Probabilités et dénombrement : énoncés

Exercices CCP

1) On mélange un paquet de 52 cartes. Quelle est la probabilité que la première et la dernière carte du paquets soient des as ?

2) Une expérience aléatoire consiste à calculer le nombre de lancer d'une pièce équilibrées nécessaires pour obtenir la séquence "FFP". Décrire l'espace probabilisé associé à cette expérience.

3) On jette deux dés qui ont la même distribution de probabilités. Montrer que la probabilité d'obtenir un double est toujours supérieure ou égale à 1/6.

4) Soient deux évènements A et B tels que $A \cup B = \Omega$. Montrer que $P(A \bigcap B) = P(A)P(B) - P\left(\overline{A}\right) P\left(\overline{B}\right)$.

5) Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

a) Si Ω' est une partie de Ω, montrer que $\{A \cap \Omega',\ A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Ω'.

b) Si $f :\ \Omega' \to \Omega$ est une application, montrer que $\{f^{-1}(A),\ A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Ω'.

6) Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega,\ A \text{ ou } \overline{A} \text{ est fini ou dénombrable}\}$.

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et que c'est la plus petite tribu contenant tous les singletons. Que vaut $\mathcal{A}$ si Ω est dénombrable ?

b) On suppose que Ω n'est pas dénombrable. Montrer que l'application $P :\ A \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } \overline{A} \text{ est dénombrable} \end{cases}$ est une probabilité sur $\mathcal{A}$.

7) Montrer que si $f :\ \Omega \to \Omega'$ est une application, $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \mid A = f^{-1}(f(A))\}$ est une tribu sur Ω.

8) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que $P(A_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

9) On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note B_n l'évènement "la boule tirée au n-ième tirage est blanche" et on pose $p_n = P(B_n)$.

a) Calculer p_1.

b) Donner une relation de récurrence vérifiée par la suite (p_n) et en déduire une expression de p_n.

Exercices Mines-Centrale

10) On dispose de N urnes ($N \geq 1$) notées $U_1, \dots, U_N$. Pour tout k compris entre 1 et N, l'urne U_k contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches. On choisit au hasard une urne avec une probabilité proportionnelle au nombre de boules rouges qu'elle contient, puis on procède à une suite de tirages d'une seule boule avec remise dans l'urne qui a été choisie.

a) Quel est l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire ? Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, quel est la probabilité de choisir l'urne U_k ?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'évènement "au cours des $2n$ premiers tirages, on a obtenu autant de boules rouges que de boules blanches" et R_{2n+1} l'évènement "on a obtenu une boucle rouge au $(2n+1)$-ième tirage".

b) Exprimer $P(E_n)$ sous forme d'une somme et donner une expression de $P(R_{2n+1} \mid E_n)$.

c) Pour $n, p \in \mathbb{N}$, donner une expression de $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p \, dx$.

d) Montrer que $P(R_{2n+1} \mid E_n) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \dfrac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}} = \dfrac{n+2}{2n+3}$.

11) On considère n boules ($n \geq 1$) numérotées de 1 à n que l'on place au hasard dans n urnes, chaque urne pouvant recevoir de 0 à n boules.

a) Calculer la probabilité p_n que chaque urne reçoive exactement une boule.

b) Montrer que la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et calculer sa limite.

12) Soit n un entier supérieur au égal à 2. On lance une pièce de monnaie équilibrées n fois. Montrer qu'il existe une valeur de n pour laquelle les évènements "on obtient Face au plus une fois" et "on obtient Face et Pile au moins une fois" sont indépendants.

13) Soit N un entier supérieur ou égal à deux. Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules noires et N boules bleues. On tire simultanément 2 boules dans cette urne.

a) Quel est l'espace probabilisé associé à cette expérience aléatoire ?

b) Quelle est la probabilité p d'obtenir un tirage unicolore ?

c) Pour quelle valeur de N la probabilité d'obtenir 2 boules bleues est-elle égale à $1/6$? Quelle est dans ce cas la valeur de p ?

14) Loi de succession de Laplace On dispose de $N+1$ urnes numérotées de 0 à N, l'urne de numéro k contenant k boules rouges et $N-k$ boules blanches. On choisit une urne au hasard et on en tire n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage. Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule rouge sachant que les n premiers tirages ont donné des boules rouges ? Calculer la limite de cette probabilité quand N tend vers l'infini.

15) Transmission de l'information Une information binaire (Oui ou Non) se transmet de la personne P_0 à la personne P_n, en passant par les personnes $P_1, \dots, P_{n-1}$. On admet que chaque personne transmet l'information qu'elle a reçue avec la probabilité p, et son contraire avec la probabilité $1-p$, et qu'il y a indépendance des transmissions. Calculer la probabilité que l'information soit correctement transmise à P_n. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?

16) Formule de Bayes Une maladie M affecte un français sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente, mais qui donne un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit effectivement malade quand elle est testée positive ? Conclusion ?

17) a) Mon voisin a deux enfants et je sais qu'il a une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

b) Mon voisin a deux enfants, dont le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon ?

c) Mon voisin a deux enfants. Je sonne chez lui et c'est un petite fille qui m'ouvre la porte. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

18) Indicatrice d'Euler On appelle indicatrice d'Euler la fonction φ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n) = \text{Card}\left(\{k \in [\![1, n]\!],\ k \wedge n = 1\}\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit au hasard avec équiprobabilité un entier compris entre 1 et n. Pour m entier naturel non nul, on note A_m l'évènement "le nombre choisi est divisible par m".

a) Calculer $P(A_m)$ quand m divise n.

b) Montrer que si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont les diviseurs premiers de n, les évènements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_k}$ sont indépendants.

c) En déduire que $\varphi(n) = n \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

19) Soient A, B, C trois évènements d'un même espace probabilisé. On suppose que $P(C) \neq 0$. On dit que A et B sont *indépendants conditionnellement* à C si $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C) \times P(B \mid C)$. Montrer que A et B peuvent être indépendants sans être indépendants conditionnellement à C.

20) Quelle est la probabilité que deux personnes d'une population totale de taille n soient nées le même jour (on suppose que $n \leq 365$ et on oublie le problème posé par le 29 février) ? À partir de quelle valeur de n cette probabilité est-elle supérieure à $0,5$? à $0,99$?

21) On choisit au hasard une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ et on s'intéresse à la probabilité p_n de l'évènement : "σ n'a pas de point fixe". Nous noterons D_n l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ sans point fixe (i.e. l'ensemble des *dérangements*) et d_n son cardinal. On pose $d_0 = 1$.

a) Calculer d_1, d_2, d_3.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$. Écrire une fonction `Python` qui, quand on l'applique à un entier naturel n, renvoie d_n.

On pose $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ pour $x \in]-1, 1[$. Pour n quelconque, f admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^n).$$

c) Exprimer a_n sous forme d'une somme.

d) En écrivant $f(x)e^x = \dfrac{1}{1-x}$, montrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) En déduire une expression de p_n. Quel est le comportement de p_n quand n tend vers l'infini ?

22) On considère un polygone convexe $\mathcal{P} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ $(n \geq 4)$. On appelle *diagonale* du polygone un segment joignant deux sommets non voisins de $\mathcal{P}$. Quelle est la probabilité que deux diagonales choisies au hasard soient sécantes ?

23) Soit p_n la probabilité qu'il faille tirer exactement n fois à pile ou face pour obtenir deux piles à la suite, et soit $q_n = \sum_{k \geq n} p_k$. Trouvez des expressions de p_n et q_n en fonction des nombres de Fibonacci.

24) Lemme de Borel-Cantelli

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'évènements de Ω. On note $A = \bigcap_{n\geq 0} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right)$.

a) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge, alors $P(A) = 0$.

b) On suppose que les évènements A_n sont indépendants et que $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ diverge. Montrer que $P(A) = 1$. En déduire que si on tape un texte de longueur infini de façon aléatoire (les caractères sont indépendants les uns des autres et le n-ème caractère suit une loi uniforme sur l'ensemble des caractères usuels), alors la probabilité d'obtenir le texte intégral du roman de Victor Hugo “Notre-dame de Paris” est égale à 1.

25) On considère un dé pipé à 6 faces. La probabilité d'obtenir la face k est notée p_k. On lance ce dé n fois et on note, pour k compris entre 1 et 6, N_k le nombre d'apparitions de la face k lors de ces n lancers.

a) Que peut-on dire de N_k quand n tend vers l'infini ?

b) En supposant que, pour tout k, np_k soit entier, quelle est la probabilité d'obtenir $N_k = np_k$ pour tout k ?

26) On note $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ muni de sa structure d'espace probabilisé correspondant à une suite infinie de tirages à PILE ou FACE (resp. 1 ou 0), indépendants et avec même probabilité de tirage.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement “les tirages ne sont plus des PILES après le n-ème tirage et A est l'évènement “les tirages ne sont plus que des PILES à partir d'un certain moment ”. Montrer que $P(A_n) = 0$ pour tout n et en déduire que $P(A) = 0$. Montrer que A est dénombrable.

b) On note B l'évènement “on ne tire jamais deux FACES consécutivement”. Écrire une fonction Python qui, pour $l \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donne la proportion des cas où la séquence 00 n'apparaît pas dans les ℓ premiers tirages pour n essais. Le tester pour $\ell \in \{2, 3, 4\}$ et pour des valeurs de n bien choisies. Retrouver les résultats par le calcul.

c) On donne une famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'évènements mutuellement indépendants et on pose :

$$\limsup C_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} C_k \right).$$

Montrer que les évènements $(\overline{C_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont également mutuellement indépendants et que si $\sum_{n\geq 1} P(C_n)$ diverge, $P(\limsup C_n)) = 1$.

27) Deux archers tirent à tour de rôle sur une cible : le premier qui touche la cible a gagné la partie. On suppose que l'archer qui commence à la probabilité $p_1 \in]0, 1[$ de toucher la cible et que le second archer a la probabilité $p_2 \in]0, 1[$ de la toucher.

a) Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?

b) Montrer que le jeu se termine presque sûrement.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de p_1 existe-t-il une valeur de p_2 pour laquelle le jeu est équitable ?

28) Trois joueurs A, B et C s'affrontent à un jeu selon les règles suivantes :

- à chaque partie, deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité ;
- la première partie oppose les joueurs A et B ;

- le gagnant de la n-ième partie affronte à la partie suivante le joueur n'ayant pas participé à la n-ième partie.
- le premier joueur qui gagne deux parties consécutives est déclaré vainqueur.

Établir que le jeu s'arrête presque sûrement et calculer les probabilités de gain de chaque joueur.

29) Soit un réel $s > 1$. On note P la probabilité sur $\mathbb{N}^*$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s}.$$

a) Que vaut la constante λ ?

b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer simplement la probabilité de $A_p = p\mathbb{N}^*$.

c) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que la famille $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est constituée d'évènements mutuellement indépendants.

d) En étudiant $P(\{1\})$, démontrer l'identité d'Euler :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{p^s}{p^s - 1}.$$

En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$.

30) (Centrale 2016) Soient $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. On effectue une suite infinie de tirages à pile ou face. Les tirages sont indépendants et la probabilité de tirer face, à chaque tirage, vaut p. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n l'événement "face sort au n-ième tirage" et P_n l'événement "pile sort au n-ième tirage". Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement : "au n-ième tirage, on obtient r faces consécutives pour la première fois".

On pose $p_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(E_n)$.

a) Déterminer $E_1, \ldots, E_{r-1}$ et E_r.

b) Montrer que chaque E_n est un événement.

c) Montrer que $\sum p_n$ converge.

d) Écrire une fonction en Python qui prend en paramètre (p, r) et qui cette expérience aléatoire et renvoie l'entier n tel que E_n est réalisé.

e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+r+1} = p^r(1-p)\left(1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i\right)$.

f) En déduire une expression de $G(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k$.

31) (Mines 2016) On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n dans laquelle on effectue n tirages sans remise.

a) Quelle est la probabilité que 1, 2 et 3 soient tirés dans cet ordre (pas forcément consécutivement) ?

b) Quelle est la probabilité que 1,2 et 3 soient tirés dans cet ordre et consécutivement ?

32) (Centrale - Python) On note r_n la probabilité que deux entiers de $[\![1, n]\!]$ soient premiers entre eux. On souhaite montrer que r_n tend vers $\dfrac{6}{\pi^2}$ quand n tend vers l'infini.

a) À l'aide de Python, vérifier cette conjecture.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_1, \dots, p_k$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n. On définit ensuite :

$$A_n = \{(a,b) \in [\![1,n]\!],\ a \wedge b = 1\}$$

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier} \\ 1 & \text{si } n \text{ est le produit d'un nombre pair de nombres premiers distincts} \\ -1 & \text{si } n \text{ est le produit d'un nombre impair de nombres premiers distincts} \end{cases}$$

$$\forall i \in [\![1,k]\!],\ U_i = \{(a,b) \in [\![1,n]\!],\ p_i \mid a \text{ et } p_i \mid b\}$$

μ est appelée *fonction de Möbius*.

b) Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, déterminer le nombre de multiples de ℓ dans $[\![1,n]\!]$

c) En déduire le cardinal de $\bigcap_{i\in I} U_i$ où I est une partie non vide de $[\![1,k]\!]$.

d) Montrer que $\mathrm{Card}(A_n) = \displaystyle\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$. On utilisera la formule du crible : pour toute famille de parties finies $(A_i)_{1\le i\le N}$ d'un ensemble E, on a :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{\substack{I\subset[\![1,N]\!]\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{\mathrm{Card}(I)-1}\,\mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

e) Montrer que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$ et conclure.

33) (Centrale 2019) a) Montrer que $P = X^3 - X^2 - X - 1$ a trois racines a, b et $\bar{b}$ avec $a \in]1,2[$ et $|b| < 1$.

b) On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note p_n la probabilité pour que la séquence PPP apparaisse pour la première fois au n-ième lancer. Exprimer p_{n+3} en fonction de p_n, p_{n+1}, p_{n+2}.

c) Donner une expression et un équivalent de p_n.

Exercices X-ENS

34) Soit Ω un ensemble infini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de Ω (les A_n sont donc des parties non vides de Ω, deux à deux disjointes dont la réunion est égale à Ω). On pose $\mathcal{A} = \left\{\displaystyle\bigcup_{n\in T} A_n,\ T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\right\}$.

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et que si Ω est dénombrable, toute tribu infinie sur Ω est de cette forme.

b) Existe-t-il une tribu infinie dénombrable ?

35) On considère le jeu suivant, opposant deux joueurs A et B : on dispose de n pièces non nécessairement équilibrées, que l'on lance l'une après l'autre. Le joueur A gagne la partie si on obtient un nombre pair de `Pile` ; sinon, c'est le joueur B qui gagne. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce jeu soit équitable.

Probabilités et dénombrement : corrigés

Exercices CCP

1) L'univers est l'ensemble des 52! permutations de l'ensemble des 52 cartes. Le nombre de ces permutation dont le premier et le dernier élément sont des as est $4 \times 3 \times 50!$ (on a 4 choix pour la première carte, puis 3 choix pour la dernière, puis 50! façons de répartir les 50 cartes restantes). La probabilité cherchée est donc égale à $\frac{3\times 4}{51\times 52}$, soit $\frac{1}{221}$.

2) Il faut choisir l'espace probabilisé $(\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{A}, P)$ qui modélise d'une suite infinie de tirages indépendants de même loi de Bernoulli de paramètre 1/2. Le problème consiste alors à calculer, pour chaque $n \geq 3$, la probabilité de l'évènement :

$$A_n = \{(\varepsilon_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*},\ (\varepsilon_{n-2}, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n) = (0,0,1) \text{ et } \forall k \in [\![3, n-1]\!],\ (\varepsilon_{n-2}, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n) \neq (0,0,1)\}.$$

On pourrait aussi choisir $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, mais il faudrait définir la probabilité P en calculant dès le début de l'exercice, pour tout $n \geq 3$, la probabilité p_n d'obtenir "FFP" pour la première fois au n-ième tirage.

3) Pour $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, notons p_i la probabilité que le dé tombe sur la face i. L'expérience est modélise par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$;
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$;
- $\forall (i,j) \in \Omega$, $p_{i,j} = P(\{(i,j)\} = p_i p_j$.

L'évènement étudié est donc $A = \{(i,i),\ i \in \Omega\}$ et $P(A) = \sum_{i=1}^6 p_i^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$1 = \left(\sum_{i=1}^6 p_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^6 1^2 \times \sum_{i=1}^6 p_i^2 = 6P(A)$$

et donc $P(A) \geq 1/6$.

4) Nous avons $P(A)P(B) - P(A^c)P(B^c) = P(A)P(B) - (1-P(A))(1-P(B)) = P(A) + P(B) - 1 = P(A) + P(B) - P(\Omega) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A \cap B)$.

5) a) On a sans problème :

- $\Omega \in \mathcal{A}$ donc $\Omega' = \Omega \cap \Omega' \in \mathcal{A}'$;
- si $A' \in \mathcal{A}'$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $A' = A \cap \Omega'$. On a alors : $\Omega' \setminus A' = (\Omega \setminus A) \cap \Omega' \in \mathcal{A}'$ car $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire ;
- si $(A'_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}'$, il existe $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $A'_n = A_n \cap \Omega'$ pour tout n et $\displaystyle\bigcup_{n\geq 0} A'_n = \left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) \cap \Omega' \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable.

b) De la même façon :

- $\Omega' = f{-}1(\Omega) \in \mathcal{A}'$;
- si $A' \in \mathcal{A}'$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $A' = f^{-1}(A)$. On a alors : $\Omega' \setminus A' = f^{-1}(\Omega \setminus A) \in \mathcal{C}'$;

- Si $(A'_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}'$, il existe $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $A'_n = f^{-1}(A_n)$ pour tout n et $\displaystyle\bigcup_{n\geq 0} A'_n = f^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) \in \mathcal{A}$.

6) a) $\mathcal{A}$ vérifie les propriétés demandées aux tribus :

- $\Omega \in \mathcal{A}$ car son complémentaire est fini (il est vide).
- Si $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$ par symétrie de la définition de $\mathcal{A}$.
- soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$; si tous les A_n sont finis ou dénombrables, $A = \displaystyle\bigcup_{n\geq 0} A_n$ est également fini ou dénombrable. Sinon, il existe n_0 tel que $\overline{A_{n_0}}$ est fini ou dénombrable, donc $\overline{A}$ l'est également, car $\overline{A} = \bigcap_{n\geq 0} \overline{A_n} \subset \overline{A_{n_0}}$. Dans tous les cas, $A \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ contient clairement les singletons et si $\mathcal{B}$ est une tribu contenant les singletons, alors pour toute partie $A \in \mathcal{A}$, on a deux cas possibles :

- A est fini ou dénombrable, donc $A \in \mathcal{B}$, puisque A est la réunion d'un nombre fini ou d'un nombre dénombrables de singletons, qui sont tous éléments de $\mathcal{B}$;
- $\overline{A}$ est fini ou dénombrable, donc $\overline{A} \in \mathcal{B}$ (même raison), puis $A \in \mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ est stable par complémentaire.

$\mathcal{A}$ est donc la tribu engendrée par la famille des singletons.

b) Comme Ω n'est pas dénombrable, on a bien $P(\Omega) = 1$. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements deux à deux disjoints, on a une nouvelle fois deux cas : si tous les A_n sont finis ou dénombrables, $A = \displaystyle\bigcup_{n\geq 0} A_n$ est fini ou dénombrable et on a bien :

$$P(A) = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Sinon, il existe n_0 tel que $\overline{A_{n_0}}$ est fini ou dénombrable, donc $\overline{A}$ l'est également. On en déduit que A n'est pas dénombrable (sinon, $\Omega = A \bigcup \overline{A}$ le serait). Pour $n \neq n_0$, on a d'autre part $A_n \subset \overline{A_{n_0}}$, donc A_n est au plus dénombrable. On a ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = P(A_{n_0}) = 1 = P(A)$$

et P est bien une probabilité sur $\mathcal{A}$.

7) a) $\Omega \in \mathcal{A}$ car $f^{-1}(f(\Omega)) = \Omega$ (pour toute partie A de Ω, $A \subset f^{-1}(f(A))$).

b) Soit $A \in \mathcal{O}$. Il faut démontrer que $\overline{A} \in \mathcal{A}$, i.e. que $f^{-1}(f(\overline{A})) \subset \overline{A}$. Soit donc $x \in f^{-1}(f(\overline{A}))$. On a donc $f(x) \in f(\overline{A})$. Ainsi, il existe $y \in \overline{A}$ tel que $f(y) = f(x)$.Si x était élément de A, $f(x)$ serait élément de $f(A)$ et y serait élément de $f^{-1}(f(A)) = A$, ce qui n'est pas le cas. On en déduit que $x \in \overline{A}$. $\mathcal{A}$ est donc stable par complémentaire.

c) Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ et posons $A = \displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$. On a :

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} f(A_i)\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(f(A_i)) = \bigcup_{i\in I} A_i = A$$

donc $\mathcal{A}$ est stable par réunion quelconque, et à plus forte raison par réunion dénombrable.

8) La série $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge (elle a pour somme $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$), donc son terme général $P(A_n)$ tend vers 0.

9) a) Pour $i \in \{1,2\}$, notons A_i l'évènement "Le premier tirage se fait dans l'urne U_i". (A_1, A_2) est un système complet d'évènement, donc :

$$p_1 = P(B_1) = P(B_1 \,|\, A_1)P(A_1) + P(B_1 \,|\, A_2)P(A_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}.$$

b) Pour $n \geq 1$, notons N_n l'évènement "On a tiré une boule noire au n-ième tirage". Comme (B_n, N_n) est un système complet d'évènements, on peut écrire :

$$p_{n+1} = P(B_{n+1} \,|\, B_n)P(B_n) + P(B_{n+1} \,|\, N_n)P(N_n) = \frac{2}{5}\,p_n + \frac{4}{7}\,(1-p_n) = \frac{4}{7} - \frac{6}{35}p_n.$$

On obtient ensuite facilement l'expression de cette suite arithmético-géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{20}{41} + \frac{1}{82}\left(-\frac{6}{35}\right)^n.$$

Exercices Mines-Centrale

10) a) L'univers est l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\} \times \{Rouge, Blanc\}^{\mathbb{N}^*}$: le résultat de l'expérience est un couple $(k, (c_n)_{n\geq 1})$ où k est le numéro de l'urne choisir et $(c_n)_{n\geq 1}$ la suite des couleurs des boules tirées (avec remise) dans cette urne. Notons A_k l'évènement "On a choisi l'urne U_k" et p_k sa probabilité. Il existe un réel α telle que :

$$\forall\ k \in [\![1, n]\!],\ p_k = \alpha k.$$

Comme $p_1 + \cdots + p_N = 1$, on obtient $\alpha \sum_{k=1}^N p_k = 1$, soit $\alpha = \dfrac{2}{N(N+1)}$. Pour $k \in [\![1, N]\!]$, la probabilité de choisir l'urne k est donc égale à $\dfrac{2k}{N(N+1)}$.

b) $(A_k)_{1\leq k\leq N}$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulles, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E_n) &= \sum_{k=1}^N P(E_n \,|\, A_k)\, P(A_k) = \sum_{k=1}^N \binom{2n}{n} \left(\frac{k}{N}\right)^n \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n \frac{2k}{N(N+1)} \\ &= \binom{2n}{n} \frac{2}{(N+1)} \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned} P(R_{2n+1} \cap E_n) &= \sum_{k=1}^N \binom{2n}{n} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n \frac{2k}{N(N+1)} \\ &= \binom{2n}{n} \frac{2}{(N+1)} \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N}\right)^{n+2} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n \end{aligned}$$

et donc

$$P(R_{2n+1} \,|\, E_n) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N}\right)^{n+2} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n}{\displaystyle\sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n}$$

c) Si $p=0$, $I_{n,p}=\dfrac{1}{n+1}$. Si $p\geq 1$, une intégration par partie donne :

$$I_{n,p}=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\,(1-x)^p\right]_0^1+\frac{p}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{p-1}\,\mathrm{d}x=\frac{p}{n+1}\,I_{n+1,p-1}$$

d'où par récurrence évidente :

$$\forall n,p\in\mathbb{N},\;\; I_{n,p}=\frac{p!\,n!}{(n+p+1)!}$$

d) Le dénominateur et le numérateur de $P(R_{2n+1}\,|\,E_n)$ sont, à un facteur $1/N$ près, des sommes de Riemann des intégrales $I_{n+2,n}$ et $I_{n+1,n}$ pour la subdivision de pas constant $1/N$. Comme cette seconde intégrale est non nulle, on en déduit :

$$P(R_{2n+1}\,|\,E_n)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}}=\frac{n+2}{2n+3}.$$

11) a) On modélise l'expérience de la façon suivante : l'univers est $\Omega=[\![1,n]\!]^n$ muni de la tribu $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme : la suite $\omega=(k_1,k_2,\dots,k_n)$ représente le cas où, pour tout i, la boule de numéro i est placée dans l'urne numéro k_i. Nous avons donc :

$$p_n=\frac{n!}{n^n}$$

puisque chaque urne contient une et une seule boule si et seulement si $(k_1,k_2,\dots,k_n)$ est une permutation de $[\![1,n]\!]$.

b) Nous avons, pour $n\geq 1$: $\dfrac{p_n}{p_{n+1}}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n<1$ donc la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

Cette suite est donc convergente (elle est décroissante et minorée par 0) : si elle convergeait vers une limite non nulle, $\dfrac{p_n}{p_{n+1}}$ tendrait vers 1 quand n tend vers l'infini, ce qui n'est pas le cas, puisque $\dfrac{p_n}{p_{n+1}}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$ tend vers $1/e$. On en déduit que p_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

12) La situation est représentée par l'univers $\Omega=\{Pile,Face\}^n$ muni de la probabilité uniforme. En notant A_n : "on obtient Face au plus une fois" et B_n : "on obtient Face et Pile au moins une fois", nous avons :

$$P(A_n)=\frac{n+1}{2^n},\;\; P(B_n)=1-\frac{2}{2^n}=\frac{2^n-2}{2^n}\;\text{ et }\;P(A_n\cap B_n)=\frac{n}{2^n}$$

puisqu'il y a exactement $(n+1)$ issues réalisant A_n, 2 issues ne réalisant pas B_n et n issues réalisant à la fois A_n et B_n. Les évènements sont donc indépendants si et seulement si $(n+1)(2^n-2)=n\,2^n$, i.e. si et seulement si $2^n=2+2n$: $n=3$ est la seule solution de cette équation.

13) a) Le plus facile est de numéroter les boules : r_1,r_2 sont les deux boules rouges, n_1,n_2,n_3 les trois boules noires et $b_1,b_2,\dots,b_N$ les N boules bleues. L'univers est l'ensemble des parties à 2 éléments de l'ensemble $\{r_1,r_2,n_1,n_2,n_3,b_1,b_2,\dots b_N\}$, muni de la tribu de ses parties et de la probabilité uniforme.

b) Il suffit de compter le nombre d'issues favorables : il y a 3 tirages unicolores rouge, 1 tirage unicolore noir et $\dbinom{N}{2}$ tirages unicolores bleu, ce qui fait $3+1+\dfrac{N(N-1)}{2}=\dfrac{N^2-N+8}{2}$ cas favorables et la probabilité cherchée vaut :

$$p=\frac{N^2-N+8}{(N+5)(N+4)}$$

c) Il y a $\dbinom{N}{2}$ issue donnant 2 boules bleues, donc la probabilité q d'obtenir 2 boules rouges vaut $\dfrac{N(N-1)}{(N+5)(N+4)}$. Il sufit donc de résoudre :

$$q=\frac{1}{6}\iff N^2-3N-4=0\iff N\in\{-1,4\}.$$

Il faut donc choisir $N = 4$ pour avoir une chance sur 6 de tirer deux boules bleues, et p sera alors égal à $\dfrac{5}{18}$.

14) Pour $k \in [\![0, N]\!]$, notons U_k l'évènement : "on a choisi l'urne numéro k". Le choix de l'urne se faisant "au hasard", ce qu'il faut traduire par "avec équiprobabilité", chaque U_k est de probabilité $\dfrac{1}{N+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note R_n l'évènement "on a tiré une boule rouge au n-ième tirage". Nous cherchons donc $p_n = P(R_{n+1} \,|\, R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)$. Comme les U_k forment un système complet d'évènements, nous pouvons appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \sum_{k=0}^{N} P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n \,|\, U_k) \times P(U_k) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

puisque la probabilité de tirer une boule rouge quand on a choisi la k-ième urne vaut $\dfrac{k}{N}$ et que les tirages sont indépendants. La même formule appliquée au rang $n+1$ permet donc d'écrire :

$$p_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n}} = \frac{\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n}}$$

On reconnaît alors des sommes de Riemann :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n \xrightarrow[N \to +\infty]{} \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

et donc p_n tend vers $\dfrac{n+1}{n+2}$ quand N tend vers l'infini.

15) Notons p_n la probabilité cherchée. Nous pouvons modéliser cette transmission par un schéma de Bernoulli de paramètre (n, p), l'issue $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$ étant définie par :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si la personne } P_{i-1} \text{ a transmis l'information qu'elle a reçue} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut faire le calcul de façon combinatoire : l'information arrive correctement à P_n si et seulement si elle a été incorrectement transmise un nombre pair de fois, soit si et seulement si il y a un nombre pair de i tels que $\varepsilon_i = 0$. On en déduit :

$$p_n = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^k.$$

Cette somme se calcule à partir de la formule du binôme de Newton :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}, (X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$$

qui donne

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}, (-X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^k Y^{n-k}$$

soit, en sommant ces deux égalités :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}, (X+Y)^n + (-X+Y)^n = 2 \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$$

En choisissant $X = 1 - p$ et $Y = p$, nous obtenons $p_n = \dfrac{1 + (2p-1)^n}{2}$.

On peut aussi obtenir une relation de récurrence, grâce à la formule des probabilités totales :

$$p_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 0,\ p_{n+1} = p_n P(\varepsilon_{n+1} = 1) + (1 - p_n) P(\varepsilon_{n+1} = 0) = p_n(2p-1) + 1 - p$$

On retrouve facilement l'expression de la suite arithmético-géométrique $(p_n)_{n\geq 0}$.

Si $p \in]0,1[$, p_n tend vers $1/2$ quand n tend vers l'infini. Autrement-dit, quand n est grand, P_n n'a qu'environ une chance sur 2 de recevoir la bonne information, quel que soit p.

16) Notons M l'évènement "La personne est malade" et T l'évènement "Le test est positif". L'énoncé nous donne :

$$P(M) = \frac{1}{1000},\ P(T \,|\, M) = \frac{99}{100},\ P(T \,|\, M^c) = \frac{2}{1000}.$$

Nous avons alors :

$$P(M \,|\, T) = \frac{P(T \,|\, M)\, P(M)}{P(T \,|\, M)\, P(M) + P(T \,|\, M^c)\, P(M^c)} = \frac{55}{166} \simeq 0,33$$

Il y a donc seulement une chance sur trois qu'une personne détectée malade le soit effectivement : environ 2/3 des personnes détectées malades seront donc inquiétées inutilement.

17) Choisissons l'univers $\Omega = \{(F,F), (F,G), (G,F), (G,G)\}$ muni de la probabilité uniforme pour décrire les 4 situations possibles ((F,G) représente la situation où le premier enfant de mon voisin est une fille et le second est un garçon).

a) Les évènements "Je sais qu'il a une fille" et "Mon voisin a au moins un garçon" s'écrivent donc :

$$A = \{(F,F), (F,G), (G,F)\} \text{ et } B = \{(F,G), (G,F), (G,G)\}.$$

La probabilité demandée est $P(B \,|\, A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{2}{3}$.

b) Cette fois-ci, nous considérons les évènements $A = \{(F,F), (G,F)\}$ et $B = \{(F,G), (G,F), (G,G)\}$, et $P(B \,|\, A) = \dfrac{1}{2}$, ce qui est une conséquence de l'indépendance des sexes des deux enfants, cachée derrière le choix de la probabilité uniforme sur Ω.

c) Le modèle est cette fois-çi différent : l'univers est $\Omega = \{F,G\} \times \{F,G\} \times \{1,2\}$, où l'élément 1 ou 2 désigne le numéro de l'enfant qui a ouvert la porte. Ainsi, $(F,G,1)$ correspond au cas au l'enfant 1 est une fille, l'enfant 2 est un garçon et c'est l'enfant 1 qui a ouvert la porte. On munit Ω de la probabilité uniforme, ce qui traduit l'indépendance mutuelle des évènements "Le premier enfant est une fille", "Le second enfant est une fille" et "C'est le premier enfant qui a ouvert la porte".

Les évènements "C'est une fille qui a ouvert la porte" et "L'enfant qui n'a pas ouvert la porte est un garçon" s'écrivent donc :

$$A = \{(F,F,1), (F,F,2), (F,G,1), (G,F,2)\} \text{ et } B = \{(F,G,1), (G,F,2), (G,G,1), (G,G,2)\}.$$

La probabilité demandée est $P(B \,|\, A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{1}{2}$.

18) Nous travaillons avec $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ muni de la probabilité uniforme.

a) Notons $n = m \times d$: $A_m = \{m, 2m, \ldots, dm\}$ est de cardinal d, donc $P(A_m) = \dfrac{d}{n} = \dfrac{1}{m}$.

b) Si $i_1, \ldots, i_q$ sont des entiers deux à deux distincts compris entre 1 et k, nous avons :

$$A_{p_{i_1}} \cap \cdots \cap A_{p_{i_q}} = A_{p_{i_1} \cdots p_{i_q}}$$

et donc

$$P(A_{p_{i_1}} \cap \cdots \cap A_{p_{i_q}}) = P(A_{p_{i_1} \ldots p_{i_q}}) = \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_q}} = \frac{1}{p_{i_1}} \times \cdots \times \frac{1}{p_{i_q}} = P(A_{p_{i_1}}) \times \cdots \times P(A_{p_{i_q}})$$

donc les évènements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_k}$ sont mutellement indépendants.

c) On en déduit que les évènements contraires sont indépendants :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_{p_i}}\right) = \prod_{i=1}^{k} P(\overline{A_{p_i}}) = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

mais $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_{p_i}} = \{k \in \{1, \ldots, n\},\ k \wedge n = 1\}$, donc $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} \overline{A_{p_i}}\right) = \dfrac{\varphi(n)}{n}$, ce qui donne bien

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

19) Nous allons construire des évènements A, B, C tels que $A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C$, avec A et B indépendants. Considérons une expérience aléatoire consistant à lancer deux dés non pipés. Soient alors les évènements :

A : “le premier dé tombe sur 1” $\quad$ B : “le second dé tombe sur 4” $\quad$ C : “la somme des deux dés vaut 5”

A et B sont indépendant mais ne le sont pas conditionnellement à C :

- $P(A \text{ et } B \,|\, C) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(C)} = \dfrac{1}{4}$;
- $P(A \,|\, C) \times P(B \,|\, C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} \times \dfrac{P(B \cap C)}{P(C)} = \dfrac{1}{16}$.

20) On peut choisir Ω égal à l’ensemble des n-uplets de dates d’anniversaire, le i-ème élément du n-uplet étant égal à la date d’anniversaire de la i-ième personne. Le cardinal de Ω est 365^n et on munit Ω de la probabilité uniforme (cela revient à dire qu’il y a indépendance entre les dates de naissance des n personnes et que chaque date de naissance est équiprobable). L’évènement “Les n personnes sont nées à des jours différents” est de cardinal $365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)$, donc la probabilité cherchée vaut :

$$p_n = 1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n} = 1 - \prod_{i=1}^{n-1} \frac{365 - i}{365}.$$

Cette suite (finie) est strictement croissante et on obtient facilement $p_{22} < 0,5 < p_{23} < p_{56} < 0,99 < p_{57}$. Ainsi, dans une classe d’école primaire, on a environ une chance sur deux que deux enfants de la classe soient nés le même jour.

21) a) $d_1 = 0$ (la seule bijection de $\mathfrak{S}_1$ est l’identité), $d_2 = 1$ (la transposition $(1, 2)$ est la seule permutation de $\mathfrak{S}_2$ sans point fixe) et $d_3 = 2$ (les seules permutations sans point fixe de $\mathfrak{S}_3$ sont les permutations circulaires $(1, 2, 3)$ et $(1, 3, 2)$).

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, nous noterons $F_\sigma = \{k \in [\![1, n]\!],\ \sigma(k) = k\}$ l’ensemble des points fixes de σ.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{S}_n$ est la réunion disjointe des ensembles $X_A = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ F_\sigma = A\}$ pour A décrivant toutes les parties de $[\![1, n]\!]$. Pour $A \subset [\![1, n]\!]$, de cardinal k, X_A est de cardinal d_{n-k}, puisqu’un élément de X_A est entièrement déterminé par le dérangement qu'il définit sur le complémentaire de A. Nous avons donc, en remarquant qu'il y a $\binom{n}{k}$ parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal k :

$$n! = \sum_{A\subset[\![1,n]\!]} \#(X_A) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$$

Il est ainsi possible de calculer les d_n par récurrence. La fonction suivante calcule en même temps les coefficients binomiaux, qu'elle stocke dans le vecteur C et les valeurs successives des factorielles, les coefficients d_k étant stockés dans le vecteur D :

```
def d(n):
    fact=1
    D=[1]
    C=[1]
    for k in range(1,n+1):
        fact=fact*k
        C.append(1)
        for i in range(k-1,0,-1):
            C[i]=C[i]+C[i-1]
        s=fact
        for i in range(k):
            s=s-C[i]*D[i]
        D.append(s)
    return(D[-1])
```

c) Il suffit de faire un produit de DL (pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque) :

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1})\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} x^k + O(x^{n+1})\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{k!}\right) x^k + O(x^{n+1})$$

d'où $a_n = n! \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{k!}$.

d) La méthode est la même, en partant de l'égalité $\frac{1}{1-x} = f(x)\, e^x$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k + O(x^{n+1}) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\, x^k + O(x^{n+1})\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1})\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{a_i}{i!(k-i)!}\right) x^k + O(x^{n+1})$$

d'où par identification de ces deux DL :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, 1 = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i!(n-i)!}$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

e) Ainsi, la suite (a_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (d_n) : comme $a_0 = 1 = d_0$, on a $a_n = d_n$ pour tout n, ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{d_n}{n!} = \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

On en déduit que p_n tend vers $\dfrac{1}{e}$ quand n tend vers l'infini. Ainsi, quand n est assez grand, il y a environ une chance sur 3 qu'une permutation choisie au hasard ne possède aucun point fixe.

22) On peut représenter une diagonale comme un couple (i,j) avec $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $i<j$ et j distinct de $i-1$, de i et de $i+1$ modulo n. Ces couples se décomposent, selon les valeurs de i, en :

- les couples $(1,j)$ où $3 \leq j \leq n-1$;
- les couples (i,j) où $2 \leq i \leq n-2$ et $i+2 \leq j \leq n$.

Il y a ainsi $n-3+\displaystyle\sum_{i=2}^{n-2} n-i-1 = \frac{n(n-3)}{2}$ diagonales et nous noterons $\mathcal{D}$ l'ensemble des (i,j) vérifiant ces conditions.

Il faut ensuite s'entendre sur ce que signifie que deux diagonales sont sécantes : nous prendrons comme définition que deux diagonales sont sécantes si elles se coupent ailleurs qu'en un sommet. Par exemple, les diagonales $\{A_1,A_3\}$ et $\{A_2,A_4\}$ sont sécantes mais les diagonales $\{A_1,A_3\}$ et $\{A_3,A_4\}$ ne le sont pas. Pour finir, nous supposerons que "choisir deux diagonales au hasard" consiste à choisir uniformément et indépendamment deux diagonales : l'univers de l'expérience est donc l'ensemble $\mathcal{D}^2$ muni de la probabilité uniforme. Nous noterons D_1 et D_2 les diagonales choisies et A l'événement "D_1 et D_2 sont sécantes". Pour chaque diagonale $D_1=(i,j)$, il y a exactement $(j-i-1)(n-j+i-1)$ diagonales D_2 sécantes à D_1 (on doit choisir un sommet de D_2 dans $]\!]i,j[\![$ et l'autre sommet dans $\{1,\ldots,n\} \setminus [\![i,j]\!]$, ce qui fait $j-i-1$ choix pour le premier sommet et $n-j+i-1$ pour le second). On a donc :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} (j-i-1)(n-j+i-1)}{\left(\mathrm{Card}(\mathcal{P})\right)^2} \\ &= \frac{4}{n^2(n-3)^2}\left(\sum_{j=3}^{n-1}(j-2)(n-j)+\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{j=i+2}^{n}(j-i-1)(n-j+i-1)\right) \end{aligned}$$

Des calculs élémentaires donnent ensuite $P(A)=\dfrac{(n-1)(n-2)}{3n(n-3)}$.

Le calcul est un peu plus rapide si l'on dénombre les couples (D_1,D_2) de A de la façon suivante : chaque diagonale $D_1=(i,j)$ sépare les points de $\mathcal{P}$ distincts de ses extrémités en deux paquets, de tailles respectives $k_1=j-i-1$ et $k_2=n-j+i-1$; le *type* de D_1 est par définition la valeur $k=\min(k_1,k_2)$. On a en particulier $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$, puisque $k_1+k_2=n-2$. Pour chaque D_1 de type k, il existe exactement $k(n-2-k)$ diagonales D_2 sécantes avec D_1. Nous avons donc :

$$P(A)=\frac{4}{n^2(n-3)^2}\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-2}{2}\rfloor} k(n-2-k)a_k$$

en notant a_k le nombre de diagonales de type k.

Si n est pair, avec $n=2q$, il y a n diagonales de type k pour tout $k\in\{1,2,\ldots,q-2\}$ mais seulement q diagonales de type $q-1$. On obtient donc :

$$P(A)=\frac{4}{(2q)^2(2q-3)^2}\left(q(q-1)^2+2q\sum_{k=1}^{q-2}k(2q-2-k)\right)=\frac{(2q-1)(q-1)}{3q(2q-3)}=\frac{(n-1)(n-2)}{3n(n-3)}.$$

Si n est impair, avec $n=2q+1$, il y a n diagonales de type k pour tout $k\in\{1,2,\ldots,q-1\}$, donc :

$$P(A)=\frac{4}{(2q+1)^2(2q-2)^2}\left((2q+1)\sum_{k=1}^{q-1}k(2q-1-k)\right)=\frac{q(2q-1)}{3(q-1)(2q+1)}=\frac{(n-1)(n-2)}{3n(n-3)}.$$

23) Notons p_∞ la probabilité de ne jamais tirer deux piles à la suite (on va montrer que cette probabilité est nulle). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons :

- r_n le résultat du n-ième tirage ;
- A_n le nombre de suites $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ ne contenant pas deux piles consécutifs ;
- $x_n =$ le nombre de suites $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ ne contenant pas deux piles consécutifs et se terminant pas pile. ;
- $y_n =$ le nombre de suites $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ ne contenant pas deux piles consécutifs et se terminant pas face.

Nous avons $x_1 = y_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = y_n \text{ et } y_{n+1} = x_n + y_n$$

On élimine facilement la suite x :

$$\forall n \geq 1,\ y_{n+2} = x_{n+1} + y_{n+1} = y_n + y_{n+1}$$

Comme $y_0 = 1$ et $y_2 = 2$, on pose $y_0 = 1$ pour que la relation de récurrence soit également valable au rang $n = 0$: (y_n) est donc la suite de Fibonacci, définie par $y_0 = y_1 = 1$ et $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, notée habituellement $(F_n)_{n\geq 0}$

On en déduit que $x_n = y_{n-1} = F_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Nous obtenons ainsi $A_n = x_n + y_n = F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. Comme la probabilité de ne pas avoir obtenu deux piles consécutifs après les $n-1$ premiers tirages est égale à $\dfrac{A_{n-1}}{2^{n-1}}$, on en déduit :

$$q_n + p_\infty = \frac{F_n}{2^{n-1}}$$

Comme q_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini (c'est le reste d'une série convergente), on a :

$$p_\infty = \lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{2^n} = 0,$$

puisque F_n est de l'ordre de grandeur de Φ^n, où $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui est strictement inférieur à 2.

Nous obtenons donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = \frac{F_n}{2^{n-1}} \text{ et } p_n = q_n - q_{n+1} = \frac{2F_n - F_{n+1}}{2^n} = \frac{F_n - F_{n-1}}{2^n} = \frac{F_{n-2}}{2^n}$$

On pouvait aussi retrouver la valeur de p_n sans passer par q_n : $p_n = \dfrac{x_{n-1}}{2^n} = \dfrac{F_{n-2}}{2^n}$. En effet, l'évènement "il faut attendre le n-ième tirage pour voir apparaître deux piles consécutifs dans la suite infinie $(r_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$" est formé des suites de la forme $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, pile, \dots, r_{n+1}, r_{n+2}, \dots)$ où $(r_1, \dots, r_{n-1})$ est une suite quelconque ne contenant pas deux piles consécutifs et se terminant par face.

24) a) La suite d'évènements $\left(\displaystyle\bigcup_{k\geq n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc $P(A)$ est la limite de $P\left(\displaystyle\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$ quand n tend vers $+\infty$. Or :

$$0 \leq P\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car la série de terme général $P(A_k)$ est convergente : on en déduit que $P(A) = 0$.

b) Nous avons toujours $P(B_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(A)$ avec $B_n = \displaystyle\bigcup_{k\geq n} A_k$. Pour utiliser l'indépendance des A_k, il faut faire apparaître des intersections, en passant aux complémentaires :

$$P(B_n) = 1 - P(\overline{B_n}) = 1 - P\left(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}\right).$$

Pour montrer que $P(A)=1$, il suffit de montrer que $P(\overline{B_n})=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Comme la suite $\bigcap_{n\le k\le N}\overline{A_k}$ décroît avec N, on a :

$$\begin{aligned}
P(\overline{B_n}) &= \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n\le k\le N}\overline{A_k}\right)\\
&= \lim_{N\to+\infty}\prod_{k=n}^{N} P(\overline{A_k}) \text{ car les } \overline{A_k} \text{ sont mutellement indépendants}\\
&= \lim_{N\to+\infty}\prod_{k=n}^{N}(1-P(A_k))
\end{aligned}$$

Pour manipuler un “produit infini”, on prend le logarithme :

$$\forall N\ge n,\ \ln\left(\prod_{k=n}^{N}(1-P(A_k))\right)=\sum_{k=n}^{N}\ln(1-P(A_k))\le-\sum_{k=n}^{N}P(A_k)\xrightarrow[N\to+\infty]{}-\infty$$

puis, en composant par l’exponentielle :

$$\prod_{k=n}^{N}(1-P(A_k))\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$$

ce qui achève la preuve.

Notons Σ l’alphabet utilisé (Σ contient tous les caractères nécessaires, en particulier les symboles de ponctuation, le “blanc”, le retour à la ligne, …). Nous avons donc une suite $(X_k)_{k\ge1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur Σ. Le roman de Victor Hugo est un mot $u=a_1\dots a_N$ sur l’alphabet Σ. Nous devons donc démontrer que l’évènement :

$$E=\Big(\exists n\in\mathbb{N},\ \forall i\in\{1,\dots,N\},\ X_{n+i}=a_i\Big)$$

est presque sûr.

Nous allons utiliser la question précédente, en séparant les “secteurs” où l’on cherche le facteur u, pour assurer l’indépendance des évènements ; on pose donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A_n=(X_{nN+1}=a_1 \text{ et } X_{nN+2}=a_2 \text{ et } \dots \text{ et } X_{nN+N}=a_N)$$

Les A_n sont mutuellement indépendants et de même probabilité non nulle $\dfrac{1}{\mathrm{Card}(\Sigma)}$, qui est bien le terme général d’une série divergente. On en déduit que l’évènement $A=\bigcap_{n\ge0}\left(\bigcup_{k\ge n}A_k\right)$ est presque certain. Autrement-dit, on a presque sûrement :

$$\forall n\ge1,\ \exists k\ge n,\ X_{nN+1}=a_1 \text{ et } X_{nN+2}=a_2 \text{ et } \dots \text{ et } X_{nN+N}=a_N.$$

Ainsi, le texte de Victor Hugo a été écrit presque sûrement une infinité de fois.

25) a) La loi faible des grands nombres dit que $\dfrac{N_k}{n}$ tend vers p_k quand n tend vers l’infini, dans le sens où pour $\varepsilon>0$, $P\left(\left|\frac{N_k}{n}-p_k\right|>\varepsilon\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l’infini. En terme vague, on s’attend à ce que N_k soit proche de np_k quand n est grand.

b) L’expérience aléatoire est décrite par l’univers $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}^n$, muni de la probabilité :

$$\forall\omega=(a_1,\dots,a_n)\in\Omega,\ P(\{\omega\})=p_{a_1}p_{a_2}\dots p_{a_n}=p_1^{N_1(\omega)}p_2^{N_2(\omega)}p_3^{N_3(\omega)}p_4^{N_4(\omega)}p_5^{N_5(\omega)}p_6^{N_6(\omega)}.$$

Pour k compris entre 1 et 6, notons $q_k=np_k$, on a donc :

$$P(N_1=q_1,\dots,N_6=q_6)=\sum_{\substack{\omega\in\Omega \text{ t.q.}\\ N_1(\omega)=q_1,\dots,N_6(\omega)=q_6}} P(\{\omega\})$$

$$=(p_1)^{q_1}\dots(p_6)^{q_6}\,\mathrm{Card}\left(\{\omega\in\Omega,\ N_1(\omega)=q_1,\ \dots,N_6(\omega)=q_6\}\right)$$

$$=(p_1)^{q_1}\dots(p_6)^{q_6}\binom{n}{q_1}\binom{n-q_1}{q_2}\binom{n-q_1-q_2}{q_3}\binom{n-q_1-q_2-q_3}{q_4}\binom{n-q_1-q_2-q_3-q_4}{q_5}$$

puisqu'on construit une et une seule fois chaque élément de l'ensemble en choisissant les q_1 positions des "1" parmi les n positions, puis les q_2 positions des "2" parmi les $n-q_1$ positions restantes, et ainsi de suite (on n'a plus de choix à faire pour choisir les q_6 positions des "6", puisque qu'il reste $n-q_1-q_2-q_3-q_4-q_5=q_6$ places libres).

26) a) Pour $k\in\mathbb{N}^*$, notons $A_{n,k}$ l'évènement "on a tiré PILE aux tirages $n+1,n+2,\dots,n+k''$. Nous avons : $A_n\subset A_{n,k}$, donc :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(A_n)\leq P(A_{n,k})=\frac{1}{2^k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0.$$

On en déduit donc que $P(A_n)=0$.

La suite (A_n) est croissante et $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n$, donc $P(A)\lim_{+\infty}P(A_n)=0$, grâce à la propriété de continuité croissante.

b) La fonction test(l) simule un tirage et renvoie 1 s'il n'y a pas deux faces consécutives et 0 sinon :

```
import numpy.random as rd

def test(l):
    k=0 # compteur du nombre de lancers
    s=0 # nombre de 0 en cours de lecture
    while k < l and s < 2:
        if rd.randint(0, 2) == 0:
            k += 1
            s += 1
        else:
            k += 1
            s = 0
    if s < 2: # on n'a pas fait 2 faces consécutivement
        return(1)
    else:
    return(0)
```

La fonction estimation fait ensuite la moyenne des résultats de n tests :

```
def estimation(l, n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s += test(l)
    return(s / n)
```

On obtient les résultats :

```
>>> estimation(2,1000000)
   0.750021

>>> estimation(3,1000000)
   0.625503

>>> 5/8
   0.625

>>> estimation(4,1000000)
   0.500282
```

Ces valeurs sont des estimations des probabilités p_2, p_3 et p_4 de ne pas obtenir deux FACES consécutivement après 2, 3 ou 4 lancers. On travaille ici sur les espaces $\{00, 01, 10, 11\}$, $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ et $\{0000, 0001, \ldots, 1110, 1111\}$ muni de leurs probabilités uniformes : un simple calcul de dénombrement donne $p_2 = \dfrac{3}{4}$ et $p_3 = \dfrac{5}{8}$. Pour le calcul de p_4, on peut éviter d'écrire les 16 suites possibles en remarquant que les suites ne contenant pas deux 0 consécutifs doivent commencer par l'une des 5 suites de l'ensemble $\{010, 011, 101, 110, 111\}$, ce qui donne les possibilités $\{0101, 0110, 0111, 1010, 1011, 1101, 1110, 1111\}$, puis $p_4 = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$.

c) C'est un résultat de cours. Rappel de la preuve :

- on montre facilement que si deux évènements A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont également : A est la réunion disjointe de $A \cap B$ et de $A \cap \overline{B}$, donc $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)P(\overline{B})$.

- on en déduit ensuite que si $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants, $(A_1, \ldots, A_{n-1}, \overline{A_n})$ est également une famille d'évènements mutuellement indépendants. En effet, si l'on extrait une sous-famille de cette famille, soit cette sous-famille ne contient pas $\overline{A_n}$ et la propriété voulue est vérifiée par indépendance des A_i, soit elle est de la forme $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}, \overline{A_n})$ avec $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n-1$. Les évènements $A = A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ et A_n sont indépendants, donc A et $\overline{A_n}$ le sont également : on en déduit que
$$P(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k} \cap \overline{A_n}) = P(A \cap \overline{A_n}) = P(A)P(\overline{A_n}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k})P(\overline{A_n})$$

- une récurrence évidente montre alors que les évènements $(\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n})$ sont mutuellement indépendants : ainsi, les évènements $(\overline{C_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants, puisqu'un nombre fini quelconque d'entre eux le sont.

Notons $B_n = \bigcup\limits_{k \geq n} C_k$. Comme la suite B_n est décroissante, nous avons $P(B_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P(\text{limsup} A_n)$.

En passant aux complémentaires :
$$P(B_n) = 1 - P(\overline{B_n}) = 1 - P\left(\bigcap_{k \geq n} \overline{C_k}\right).$$

Comme la suite $\bigcap_{n=k}^{N} \overline{C_k}$ décroît avec N, on a :

$$\begin{aligned} P(\overline{B_n}) &= \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n\le k\le N} \overline{C_k}\right) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=n}^{N} P(\overline{C_k}) \text{ car les } \overline{C_k} \text{ sont mutellement indépendants} \\ &= \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=n}^{N} (1-P(C_k)) \end{aligned}$$

Pour manipuler un "produit infini", on prend le logarithme :

$$\forall N \ge n,\ \ln\left(\prod_{k=n}^{N}(1-P(C_k))\right) = \sum_{k=n}^{N} \ln(1-P(C_k)) \le -\sum_{k=n}^{N} P(C_k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\infty$$

puis, en composant par l'exponentielle :

$$\prod_{k=n}^{N}(1-P(C_k)) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \text{ (car la série diverge)}$$

On en déduit que $P(\overline{B_n}) = 0$, puis que $P(B_n) = 1$ et $P(\limsup A_n) = 1$.

27) a) Appelons "partie" chaque couple de tir. Le joueur 1 gagne à la n-ième partie (pour $n \ge 1$) si les deux joueurs ont ratés leurs $n-1$ premiers tirs et s'il a réussi son n-ième tir. La probabilité de cet évènement est donc égale à $p_1(1-p_1)^{n-1}(1-p_2)^{n-1}$. On en déduit que la probabilité p que le joueur 1 gagne est égale à :

$$p = \sum_{n=1}^{+\infty} p_1(1-p_1)^{n-1}(1-p_2)^{n-1} = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}.$$

b) Notons A_n l'évènement "Le jeu n'est pas terminé après n parties". A_n se réalise quand les deux joueurs ont raté leurs n premiers tirs, donc $P(A_n) = (p_1p_2)^n$. Comme l'évènement A : "Le jeu ne se termine pas" est l'intersection (décroissante) des A_n, on a $P(A) = 0$ (car $p_1p_2 < 1$) et le jeu se termine presque sûrement.

c) Le jeu est équitable si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$, i.e. si et seulement si $\dfrac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2} = \dfrac{1}{2}$, soit si et seulement si $p_2 = \dfrac{p_1}{1-p_1}$. Un tel choix de p_2 est possible quand $p_1 \in]0, \frac{1}{2}[$, puisqu'il faut avoir $p_2 \in]0,1[$.

28) Une partie P sera représentée par un vecteur $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ où X et Y sont les deux joueurs participant à la partie et où X est le vainqueur de la partie. On peut remarquer que s'il n'y a pas eu de vainqueur après les n premières parties, le jeu est de l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{cases} P_1 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},\ P_5 = \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix}\ P_6 = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}, \dots,\ P_n = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ P_1 = \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix},\ P_5 = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\ P_6 = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}, \dots,\ P_n = \begin{pmatrix} Z \\ T \end{pmatrix} \end{cases}$$

où X, Y, Z, T dépendent de la valeur de n modulo 3. La probabilité de l'évènement A_n : "le jeu n'est pas terminé après la n-ième partie" est donc égale à $2\left(\frac{1}{2}\right)^n$. La suite $(A_n)_{n\ge1}$ est décroissante, donc le théorème de continuité monotone donne :

$$P\left(\bigcap_{n\ge1} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$$

ce qui signifie que le jeu s'arrête presque sûrement.

Pour $n \geq 1$, notons C_n l'évènement "Le joueur C gagne le jeu à la n-ième partie". On a $P(C_1) = P(C_2) = 0$ puisque le joueur C ne participe pas à la première partie. Si $n \geq 3$, pour que le joueur C gagne à la n-ième partie, il faut qu'il n'y ait pas de gagnant après les $n-1$ premières parties, que le joueur C ait gagné la $(n-1)$-ième partie et qu'il gagne la n-ième partie. Comme les parties gagnées par le joueur C sont les parties P_{3k+2}, on a donc deux cas :

• si $n-1$ est de la forme $3k+2$, il y a deux parties qui amène à une victoire du joueur C :

$$\begin{cases} P_1 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},\ \dots,\ P_{n-1} = \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix},\ P_n = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} \\ P_1 = \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix},\ \dots,\ P_{n-1} = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix},\ P_n = \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix} \end{cases}$$

et donc $P(C_n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

• sinon, le joueur C ne peut gagner à la n-ième partie et $P(C_n) = 0$.

Nous avons donc :

$$\forall k, \in \mathbb{N},\ P(C_{3k+1}) = 0,\ P(C_{3k+2}) = 0 \text{ et } P(C_{3k+3}) = \frac{1}{2^{3k+2}}.$$

La probabilité p_C que le joueur C gagne est donc égale à :

$$p_C = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{3k+2}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{8^k} = \frac{2}{7}.$$

Par symétrie, les probabilités p_A et p_B que les joueurs A et B gagnent sont égales et $p_A + p_B + p_C = 1$ puisque le jeu termine presque sûrement. On obtient donc :

$$p_A = p_B = \frac{5}{14} \text{ et } p_C = \frac{2}{7}.$$

29) a) On a $1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{n^s} = \lambda\,\zeta(s)$, donc $\lambda = \dfrac{1}{\zeta(s)}$.

b) $P(A_p) = \displaystyle\sum_{n \in A_p} P(\{n\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(kp)^s} = \frac{1}{p^s}$.

c) Soient $p_1, \dots, p_n$ des nombres premiers deux à deux distincts. On a :

$$A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \dots \cap A_{p_n} = A_{p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n} = A_{p_1 p_2 \dots p_n}$$

car les p_i sont deux à deux premiers entre eux. On en déduit :

$$P(A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \dots \cap A_{p_n}) = P(A_{p_1 p_2 \dots p_n}) = \frac{1}{(p_1 \dots p_n)^s} = \frac{1}{p_1^s} \times \dots \times \frac{1}{p_n^s} = P(A_{p_1}) \dots P(A_{p-n})$$

donc les évènements A_p, pour $p \in \mathcal{P}$, sont mutuellement indépendants.

d) On a $\{1\} = \displaystyle\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$ car 1 est le seul élément de $\mathbb{N}^*$ a ne pas avoir de facteur premier. En numérotant les éléments de $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = \{p_i,\ i \geq 1\}$$

on a donc :

$$\lambda = P(\{1\}) = P\left(\bigcap_{i \geq 1} \overline{A_{p_i}}\right) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_{p_i}}\right)$$

par le théorème de la limite monotone (la suite $\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_{p_i}}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante). Comme les A_p sont mutuellement indépendants, les $\overline{A_p}$ le sont également, d'où :

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} P(\overline{A_{p_1}})\dots P(\overline{A_{p_n}}) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

En passant à l'inverse, nous obtenons :

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{p^s}{p^s - 1}.$$

e) Montrons le résultats par l'absurde : supposons que $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$ converge. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall s > 1,\ 0 \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) = \alpha_n.$$

Comme α_n est équivalent à $\dfrac{1}{p_n}$, α_n est le terme général d'une série convergente et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)$ converge normalement, donc uniformément sur $]1, +\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de la double limite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) \xrightarrow[s\to 1]{} \sum_{n=1}^{+\infty} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

Ainsi, $\ln(\zeta(s)) \xrightarrow[s\to 1]{} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$, ce qui est absurde car $\zeta(s)$ tend vers $+\infty$ quand s tend vers 1 :

$$\zeta(s) \geq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{s-1} \xrightarrow[s\to 1]{} +\infty.$$

30) a) On a $E_k = \emptyset$ pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$ et $E_r = F_1 \cap \dots \cap F_r$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, On a obtenu r fois "face" consécutivement au $(n+r+1)$-ième tirage si et seulement si on a obtenu "face" au tirages $n+2$, $n+3$, ..., $n+r+1$ et on n'avait pas obtenu r "face" consécutifs avant cet instant. On a donc :

$$\forall n \geq 0,\ E_{n+r+1} = \left(\bigcap_{i=n+2}^{n+r+1} F_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n+r} \overline{E_i}\right)$$

Ceci permet de montrer (par récurrence sur n) que les E_n sont des évènements (le i) est l'initialisation).

c) Comme les E_n sont deux à deux incompatibles, la série concierge et a pour somme $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_,\right)$.

d)

e) En reprenant la formule du b), on obtient (pour $n \in \mathbb{N}$) :

$$\forall n \geq 0,\ E_{n+r+1} = \left(\bigcap_{i=n+2}^{n+r+1} F_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n+r} \overline{E_i}\right) = \left(\bigcap_{i=n+2}^{n+r+1} F_i\right) \cap P_{n+1} \cap \left(\bigcap_{1\leq i\leq n} \overline{E_i}\right)$$

En effet, si on a r "face" pour la première fois à l'instant $n+r+1$, on a nécessairement obtenu "pile" au $n+1$-ième tirage (sinon, on aurait eu r "face" consécutifs à l'instant $n+r$), d'où l'inclusion $\subset$.

D'autre part, $\left(\displaystyle\bigcap_{i=n+2}^{n+r+1} F_i\right) \cap P_{n+1} \subset \displaystyle\bigcap_{i=n+1}^{n+r} \overline{E_i}$, ce qui donne l'inclusion réciproque.

Comme les E_i, pour $1 \leq i \leq n$, ne dépendent que des n premières tirages et sont deux à deux disjoints, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+r+1} = \left(\prod_{i=n+2}^{n+r+1} P(F_i)\right) P(P_{n+1})\, P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E_i}\right) = p^r(1-p)\left(1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = p^r(1-p)\left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i\right).$$

f) Comme $\sum_{n\geq 0} p_n$ converge, la série entière G est de rayon au moins 1. Pour $x \in]-1,1[$; on obtient (on reconnaît un produit de Cauchy) :

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+r+1}x^{n+r+1}}_{=G(x)-p_r x^r} = p^r(1-p)x^{r+1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \sum_{i=0}^{n} p_i\right)x^n = p^r(1-p)x^{r+1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{G(x)}{1-x}\right)$$

On a donc :

$$\forall x \in]-1,1[,\ G(x) = \frac{p^r x^r(1-px)}{p^r(1-p)x^{r+1} - x + 1}$$

31) On peut identifier une permutation σ au n-uplet $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$: nous noterons donc S_n l'ensemble de ces $n!$ n-uplets, muni de la probabilité uniforme.

a) L'évènement A_n : "1,2,3 sont tirés dans cet ordre" est de cardinal $\binom{n}{3}(n-3)!$, puisqu'on construit les éléments de A_n en choisissant les positions des éléments 1, 2 et 3 (3 parmi n choix), puis il reste à placer les $n-3$ entiers restant dans les $n-3$ emplacements libres. Ainsi :

$$P(A_n) = \frac{1}{n!}\binom{n}{3}(n-3)! = \frac{1}{6}.$$

Ce résultat peut se retrouver d'une façon plus simple : en notant p_1, p_2, ..., p_6 les probabilités que 1,2,3 se retrouvent dans l'un des 6 ordres possibles (i.e. $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ ou $(3,2,1)$), nous avons $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$ par symétrie et $p_1 + \cdots + p_6 = 1$, d'où $P(A_n) = p_1 = \dfrac{1}{6}$.

b) L'évènement B_n : "1,2,3 sont tirés dans cet ordre et consécutivement" est de cardinal $\binom{n-2}{1}(n-3)!$, puisqu'on a $n-2$ choix pour placer le 1 (il faut laisser deux places libres à sa droite pour placer 2 et 3), puis $(n-3)!$ choix pour placer les entiers $4, \ldots, n$. On a donc :

$$P(B_n) = \frac{1}{n!}(n-2)(n-3)! = \frac{1}{n(n-1)}.$$

On peut aussi remarquer que $\mathrm{Card}(B_n) = (n-2)!$, car en groupant les trois éléments 1,2,3 en un seul élément x, le problème revient à compter le nombre de permutations de l'ensemble $\{x, 4, 5, \ldots, n\}$.

32) a) On peut vérifier en simulant l'expérience aléatoire :

```
import numpy.random as rd

import numpy as np

def pgcd(a,b):
    while b != 0:
        a,b=b,a%b
    return a

def estimation(n,N):
    c = 0
    for i in range(N):
        if pgcd(rd.randint(1,n+1), rd.randint(1,n+1)) == 1:
            c += 1
    return(c/N)
```

On peut aussi calculer directement la probabilité p_n que deux nombres entiers choisis uniformément et indépendamment dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ soient premiers entre eux :

```
def calcul_exact(n):
    c = 0
    for a in range(1,n+1):
        for b in range(1,n+1):
            if pgcd(a,b) == 1:
                c += 1
    return(c/n**2)
```

On obtient ainsi les résultats cohérents (le générateur pseudo-aléatoire de Python est donc bien fait) :

```
>>> estimation(100,1000000)
0.608264
>>> calcul_exact(100)
0.6087
>>> 6/np.pi**2
0.6079271018540267
```

b) Il existe évidemment $\left\lfloor \dfrac{n}{\ell} \right\rfloor$ multiple de ℓ dans $[\![1, n]\!]$.

c) Notons $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$. Comme les p_i sont premiers distincts, nous avons :

$$U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_m} = \{(a, b) \in [\![1, n]\!],\ p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_m} \,|\, a \text{ et } p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_m} \,|\, b\}$$

donc $\operatorname{Card}\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) = \left\lfloor \dfrac{n}{p_{i_1} \ldots p_{i_m}} \right\rfloor$.

d) Comme $A_n = [\![1, n]\!]^2 \setminus \left(\cup_{i=1}^{k} U_i\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Card}(A_n) &= n^2 - \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\operatorname{Card}(I)-1} \operatorname{Card}\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) \\
&= n^2 + \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\operatorname{Card}(I)} \left\lfloor \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \right\rfloor^2 \\
&= n^2 + \sum_{d \in P} \mu(q) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 \\
&= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2
\end{aligned}$$

en notant $P = \left\{\prod_{i \in I} p_i,\ I \text{ partie non vide de } [\![1, n]\!]\right\}$, et en remarquant :

- pour $d > n$, $\left\lfloor \dfrac{n}{q} \right\rfloor^2 = 0$ car $\dfrac{n}{q} = 0$;
- $1 \notin P$ et $n^2 = \mu(1) \left\lfloor \dfrac{n}{1} \right\rfloor^2$;
- si $d \in [\![2, n]\!] \setminus P$, $\mu(d) = 0$.

e) Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = \frac{\operatorname{Card}(A_n)}{n^2} = \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$$

Cette série converge normalement par rapport à n, car :

$$\forall d \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{\mu(d)}{n^2}\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^2\right| \le \frac{1}{d^2}$$

et ce majorant est un terme général de série convergente. Comme chaque terme de la série tend vers $\dfrac{\mu(d)}{d^2}$ quand n tend vers l'infini (car $\lfloor x\rfloor$ est équivalent à x quand x tend vers $+\infty$), le théorème de la double limite s'applique et r_n tend vers $S = \displaystyle\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Il reste à montrer que S est l'inverse de $\dfrac{\pi^2}{6} = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}$. Calculons donc le produit :

$$S\,\frac{\pi^2}{6} = \sum_{d=1}^{+\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2} = \sum_{q\ge 1, m\ge 1}\frac{\mu(q)}{(qm)^2},$$

écriture licite car la famille $\left(\dfrac{\mu(d)}{(dm)^2}\right)_{d,m\in\mathbb{N}^*}$ est sommable. Une sommation par paquet donne ensuite :

$$S\,\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{\substack{d,m\in\mathbb{N}^*\\ t.q.\ \ dm=n}}\frac{\mu(d)}{(dm)^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{1\le q\\ q\mid n}}\mu(q)$$

Pour $n \ge 2$, que l'on peut décomposer en produit de facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ avec $k \ge 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\le d\\ d\mid n}}\mu(d) &= \sum_{0\le\beta_i\le\alpha_i}\mu(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k})\\ &= \sum_{0\le\beta_i\le 1}\mu(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k})\end{aligned}$$

puisque $\mu(q) = 0$ dès que q a un facteur carré. On a enfin : On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\le d\\ d\mid n}}\mu(d) &= \sum_{0\le\beta 1,\dots,\beta_k\le 1}\mu(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k})\\ &= \sum_{0\le\beta_1,\dots,\beta_{k-1}\le 1}\underbrace{\Big(\mu(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}) + \mu(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}p_k)\Big)}_{=0}\end{aligned}$$

Ainsi $S\,\dfrac{\pi^2}{6} = 1$ et $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{6}{\pi^2}$.

33) a) $P' = 3X^2 - 2X - 1$ s'annule en $-1/3$ et 1 et $P(-1/3) = -\dfrac{22}{27} < 0$. Nous avons donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-1/3$		1		a		$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-22/27$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

P possède une unique racine réelle a (racine simple) et $1 < a < 2$ car $P(2) = 1 > 0$. Les deux autres racines de P sont donc de la forme b et $\overline{b}$ avec $b \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. On a $a|b|^2 = 1$ (le produit des racines est l'opposé du terme constant), donc $|b| = \dfrac{1}{\sqrt{a}} < 1$.

b) Notons X_n la variable aléatoire égale à 1 si le n-ième lancer est Pile et à 0 sinon. $(X_n)_{n\geq 1}$ est donc une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(1/2)$. Notons E_n l'évènement : la séquence PPP apparaît pour la première fois au n-ième lancer. Nous avons $p_1 = p_2 = 0$ et $p_3 = P(E_3) = P(X_1 = X_2 = X_3 = 1) = \dfrac{1}{8}$. Soit $n \geq 1$; les évènements $(X_1 = 0)$, $(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 0)$, $(X_1 = X_2 = 1 \text{ et } X_3 = 0)$ et $(X_1 = X_2 = X_3 = 1)$ forment un système complet d'évènements, donc on peut écrire :

$$p_{n+3} = P(E_{n+3}\,|\,X_1 = 0)P(X_1 = 0)+P(E_{n+3}\,|\,X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 0)P(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 0)+P(E_{n+3}\,|\,X_1 = X_2 = 1 \text{ et } X_3 = 0)P(X_1 =$$

On a $P(E_{n+3}\,|\,X_1 = 0) = p_{n+2}$ (quand on commence par tirer F, on se retrouve dans la situation initiale avec un décalage d'une unité dans le temps) ; de même, $P(E_{n+3}\,|\,X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 0) = p_{n+1}$ et $P(E_{n+3}\,|\,X_1 = X_2 = 1 \text{ et } X_3 = 0) = p_n$. Enfin, $P(E_{n+3}\,|\,X_1 = X_2 = X_3 = 1) = 0$ car $n + 3 \geq 4$. Ainsi, nous avons :

$$\forall n \geq 1,\ p_{n+3} = \frac{1}{2}\,p_{n+2} + \frac{1}{4}\,p_{n+1} + \frac{1}{8}\,p_n.$$

En posant $p_0 = 1$, cette relation est également valable pour $n = 0$. La suite $(p_n)_{n\geq 0}$ est donc définie par :

$$\begin{cases} p_0 = 1 \text{ et } p_1 = p_2 = 0 \\ p_{n+3} = \frac{1}{2}\,p_{n+2} + \frac{1}{4}\,p_{n+1} + \frac{1}{8}\,p_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

c) Le polynôme caractéristique de cette récurrence est $X^3 - \frac{1}{2}\,X^2 - \frac{1}{4}\,X - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\,P(2X)$, qui a pour racines (simples) $a/2$, $b/2$ et $\overline{b}/2$. On obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \alpha \left(\frac{a}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{b}{2}\right)^n + \gamma \left(\frac{\overline{b}}{2}\right)^n$$

avec $\alpha = \dfrac{b\overline{b}}{(a-b)(a-\overline{b})}$, $\beta = \dfrac{a\overline{b}}{(b-a)(b-\overline{b})}$ et $\gamma = \overline{\beta}$, expressions obtenues en résolvant le système de Vandermonde :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha\,\dfrac{a}{2} + \beta\,\dfrac{b}{2} + \gamma\,\dfrac{\overline{b}}{2} = 0 \\ \alpha\,\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \beta\,\left(\dfrac{b}{2})\right)^2 + \gamma\,\left(\dfrac{\overline{b}}{2}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

On peut simplifier l'expression de α :

$$\alpha = \frac{1}{aP'(a)} = \frac{1}{3a^3 - 2a^2 - a} = \frac{1}{a^2 + 2a + 1}$$

et comme $|b| < a$, p_n est équivalent à αa^n quand n tend vers l'infini.

Exercices X-ENS

34) a) On vérifie facilement que $\mathcal{A}$ vérifie les trois axiomes demandés aux tribus :

- $\Omega \in \mathcal{A}$ en choisissant $T = \mathbb{N}$.

- Si $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, il existe une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{N}$ telle que :

  $$\forall k \in \mathbb{N},\ B_k = \bigcup_{n\in T_k} A_n.$$

  On a alors $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{n\in T} A_n$ avec $T = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_k$, donc $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable.

- Si $A = \bigcup_{n\in T} A_n$ est un élément quelconque de $\mathcal{A}$, on a $\Omega \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus T} A_n$ car $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de Ω : $\mathcal{A}$ est donc stable par passage au complémentaire.

Supposons réciproquement que $\mathcal{B}$ est une tribu infinie sur Ω, avec Ω dénombrable. Pour chaque $\omega \in \Omega$, notons

$$\mathcal{B}_\omega = \{B \in \mathcal{B},\ \omega \in B\} \text{ et } B_\omega = \bigcap_{B \in \mathcal{B}_\omega} B.$$

Nous avons alors, pour tout $\omega \in \Omega$:

- $\omega \in \mathcal{B}_\omega$ car B_ω est l'intersection de parties contenant ω (on peut remarquer que $\mathcal{B}_\omega$ est non vide, puisqu'il contient Ω).

- B_ω est élément de $\mathcal{B}$: comme Ω est dénombrable, $\Omega \setminus B_\omega$ est au plus dénombrable. Nous pouvons donc écrire $\Omega \setminus B_\omega = \{\omega_i,\ i \in I\}$ où I est fini ou dénombrable. Pour chaque $i \in I$, il existe $B_i \in \mathcal{B}_\omega$ tel que $\omega_i \notin B_i$. On en déduit donc :
$$\Omega \setminus B_\omega \subset \bigcup_{i \in I} (\Omega \setminus B_i)$$
En passant au complémentaire, on obtient :
$$\bigcap_{i \in I} B_i \subset B_\omega.$$
Comme $B_\omega = \bigcap_{B \in \mathcal{B}_\omega} B \subset \bigcap_{i \in I} B_i$, on a $B_\omega = \bigcap_{i \in I} B_i \in \mathcal{B}$ car I est au plus dénombrable.

- si ω' est un autre élément de Ω, on a soit $B_\omega = B_{\omega'}$, soit $B_\omega \cap B_{\omega'} = \emptyset$: en effet, supposons que B_ω et $B_{\omega'}$ aient l'élément ω'' en commun. Comme $B_\omega \in \mathcal{B}_{\omega''}$, nous avons $B_{\omega''} \subset B_\omega$. On en déduit que $B = B_\omega \setminus B_{\omega''} \in \mathcal{B}$ avec $B \subsetneq B_\omega$, donc $\omega \notin B$. Comme $\omega \in B_\omega$, on a $\omega \in B_{\omega''}$, puis $B_{\omega''} \in \mathcal{B}_\omega$, d'où $B_\omega \subset B_{\omega''}$. Nous avons ainsi $B_\omega = B_{\omega''}$, puis $B_{\omega'} = B_{\omega''}$ par symétrie : les parties B_ω et $B_{\omega'}$ sont donc égale si elles ne sont pas disjointes.

Il est alors possible de choisir une famille $(\omega_i)_{i \in I}$ telle que :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \exists!\, i \in I,\ B_\omega = B_{\omega_i}.$$

Comme les ω_i sont des éléments distincts de Ω, I est au plus dénombrable. Nous allons montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ avec :

$$\mathcal{C} = \left\{ \bigcup_{i \in T} B_{\omega_i},\ T \in \mathcal{P}(I) \right\}.$$

Comme I est au plus dénombrable, chaque partie T de I est au plus dénombrable, donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ est stable par réunion au plus dénombrable et chaque B_{ω_i} est élément de $\mathcal{B}$.

Si $B \in \mathcal{B}$, soit $T = \{i \in I,\ \omega_i \in B\}$ et notons $C = \bigcup_{i \in T} B_{\omega_i} \in \mathcal{C}$.

Par définition des B_ω, on a $B_{\omega_i} \subset B$ pour tout $i \in T$, donc $C \subset B$.

Si $\omega \in B$, il existe $i \in I$ tel que $B_\omega = B_{\omega_i}$. Comme $B_\omega \subset B$ (par définition de B_ω), on a $\omega_i \in B$, i.e. $i \in T$. On en déduit que $\omega \in B_\omega = B_{\omega_i} \subset C$.

Nous avons ainsi démontré que $B = C \in \mathcal{C}$, ce qui achève la preuve de l'égalité $\mathcal{B} = \mathcal{C}$. Pour montrer que nous sommes dans le cas précédent, il reste à remarquer que I est dénombrable, puisque dans le cas contraire, $\mathcal{P}(I)$ serait fini et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ le serait également.

b) Supposons que $\mathcal{A}$ soit une tribu infinie sur un ensemble Ω. Pour toute partie Ω' de Ω, notons :

$$\mathcal{A}_{\Omega'} = \{A \cap \Omega',\ A \in \mathcal{A}\}.$$

En particulier, si $\Omega' \in \mathcal{A}$, on a aussi $\mathcal{A}_{\Omega'} = \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(\Omega')$.

On montre facilement que $\mathcal{A}_{\Omega'}$ est une tribu sur Ω'. Nous allons construire Ω' telle que $\mathcal{A}_{\Omega'}$ soit infinie. Ceci prouvera que $\mathcal{A}_{\Omega'}$ est de la forme précédente :

$$\mathcal{A}_{\Omega'} = \left\{ \bigcup_{n\in T} A_n,\ T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right\}$$

où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de Ω'. Ainsi, l'application $T \longmapsto \bigcup_{n\in T} A_n$ sera une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $\mathcal{A}_{\Omega'}$ et $\mathcal{A}_{\Omega'}$ ne sera pas dénombrable. Comme l'application $A \longmapsto A\cap\Omega'$ est surjective de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}_{\Omega'}$, on aura montré que $\mathcal{A}$ n'est pas non plus dénombrable. Ainsi, toute tribu infini est non dénombrable : il n'existe pas de tribu infinie dénombrable.

Il reste à construire Ω'. Posons $A_0 = \Omega$. Comme $\mathcal{A}$ est infinie, il existe $A_1 \in \mathcal{A}$ telle que A_1 ne soit ni vide, ni égal à A_0. L'une au moins des deux tribus $\mathcal{A}_{A_1}$ ou $\mathcal{A}_{\Omega\setminus A_1}$ est infinie. Quitte à remplacer A_1 pas $\Omega\setminus A_1$, nous pouvons supposer que $\mathcal{A}_{A_1}$ est infinie et nous choisissons $\omega_0 \in \Omega\setminus A_1$. La construction peut alors être répétée en remplaçant A_0 par A_1 et $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}_{A_1}$, ce qui donne l'existence de A_2 et ω_1 tels que :

- $A_2 \in \mathcal{A}_{A_1}$;
- $\mathcal{A}_{A_2}$ est infini et $\omega_1 \in A_1\setminus A_2$.

Comme $A_1 \in \mathcal{A}$, on peut aussi écrire ces conditions sous la forme :

- $A_2 \in \mathcal{A}$ et $A_2 \subset A_1$;
- $\mathcal{A}_{A_2}$ est infini et $\omega_1 \in A_1\setminus A_2$.

Par récurrence, nous construisons deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \geq 0$:

- $\omega_n \in A_n \setminus A_{n+1}$;
- $A_n \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_{A_n}$ est infini ;
- $A_{n+1} \subset A_n$.

La partie $\Omega' = \{\omega_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ convient :

- Ω' est dénombrable car les ω_n sont deux à deux disjoints ;
- pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $B_n = A_n\cap\Omega' = \{\omega_p,\ p\geq n\}$ donc les B_n sont des éléments deux à deux distincts de la tribu $\mathcal{A}_{\Omega'}$, qui est donc infinie.

35) Première méthode : on peut traiter l'exercice de manière calculatoire. Pour $k \in \{1,\dots,n\}$, notons A_k l'évènement : "parmi les k premiers lancers, on a obtenu un nombre pair de `Pile`" et $B_k = \overline{A_k}$. Nous avons : $P(A_0) = 1$, $P(B_0) = 0$ et

$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\quad \begin{cases} P(A_k) = P(A_{k-1})(1-p_k) + P(B_{k-1})p_k \\ P(B_k) = P(A_{k-1})p_k + P(B_{k-1})(1-p_k) \end{cases}$$

i.e. :

$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\quad \begin{pmatrix} P(A_k) \\ P(B_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p_k & p_k \\ p_k & 1-p_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(A_{k-1}) \\ P(B_{k-1}) \end{pmatrix}$$

où p_k est la probabilité que la k-ième pièce tombe sur `Pile`. Comme :

$$\begin{pmatrix} 1-p_k & p_k \\ p_k & 1-p_k \end{pmatrix} = I_2 + p_k \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2p_k \end{pmatrix} Q \text{ avec } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$\begin{pmatrix} P(A_k) \\ P(B_k) \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \prod_{k=1}^{n}(1-2p_k) \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \prod_{k=1}^{n}(1-2p_k) \\ 1 - \prod_{k=1}^{n}(1-2p_k) \end{pmatrix}$$

Le jeu est donc équitable si et seulement $\prod_{k=1}^{n}(1-2p_k) = 0$, soit si et seulement si l'une des pièces est équilibrée.

Seconde méthode : maintenant que la solution est connue, on peut faire une preuve plus directe.

a) Supposons que l'une des pièces est équilibrée. Notons E_1 et E_2 respectivement les évènements "cette pièce équilibrée est tombée sur `Pile`" et "les $n-1$ autres pièces ont donné un nombre pair de `Pile`". Nous avons alors :

$$(A \text{ gagne la partie}) = \left(E_1 \cap \overline{E_2}\right) \sqcup \left(\overline{E_1} \cap E_2\right)$$

et donc (E_1 et E_2 sont indépendants) :

$$P(A \text{ gagne la partie}) = P(E_1)(1-P(E_2)) + (1-P(E_1))P(E_2) = \frac{1}{2}\,(1-P(E_2)) + \frac{1}{2}\,P(E_2) = \frac{1}{2}.$$

ce qui prouve que le jeu est équitable.

b) Montrons par récurrence sur n que si aucune pièce n'est équilibrée, le jeu n'est pas équitable. Si $n=1$ et si la pièce a une probabilité p différente de $1/2$ de tomber sur `Pile`, la probabilité de gagner pour A est égale à $1-p \neq 1/2$ et le jeu n'est pas équitable. Supposons que $n \geq 2$ et que la propriété ait été démontrée au rang n. Si les n pièces sont non équilibrées, notons une nouvelle fois E_1 et E_2 les évènements "la dernière pièce est tombée sur `Pile`" et "les $n-1$ premières pièces ont donné un nombre pair de `Pile`". Nous avons $P(E_1) = p \neq 1/2$ et $P(E_2) = q \neq 1/2$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, comme précédemment :

$$P(A \text{ gagne la partie}) = P(E_1)(1-P(E_2)) + (1-P(E_1))P(E_2) = p(1-q) + (1-p)q = p(1-2q) + q$$

Comme $1-2q$ est non nul, $p = 1/2$ est la valeur vérifiant $p(1-2q)+q = 1/2$: le jeu n'est donc pas équitable.

On peut aussi écrire :

$$P(A \text{ gagne la partie}) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow p(1-2q) + q = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow (1-2p)(1-2q) = 0 \Longleftrightarrow p = \frac{1}{2} \text{ ou } q = \frac{1}{2}.$$

Autrement-dit, le jeu est équitable si et seulement si la dernière pièce est équilibrée ou le jeu associé aux $n-1$ premières pièces est équitable, ce qui donne bien l'équivalence cherchée par récurrence.