C}'$ ;

- Si $(A'_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}'$, il existe $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $A'_n = f^{-1}(A_n)$ pour tout $n$ et $\bigcup_{n\geq 0} A'_n = f^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) \in \mathcal{A}$.

**6)** a) $\mathcal{A}$ vérifie les propriétés demandées aux tribus :

- $\Omega \in \mathcal{A}$ car son complémentaire est fini (il est vide).
- Si $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$ par symétrie de la définition de $\mathcal{A}$.
- soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ ; si tous les $A_n$ sont finis ou dénombrables, $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$ est également fini ou dénombrable. Sinon, il existe $n_0$ tel que $\overline{A_{n_0}}$ est fini ou dénombrable, donc $\overline{A}$ l'est également, car $\overline{A} = \bigcap_{n\geq 0} \overline{A_n} \subset \overline{A_{n_0}}$. Dans tous les cas, $A \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ contient clairement les singletons et si $\mathcal{B}$ est une tribu contenant les singletons, alors pour toute partie $A \in \mathcal{A}$, on a deux cas possibles :

- $A$ est fini ou dénombrable, donc $A \in \mathcal{B}$, puisque $A$ est la réunion d'un nombre fini ou d'un nombre dénombrables de singletons, qui sont tous éléments de $\mathcal{B}$ ;
- $\overline{A}$ est fini ou dénombrable, donc $\overline{A} \in \mathcal{B}$ (même raison), puis $A \in \mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ est stable par complémentaire.

$\mathcal{A}$ est donc la tribu engendrée par la famille des singletons.

b) Comme $\Omega$ n'est pas dénombrable, on a bien $P(\Omega) = 1$. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements deux à deux disjoints, on a une nouvelle fois deux cas : si tous les $A_n$ sont finis ou dénombrables, $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$ est fini ou dénombrable et on a bien :

$$P(A) = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Sinon, il existe $n_0$ tel que $\overline{A_{n_0}}$ est fini ou dénombrable, donc $\overline{A}$ l'est également. On en déduit que $A$ n'est pas dénombrable (sinon, $\Omega = A \bigcup \overline{A}$ le serait). Pour $n \neq n_0$, on a d'autre part $A_n \subset \overline{A_{n_0}}$, donc $A_n$ est au plus dénombrable. On a ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = P(A_{n_0}) = 1 = P(A)$$

et $P$ est bien une probabilité sur $\mathcal{A}$.

**7)** a) $\Omega \in \mathcal{A}$ car $f^{-1}(f(\Omega)) = \Omega$ (pour toute partie $A$ de $\Omega$, $A \subset f^{-1}(f(A))$).

b) Soit $A \in \mathcal{O}$. Il faut démontrer que $\overline{A} \in \mathcal{A}$, i.e. que $f^{-1}(f(\overline{A})) \subset \overline{A}$. Soit donc $x \in f^{-1}(f(\overline{A}))$. On a donc $f(x) \in f(\overline{A})$. Ainsi, il existe $y \in \overline{A}$ tel que $f(y) = f(x)$.Si $x$ était élément de $A$, $f(x)$ serait élément de $f(A)$ et $y$ serait élément de $f^{-1}(f(A)) = A$, ce qui n'est pas le cas. On en déduit que $x \in \overline{A}$. $\mathcal{A}$ est donc stable par complémentaire.

c) Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ et posons $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. On a :

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} f(A_i)\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(f(A_i)) = \bigcup_{i\in I} A_i = A$$

donc $\mathcal{A}$ est stable par réunion quelconque, et à plus forte raison par réunion dénombrable.

**8)** La série $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge (elle a pour somme $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$), donc son terme général $P(A_n)$ tend vers 0.

**9)** a) Pour $i \in \{1,2\}$, notons $A_i$ l'évènement "Le premier tirage se fait dans l'urne $U_i$". $(A_1, A_2)$ est un système complet d'évènement, donc :

$$p_1 = P(B_1) = P(B_1 \,|\, A_1)P(A_1) + P(B_1 \,|\, A_2)P(A_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}.$$

b) Pour $n \geq 1$, notons $N_n$ l'évènement "On a tiré une boule noire au $n$-ième tirage". Comme $(B_n, N_n)$ est un système complet d'évènements, on peut écrire :

$$p_{n+1} = P(B_{n+1} \,|\, B_n)P(B_n) + P(B_{n+1} \,|\, N_n)P(N_n) = \frac{2}{5}\, p_n + \frac{4}{7}\,(1 - p_n) = \frac{4}{7} - \frac{6}{35} p_n.$$

On obtient ensuite facilement l'expression de cette suite arithmético-géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{20}{41} + \frac{1}{82}\left(-\frac{6}{35}\right)^n.$$

**10)** Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $p_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$. On peut appliquer le théorème de sommation terme à terme :

- les fonctions $u_n :\ t \longmapsto t^n f(t)$ sont continues et intégrables sur $I = [0,1[$ ;
- la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $I$ vers la fonction continue $t \longmapsto \frac{f(t)}{1-t}$

donc on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t \in [0, +\infty].$$

On en déduit que $(p_n)_{n\geq 0}$ est une distribution de probabilité sur $\mathbb{N}$ si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

On peut remarquer que ceci impose d'avoir $f(1) = 0$ car sinon, $\dfrac{f(t)}{1-t}$ serait équivalent à $\dfrac{f(1)}{1-t}$ au voisinage de 1, qui n'est pas intégrable au voisinage de 1.

## Exercices Mines-Centrale

**11)** a) L'univers est l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\} \times \{\text{Rouge, Blanc}\}^{\mathbb{N}^*}$ : le résultat de l'expérience est un couple $(k, (c_n)_{n\geq 1})$ où $k$ est le numéro de l'urne choisir et $(c_n)_{n\geq 1}$ la suite des couleurs des boules tirées (avec remise) dans cette urne. Notons $A_k$ l'évènement "On a choisi l'urne $U_k$" et $p_k$ sa probabilité. Il existe un réel $\alpha$ telle que :

$$\forall\ k \in [\![1, n]\!],\ p_k = \alpha k.$$

Comme $p_1 + \cdots + p_N = 1$, on obtient $\alpha \sum_{k=1}^N p_k = 1$, soit $\alpha = \dfrac{2}{N(N+1)}$. Pour $k \in [\![1, N]\!]$, la probabilité de choisir l'urne $k$ est donc égale à $\dfrac{2k}{N(N+1)}$.

b) $(A_k)_{1\leq k\leq N}$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulles, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E_n) &= \sum_{k=1}^N P(E_n \,|\, A_k)\, P(A_k) = \sum_{k=1}^N \binom{2n}{n} \left(\frac{k}{N}\right)^n \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n \frac{2k}{N(N+1)} \\ &= \binom{2n}{n} \frac{2}{(N+1)} \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned} P(R_{2n+1} \cap E_n) &= \sum_{k=1}^{N} \binom{2n}{n} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} \left(1-\frac{k}{N}\right)^{n} \frac{2k}{N(N+1)} \\ &= \binom{2n}{n} \frac{2}{(N+1)} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+2} \left(1-\frac{k}{N}\right)^{n} \end{aligned}$$

et donc

$$P(R_{2n+1} \,|\, E_n) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+2} \left(1-\frac{k}{N}\right)^{n}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} \left(1-\frac{k}{N}\right)^{n}}$$

c) Si $p=0$, $I_{n,p} = \dfrac{1}{n+1}$. Si $p \geq 1$, une intégration par partie donne :

$$I_{n,p} = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(1-x)^p\right]_0^1 + \frac{p}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{p-1}\,\mathrm{d}x = \frac{p}{n+1}\, I_{n+1,p-1}$$

d'où par récurrence évidente :

$$\forall n, p \in \mathbb{N},\ I_{n,p} = \frac{p!\,n!}{(n+p+1)!}$$

d) Le dénominateur et le numérateur de $P(R_{2n+1} \,|\, E_n)$ sont, à un facteur $1/N$ près, des sommes de Riemann des intégrales $I_{n+2,n}$ et $I_{n+1,n}$ pour la subdivision de pas constant $1/N$. Comme cette seconde intégrale est non nulle, on en déduit :

$$P(R_{2n+1} \,|\, E_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}} = \frac{n+2}{2n+3}.$$

**12)** a) On modélise l'expérience de la façon suivante : l'univers est $\Omega = [\![1,n]\!]^n$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme : la suite $\omega = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ représente le cas où, pour tout $i$, la boule de numéro $i$ est placée dans l'urne numéro $k_i$. Nous avons donc :

$$p_n = \frac{n!}{n^n}$$

puisque chaque urne contient une et une seule boule si et seulement si $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ est une permutation de $[\![1,n]\!]$.

b) Nous avons, pour $n \geq 1$ : $\dfrac{p_n}{p_{n+1}} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n < 1$ donc la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

Cette suite est donc convergente (elle est décroissante et minorée par 0) : si elle convergeait vers une limite non nulle, $\dfrac{p_n}{p_{n+1}}$ tendrait vers 1 quand $n$ tend vers l'infini, ce qui n'est pas le cas, puisque $\dfrac{p_n}{p_{n+1}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$ tend vers $1/e$. On en déduit que $p_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini.

**13)** La situation est représentée par l'univers $\Omega = \{Pile, Face\}^n$ muni de la probabilité uniforme. En notant $A_n$ : "on obtient Face au plus une fois" et $B_n$ : "on obtient Face et Pile au moins une fois", nous avons :

$$P(A_n) = \frac{n+1}{2^n},\ P(B_n) = 1 - \frac{2}{2^n} = \frac{2^n-2}{2^n} \text{ et } P(A_n \cap B_n) = \frac{n}{2^n}$$

puisqu'il y a exactement $(n+1)$ issues réalisant $A_n$, 2 issues ne réalisant pas $B_n$ et $n$ issues réalisant à la fois $A_n$ et $B_n$. Les évènements sont donc indépendants si et seulement si $(n+1)(2^n-2) = n\,2^n$, i.e. si et seulement si $2^n = 2+2n$ : $n=3$ est la seule solution de cette équation.

**14)** a) Le plus facile est de numéroter les boules : $r_1, r_2$ sont les deux boules rouges, $n_1, n_2, n_3$ les trois boules noires et $b_1, b_2, \dots, b_N$ les $N$ boules bleues. L'univers est l'ensemble des parties à 2 éléments de l'ensemble $\{r_1, r_2, n_1, n_2, n_3, b_1, b_2, \dots b_N\}$, muni de la tribu de ses parties et de la probabilité uniforme.

b) Il suffit de compter le nombre d'issues favorables : il y a 3 tirages unicolores rouge, 1 tirage unicolore noir et $\binom{N}{2}$ tirages unicolores bleu, ce qui fait $3 + 1 + \dfrac{N(N-1)}{2} = \dfrac{N^2 - N + 8}{2}$ cas favorables et la probabilité cherchée vaut :

$$p = \frac{N^2 - N + 8}{(N+5)(N+4)}$$

c) Il y a $\binom{N}{2}$ issue donnant 2 boules bleues, donc la probabilité $q$ d'obtenir 2 boules rouges vaut $\dfrac{N(N-1)}{(N+5)(N+4)}$. Il sufit donc de résoudre :

$$q = \frac{1}{6} \iff N^2 - 3N - 4 = 0 \iff N \in \{-1, 4\}.$$

Il faut donc choisir $N = 4$ pour avoir une chance sur 6 de tirer deux boules bleues, et $p$ sera alors égal à $\dfrac{5}{18}$.

**15)** Pour $k \in [\![0, N]\!]$, notons $U_k$ l'évènement : "on a choisi l'urne numéro $k$". Le choix de l'urne se faisant "au hasard", ce qu'il faut traduire par "avec équiprobabilité", chaque $U_k$ est de probabilité $\dfrac{1}{N+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n$ l'évènement "on a tiré une boule rouge au $n$-ième tirage". Nous cherchons donc $p_n = P(R_{n+1} \,|\, R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n)$. Comme les $U_k$ forment un système complet d'évènements, nous pouvons appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \sum_{k=0}^{N} P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n \,|\, U_k) \times P(U_k) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

puisque la probabilité de tirer une boule rouge quand on a choisi la $k$-ième urne vaut $\dfrac{k}{N}$ et que les tirages sont indépendants. La même formule appliquée au rang $n+1$ permet donc d'écrire :

$$p_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n}} = \frac{\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n}}$$

On reconnaît alors des sommes de Riemann :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n \xrightarrow[N \to +\infty]{} \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

et donc $p_n$ tend vers $\dfrac{n+1}{n+2}$ quand $N$ tend vers l'infini.

**16)** Notons $p_n$ la probabilité cherchée. Nous pouvons modéliser cette transmission par un schéma de Bernoulli de paramètre $(n, p)$, l'issue $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ étant définie par :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si la personne } P_{i-1} \text{ a transmis l'information qu'elle a reçue} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut faire le calcul de façon combinatoire : l'information arrive correctement à $P_n$ si et seulement si elle a été incorrectement transmise un nombre pair de fois, soit si et seulement si il y a un nombre pair de $i$ tels que $\varepsilon_i = 0$. On en

déduit :

$$p_n = \sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} p^{n-k}(1-p)^k.$$

Cette somme se calcule à partir de la formule du binôme de Newton :

$$\forall\, X, Y \in \mathbb{R}, (X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$$

qui donne

$$\forall\, X, Y \in \mathbb{R}, (-X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^k Y^{n-k}$$

soit, en sommant ces deux égalités :

$$\forall\, X, Y \in \mathbb{R}, (X+Y)^n + (-X+Y)^n = 2 \sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$$

En choisissant $X = 1-p$ et $Y = p$, nous obtenons $p_n = \dfrac{1+(2p-1)^n}{2}$.

On peut aussi obtenir une relation de récurrence, grâce à la formule des probabilités totales :

$$p_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 0,\ p_{n+1} = p_n P(\varepsilon_{n+1} = 1) + (1-p_n)P(\varepsilon_{n+1} = 0) = p_n(2p-1) + 1 - p$$

On retrouve facilement l'expression de la suite arithmético-géométrique $(p_n)_{n\geq 0}$.

Si $p \in ]0,1[$, $p_n$ tend vers $1/2$ quand $n$ tend vers l'infini. Autrement-dit, quand $n$ est grand, $P_n$ n'a qu'environ une chance sur 2 de recevoir la bonne information, quel que soit $p$.

**17)** Notons $M$ l'évènement "La personne est malade" et $T$ l'évènement "Le test est positif". L'énoncé nous donne :

$$P(M) = \frac{1}{1000},\ P(T \,|\, M) = \frac{99}{100},\ P(T \,|\, M^c) = \frac{2}{1000}.$$

Nous avons alors :

$$P(M \,|\, T) = \frac{P(T \,|\, M)\, P(M)}{P(T \,|\, M)\, P(M) + P(T \,|\, M^c)\, P(M^c)} = \frac{55}{166} \simeq 0,33$$

Il y a donc seulement une chance sur trois qu'une personne détectée malade le soit effectivement : environ 2/3 des personnes détectées malades seront donc inquiétées inutilement.

**18)** Choisissons l'univers $\Omega = \{(F,F),(F,G),(G,F),(G,G)\}$ muni de la probabilité uniforme pour décrire les 4 situations possibles ($(F,G)$ représente la situation où le premier enfant de mon voisin est une fille et le second est un garçon).

a) Les évènements "Je sais qu'il a une fille" et "Mon voisin a au moins un garçon" s'écrivent donc :

$$A = \{(F,F),(F,G),(G,F)\} \text{ et } B = \{(F,G),(G,F),(G,G)\}.$$

La probabilité demandée est $P(B \,|\, A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{2}{3}$.

b) Cette fois-ci, nous considérons les évènements $A = \{(F,F),(G,F)\}$ et $B = \{(F,G),(G,F),(G,G)\}$, et $P(B \,|\, A) = \dfrac{1}{2}$, ce qui est une conséquence de l'indépendance des sexes des deux enfants, cachée derrière le choix de la probabilité uniforme sur $\Omega$.

c) Le modèle est cette fois-çi différent : l'univers est $\Omega = \{F, G\} \times \{F, G\} \times \{1, 2\}$, où l'élément 1 ou 2 désigne le numéro de l'enfant qui a ouvert la porte. Ainsi, $(F, G, 1)$ correspond au cas au l'enfant 1 est une fille, l'enfant 2 est un garçon et c'est l'enfant 1 qui a ouvert la porte. On munit $\Omega$ de la probabilité uniforme, ce qui traduit l'indépendance mutuelle des évènements "Le premier enfant est une fille", "Le second enfant est une fille" et "C'est le premier enfant qui a ouvert la porte".

Les évènements "C'est une fille qui a ouvert la porte" et "L'enfant qui n'a pas ouvert la porte est un garçon" s'écrivent donc :

$$A = \{(F, F, 1), (F, F, 2), (F, G, 1), (G, F, 2)\} \text{ et } B = \{(F, G, 1), (G, F, 2), (G, G, 1), (G, G, 2)\}.$$

La probabilité demandée est $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{1}{2}$.

**19)** Nous travaillons avec $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ muni de la probabilité uniforme.

a) Notons $n = m \times d$ : $A_m = \{m, 2m, \ldots, dm\}$ est de cardinal $d$, donc $P(A_m) = \dfrac{d}{n} = \dfrac{1}{m}$.

b) Si $i_1, \ldots, i_q$ sont des entiers deux à deux distincts compris entre 1 et $k$, nous avons :

$$A_{p_{i_1}} \cap \cdots \cap A_{p_{i_q}} = A_{p_{i_1} \ldots p_{i_q}}$$

et donc

$$P(A_{p_{i_1}} \cap \cdots \cap A_{p_{i_q}}) = P(A_{p_{i_1} \ldots p_{i_q}}) = \frac{1}{p_{i_1} \ldots p_{i_q}} = \frac{1}{p_{i_1}} \times \cdots \times \frac{1}{p_{i_q}} = P(A_{p_{i_1}}) \times \cdots \times P(A_{p_{i_q}})$$

donc les évènements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_k}$ sont mutellement indépendants.

c) On en déduit que les évènements contraires sont indépendants :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_{p_i}}\right) = \prod_{i=1}^{k} P(\overline{A_{p_i}}) = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

mais $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_{p_i}} = \{k \in \{1, \ldots, n\},\ k \wedge n = 1\}$, donc $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} \overline{A_{p_i}}\right) = \dfrac{\varphi(n)}{n}$, ce qui donne bien

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

**20)** Nous allons construire des évènements $A, B, C$ tels que $A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C$, avec $A$ et $B$ indépendants. Considérons une expérience aléatoire consistant à lancer deux dés non pipés. Soient alors les évènements :

$A$ : "le premier dé tombe sur 1" $B$ : "le second dé tombe sur 4" $C$ : "la somme des deux dés vaut 5"

$A$ et $B$ sont indépendant mais ne le sont pas conditionnellement à $C$ :

- $P(A \text{ et } B \mid C) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(C)} = \dfrac{1}{4}$ ;
- $P(A \mid C) \times P(B \mid C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} \times \dfrac{P(B \cap C)}{P(C)} = \dfrac{1}{16}$.

**21)** On peut choisir $\Omega$ égal à l'ensemble des $n$-uplets de dates d'anniversaire, le $i$-ème élément du $n$-uplet étant égal à la date d'anniversaire de la $i$-ième personne. Le cardinal de $\Omega$ est $365^n$ et on munit $\Omega$ de la probabilité uniforme (cela revient à dire qu'il y a indépendance entre les dates de naissance des $n$ personnes et que chaque date de naissance est

équiprobable). L'évènement "Les $n$ personnes sont nées à des jours différents" est de cardinal $365\times364\times\cdots\times(365-n+1)$, donc la probabilité cherchée vaut :

$$p_n = 1 - \frac{365\times364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n} = 1 - \prod_{i=1}^{n-1}\frac{365-i}{365}.$$

Cette suite (finie) est strictement croissante et on obtient facilement $p_{22} < 0,5 < p_{23} < p_{56} < 0,99 < p_{57}$. Ainsi, dans une classe d'école primaire, on a environ une chance sur deux que deux enfants de la classe soient nés le même jour.

**22)** a) $d_1 = 0$ (la seule bijection de $\mathfrak{S}_1$ est l'identité), $d_2 = 1$ (la transposition $(1,2)$ est la seule permutation de $\mathfrak{S}_2$ sans point fixe) et $d_3 = 2$ (les seules permutations sans point fixe de $\mathfrak{S}_3$ sont les permutations circulaires $(1,2,3)$ et $(1,3,2)$).

Pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, nous noterons $F_\sigma = \{k\in[\![1,n]\!],\ \sigma(k)=k\}$ l'ensemble des points fixes de $\sigma$.

b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathfrak{S}_n$ est la réunion disjointe des ensembles $X_A = \{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\ F_\sigma = A\}$ pour $A$ décrivant toutes les parties de $[\![1,n]\!]$. Pour $A\subset[\![1,n]\!]$, de cardinal $k$, $X_A$ est de cardinal $d_{n-k}$, puisqu'un élément de $X_A$ est entièrement déterminé par le dérangement qu'il définit sur le complémentaire de $A$. Nous avons donc, en remarquant qu'il y a $\binom{n}{k}$ parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal $k$ :

$$n! = \sum_{A\subset[\![1,n]\!]}\#(X_A) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}d_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_k$$

Il est ainsi possible de calculer les $d_n$ par récurrence. La fonction suivante calcule en même temps les coefficients binomiaux, qu'elle stocke dans le vecteur $C$ et les valeurs successives des factorielles, les coefficients $d_k$ étant stockés dans le vecteur $D$ :

```
def d(n):
    fact=1
    D=[1]
    C=[1]
    for k in range(1,n+1):
        fact=fact*k
        C.append(1)
        for i in range(k-1,0,-1):
            C[i]=C[i]+C[i-1]
        s=fact
        for i in range(k):
            s=s-C[i]*D[i]
        D.append(s)
    return(D[-1])
```

c) Il suffit de faire un produit de DL (pour $n\in\mathbb{N}$ quelconque) :

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}+O(x^{n+1})\right)\times\left(\sum_{k=0}^{n}x^k+O(x^{n+1})\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{k!}\right)x^k+O(x^{n+1})$$

d'où $a_n = n!\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{k!}$.

d) La méthode est la même, en partant de l'égalité $\frac{1}{1-x} = f(x)\,e^x$ :

$$\sum_{k=0}^{n}x^k+O(x^{n+1}) = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\,x^k+O(x^{n+1})\right)\times\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+O(x^{n+1})\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{a_i}{i!(k-i)!}\right)x^k+O(x^{n+1})$$

d'où par identification de ces deux DL :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, 1 = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i!(n-i)!}$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

e) Ainsi, la suite $(a_n)$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(d_n)$ : comme $a_0 = 1 = d_0$, on a $a_n = d_n$ pour tout $n$, ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{d_n}{n!} = \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

On en déduit que $p_n$ tend vers $\dfrac{1}{e}$ quand $n$ tend vers l'infini. Ainsi, quand $n$ est assez grand, il y a environ une chance sur 3 qu'une permutation choisie au hasard ne possède aucun point fixe.

**23)** On peut représenter une diagonale comme un couple $(i, j)$ avec $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i < j$ et $j$ distinct de $i-1$, de $i$ et de $i+1$ modulo $n$. Ces couples se décomposent, selon les valeurs de $i$, en :

- les couples $(1, j)$ où $3 \leq j \leq n-1$ ;
- les couples $(i, j)$ où $2 \leq i \leq n-2$ et $i+2 \leq j \leq n$.

Il y a ainsi $n - 3 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n-2} n - i - 1 = \frac{n(n-3)}{2}$ diagonales et nous noterons $\mathcal{D}$ l'ensemble des $(i, j)$ vérifiant ces conditions.

Il faut ensuite s'entendre sur ce que signifie que deux diagonales sont sécantes : nous prendrons comme définition que deux diagonales sont sécantes si elles se coupent ailleurs qu'en un sommet. Par exemple, les diagonales $\{A_1, A_3\}$ et $\{A_2, A_4\}$ sont sécantes mais les diagonales $\{A_1, A_3\}$ et $\{A_3, A_4\}$ ne le sont pas. Pour finir, nous supposerons que "choisir deux diagonales au hasard" consiste à choisir uniformément et indépendamment deux diagonales : l'univers de l'expérience est donc l'ensemble $\mathcal{D}^2$ muni de la probabilité uniforme. Nous noterons $D_1$ et $D_2$ les diagonales choisies et $A$ l'événement "$D_1$ et $D_2$ sont sécantes". Pour chaque diagonale $D_1 = (i, j)$, il y a exactement $(j-i-1)(n-j+i-1)$ diagonales $D_2$ sécantes à $D_1$ (on doit choisir un sommet de $D_2$ dans $[\![i, j[\![$ et l'autre sommet dans $\{1, \ldots, n\} \setminus [\![i, j]\!]$, ce qui fait $j-i-1$ choix pour le premier sommet et $n-j+i-1$ pour le second). On a donc :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} (j-i-1)(n-j+i-1)}{\left(\mathrm{Card}(\mathcal{P})\right)^2} \\ &= \frac{4}{n^2(n-3)^2} \left( \sum_{j=3}^{n-1} (j-2)(n-j) + \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{j=i+2}^{n} (j-i-1)(n-j+i-1) \right) \end{aligned}$$

Des calculs élémentaires donnent ensuite $P(A) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{3n(n-3)}$.

Le calcul est un peu plus rapide si l'on dénombre les couples $(D_1, D_2)$ de $A$ de la façon suivante : chaque diagonale $D_1 = (i, j)$ sépare les points de $\mathcal{P}$ distincts de ses extrémités en deux paquets, de tailles respectives $k_1 = j - i - 1$ et $k_2 = n - j + i - 1$ ; le *type* de $D_1$ est par définition la valeur $k = \min(k_1, k_2)$. On a en particulier $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$, puisque $k_1 + k_2 = n - 2$. Pour chaque $D_1$ de type $k$, il existe exactement $k(n-2-k)$ diagonales $D_2$ sécantes avec $D_1$. Nous avons donc :

$$P(A) = \frac{4}{n^2(n-3)^2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} k(n-2-k)a_k$$

en notant $a_k$ le nombre de diagonales de type $k$.

Si $n$ est pair, avec $n = 2q$, il y a $n$ diagonales de type $k$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, q-2\}$ mais seulement $q$ diagonales de type $q-1$. On obtient donc :

$$P(A) = \frac{4}{(2q)^2(2q-3)^2}\left(q(q-1)^2 + 2q\sum_{k=1}^{q-2} k(2q-2-k)\right) = \frac{(2q-1)(q-1)}{3q(2q-3)} = \frac{(n-1)(n-2)}{3n(n-3)}.$$

Si $n$ est impair, avec $n = 2q+1$, il y a $n$ diagonales de type $k$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, q-1\}$, donc :

$$P(A) = \frac{4}{(2q+1)^2(2q-2)^2}\left((2q+1)\sum_{k=1}^{q-1} k(2q-1-k)\right) = \frac{q(2q-1)}{3(q-1)(2q+1)} = \frac{(n-1)(n-2)}{3n(n-3)}.$$

**24)** Notons $p_\infty$ la probabilité de ne jamais tirer deux piles à la suite (on va montrer que cette probabilité est nulle). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons :

- $r_n$ le résultat du $n$-ième tirage ;
- $A_n$ le nombre de suites $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ ne contenant pas deux piles consécutifs ;
- $x_n$ = le nombre de suites $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ ne contenant pas deux piles consécutifs et se terminant pas pile. ;
- $y_n$ = le nombre de suites $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ ne contenant pas deux piles consécutifs et se terminant pas face.

Nous avons $x_1 = y_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ :

$$x_{n+1} = y_n \text{ et } y_{n+1} = x_n + y_n$$

On élimine facilement la suite $x$ :

$$\forall n \geq 1,\ y_{n+2} = x_{n+1} + y_{n+1} = y_n + y_{n+1}$$

Comme $y_0 = 1$ et $y_2 = 2$, on pose $y_0 = 1$ pour que la relation de récurrence soit également valable au rang $n = 0$ : $(y_n)$ est donc la suite de Fibonacci, définie par $y_0 = y_1 = 1$ et $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, notée habituellement $(F_n)_{n\geq 0}$

On en déduit que $x_n = y_{n-1} = F_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Nous obtenons ainsi $A_n = x_n + y_n = F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. Comme la probabilité de ne pas avoir obtenu deux piles consécutifs après les $n-1$ premiers tirages est égale à $\frac{A_{n-1}}{2^{n-1}}$, on en déduit :

$$q_n + p_\infty = \frac{F_n}{2^{n-1}}$$

Comme $q_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini (c'est le reste d'une série convergente), on a :

$$p_\infty = \lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{2^n} = 0,$$

puisque $F_n$ est de l'ordre de grandeur de $\Phi^n$, où $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui est strictement inférieur à 2.

Nous obtenons donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = \frac{F_n}{2^{n-1}} \text{ et } p_n = q_n - q_{n+1} = \frac{2F_n - F_{n+1}}{2^n} = \frac{F_n - F_{n-1}}{2^n} = \frac{F_{n-2}}{2^n}$$

On pouvait aussi retrouver la valeur de $p_n$ sans passer par $q_n$ : $p_n = \frac{x_{n-1}}{2^n} = \frac{F_{n-2}}{2^n}$. En effet, l'évènement "il faut attendre le $n$-ième tirage pour voir apparaître deux piles consécutifs dans la suite infinie $(r_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$" est formé des suites de la forme $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, pile, \dots, r_{n+1}, r_{n+2}, \dots)$ où $(r_1, \dots, r_{n-1})$ est une suite quelconque ne contenant pas deux piles consécutifs et se terminant par face.

**25)** a) La suite d'évènements $\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc $P(A)$ est la limite de $P\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Or :

$$0 \leq P\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car la série de terme général $P(A_k)$ est convergente : on en déduit que $P(A) = 0$.

b) Nous avons toujours $P(B_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(A)$ avec $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$. Pour utiliser l'indépendance des $A_k$, il faut faire apparaître des intersections, en passant aux complémentaires :

$$P(B_n) = 1 - P(\overline{B_n}) = 1 - P\left(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}\right).$$

Pour montrer que $P(A) = 1$, il suffit de montrer que $P(\overline{B_n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite $\bigcap_{n\leq k\leq N} \overline{A_k}$ décroît avec $N$, on a :

$$\begin{aligned} P(\overline{B_n}) &= \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n\leq k\leq N} \overline{A_k}\right) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=n}^{N} P(\overline{A_k}) \text{ car les } \overline{A_k} \text{ sont mutellement indépendants} \\ &= \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=n}^{N} (1 - P(A_k)) \end{aligned}$$

Pour manipuler un "produit infini", on prend le logarithme :

$$\forall N \geq n,\ \ln\left(\prod_{k=n}^{N}(1-P(A_k))\right) = \sum_{k=n}^{N} \ln(1-P(A_k)) \leq -\sum_{k=n}^{N} P(A_k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\infty$$

puis, en composant par l'exponentielle :

$$\prod_{k=n}^{N}(1-P(A_k)) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

ce qui achève la preuve.

Notons $\Sigma$ l'alphabet utilisé ($\Sigma$ contient tous les caractères nécessaires, en particulier les symboles de ponctuation, le "blanc", le retour à la ligne, ...). Nous avons donc une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\Sigma$. Le roman de Victor Hugo est un mot $u = a_1 \dots a_N$ sur l'alphabet $\Sigma$. Nous devons donc démontrer que l'évènement :

$$E = \left(\exists n \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1,\dots,N\},\ X_{n+i} = a_i\right)$$

est presque sûr.

Nous allons utiliser la question précédente, en séparant les "secteurs" où l'on cherche le facteur $u$, pour assurer l'indépendance des évènements ; on pose donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = (X_{nN+1} = a_1 \text{ et } X_{nN+2} = a_2 \text{ et } \dots \text{ et } X_{nN+N} = a_N)$$

Les $A_n$ sont mutuellement indépendants et de même probabilité non nulle $\dfrac{1}{\mathrm{Card}(\Sigma)}$, qui est bien le terme général d'une série divergente. On en déduit que l'évènement $A = \bigcap_{n\geq 0}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$ est presque certain. Autrement-dit, on a presque

sûrement :

$$\forall n \geq 1,\ \exists k \geq n,\ X_{nN+1} = a_1 \text{ et } X_{nN+2} = a_2 \text{ et } \ldots \text{ et } X_{nN+N} = a_N.$$

Ainsi, le texte de Victor Hugo a été écrit presque sûrement une infinité de fois.

**26)** a) La loi faible des grands nombres dit que $\dfrac{N_k}{n}$ tend vers $p_k$ quand $n$ tend vers l'infini, dans le sens où pour $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{N_k}{n} - p_k\right| > \varepsilon\right)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. En terme vague, on s'attend à ce que $N_k$ soit proche de $np_k$ quand $n$ est grand.

b) L'expérience aléatoire est décrite par l'univers $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^n$, muni de la probabilité :

$$\forall \omega = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = p_{a_1} p_{a_2} \ldots p_{a_n} = p_1^{N_1(\omega)} p_2^{N_2(\omega)} p_3^{N_3(\omega)} p_4^{N_4(\omega)} p_5^{N_5(\omega)} p_6^{N_6(\omega)}.$$

Pour $k$ compris entre 1 et 6, notons $q_k = np_k$, on a donc :

$$P(N_1 = q_1, \ldots, N_6 = q_6) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \text{ t.q.} \\ N_1(\omega) = q_1, \ldots, N_6(\omega) = q_6}} P(\{\omega\})$$

$$= (p_1)^{q_1} \ldots (p_6)^{q_6} \operatorname{Card}(\{\omega \in \Omega,\ N_1(\omega) = q_1,\ \ldots, N_6(\omega) = q_6\})$$

$$= (p_1)^{q_1} \ldots (p_6)^{q_6} \binom{n}{q_1} \binom{n-q_1}{q_2} \binom{n-q_1-q_2}{q_3} \binom{n-q_1-q_2-q_3}{q_4} \binom{n-q_1-q_2-q_3-q_4}{q_5}$$

puisqu'on construit une et une seule fois chaque élément de l'ensemble en choisissant les $q_1$ positions des "1" parmi les $n$ positions, puis les $q_2$ positions des "2" parmi les $n - q_1$ positions restantes, et ainsi de suite (on n'a plus de choix à faire pour choisir les $q_6$ positions des "6", puisque qu'il reste $n - q_1 - q_2 - q_3 - q_4 - q_5 = q_6$ places libres).

**27)** a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, notons $A_{n,k}$ l'évènement "on a tiré PILE aux tirages $n+1, n+2, \ldots, n+k''$. Nous avons : $A_n \subset A_{n,k}$, donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(A_n) \leq P(A_{n,k}) = \frac{1}{2^k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

On en déduit donc que $P(A_n) = 0$.

La suite $(A_n)$ est croissante et $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$, donc $P(A) \lim_{+\infty} P(A_n) = 0$, grâce à la propriété de continuité croissante.

b) La fonction test(l) simule un tirage et renvoie 1 s'il n'y a pas deux faces consécutives et 0 sinon :

```
import numpy.random as rd

def test(l):
   k=0 # compteur du nombre de lancers
   s=0 # nombre de 0 en cours de lecture
   while k < l and s < 2:
      if rd.randint(0, 2) == 0:
         k += 1
         s += 1
      else:
         k += 1
         s = 0
   if s < 2: # on n'a pas fait 2 faces consécutivement
      return(1)
```

```
   else:
   return(0)
```

La fonction estimation fait ensuite la moyenne des résultats de $n$ tests :

```
def estimation(l, n):
   s = 0
   for k in range(n):
      s += test(l)
   return(s / n)
```

On obtient les résultats :

```
>>> estimation(2,1000000)
   0.750021

>>> estimation(3,1000000)
   0.625503

>>> 5/8
   0.625

>>> estimation(4,1000000)
   0.500282
```

Ces valeurs sont des estimations des probabilités $p_2$, $p_3$ et $p_4$ de ne pas obtenir deux FACES consécutivement après 2, 3 ou 4 lancers. On travaille ici sur les espaces $\{00, 01, 10, 11\}$, $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ et $\{0000, 0001, \dots, 1110, 1111\}$ muni de leurs probabilités uniformes : un simple calcul de dénombrement donne $p_2 = \dfrac{3}{4}$ et $p_3 = \dfrac{5}{8}$. Pour le calcul de $p_4$, on peut éviter d'écrire les 16 suites possibles en remarquant que les suites ne contenant pas deux 0 consécutifs doivent commencer par l'une des 5 suites de l'ensemble $\{010, 011, 101, 110, 111\}$, ce qui donne les possibilités $\{0101, 0110, 0111, 1010, 1011, 1101, 1110, 1111\}$, puis $p_4 = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$.

c) On sait que les événements $(\overline{C_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants, résultat dont on peut rappeler la démonstration :

- on montre facilement que si deux évènements $A$ et $B$ sont indépendants, $A$ et $\overline{B}$ le sont également : $A$ est la réunion disjointe de $A\cap B$ et de $A\cap\overline{B}$, donc $P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)P(\overline{B})$.
- on en déduit ensuite que si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants, $(A_1, \dots, A_{n-1}, \overline{A_n})$ est également une famille d'évènements mutuellement indépendants. En effet, si l'on extrait une sous-famille de cette famille, soit cette sous-famille ne contient pas $\overline{A_n}$ et la propriété voulue est vérifiée par indépendance des $A_i$, soit elle est de la forme $(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}, \overline{A_n})$ avec $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1$. Les évènements $A = A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}$ et $A_n$ sont indépendants, donc $A$ et $\overline{A_n}$ le sont également : on en déduit que
$$P(A_{i_1}\cap\dots A_{i_k}\cap\overline{A_n}) = P(A\cap\overline{A_n}) = P(A)P(\overline{A_n}) = P(A_{i_1})\dots P(A_{i_k})P(\overline{A_n})$$
- une récurrence évidente montre alors que les évènements $(\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n})$ sont mutuellement indépendants : ainsi, les évènements $(\overline{C_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants, puisqu'un nombre fini quelconque d'entre eux le sont.

Notons $B_n = \bigcup_{k\geq n} C_k$. Comme la suite $B_n$ est décroissante, nous avons $P(B_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(\overline{\lim}\, A_n)$.

En passant aux complémentaires :

$$P(B_n) = 1 - P(\overline{B_n}) = 1 - P\left(\bigcap_{k\geq n} \overline{C_k}\right).$$

Comme la suite $\bigcap_{n=k}^{N} \overline{C_k}$ décroît avec $N$, on a :

$$\begin{aligned} P(\overline{B_n}) &= \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n\leq k\leq N} \overline{C_k}\right) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=n}^{N} P(\overline{C_k}) \text{ car les } \overline{C_k} \text{ sont mutellement indépendants} \\ &= \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=n}^{N} (1 - P(C_k)) \end{aligned}$$

Pour manipuler un "produit infini", on prend le logarithme :

$$\forall N \geq n,\ \ln\left(\prod_{k=n}^{N}(1-P(C_k))\right) = \sum_{k=n}^{N} \ln(1-P(C_k)) \leq -\sum_{k=n}^{N} P(C_k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\infty$$

puis, en composant par l'exponentielle :

$$\prod_{k=n}^{N}(1-P(C_k)) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \text{ (car la série diverge)}$$

On en déduit que $P(\overline{B_n}) = 0$, puis que $P(B_n) = 1$ et $P(\overline{\lim} A_n) = 1$.

**28)** a) Appelons "partie" chaque couple de tir. Le joueur 1 gagne à la $n$-ième partie (pour $n \geq 1$) si les deux joueurs ont ratés leurs $n-1$ premiers tirs et s'il a réussi son $n$-ième tir. La probabilité de cet évènement est donc égale à $p_1(1-p_1)^{n-1}(1-p_2)^{n-1}$. On en déduit que la probabilité $p$ que le joueur 1 gagne est égale à :

$$p = \sum_{n=1}^{+\infty} p_1(1-p_1)^{n-1}(1-p_2)^{n-1} = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}.$$

b) Notons $A_n$ l'évènement "Le jeu n'est pas terminé après $n$ parties". $A_n$ se réalise quand les deux joueurs ont raté leurs $n$ premiers tirs, donc $P(A_n) = (p_1p_2)^n$. Comme l'évènement $A$ : "Le jeu ne se termine pas" est l'intersection (décroissante) des $A_n$, on a $P(A) = 0$ (car $p_1p_2 < 1$) et le jeu se termine presque sûrement.

c) Le jeu est équitable si et seulement si $p = \frac{1}{2}$, i.e. si et seulement si $\frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2} = \frac{1}{2}$, soit si et seulement si $p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}$. Un tel choix de $p_2$ est possible quand $p_1 \in ]0, \frac{1}{2}[$, puisqu'il faut avoir $p_2 \in ]0,1[$.

**29)** Une partie $P$ sera représentée par un vecteur $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ où $X$ et $Y$ sont les deux joueurs participant à la partie et où $X$ est le vainqueur de la partie. On peut remarquer que s'il n'y a pas eu de vainqueur après les $n$ premières parties, le jeu est de l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{cases} P_1 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},\ P_5 = \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix}\ P_6 = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}, \ldots,\ P_n = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ P_1 = \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix},\ P_5 = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\ P_6 = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}, \ldots,\ P_n = \begin{pmatrix} Z \\ T \end{pmatrix} \end{cases}$$

où $X, Y, Z, T$ dépendent de la valeur de $n$ modulo 3. La probabilité de l'évènement $A_n$ : "le jeu n'est pas terminé après la $n$-ième partie" est donc égale à $2\left(\frac{1}{2}\right)^n$. La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, donc le théorème de continuité monotone donne :

$$P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$$

ce qui signifie que le jeu s'arrête presque sûrement.

Pour $n \geq 1$, notons $C_n$ l'évènement "Le joueur C gagne le jeu à la $n$-ième partie". On a $P(C_1) = P(C_2) = 0$ puisque le joueur $C$ ne participe pas à la première partie. Si $n \geq 3$, pour que le joueur $C$ gagne à la $n$-ième partie, il faut qu'il n'y ait pas de gagnant après les $n-1$ premières parties, que le joueur $C$ ait gagné la $(n-1)$-ième partie et qu'il gagne la $n$-ième partie. Comme les parties gagnées par le joueur $C$ sont les parties $P_{3k+2}$, on a donc deux cas :

• si $n-1$ est de la forme $3k+2$, il y a deux parties qui amène à une victoire du joueur $C$ :

$$\begin{cases} P_1 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},\ \ldots,\ P_{n-1} = \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix},\ P_n = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} \\ P_1 = \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix},\ \ldots,\ P_{n-1} = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix},\ P_n = \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix} \end{cases}$$

et donc $P(C_n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

• sinon, le joueur $C$ ne peut gagner à la $n$-ième partie et $P(C_n) = 0$.

Nous avons donc :

$$\forall k, \in \mathbb{N},\ P(C_{3k+1}) = 0,\ P(C_{3k+2}) = 0 \text{ et } P(C_{3k+3}) = \frac{1}{2^{3k+2}}.$$

La probabilité $p_C$ que le joueur $C$ gagne est donc égale à :

$$p_C = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{3k+2}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{8^k} = \frac{2}{7}.$$

Par symétrie, les probabilités $p_A$ et $p_B$ que les joueurs $A$ et $B$ gagnent sont égales et $p_A + p_B + p_C = 1$ puisque le jeu termine presque sûrement. On obtient donc :

$$p_A = p_B = \frac{5}{14} \text{ et } p_C = \frac{2}{7}.$$

**30)** a) On a $1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{n^s} = \lambda\,\zeta(s)$, donc $\lambda = \frac{1}{\zeta(s)}$.

b) $P(A_p) = \sum_{n\in A_p} P(\{n\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(kp)^s} = \frac{1}{p^s}$.

c) Soient $p_1, \ldots, p_n$ des nombres premiers deux à deux distincts. On a :

$$A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \cdots \cap A_{p_n} = A_{p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n} = A_{p_1 p_2 \ldots p_n}$$

car les $p_i$ sont deux à deux premiers entre eux. On en déduit :

$$P(A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \cdots \cap A_{p_n}) = P(A_{p_1 p_2 \ldots p_n}) = \frac{1}{(p_1 \ldots p_n)^s} = \frac{1}{p_1^s} \times \cdots \times \frac{1}{p_n^s} = P(A_{p_1}) \ldots P(A_{p-n})$$

donc les évènements $A_p$, pour $p \in \mathcal{P}$, sont mutuellement indépendants.

d) On a $\{1\} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p}$ car 1 est le seul élément de $\mathbb{N}^*$ a ne pas avoir de facteur premier. En numérotant les éléments de $\mathcal{P}$ :

$$\mathcal{P} = \{p_i,\ i \geq 1\}$$

on a donc :

$$\lambda = P(\{1\}) = P\left(\bigcap_{i\geq 1} \overline{A_{p_i}}\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_{p_i}}\right)$$

par le théorème de la limite monotone (la suite $\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_{p_i}}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante). Comme les $A_p$ sont mutuellement indépendants, les $\overline{A_p}$ le sont également, d'où :

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} P(\overline{A_{p_1}}) \dots P(\overline{A_{p_n}}) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

En passant à l'inverse, nous obtenons :

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{p^s}{p^s - 1}.$$

e) Montrons le résultats par l'absurde : supposons que $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$ converge. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall s > 1,\ 0 \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) = \alpha_n.$$

Comme $\alpha_n$ est équivalent à $\frac{1}{p_n}$, $\alpha_n$ est le terme général d'une série convergente et la série $\sum_{n\geq 1} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)$ converge normalement, donc uniformément sur $]1, +\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de la double limite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) \xrightarrow[s\to 1]{} \sum_{n=1}^{+\infty} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

Ainsi, $\ln(\zeta(s)) \xrightarrow[s\to 1]{} \sum_{n=1}^{+\infty} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$, ce qui est absurde car $\zeta(s)$ tend vers $+\infty$ quand $s$ tend vers 1 :

$$\zeta(s) \geq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{s-1} \xrightarrow[s\to 1]{} +\infty.$$

**31)** a) On a $E_k = \emptyset$ pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$ et $E_r = F_1 \cap \dots \cap F_r$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, On a obtenu $r$ fois "face" consécutivement au $(n+r+1)$-ième tirage si et seulement si on a obtenu "face" au tirages $n+2$, $n+3$, …, $n+r+1$ et on n'avait pas obtenu $r$ "face" consécutifs avant cet instant. On a donc :

$$\forall n \geq 0,\ E_{n+r+1} = \left(\bigcap_{i=n+2}^{n+r+1} F_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n+r} \overline{E_i}\right)$$

Ceci permet de montrer (par récurrence sur $n$) que les $E_n$ sont des évènements (le i) est l'initialisation).

c) Comme les $E_n$ sont deux à deux incompatibles, la série converge et a pour somme $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_,\right)$.

d) On obtient facilement :

```
import numpy.random as rd

def simule(p,r):
    n = 0
    s = 0
    while s < r:
        n += 1
        if rd.random() < p:
            s += 1
        else:
            s += 0
    return(n)
```

e) En reprenant la formule du b), on obtient (pour $n \in \mathbb{N}$) :

$$\forall n \geq 0,\ E_{n+r+1} = \left(\bigcap_{i=n+2}^{n+r+1} F_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n+r} \overline{E_i}\right) = \left(\bigcap_{i=n+2}^{n+r+1} F_i\right) \cap P_{n+1} \cap \left(\bigcap_{1\leq i\leq n} \overline{E_i}\right)$$

En effet, si on a $r$ "face" pour la première fois à l'instant $n+r+1$, on a nécessairement obtenu "pile" au $n+1$-ième tirage (sinon, on aurait eu $r$ "face" consécutifs à l'instant $n+r$), d'où l'inclusion $\subset$.

D'autre part, $\left(\bigcap_{i=n+2}^{n+r+1} F_i\right) \cap P_{n+1} \subset \bigcap_{i=n+1}^{n+r} \overline{E_i}$, ce qui donne l'inclusion réciproque.

Comme les $E_i$, pour $1 \leq i \leq n$, ne dépendent que des $n$ premières tirages et sont deux à deux disjoints, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+r+1} = \left(\prod_{i=n+2}^{n+r+1} P(F_i)\right) P(P_{n+1})\, P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E_i}\right) = p^r(1-p)\left(1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = p^r(1-p)\left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i\right).$$

f) Comme $\sum_{n\geq 0} p_n$ converge, la série entière $G$ est de rayon au moins 1. Pour $x \in ]-1,1[$, on obtient (on reconnaît un produit de Cauchy) :

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+r+1} x^{n+r+1}}_{=G(x)-p_r x^r} = p^r(1-p)x^{r+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \sum_{i=0}^{n} p_i\right) x^n = p^r(1-p)x^{r+1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{G(x)}{1-x}\right)$$

On a donc :

$$\forall x \in ]-1,1[,\ G(x) = \frac{p^r x^r (1-px)}{p^r(1-p)x^{r+1} - x + 1}$$

**32)** On peut identifier une permutation $\sigma$ au $n$-uplet $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ : nous noterons donc $S_n$ l'ensemble de ces $n!$ $n$-uplets, muni de la probabilité uniforme.

a) L'évènement $A_n$ : "1,2,3 sont tirés dans cet ordre" est de cardinal $\binom{n}{3}(n-3)!$, puisqu'on construit les éléments de $A_n$ en choisissant les positions des éléments 1, 2 et 3 (3 parmi $n$ choix), puis il reste à placer les $n-3$ entiers restant dans les $n-3$ emplacements libres. Ainsi :

$$P(A_n) = \frac{1}{n!}\binom{n}{3}(n-3)! = \frac{1}{6}.$$

Ce résultat peut se retrouver d'une façon plus simple : en notant $p_1$, $p_2$, …, $p_6$ les probabilités que 1,2,3 se retrouvent dans l'un des 6 ordres possibles (i.e. $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ ou $(3,2,1)$), nous avons $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$ par symétrie et $p_1 + \cdots + p_6 = 1$, d'où $P(A_n) = p_1 = \frac{1}{6}$.

b) L'évènement $B_n$ : "1,2,3 sont tirés dans cet ordre et consécutivement" est de cardinal $\binom{n-2}{1}(n-3)!$, puisqu'on a $n-2$ choix pour placer le 1 (il faut laisser deux places libres à sa droite pour placer 2 et 3), puis $(n-3)!$ choix pour placer les entiers $4,\dots,n$. On a donc :

$$P(B_n) = \frac{1}{n!}(n-2)(n-3)! = \frac{1}{n(n-1)}.$$

On peut aussi remarquer que $\text{Card}(B_n) = (n-2)!$, car en groupant les trois éléments 1,2,3 en un seul élément $x$, le problème revient à compter le nombre de permutations de l'ensemble $\{x, 4, 5, \dots, n\}$.

**33)** a) En passant aux évènements contraires, on obtient :

$$P(A_1 \cup A_2) + P(A_1 \cup \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cup A_2) + P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) = 4 - P(\overline{A_1} \cap (\overline{A_1}) + P((\overline{A_1} \cap A_2) + P(A_1 \cap (\overline{A_2}) + P(A_1 \cap A_2) = 3$$

car $\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}, \overline{A_1} \cap A_2, A_1 \cap \overline{A_2}, A_1 \cap A_2\right)$ est une partition de $\Omega$.

b) La preuve se généralise :

$$\sum_{(B_1,\dots,B_n)\in\Gamma} P(B_1 \cup \dots \cup B_n) = \sum_{(B_1,\dots,B_n)\in\Gamma} \left(1 - P(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_n})\right) = 2^n - \sum_{(B_1,\dots,B_n)\in\Gamma} P(B_1 \cap \dots \cap B_n)$$

puisque $(B_1,\dots,B_n) \longmapsto (\overline{B_1},\dots,\overline{B_n})$ est une bijection de $\Gamma$ sur lui-même.

Il reste à remarquer que $(B_1 \cap \dots \cap B_n)_{(B_1,\dots,B_n)\in\Gamma}$ est une partition de $\Omega$, puisque l'unique $(B_1,\dots,B_n)$ de $\Gamma$ contenant un élément $\omega$ de $\Omega$ est défini par : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $B_i = A_i$ si $\omega \in A_i$ et $A_i = \overline{B_i}$ sinon.

On a ainsi :

$$\sum_{(B_1,\dots,B_n)\in\Gamma} P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = 2^n - P(\Omega) = 2^n - 1.$$

**Remarque :** il est amusant de démontrer que les $B_1 \cap \dots \cap B_n$ partitionnent $\Omega$ en utilisant des fonctions indicatrices

$$\mathbf{1}_\Omega = \prod_{k=1}^{n} \left(\mathbf{1}_{A_k} + \mathbf{1}_{\overline{A_k}}\right) = \sum_{(B_1,\dots,B_n)\in\Gamma} \mathbf{1}_{B_1} \dots \mathbf{1}_{B_n} = \sum_{(B_1,\dots,B_n)\in\Gamma} \mathbf{1}_{B_1\cap\dots\cap B_n}.$$

**34)** a) On peut vérifier en simulant l'expérience aléatoire :

```
import numpy.random as rd

import numpy as np

def pgcd(a,b):
    while b != 0:
        a,b=b,a%b
    return a

def estimation(n,N):
    c = 0
    for i in range(N):
        if pgcd(rd.randint(1,n+1), rd.randint(1,n+1)) == 1:
            c += 1
    return(c/N)
```

On peut aussi calculer directement la probabilité $p_n$ que deux nombres entiers choisis uniformément et indépendamment dans $\{1, 2, \dots, n\}$ soient premiers entre eux :

```
def calcul_exact(n):
    c = 0
    for a in range(1,n+1):
        for b in range(1,n+1):
            if pgcd(a,b) == 1:
                c += 1
    return(c/n**2)
```

On obtient ainsi les résultats cohérents (le générateur pseudo-aléatoire de Python est donc bien fait) :

```
>>> estimation(100,1000000)
0.608264
>>> calcul_exact(100)
0.6087
>>> 6/np.pi**2
0.6079271018540267
```

b) Il existe évidemment $\left\lfloor \frac{n}{\ell} \right\rfloor$ multiple de $\ell$ dans $[\![1,n]\!]$.

c) Notons $I = \{i_1, \dots, i_m\}$. Comme les $p_i$ sont premiers distincts, nous avons :

$$U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_m} = \{(a,b) \in [\![1,n]\!],\ p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_m} \,|\, a \text{ et } p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_m} \,|\, b\}$$

donc $\operatorname{Card}\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) = \left\lfloor \dfrac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_m}} \right\rfloor^2$.

d) Comme $A_n = [\![1,n]\!]^2 \setminus \left(\cup_{i=1}^k U_i\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Card}(A_n) &= n^2 - \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\operatorname{Card}(I)-1} \operatorname{Card}\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) \\
&= n^2 + \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\operatorname{Card}(I)} \left\lfloor \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i} \right\rfloor^2 \\
&= n^2 + \sum_{d \in P} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 \\
&= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2
\end{aligned}$$

en notant $P = \left\{\prod_{i\in I} p_i,\ I \text{ partie non vide de } [\![1,n]\!]\right\}$, et en remarquant :

- pour $d > n$, $\left\lfloor \dfrac{n}{q} \right\rfloor^2 = 0$ car $\dfrac{n}{q} = 0$ ;
- $1 \notin P$ et $n^2 = \mu(1) \left\lfloor \dfrac{n}{1} \right\rfloor^2$ ;
- si $d \in [\![2,n]\!] \setminus P$, $\mu(d) = 0$.

e) Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = \frac{\operatorname{Card}(A_n)}{n^2} = \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$$

Cette série converge normalement par rapport à $n$, car :

$$\forall d \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| \frac{\mu(d)}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 \right| \leq \frac{1}{d^2}$$

et ce majorant est un terme général de série convergente. Comme chaque terme de la série tend vers $\frac{\mu(d)}{d^2}$ quand $n$ tend vers l'infini (car $\lfloor x \rfloor$ est équivalent à $x$ quand $x$ tend vers $+\infty$), le théorème de la double limite s'applique et $r_n$ tend vers $S = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

Il reste à montrer que $S$ est l'inverse de $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$. Calculons donc le produit :

$$S \times \frac{\pi^2}{6} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \sum_{d \geq 1, m \geq 1} \frac{\mu(d)}{(dm)^2},$$

écriture licite car la famille $\left( \frac{\mu(d)}{(dm)^2} \right)_{d,m \in \mathbb{N}^*}$ est sommable. Une sommation par paquet donne ensuite :

$$S \times \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \sum_{\substack{d,m \in \mathbb{N}^* \\ t.q.\ dm=n}} \frac{\mu(d)}{(dm)^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{1 \leq d \\ d|n}} \mu(d)$$

Pour $n \geq 2$, que l'on peut décomposer en produit de facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ avec $k \geq 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1 \leq d \\ d|n}} \mu(d) &= \sum_{0 \leq \beta_1, \dots, \beta_k \leq 1} \mu(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}) && \text{car } \mu(q) = 0 \text{ dès que } q \text{ a un facteur carré} \\
&= \sum_{0 \leq \beta_1, \dots, \beta_{k-1} \leq 1} \underbrace{\left( \mu(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}) + \mu(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} p_k) \right)}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi $S \times \frac{\pi^2}{6} = 1$ et $r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{6}{\pi^2}$.

**35)** Nous appellerons *chemin* toute suite de points à coordonnées entières $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = x_{i-1} + 1 \text{ et } \ y_i \in \{y_{i-1} - 1, y_{i-1} + 1\}.$$

Ainsi, une partie est représentée par le chemin $(0, y_0), (1, y_1), \dots, (2N, y_{2N})$ avec $y_0 = 0$ et, pour tout $i \in [\![1, 2N]\!]$, $y_i = y_{i-1} + 1$ si Pauline gagne la $i$-ème partie et $y_i = y_{i-1} - 1$ si elle la perd. Les $2^{2N}$ chemins sont équiprobables et la probabilité que Pauline ait toujours été en avance sur Flore est le quotient du nombre de ces chemins tels que $m_1, m_2, \dots, m_{2N} > 0$ et du nombre total de chemins $2^{2N}$. Pour calculer ce cardinal $A_N$, nous aurons besoin de deux résultats classiques :

- pour $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $a_1 < a_2$, notons $N_{(a_1,b_1),(a_2,b_2)}$ le nombre de chemins qui vont de $(a_1, b_1)$ à $(a_2, b_2)$. Alors :
$$N_{(a_1,b_1),(a_2,b_2)} = \binom{a_2 - a_1}{\frac{a_2 - a_1 + b_2 - b_1}{2}}$$
avec la convention que ce coefficient binomial est nul si $\frac{a_2 - a_1 + b_2 - b_1}{2} \notin [\![0, a_2 - a_1]\!]$.
En effet, si on note $n^+$ (resp. $n^-$) le nombre de sauts "vers le haut" (reps. "vers le bas"), on a $a_2 - a_1 = n^+ + n^-$ et $b_2 - b_1 = n^+ - n^-$, donc $n^+ = \frac{a_2 - a_1 + b_2 - b_1}{2}$. On construit donc tous les chemins (une et une seule fois) en choisissant l'emplacement des $n^+$ sauts vers le haut parmi les $a_2 - a_1$ déplacements.

- principe de réflexion : pour $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ avec $a_1 < a_2$, $b_1 > 0$ et $b_2 > 0$, notons $N'_{(a_1,b_1),(a_2,b_2)}$ le nombre de chemins qui vont de $(a_1, b_1)$ à $(a_2, b_2)$ en coupant l'axe des abscisses. Nous avons :

$$N'_{(a_1,b_1),(a_2,b_2)} = N_{(a_1,b_1),(a_2,-b_2)} = \binom{a_2 - a_1}{\frac{a_2 - a_1 - b_2 - b_1}{2}}$$

En effet, si un chemin de longueur $k$

$$(a_1, b_1) = (a_1, y_0), ;(a_1 + i, y_i), \ldots, (a_2, b_2)$$

coupe l'axe des abscisses, notons $i$ le premier indice tel que $y_i = 0$. La suite

$$(a_1, h_0), (1, y_1), \ldots, \underbrace{(a_1 + i, y_i)}_{=(a_1+i,0)}, (a_1 + i + 1, -y_{i+1}), \ldots, (a_i + k - 1, -y_{k-1}), (a_2, -y_k)$$

est alors un chemin qui va de $(a_1, b_1)$ à $(a_2, -a_2)$ ; on montre facilement que l'on construit ainsi une bijection $\varphi$ de l'ensemble des chemins qui vont de $(a_1, b_1)$ à $(a_2, b_2)$ en coupant l'axe des abscisses sur l'ensemble des chemins qui vont de $(a_1, b_1)$ à $(a_2, -b_2)$ (on construit l'antécédent d'un chemin de $(a_1, b_1)$ à $(a_2, -b_2)$ par $\varphi$ en utilisant le même principe de symétrie).

Nous pouvons maintenant calculer $A_N$ : la valeur $y_1$ est nécessairement égale à 1 et $y_{2N}$ est pair et peut varier de 2 à $2N$ ; pour chaque valeur possible $2k$ de $y_{2N}$, il faut compter le nombre de chemins allant de $(1, 1)$ à $(2N, 2k)$ qui ne coupent pas l'axe des abscisses, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
A_N &= \sum_{k=1}^{N} N_{(1,1),(2N,2k)} - N'_{(1,1),(2N,2k)} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \binom{2N-1}{N+k-1} - \binom{2N-1}{N-k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \binom{2N-1}{N+k-1} - \binom{2N-1}{N+k} \\
&= \binom{2N-1}{N} - \binom{2N-1}{2N} \\
&= \binom{2N-1}{N}
\end{aligned}$$

Le dernier terme $\binom{2N-1}{2N}$ est nul, ce qui est cohérent : c'est le nombre de chemins qui vont de $(1, 1)$ à $(2N, 2N)$ en coupant l'axe des abscisses.

La probabilité que Pauline ait toujours été en tête est donc égale à $\frac{1}{4^N}\binom{2N-1}{N}$.

**36)** Comme la somme des longueurs des cycles d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est égale à $n$, la probabilité cherchée est nulle si $n$ est impair. Sinon, notons $A_p$ l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{S}_{2p}$ qui ne possèdent que des cycles de longueurs paires dans leurs décompositions en produit de cycles disjoints et $a_p$ son cardinal.

- $a_1 = 1$ (les deux permutations de $\mathfrak{S}_2$ sont $(1)(2)$ et $(1, 2)$ et seule $(1, 2)$ convient) ;
- $a_2 = 9$ (six cycles de longueur 4 et 3 composées de deux transpositions disjointes).

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons construire une et une seule fois chaque élément de $A_p$ en regardant à quel cycle appartient l'élément 1 : l

- on choisit $k \in [\![1, p]\!]$ : 1 sera dans un cycle de longueur $2k$ ;

- on choisit $i_2, \dots, i_{2k}$ pour définir le cycle $(1, i_2, i_3, \dots, i_{2k})$ associé à 1, ce qui fait $(2p-1)(2p-2)\dots(2p-2k+1)$ choix ;
- il reste à choisir une permutation des $2(p-k)$ éléments restants décomposées en cycles disjoints de longueurs pairs, ce qui fait à nouveau $a_{p-k}$ choix (avec la convention $a_0 = 0$, pour traiter correctement le cas $k = p$).

Nous avons ainsi :

$$\forall p \geq 1,\ a_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{(2p-1)!}{(2(p-k))!}\, a_{p-k}.$$

On obtient ainsi les premières valeurs de la suite :

$$a_1 = 1,\ a_2 = 9,\ a_3 = 225,\ a_4 = 11025,\ a_5 = 893025.$$

On reconnaît dans cette relation un produit de Cauchy ; en posant $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_p}{(2p)!} x^p$ pour $x \in ]-1, 1[$ (le rayon est au moins égal à 1 car $|a_p| \leq (2p)!$), on obtient :

$$\forall x \in ]-1,1[,\ f(x) \sum_{p=1}^{\infty} x^p = \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^{p} \frac{a_{p-k}}{(2(p-k))!} \right) x^p = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{(2p-1)!} = 2x \sum_{p=1}^{+\infty} p \frac{x^{p-1}}{(2p)!} = 2x f'(x)$$

En simplifiant par $x$, on obtient que $f$ est solution sur $[0,1[$ de l'équation différentielle $\dfrac{y}{1-x} = 2y'$. Avec la condition $f(0) = a_0 = 1$, on obtient $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, puis par unicité du DSE :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{a_n}{(2n)!} = \binom{-1/2}{n} (-1)^n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$$

et cette valeur est la probabilité cherchée.

**37)** a) $P' = 3X^2 - 2X - 1$ s'annule en $-1/3$ et 1 et $P(-1/3) = -\dfrac{22}{27} < 0$. Nous avons donc le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1/3$ | | $1$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-22/27$ | ↘ | | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

$P$ possède une unique racine réelle $a$ (racine simple) et $1 < a < 2$ car $P(2) = 1 > 0$. Les deux autres racines de $P$ sont donc de la forme $b$ et $\overline{b}$ avec $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On a $a|b|^2 = 1$ (le produit des racines est l'opposé du terme constant), donc $|b| = \dfrac{1}{\sqrt{a}} < 1$.

b) Notons $A_n$ l'évènement "On obtient Pile au $n$-ième lancer" et $E_n$ l'évènement : "la séquence $PPP$ apparaît pour la première fois au $n$-ième lancer". Nous avons $p_1 = p_2 = 0$ et $p_3 = P(E_3) = P(A_1 \text{ et } A_2 \text{ et } A_3) = \dfrac{1}{8}$. Soit $n \geq 1$ ; les évènements $\overline{A_1}$, ($A_1$ et $\overline{A_2}$), ($A_1$ et $A_2$ et $\overline{A_3}$) et ($A_1$ et $A_2$ et $A_3$) forment un système complet d'évènements, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} p_{n+3} \;=\;& P(E_{n+3} \mid \overline{A_1}) P(\overline{A_1}) + P(E_{n+3} \mid A_1 \text{ et } \overline{A_2}) P(A_1 \text{ et } \overline{A_2}) \\ & + P(E_{n+3} \mid A_1 \text{ et } A_2 \text{ et } \overline{A_3}) P(A_1 \text{ et } A_2 \text{ et } \overline{A_3}) + P(E_{n+3} \mid A_1 \text{ et } A_2 \text{ et } A_3) P(A_1 \text{ et } A_2 \text{ et } A_3) \end{aligned}$$

On a $P(E_{n+3} \mid \overline{A_1}) = p_{n+2}$ (quand on commence par tirer "Face", on se retrouve dans la situation initiale avec un décalage d'une unité dans le temps) ; de même, $P(E_{n+3} \mid A_1 \text{ et } \overline{A_2}) = p_{n+1}$ et $P(E_{n+3} \mid A_1 \text{ et } A_2 \text{ et } \overline{A_3}) = p_n$. Enfin, $P(E_{n+3} \mid A_1 \text{ et } A_2 \text{ et } A_3) = 0$ car $n + 3 \geq 4$. Ainsi, nous avons :

$$\forall n \geq 1,\ p_{n+3} = \frac{1}{2} p_{n+2} + \frac{1}{4} p_{n+1} + \frac{1}{8} p_n.$$

En posant $p_0 = 1$, cette relation est également valable pour $n = 0$. La suite $(p_n)_{n\geq 0}$ est donc définie par :

$$\begin{cases} p_0 = 1 \text{ et } p_1 = p_2 = 0 \\ p_{n+3} = \frac{1}{2}\, p_{n+2} + \frac{1}{4}\, p_{n+1} + \frac{1}{8}\, p_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

c) Le polynôme caractéristique de cette récurrence est $X^3 - \frac{1}{2}\, X^2 - \frac{1}{4}\, X - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\, P(2X)$, qui a pour racines (simples) $a/2$, $b/2$ et $\overline{b}/2$. On obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \alpha \left(\frac{a}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{b}{2}\right)^n + \gamma \left(\frac{\overline{b}}{2}\right)^n$$

avec $\alpha = \dfrac{b\overline{b}}{(a-b)(a-\overline{b})}$, $\beta = \dfrac{a\overline{b}}{(b-a)(b-\overline{b})}$ et $\gamma = \overline{\beta}$, expressions obtenues en résolvant le système de Vandermonde :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha\, \dfrac{a}{2} + \beta\, \dfrac{b}{2} + \gamma\, \dfrac{\overline{b}}{2} = 0 \\ \alpha \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \beta \left(\dfrac{b}{2})\right)^2 + \gamma \left(\dfrac{\overline{b}}{2}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

On peut simplifier l'expression de $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{1}{aP'(a)} = \frac{1}{3a^3 - 2a^2 - a} = \frac{1}{a^2 + 2a + 1} = \frac{1}{(a+1)^2}$$

et comme $|b| < a$, $p_n$ est équivalent à $\dfrac{1}{(a+1)^2} \left(\dfrac{a}{2}\right)^n$ quand $n$ tend vers l'infini.

**38)** Nous pouvons facilement dénombrer ces permutations ; pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, notons $k(\sigma)$ la longueur du plus long cycle intervenant dans la décomposition de $\sigma$ en produit de cycles disjoints et , pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $S_k$ l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tels que $k(\sigma) = k$. Pour $k$ tel que $n/2 < k \leq n$, on peut construire toutes les permutations de $S_k$ de la manière suivante :

- on choisit un élément quelconque $i_1$ de $[\![1, n]\!]$ (on a $n$ choix) : $i_1$ sera un des éléments du cycle de longueur $k$ ;
- on choisit l'image $i_2$ de $i_2$ ($n-1$ choix), puis l'image $i_3$ de $i_2$ ($n-2$) choix), et ainsi de suite jusqu'à l'image $i_k$ de $i_{k-1}$ ($n-k+1$ choix) ;
- l'élément $i_k$ a pour image $i_1$ ;
- on peut ensuite choisir une permutation quelconque des $n-k$ éléments restants ($(n-k)!$ choix).

On obtient ainsi $k$ fois chaque élément de $S_k$ (comme $k > n/2$, un élément de $S_k$ correspond à un unique cycle $(i_1, \ldots, i_k)$ mais ce cycle est défini de $k$ façons différentes, selon le premier élément $i_1$ choisi). Enfin, les $S_k$ sont deux à deux disjoints, d'où :

$$p_n = \frac{1}{n!}\, \mathrm{Card}\, \{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ k(\sigma) > n2\} = \frac{1}{n!} \sum_{n/2<k\leq n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k}\, (n-k)! = \sum_{n/2<k\leq n} \frac{1}{k}.$$

en distinguant selon la parité de $n$, nous obtenons :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \begin{cases} p_{2m} = H_{2m} - H_m \\ p_{2m+1} = H_{2m+1} - H_m \end{cases}$$

où $H_m$ désigne le $m$-ième nombre harmonique. En utilisant le développement $H_m = \ln m + \gamma + o(1)$, nous obtenons que $H_n = \ln 2 + o(1) \sim_{+\infty} \ln 2$. Ainsi, la probabilité étudiée tend vers $\ln 2$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## Exercices X-ENS

**39)** Prouvons la propriété par récurrence sur $n$.

Quand $n = 2$, notons $a = P(A_1 \setminus A_2)$, $b = P(A_1 \cap A_2)$ et $c = P(A_2 \setminus A_1)$. Nous avons donc :

$$P(C_1) = P(A_1 \cup A_2) = a + b + c,\ P(C_2) = P(A_1 \cap A_2) = b,\ P(A_1) = a + b \text{ et } P(A_2) = b + c.$$

Nous devons donc montrer que $(a + b + c)b \leq (a + b)(b + c)$, ce qui est évident car $0 \leq ac$.

Soit $n \geq 2$ ; supposons la propriété vérifiée jusqu'au rang $n$ et soient $(A_i)_{1\leq i\leq n+1}$ une famille de $n + 1$ évènements d'un même espace probabilisé $\Omega$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons $D_k$ l'évènement "appartenir à $A_i$ pour au moins $k$ valeurs de l'indice $i \leq n$". L'hypothèse de récurrence donne donc :

$$\prod_{k=1}^{n} P(D_k) \leq \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, nous avons $C_k = D_k \cup (D_{k-1} \cap A_{n+1})$ (en posant naturellement $D_0 = \Omega$). Nous pouvons appliquer l'hypothèse aux deux évènements $D_k$ et $D_{k-1} \cap A_{n+1}$, ce qui donne :

$$P(D_k \cup (D_k \cap A_{n+1}))P(D_k \cap (D_{k-1} \cap A_{n+1})) \leq P(D_k)P(D_{k-1} \cap A_{n+1})$$

soit $P(C_k)P(D_k \cap A_{n+1}) \leq P(D_k)P(D_{k-1} \cap A_{n+1})$ puisque $D_k \subset D_{k-1}$. On peut ensuite multiplier toutes ces inégalités entre réels positifs :

$$\prod_{k=1}^{n} P(C_k)P(D_k \cap A_{n+1}) \leq \prod_{k=1}^{n} P(D_k)P(D_{k-1} \cap A_{n+1}).$$

Si aucun des $P(D_k \cap A_{n+1})$, pour $1 \leq k \leq n - 1$, n'est nul, on obtient après simplification :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} P(C_k)\right) P(D_n \cap A_{n+1}) \leq \left(\prod_{k=1}^{n} P(D_k)\right) P(D_0 \cap A_{n+1}) \leq \left(\prod_{k=1}^{n} P(A_k)\right) P(D_0 \cap A_{n+1})$$

ce qui est l'inégalité cherchée, puisque $D_n \cap A_{n+1} = C_{n+1}$ et $D_0 \cap A_{n+1} = A_{n+1}$.

Si l'un des $P(D_k \cap A_{n+1})$ est nul, alors $P(C_{n+1}) = P(D_n \cap A_{n+1}) = 0$ puisque $D_n \subset D_k$ : l'inégalité cherchée est trivialement vérifiée.

**40)** a) Si $A$ est une partie finie, de cardinal $k$, on a $0 \leq a_n \leq \frac{k}{n}$ pour tout $n$, donc $\mu(A)$ existe et vaut 0.

On a ensuite facilement $\mu(\mathbb{N}^*) = 1$ et $\mu(2\mathbb{N}^*) = 1/2$.

b) Pour $(N_k)_{k\geq 1}$ et $(M_k)_{k\geq 1}$ deux suites d'entures naturels non nuls, considérons la partie $A$ construite de la façon suivante : on garde les $N_1$ premiers éléments de $\mathbb{N}^*$, on ne garde aucun des $M_1$ éléments suivants, on garde ensuite les $N_2$ éléments suivants et ainsi de suite. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, \ldots, N_1, N_1 + M_1 + 1, N_1 + M_1 + 2, \ldots, N_1 + M_1 + N_2, N_1 + M_1 + N_2 + M_2 + 1, \ldots, N_1 + M_1 + N_2 + M_2 + N_3, \ldots \\ &= \bigcup_{n\geq 0} [\![N_0 + M_0 + \cdots + N_n + M_n + 1, N_0 + M_0 + \cdots + N_n + M_n + N_{n+1}]\!] \end{aligned}$$

en posant $N_0 = M_0 = 0$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{N_0+M_0+\cdots+N_n} = \frac{N_0 + N_1 + \cdots + N_n}{N_0 + M_0 + \cdots + N_n} \text{ et } a_{N_0+M_0+\cdots+N_n+M_n} = \frac{N_0 + N_1 + \cdots + N_n}{N_0 + M_0 + \cdots + N_n + M_n}$$

Nous allons définir les suites $(N_k)$ et $(M_k)$ par récurrence, de sorte que l'on ait $a_{N_0+M_0+\cdots+N_n} > \frac{3}{4} > \frac{1}{4} > a_{N_0+M_0+\cdots+N_n+M_n}$ pour tout $n \geq 1$.

Pour commencer, nous posons $N_1 = 1$ et on a bien $\dfrac{N_0 + N_1}{N_0 + M_0 + N_1} = 1 > \dfrac{3}{4}$. Comme $\dfrac{N_0 + N_1}{N_0 + M_0 + N_1 + k}$ tend vers 0 quand $k$ tend vers $+\infty$, on peut fixer $M_1 \geq 1$ tel que $\dfrac{N_0 + N_1}{N_0 + M_0 + N_1 + M_1} < \dfrac{1}{4}$. On a ensuite $\dfrac{N_0 + N_1 + k}{N_0 + M_0 + N_1 + M_1 + k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$,

donc il existe $N_2$ tel que $\dfrac{N_0+N_1+N_2}{N_0+M_0+N_1+M_1+N_2} > \dfrac{3}{4}$. Une récurrence immédiate permet de construire les deux suites : cela donne donc une partie $A$ telle que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas : $A \notin \mathcal{L}$.

c) Une telle structure n'existe pas car il faudrait avoir $1 = P(\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{n\}) = 0$.

**41)** a) On vérifie facilement que $\mathcal{A}$ vérifie les trois axiomes demandés aux tribus :

- $\Omega \in \mathcal{A}$ en choisissant $T = \mathbb{N}$.
- Si $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, il existe une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{N}$ telle que :

  $$\forall k \in \mathbb{N},\ B_k = \bigcup_{n\in T_k} A_n.$$

  On a alors $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{n\in T} A_n$ avec $T = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_k$, donc $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable.
- Si $A = \bigcup_{n\in T} A_n$ est un élément quelconque de $\mathcal{A}$, on a $\Omega \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus T} A_n$ car $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\Omega$ : $\mathcal{A}$ est donc stable par passage au complémentaire.

Supposons réciproquement que $\mathcal{B}$ est une tribu infinie sur $\Omega$, avec $\Omega$ dénombrable. Pour chaque $\omega \in \Omega$, notons

$$\mathcal{B}_\omega = \{B \in \mathcal{B},\ \omega \in B\} \text{ et } B_\omega = \bigcap_{B\in\mathcal{B}_\omega} B.$$

Nous avons alors, pour tout $\omega \in \Omega$ :

- $\omega \in \mathcal{B}_\omega$ car $B_\omega$ est l'intersection de parties contenant $\omega$ (on peut remarquer que $\mathcal{B}_\omega$ est non vide, puisqu'il contient $\Omega$).
- $B_\omega$ est élément de $\mathcal{B}$ : comme $\Omega$ est dénombrable, $\Omega \setminus B_\omega$ est au plus dénombrable. Nous pouvons donc écrire $\Omega \setminus B_\omega = \{\omega_i,\ i \in I\}$ où $I$ est fini ou dénombrable. Pour chaque $i \in I$, il existe $B_i \in \mathcal{B}_\omega$ tel que $\omega_i \notin B_i$. On en déduit donc :

  $$\Omega \setminus B_\omega \subset \bigcup_{i\in I} (\Omega \setminus B_i)$$

  En passant au complémentaire, on obtient :

  $$\bigcap_{i\in I} B_i \subset B_\omega.$$

  Comme $B_\omega = \bigcap_{B\in\mathcal{B}_\omega} B \subset \bigcap_{i\in I} B_i$, on a $B_\omega = \bigcap_{i\in I} B_i \in \mathcal{B}$ car $I$ est au plus dénombrable.
- si $\omega'$ est un autre élément de $\Omega$, on a soit $B_\omega = B_{\omega'}$, soit $B_\omega \cap B_{\omega'} = \emptyset$ : en effet, supposons que $B_\omega$ et $B_{\omega'}$ aient l'élément $\omega''$ en commun. Comme $B_\omega \in \mathcal{B}_{\omega''}$, nous avons $B_{\omega''} \subset B_\omega$. On en déduit que $B = B_\omega \setminus B_{\omega''} \in \mathcal{B}$ avec $B \subsetneq B_\omega$, donc $\omega \notin B$. Comme $\omega \in B_\omega$, on a $\omega \in B_{\omega''}$, puis $B_{\omega''} \in \mathcal{B}_\omega$, d'où $B_\omega \subset B_{\omega''}$. Nous avons ainsi $B_\omega = B_{\omega''}$, puis $B_{\omega'} = B_{\omega''}$ par symétrie : les parties $B_\omega$ et $B_{\omega'}$ sont donc égale si elles ne sont pas disjointes.

Il est alors possible de choisir une famille $(\omega_i)_{i\in I}$ telle que :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \exists!\, i \in I,\ B_\omega = B_{\omega_i}.$$

Comme les $\omega_i$ sont des éléments distincts de $\Omega$, $I$ est au plus dénombrable. Nous allons montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ avec :

$$\mathcal{C} = \left\{ \bigcup_{i\in T} B_{\omega_i},\ T \in \mathcal{P}(I) \right\}.$$

Comme $I$ est au plus dénombrable, chaque partie $T$ de $I$ est au plus dénombrable, donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ est stable par réunion au plus dénombrable et chaque $B_{\omega_i}$ est élément de $\mathcal{B}$.

Si $B \in \mathcal{B}$, soit $T = \{i \in I,\ \omega_i \in B\}$ et notons $C = \bigcup_{i \in T} B_{\omega_i} \in \mathcal{C}$.

Par définition des $B_\omega$, on a $B_{\omega_i} \subset B$ pour tout $i \in T$, donc $C \subset B$.

Si $\omega \in B$, il existe $i \in I$ tel que $B_\omega = B_{\omega_i}$. Comme $B_\omega \subset B$ (par définition de $B_\omega$), on a $\omega_i \in B$, i.e. $i \in T$. On en déduit que $\omega \in B_\omega = B_{\omega_i} \subset C$.

Nous avons ainsi démontré que $B = C \in \mathcal{C}$, ce qui achève la preuve de l'égalité $\mathcal{B} = \mathcal{C}$. Pour montrer que nous sommes dans le cas précédent, il reste à remarquer que $I$ est dénombrable, puisque dans le cas contraire, $\mathcal{P}(I)$ serait fini et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ le serait également.

b) Supposons que $\mathcal{A}$ soit une tribu infinie sur un ensemble $\Omega$. Pour toute partie $\Omega'$ de $\Omega$, notons :

$$\mathcal{A}_{\Omega'} = \{A \cap \Omega',\ A \in \mathcal{A}\}.$$

En particulier, si $\Omega' \in \mathcal{A}$, on a aussi $\mathcal{A}_{\Omega'} = \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(\Omega')$.

On montre facilement que $\mathcal{A}_{\Omega'}$ est une tribu sur $\Omega'$. Nous allons construire $\Omega'$ telle que $\mathcal{A}_{\Omega'}$ soit infinie. Ceci prouvera que $\mathcal{A}_{\Omega'}$ est de la forme précédente :

$$\mathcal{A}_{\Omega'} = \left\{ \bigcup_{n \in T} A_n,\ T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right\}$$

où $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\Omega'$. Ainsi, l'application $T \longmapsto \bigcup_{n \in T} A_n$ sera une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $\mathcal{A}_{\Omega'}$ et $\mathcal{A}_{\Omega'}$ ne sera pas dénombrable. Comme l'application $A \longmapsto A \cap \Omega'$ est surjective de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}_{\Omega'}$, on aura montré que $\mathcal{A}$ n'est pas non plus dénombrable. Ainsi, toute tribu infini est non dénombrable : il n'existe pas de tribu infinie dénombrable.

Il reste à construire $\Omega'$. Posons $A_0 = \Omega$. Comme $\mathcal{A}$ est infinie, il existe $A_1 \in \mathcal{A}$ telle que $A_1$ ne soit ni vide, ni égal à $A_0$. L'une au moins des deux tribus $\mathcal{A}_{A_1}$ ou $\mathcal{A}_{\Omega \setminus A_1}$ est infinie. Quitte à remplacer $A_1$ pas $\Omega \setminus A_1$, nous pouvons supposer que $\mathcal{A}_{A_1}$ est infinie et nous choisissons $\omega_0 \in \Omega \setminus A_1$. La construction peut alors être répétée en remplaçant $A_0$ par $A_1$ et $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}_{A_1}$, ce qui donne l'existence de $A_2$ et $\omega_1$ tels que :

- $A_2 \in \mathcal{A}_{A_1}$ ;
- $\mathcal{A}_{A_2}$ est infini et $\omega_1 \in A_1 \setminus A_2$.

Comme $A_1 \in \mathcal{A}$, on peut aussi écrire ces conditions sous la forme :

- $A_2 \in \mathcal{A}$ et $A_2 \subset A_1$ ;
- $\mathcal{A}_{A_2}$ est infini et $\omega_1 \in A_1 \setminus A_2$.

Par récurrence, nous construisons deux suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \geq 0$ :

- $\omega_n \in A_n \setminus A_{n+1}$ ;
- $A_n \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_{A_n}$ est infini ;
- $A_{n+1} \subset A_n$.

La partie $\Omega' = \{\omega_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ convient :

- $\Omega'$ est dénombrable car les $\omega_n$ sont deux à deux disjoints ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n = A_n \cap \Omega' = \{\omega_p,\ p \geq n\}$ donc les $B_n$ sont des éléments deux à deux distincts de la tribu $\mathcal{A}_{\Omega'}$, qui est donc infinie.

**42) Première méthode :** on peut traiter l'exercice de manière calculatoire. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, notons $A_k$ l'évènement : "parmi les $k$ premiers lancers, on a obtenu un nombre pair de `Pile`" et $B_k = \overline{A_k}$. Nous avons : $P(A_0) = 1$, $P(B_0) = 0$ et

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \ \begin{cases} P(A_k) = P(A_{k-1})(1-p_k) + P(B_{k-1})p_k \\ P(B_k) = P(A_{k-1})p_k + P(B_{k-1})(1-p_k) \end{cases}$$

i.e. :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \ \begin{pmatrix} P(A_k) \\ P(B_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p_k & p_k \\ p_k & 1-p_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(A_{k-1}) \\ P(B_{k-1}) \end{pmatrix}$$

où $p_k$ est la probabilité que la $k$-ième pièce tombe sur `Pile`. Comme :

$$\begin{pmatrix} 1-p_k & p_k \\ p_k & 1-p_k \end{pmatrix} = I_2 + p_k \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2p_k \end{pmatrix} Q \text{ avec } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$\begin{pmatrix} P(A_k) \\ P(B_k) \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-2p_k) \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-2p_k) \\ 1 - \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-2p_k) \end{pmatrix}$$

Le jeu est donc équitable si et seulement $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-2p_k) = 0$, soit si et seulement si l'une des pièces est équilibrée.

**Seconde méthode :** maintenant que la solution est connue, on peut faire une preuve plus directe.

a) Supposons que l'une des pièces est équilibrée. Notons $E_1$ et $E_2$ respectivement les évènements "cette pièce équilibrée est tombée sur `Pile`" et "les $n-1$ autres pièces ont donné un nombre pair de `Pile`". Nous avons alors :

$$(A \text{ gagne la partie}) = \left(E_1 \cap \overline{E_2}\right) \sqcup \left(\overline{E_1} \cap E_2\right)$$

et donc ($E_1$ et $E_2$ sont indépendants) :

$$P(A \text{ gagne la partie}) = P(E_1)(1-P(E_2)) + (1-P(E_1))P(E_2) = \frac{1}{2}\left(1-P(E_2)\right) + \frac{1}{2}P(E_2) = \frac{1}{2}.$$

ce qui prouve que le jeu est équitable.

b) Montrons par récurrence sur $n$ que si aucune pièce n'est équilibrée, le jeu n'est pas équitable. Si $n = 1$ et si la pièce a une probabilité $p$ différente de $1/2$ de tomber sur `Pile`, la probabilité de gagner pour $A$ est égale à $1 - p \neq 1/2$ et le jeu n'est pas équitable. Supposons que $n \geq 2$ et que la propriété ait été démontrée au rang $n$. Si les $n$ pièces sont non équilibrées, notons une nouvelle fois $E_1$ et $E_2$ les évènements "la dernière pièce est tombée sur `Pile`" et "les $n-1$ premières pièces ont donné un nombre pair de `Pile`". Nous avons $P(E_1) = p \neq 1/2$ et $P(E_2) = q \neq 1/2$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, comme précédemment :

$$P(A \text{ gagne la partie}) = P(E_1)(1-P(E_2)) + (1-P(E_1))P(E_2) = p(1-q) + (1-p)q = p(1-2q) + q$$

Comme $1-2q$ est non nul, $p = 1/2$ est la valeur vérifiant $p(1-2q) + q = 1/2$ : le jeu n'est donc pas équitable.

On peut aussi écrire :

$$P(A \text{ gagne la partie}) = \frac{1}{2} \iff p(1-2q) + q = \frac{1}{2} \iff (1-2p)(1-2q) = 0 \iff p = \frac{1}{2} \text{ ou } q = \frac{1}{2}.$$

Autrement-dit, le jeu est équitable si et seulement si la dernière pièce est équilibrée ou le jeu associé aux $n-1$ premières pièces est équitable, ce qui donne bien l'équivalence cherchée par récurrence.