Variables aléatoires : énoncés

Exercices CCP

1) Une urne contient trois boules rouges, deux boules noires et quatre boules bleues. On effectue cinq tirages successifs de deux boules prises simultanément dans l'urne, avec remise (après chaque tirage de deux boules, on replace les deux boules dans l'urne).

a) Définir un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ modélisant cette expérience aléatoire.

b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages bicolores obtenus. Quelle est la loi de X ? Que valent l'espérance et la variance de X ?

2) Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi puis l'espérance de la variable aléatoire Y définie par $Y = 0$ si X est impair et $Y = X/2$ sinon.

3) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On lâche n souris en direction de 3 cages : on suppose que chaque cage peut contenir les n souris et que les n souris choisissent une cage au hasard et indépendamment. Quelle est la probabilité qu'une cage reste vide ? Quelle est l'espérance de la variable aléatoire X égale au nombre de cages restées vides ?

4) Soient X et Y des variables indépendantes de même loi $\mathcal{P}(1)$. Quelle est la loi de X conditionnée par $(X + Y = s)$?

5) On considère un jeu dans lequel le joueur doit répondre à une suite (potentiellement infinie) de questions. Pour tout $n \geq 1$, on note p_n la probabilité qu'il réponde correctement à la n-ième question et $r_n = p_1 p_2 \dots p_n$.

a) Quelle est la loi du nombre N de bonnes réponses avant le premier échec ?

b) Montrer que $\mathbf{E}(N) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r_n$ (comme N est à valeur positive, on convient que $\mathbf{E}(N) = +\infty$ si N n'a pas d'espérance).

c) Appliquer la question b) aux cas suivants :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = 1/2$; (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = 1/n$; (iii) $p_1 = 1$ et $\forall n \geq 2,\ p_n = 1 - 1/n^2$.

6) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de X et N une variable aléatoire indépendante des X_n et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$.

a) Exprimer la fonction génératrice de S en fonction de celles de N et de X.

b) On suppose que X et N possèdent une espérance (resp. un moment d'ordre 2). Montrer que S possède une espérance (resp. un moment d'ordre 2) et la (resp. le) calculer.

7) On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(1/2)$. Pour $L \in \mathbb{N}^*$, on note B_L l'évènement "il n'y a pas deux 1 consécutifs dans la suite $(X_1, \dots, X_L)$".

a) Écrire un programme simulant N expériences aléatoires de ces L lancers et renvoyant la proportion d'expériences pour lesquels l'évènement B_L est réalisé.

b) Calculer $\mathbf{P}(B_L)$ pour $2 \leq L \leq 4$.

8) Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(2, 1/2)$.

a) On pose $S = (U - 1)^2 + (V - 1)^2$. Déterminer la loi de S et calculer l'écart-type de S.

b) On pose $T = (U - 1)(V - 1) + 1$. Calculer $E(S(T - 1))$ Déterminer la loi de T. Calculer la covariance de S et T. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

9) X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $p \in]0, 1[$ et $\lambda > 0$. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$ et $\mathbf{P}(X < Y)$.

10) Soit X un variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0,1[$. Calculer $\mathbf{E}(1/X)$.

11) Soit X un variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

12) Calculer $\mathbf{E}(\max(X,Y))$ où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$, avec $p,q \in]0,1[$.

Exercices Mines-Centrale

13) Soit p un paramètre réel inconnu vérifiant $0 < p < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une suite finie $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. On note $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Comment l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet-elle de définir à partir de $\overline{X}_n$ un intervalle de confiance de risque α $(0 < \alpha < 1)$ pour le paramètre p ?

b) En dérivant deux fois la fonction $g:\ t \longmapsto \ln\left(\mathbf{E}\left(e^{t(X_k-p)}\right)\right)$, démontrer l'inégalité :

$$\forall t \geq 0, \forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbf{E}\left(e^{t(X_k-p)}\right) \leq e^{\frac{t^2}{8}}.$$

c) En déduire successivement :

$$\forall\, t,\varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \mathbf{P}(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}}$$
$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \mathbf{P}(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq 2\, e^{-2n\varepsilon^2}$$

d) En déduire un intervalle de confiance de risque α $(0 < \alpha < 1)$ pour le paramètre p et comparer sa longueur, lorsque α est proche de 0, à celle de l'intervalle obtenu à la question a).

14) Nous considérons une puce se déplaçant aléatoirement dans l'espace-temps discret $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2$. À un instant $n \in \mathbb{N}$, nous noterons (X_n, Y_n) la position de la puce et nous supposons :

- $X_0 = Y_0 = 0$;
- entre l'instant n et l'instant $n+1$, la puce fait un saut aléatoire de longueur 1 avec équiprobabilité dans l'une des 4 directions ;
- les sauts sont indépendants les uns des autres.

a) Donner une modélisation de cette situation en terme d'espace probabilisé et de variables aléatoires. X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

b) Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{E}(X_n^2)$ en fonction de n.

c) Établir que $\mathbf{E}\left(\sqrt{X_n^2 + Y_n^2}\right) \leq \sqrt{n}$.

d) Pour tout $n \geq 0$, calculer $p_n = \mathbf{P}(X_n = Y_n = 0)$. On montrera que $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m}$.

15) Transmission : on étudie la transmission du nom N porté à l'origine par un seul homme. Cet homme forme la génération 0 et les descendants mâles de la n-ième génération forment la génération $(n+1)$-ième. On suppose que le nombre de fils de chaque homme suit la même loi P associée à une suite $(p_k)_{k\geq 0}$, avec $0 < p_0 < 1$, et qu'il y a indépendance des nombres de fils qu'auront deux individus différents. On note Z_n le nombre d'hommes portant le nom N à la n-ième génération, $x_n = \mathbf{P}(Z_n = 0)$, G la fonction génératrice de la loi P et m son espérance (avec $m \in [0, +\infty]$). Nous pouvons modéliser cette situation en introduisant une famille $(N_{i,j})_{i\geq 0,\ j\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi P telles que :

$$Z_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 0,\ Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} N_{n,j}.$$

a) Donner une relation de récurrence permettant de calculer la fonction génératrice G_n de Z_n.

b) Montrer que G est strictement croissante et convexe sur $[0, 1]$. À quelle condition est-elle strictement convexe ?

c) En déduire que l'équation $G(x) = x$ admet exactement une ou deux racine(s) dans $[0, 1]$. Discuter la limite de la suite (x_n) en fonction de m. Conclure sur le problème de l'extinction du nom N.

16) Une puce se déplace dans $\mathbb{Z}^d$ (avec $d = 1$, 2 ou 3) de façon aléatoire : elle se trouve à l'origine O à l'instant $n = 0$ et entre les instants n et $n + 1$, elle fait un saut de longueur 1 dans l'une des $2d$ directions (gauche-droite si $d = 1$, Sud-Ouest-Nord-Est quand $d = 2$ et Sud-Ouest-Nord-Est-Bas-Haut quand $d = 3$). On suppose que les sauts sont indépendants et que les $2d$ directions sont équiprobables. On note M_n la position de la puce à l'instant n.

a) Écrire un programme Python qui simule cette marche aléatoire.

b) On note T le premier instant où la puce revient à son point de départ O (avec $T = \infty$ s'il elle n'y revient pas). Toujours avec Python, calculer T pour un grand nombre de trajectoire et pour les trois valeurs de d. Que peut-on conjecturer (on dit que la marche aléatoire est *récurrente* si la probabilité de revenir au point de départ en un temps fini est égale à 1) ?

c) On suppose que $d = 1$. On appelle *chemin de longueur* k une suite de points de $\mathbb{Z}^2$ de la forme

$$(n, a_0), (n + 1, a_1), \ldots, (n + k, a_k)$$

où $|a_{i+1} - a_i| = 1$ pour tout i compris entre 0 et $k - 1$. On dira qu'un tel chemin relie (n, a_0) à $(n + k, a_k)$.

- Soient n, m, a, b quatre entiers relatifs tels que $n < m$. Combien existe-t-il de chemin reliant (n, a) à (m, b) ?
- Soient n, m, a, b quatre entiers relatifs tels que $n < m$, $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que le nombre de chemin reliant (n, a) à (m, b) et qui rencontrent l'axe des abscisses est égal au nombre de chemins reliant (n, a) à $(m, -b)$.
- Calculer $\mathbf{P}(T = 2n)$.
- Développer en série entière la fonction $x \longmapsto \sqrt{1 - x}$ et en déduire que $\mathbf{P}(T < +\infty) = 1$. Quelle est l'espérance de T ?

17) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, avec $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$ et on note α un réel strictement positif et différent de 1. L'objet de cet exercice est de calculer la probabilité que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha X_n}$ soit convergente, c'est-à-dire de calculer la probabilité de l'évènement :

$$A = \left\{ \omega \in \Omega,\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha X_n} \text{ converge} \right\}$$

a) Calculer $\mathbf{P}(A)$ quand $\alpha > 1$.

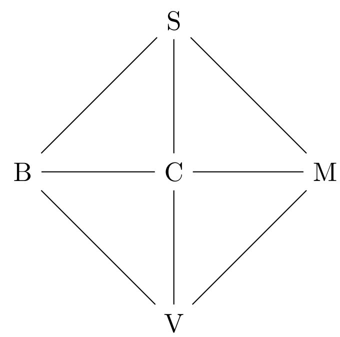
b) On suppose désormais que $\alpha \in]0, 1[$ et on pose $\beta = 1 - \alpha$.

- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} [X_n > n^\beta] \right) \leq \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n^\beta - 1}$ (on justifiera la convergence de ce reste).
- En déduire que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} [X_n \leq n^\beta] \right) \right) = 1$.

- Conclure

18) Une introduction aux chaînes de Markov

Romane et Philippe viennent d'intégrer l'école polytechnique et commence leur période militaire. Romane est basée à Sissonne (S) et Philippe à Vitry-le-François (V). Il y a trois autres bases, à Châlon-en-Champagne (C), Mourmelon (M) et Braine (B). Chaque semaine, chaque polytechnicien est réaffecté dans une base voisine de celle dans laquelle il se trouve, chaque base voisine étant équiprobable. Voici le graphe des voisinages :



Par exemple, après la première semaine, Romane peut être affectée à Mourmelon, à Châlon-sur-Marne ou à Braine, avec probabilité 1/3 pour chacune des possibilités. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité que Philippe et Romane soient affectée dans la même base pour la première fois après n semaines.

a) Calculer p_0, p_1 et p_2.

b) Écrire une fonction Python qui simule cette situation. Simuler un grand nombre de tirages aléatoires et comparer les distributions empiriques avec les valeurs obtenues en a. Écrire une fonction Python qui estime la valeur de l'espérance $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} np_n$.

c) Construire un graphe probabiliste à 4 sommets représentant le problème étudié, les sommets de ce graphe représentant les quatre états :

- 1 : les bases de Romane et Philippe sont diamétralement opposées ;
- 2 : Romane ou (exclusif) Philippe est basé à Châlon-en-Champagne ;
- 3 : les bases de Romane et Philippe sont adjacentes et différentes de Châlon-en-Champagne ;
- 4 : Romane et Philippe sont affectés à la même base.

Nous pouvons donc modéliser le problème en définissant une suite $(C_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires, définies sur le même espace probabilisé abstrait $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4\}$, C_n décrivant la position de Romane et Philippe à l'instant n. Le but étant d'atteindre la position 4, on pourra supposer qu'une fois arrivé en 4, on y reste. Autrement-dit, pour chaque entier n :

- C_n prend la valeur 1 (resp. 2 ou 3) si et seulement si Romane et Philippe sont, à l'instant n, en position 1 (resp. 2 ou 3) et non pas encore été affectés à la même base.
- C_n prend la valeur 4 si et seulement si il existe un instant $k \leq n$ tel que Romane et Philippe étaient dans la même base à l'instant k.

Pour simplifier les choses, nous supposerons également que la position initiale C_0 est aléatoire, de loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$. Comment les règles de déplacement se traduisent-elles sur la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Nous noterons $T = \min\{n \in \mathbb{N},\ C_n = 4\}$, avec la convention que $T = +\infty$ si on n'atteint jamais l'état 4.

d) Nous cherchons ici à calculer $q_n = \mathbf{P}(T = n \,|\, C_0 = 1)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Nous posons donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, i \in \{1, 2, 3\},\ q_{i,n} = \mathbf{P}(T = n \,|\, C_0 = i).$$

Quelles relations relient ces différentes suites entre elles ? En déduire des relations reliant les fonctions génératrices :

$$\forall\, i \in \{1, 2, 3\},\ f_i(z) = \sum_{n \geq 0} q_{i,n} z^n$$

puis calculer f_1. En déduire que $\mathbf{P}(T = +\infty \,|\, C_0 = 1) = 0$.

e) Montrer que la loi conditionnelle de T sachant $(C_0 = 1)$ admet un moment d'ordre 2 et calculer l'espérance et la variance de T conditionnellement à l'évènement $(C_0 = 1)$

19) On lance un dé équilibré jusqu'à ce que les six faces soient apparues. Quelle est la fonction génératrice de la variable aléatoire T égale au nombre de lancers effectués ? Quelle est l'espérance de T ? On pourra considérer un graphe probabiliste à 7 états $(e_i)_{0 \leq i \leq 6}$: à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, on se trouve dans l'état e_i si, au cours des n premiers tirages, on a vu apparaître exactement i faces différentes du dé.

20) Cinq personnes, placées sur les sommets d'un pentagone régulier, jouent à s'envoyer des frisbees. Ils ont deux frisbees, situés au départ sur des sommets adjacents. À chaque étape du jeu, chaque personne qui est en possession d'un frisbee l'envoie à un de ces deux voisins. Le jeu s'arrête quand une même personne reçoit les deux frisbees. Trouver l'espérance et la variance de la durée du jeu (en nombre d'étapes). Trouver une expression, en fonction des nombres de Fibonacci, pour la probabilité que le jeu dure plus de 100 étapes.

21) On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à ce qu'on obtienne la séquence `Pile - Face`. Quelle est l'espérance du nombre de lancers effectués ?

22) a) Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}$ s'écrit d'une unique façon sous la forme $n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k 2^k$ où $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite presque nulle de $\{0, 1\}$.

b) Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Montrer que

$$A = \{\omega \in \Omega,\ \exists n_0, \forall n \geq n_0,\ X_n(\omega) = 0\}$$

est un évènement.

c) On suppose que $\mathbf{P}(A) = 1$ et on note $X = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} X_n 2^n$. Montrer que X est une variable aléatoire.

d) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = n) = 1/2^{n+1}$. Calculer le paramètre p_n de la loi de X_n.

23) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on note $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ le coefficient de X^k dans le polynôme $P_n = X(X+1)\ldots(X+n-1)$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X(X+1)\ldots(X+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k.$$

a) Trouver une relation de type "Formule de Pascal" permettant de calculer les coefficients $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ par récurrence.

b) Montrer que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ est le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ dont la décomposition en cycles à supports disjoints comporte k cycles.

c) On munit $\mathfrak{S}_n$ de la loi uniforme. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $X(\sigma)$ le nombre de cycles de σ. Calculer $E(X)$.

24) a) Montrer l'identité : $\forall p, q \in \mathbb{N}$ t.q. $p \leq q$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.

b) Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On retire une à une et sans remise les boules de l'urne et on note X le nombre de tirages effectués jusqu'au retrait de la dernière boule blanche. Déterminer la loi de X et donner son espérance et sa variance.

25) On lance deux dés pipés, expérience modélisée par la donnée de deux variables aléatoires indépendantes X et Y à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$. On s'intéresse à la loi de la somme des deux dés, i.e. à la loi de $S = X + Y$.

a) Exprimer la fonction génératrice de S en fonction de celles de X et de Y.

b) En déduire qu'il n'est pas possible de piper les dés de sorte que S suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

c) Pour quelles valeurs de N cette méthode permet-elle de montrer qu'il n'est pas possible de piper deux dés à N faces de sorte que la somme des dés suive une loi uniforme sur $[\![2, 2N]\!]$? Qu'en est-il quand $N = 3$?

26) (Centrale 2015) Un fumeur a un paquet de N cigarettes dans chacune de ses deux poches. Chaque fois qu'il veut fumer, il choisit une poche au hasard pour prendre une cigarette. Il répète cela jusqu'à ce qu'il tombe sur un paquet vide. Soit X_N la variable aléatoire qui donne le nombre de cigarettes restant dans l'autre paquet à ce moment-là.

a) Écrire une fonction Python qui simule l'expérience et retourne X_N. Faire la moyenne pour 1000 tests et pour différentes valeurs de N.

b) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui modélise l'expérience.

c) Exprimer la loi de X_N.

d) Montrer que $(2N - k)\mathbf{P}(X_N = k + 1) = 2(N - k)\mathbf{P}(X_N = k)$. Calculer l'espérance de X_N puis en donner un équivalent quand N tend vers l'infini.

27) (Centrale 2016) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$. On suppose que $(X_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ est une famille de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé Ω et à valeurs dans E_n, suivant toutes la loi uniforme.

Soit T_n, qui à tout $\omega \in \Omega$ associe le plus petit entier $j \in [\![2, n + 1]\!]$ tel que $X_j(\omega) \in \{X_1(\omega), \dots, X_{j-1}(\omega)\}$.

a) Montrer que T_n est une variable aléatoire. Écrire une fonction Python qui simule T_n.

b) Écrire une fonction Python qui, appliquée à un entier $n \geq 1$, renvoie une estimation de $E(T_n)$. Utiliser cette fonction pour tracer la ligne brisée définie par les points $[n, \mathbf{E}(T_n)]$ pour $1 \leq n \leq 40$.

c) Prouver que $\mathbf{P}(T_n \geq k + 1) = \dfrac{n!}{n^k\,(n - k)!}$.

d) Calculer $\mathbf{E}(T_n)$. Prouver que $\mathbf{E}(T_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

e) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\mathbf{E}(T_n) \sim_{+\infty} \sqrt{Cn}$.

28) (Mines 2016) Dans un supermarché, le nombre quotidien de clients suit la loi de Poisson de paramètre λ et chaque client a la probabilité p de se faire voler son portefeuille. Donner la loi, l'espérance et la variance du nombre de portefeuilles volés.

29) (Mines 2016) Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire une poignée. Les 2^n poignées possibles sont supposées équiprobables. On note X la variable aléatoire donnant la somme des numéros tirés. Déterminer $\mathbf{E}(X)$.

30) (Centrale - Python) On s'intéresse à un examen passé par N candidats qui ont chacun une probabilité $p \in [0, 1]$ de réussir l'examen à chaque passage. Les candidats passent l'examen jusqu'à ce qu'ils réussissent. Les passages des candidats sont mutuellement indépendants. On note X_k avec $1 \leq k \leq N$ le nombre de passages nécessaires au candidat k pour réussir l'examen. On pose $S = X_1 + \dots + X_N$ et $Y = \max\limits_{1 \leq k \leq N} X_k$.

a) À l'aide de Python, déterminer expérimentalement l'espérance de la variable Y. On prendra par exemple $N = 10$ et $p = 1/3$.

b) Déterminer la loi de S, son espérance et sa variance (on pourra utiliser les fonctions génératrices).

c) Donner la fonction de répartition de Y et en déduire sa loi.

31) (Centrale Python) Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on considère une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1, r]\!]$. Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on note $T_i = \min\{k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Card}(\{X_1, X_2, \dots, X_k\}) = i\}$ et on pose $T = T_r$.

a) Simuler cette situation pour $r = 20$ et $r = 200$; estimer l'espérance de T.

b) Les variables T_i sont-elles indépendantes ? Déterminer la loi de $Y_i = T_i - T_{i-1}$ en calculant d'abord $\mathbf{P}(Y_i = k \mid T_{i-1} = t)$.

c) En déduire la fonction génératrice, puis l'espérance de T.

32) (Mines 2018) Soient X et Y i.i.d. à valeurs réelles strictement positives. Montrer que $\mathbf{E}\left(\dfrac{X}{Y}\right) \geq 1$.

33) (Mines 2018) Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On pioche avec remise et on s'arrête dès qu'un même jeton a été pioché deux fois.

a) Écrire une fonction Python qui simule la variable aléatoire N égale au nombre de tirage effectué, puis une fonction qui calcule une approximation de la loi de N.

b) Calculer la loi de N. Vérifier que le résultat est cohérent avec la question précédente.

34) (Mines 2018) Soit X une v.a.r. positive d'espérance finie. Montrer que $\mathbf{P}(X \geq x) = o(1/x)$ au voisinage de $+\infty$ (on pourra commencer par le cas où X est à valeurs entières).

35) (Mines 2018) Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive et bornée. Montrer que X possède un moment M_n de tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$ puis montrer que $\sqrt[n]{M_n}$ a une limite (que l'on précisera) quand n tend vers l'infini. On pourra commencer par le cas où X prend un nombre fini de valeurs.

36) On lance une pièce une infinité de fois : on suppose que les résultats des lancers sont indépendants et suivent la même loi ; on note p la probabilité que la pièce tombe sur Pile et on suppose que $0 < p < 1$. En notant $(x_n)_{n\geq 1} \in \{F, P\}^{\mathbb{N}^*}$ la suite des résultats observés, on note N_1 la longueur de la "première série", c'est-à-dire l'entier ≥ 1 défini par :

$$x_1 = \cdots = x_{N_1} \text{ et } x_{N_1+1} \neq x_{N_1}.$$

De même, on note N_2 la longueur de la seconde série :

$$x_{N_1+1} = \cdots = x_{N_1+N_2} \neq x_{N_1+N_2+1}.$$

a) Écrire une fonction Python qui simule cette situation et renvoie le couple (N_1, N_2). En déduire une estimation des lois et des espérances de N_1 et N_2.

b) Proposez une modélisation probabiliste de cette expérience aléatoire et calculer les lois et espérances de N_1 et N_2. Les deux variables sont-elles indépendantes ?

37) (Centrale 2019) Le nombre d'œufs pondus par une poule suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque œuf éclot de façon indépendante avec une probabilité $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi du nombre K d'œufs qui éclosent.

38) Une urne de Polya

Une urne contient a boules rouges et b boules noires. On effectue une infinité de tirages de la façon suivante : on tire une boule dans l'urne, et on la remet dans l'urne en ajoutant c boules de la même couleur que celle qui a été tirée. On note X_n le nombre de boules rouges qui ont été tirées lors des n premiers tirages.

a) Pour $0 \leq k \leq n$, quelle est la probabilité que k boules rouges aient été tirées aux k premiers tirages, puis $n-k$ boules noires aux tirages suivant ?

b) Déterminer la loi de X_n, sans chercher à simplifier le résultat.

c) Quelle est la loi de X_{n+1} conditionnellement à l'événement $X_n = k$? En déduire $E(X_n)$.

d) Montrer que $T = \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n = 1\}$ est presque sûrement finie et calculer sa loi. À quelle condition T est-elle d'espérance finie ?

39) Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1, k]\!]$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $N = \mathrm{Card}\,(\{X_1, \ldots, X_n\})$.

40) Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(T \geqslant k) > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \mathbf{P}(T = n)$ et $t_n = \mathbf{P}(T = n \,|\, T \geqslant n)$.

a) Exprimer $\mathbf{P}(T \geqslant n+1 \,|\, T \geqslant n)$ à l'aide de t_n et en déduire une expression de $\mathbf{P}(T \geqslant n)$ et de p_n.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, t_n \in [0, 1[$ et que $\sum_{n \geq 0} t_n$ diverge.

c) Réciproquement, montrer que si une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie ces deux propriétés, on peut définir une variable aléatoire T telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(T = n \,|\, T \geqslant n) = t_n$.

41) Inégalité de Paley-Zigmund

Soit X une variable aléatoire positive possédant un moment d'ordre 2 et $a \in]0, 1[$.

En écrivant $X = X\ \mathbf{1}_{X < a\,\mathbf{E}(X)} + X\ \mathbf{1}_{X \geq aE(X)}$, montrer que $\mathbf{P}\left(X \geq aE(X)\right) \geq (1-a)^2 \dfrac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.

42) (Mines 21) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans N. On note $X \preceq Y$ si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathbf{P}(X \geq t) \leq \mathbf{P}(Y \geq t)$.

a) Montrer que $X \preceq Y$ si et seulement si pour toute $h :\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ croissante et bornée, $\mathbf{E}(h(X)) \leq \mathbf{E}(h(Y))$.

b) On suppose que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Montrer que $X \preceq Y$ si et seulement si $\lambda \leq \mu$.

c) On suppose que X et Y sont indépendantes que que $X \preceq Y$. Montrer que $P(X \leq Y) \geq 1/2$.

43) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles discrètes ayant un moment d'ordre 4. On pose $m = \mathbf{E}(X1)$, $V_2 = \mathbf{E}((X_1 - m)^2)$ et $V_4 = \mathbf{E}((X_1 - m)^4)$.

Soit $\varepsilon > 0$. On note A_n^ε l'événement $\left(\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| \geq \varepsilon|\right)$.

a) Donner une majoration de $\mathbf{P}(A_n^\varepsilon)$ en fonction de n, V_2 et V_4.

b) En déduire que la série de terme général $\mathbf{P}(A_n^\epsilon)$ converge.

c) Montrer que $\mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcap_{p=1}^{+\infty}\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n^\varepsilon\right) = 0$.

44) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p_1 et p_2. Calculer les espérances de $Y_1 = \min(X_1, X_2)$ et $Y_2 = \max(X_1, X_2)$.

45) Le paradoxe de Walter Penney

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $\{0, 1\}$. Si m un entier non nul et $S \in \{0, 1\}^m$, le "temps d'attente" de S est la variable aléatoire :

$$T_S = \min\{n \geq m,\ (X_{n-m+1}, \ldots, X_m) = S\}.$$

a) Écrire une fonction Python qui, appliquée à une séquence S de 0 et de 1 de longueur m, simule la variable T_S ; écrire une fonction qui estime l'espérance de T_S. Appliquer votre fonction aux huit séquences de longueur 3 ; que semblent valoir ces huit espérances ?

b) Si S_1 et S_2 sont deux séquences distinctes de même longueur m, on dit que, dans une partie, “S_1 bat S_2” si S_1 apparait avant S_2.

Écrire une fonction Python qui, appliquée à deux séquences S_1 et S_2 distinctes de même longueur, simule ce jeu et estime la probabilité p_{S_1,S_2} de l'évènement “S_1 bat S_2”. Conjecturer les valeurs p_{S_i,S_j} pour i,j éléments distincts de $\{1,2,3,4\}$, avec

$$S_1=(1,1,0),\ S_2=(1,0,0),\ S_3=(0,0,1) \text{ et } S_4=(0,1,1).$$

c) Démontrer que les valeurs conjecturées pour $E(T_{S_1})$, $E(T_{S_2})$, p_{S_1,S_2} sont effectivement les bonnes valeurs.

Exercices X-ENS

46) a) Montrer que pour $t\in\mathbb{R}$ et $x\in[-1,1]$, on a $e^{tx}\leq \dfrac{1-x}{2}e^{-t}+\dfrac{1+x}{2}e^{t}$.

b) Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t)\leq \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

c) Soit $(X_1,\dots,X_n)$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $[-1,1]$ et centrées. En utilisant l'espérance de $e^{t(X_1+\cdots+X_n)}$, démontrer :

$$\forall a>0,\ \mathbf{P}(|X_1+\cdots+X_n|\geq a)\leq 2\exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right).$$

47) (X 2015) Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{-1,1\}$ et de loi définie par $\mathbf{P}(\{1\})=p$ et $\mathbf{P}(\{-1\})=q$ pour un couple $(p,q)\in]0,1[^2$ tel que $p+q=1$.

On pose $S_0=0$ et, pour $n\geq 1$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}B_k$.

a) Montrer que $T:\ \omega\longmapsto \inf\{k\in\mathbb{N},\ S_k(\omega)=1\}$ est une variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$).

b) Montrer que $P(T=1)=p$ et que pour $n\geq 2$, $P(T=n)=\ q\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}P(T=k-1)\,P(T=n-k)$.

c) Montrer que $g:\ \ s\longmapsto \mathbf{E}(s^T\,\mathbf{1}_{T<+\infty})$ est définie et continue sur $[-1,1]$ et qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle : $g(s)=ps+qsg(s)^2$. À quelle condition portant sur p la variable T est-elle presque sûrement finie ?

d) En déduire la valeur de $\mathbf{P}(T=n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

48) (ENS 2016) Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω,A,P), indépendantes et telles que $\forall n\geq 1,\ \mathbf{P}(\varepsilon_n=-1)=\mathbf{P}(\varepsilon_n=1)=1/2$.

a) On note $L_2(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω et possédant un moment d'ordre 2. Montrer que l'application $\varphi:\ (X,Y)\longmapsto E(XY)$ est une forme bilinéaire positive sur $L_2(\Omega)$ et que $(\varepsilon_p\varepsilon_q)_{1\leq p<q}$ est une famille orthonormale. Montrer que pour tout $X\in L_2(\Omega)$, la famille $\left(\mathbf{E}(\varepsilon_p\varepsilon_qX)\right)_{1\leq p<q}$ est de carré sommable, avec :

$$\sum_{1\leq p<q}\mathbf{E}(\varepsilon_p\varepsilon_qX)^2\leq\sqrt{\mathbf{E}(X^2)}.$$

b) On fixe une suite réelle $(a_n)_{n\geq 1}$ et on note pour $n\geq 1$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k a_k$. On définit enfin l'évènement

$$A=\{\omega\in\Omega,\ (S_n(\omega))_{n\geq 1}\text{est bornée}\}.$$

Montrer que si $\mathbf{P}(A) > 0$, $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ converge. Qu'en déduit-on quant à la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{k}}$?

49) (ENS 2016) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X. On suppose que $X_1 + X_2$ suit la même loi que $2X$. Montrer que X est presque sûrement constante (on pourra commencer par traiter le cas où X possède un moment d'ordre 2).

50) (ENS 2016) **Transformée de Laplace**

Soient X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et $\Phi_X : \ \lambda \in \mathbb{R}^+ \longmapsto E\left(e^{-\lambda X}\right)$.

a) Montrer que Φ_X est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Soit x, a et λ strictement positifs ; montrer que $\displaystyle\sum_{0\leq k\leq \lambda x} e^{-\lambda a}\frac{(\lambda a)^k}{k!} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x > a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$

c) Montrer que Φ_X caractérise la loi de X.

51) (X 2016) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ de la loi uniforme. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'un élément de $\mathfrak{S}_n$.

a) Déterminer la loi de X_n puis, pour $k \in \mathbb{N}$, la limite de $\mathbf{P}(X_n = k)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Soit $X \sim \mathcal{P}(1)$. Montrer que $\displaystyle\delta_n = \sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X = k)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

52) (X 2016) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c > 0$ tels que $\mathbf{P}(S_n > n(\lambda + \varepsilon)) \leq e^{-cn}$.

b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $d > 0$ tels que $\mathbf{P}(S_n < n(\lambda - \varepsilon)) \leq e^{-dn}$.

c) Quelle est la limite presque sûre de $\dfrac{S_n}{n}$?

53) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$ et on suppose que $Z : \ \Omega \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ est une variable aléatoire de loi uniforme. On note N le nombre d'orbites de la permutation Z.

a) Calculer la loi et l'espérance de N pour $n = 2, 3, 4$.

b) On suppose que $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes telle que $X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{i}\right)$. Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit la même loi que N. En déduire l'espérance de N.

54) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $R_n = \mathrm{Card}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ est une variable aléatoire et que $\mathbf{E}(R_n) = o(n)$ au voisinage de $+\infty$.

b) On suppose que les X_n admettent une espérance. Montrer que $\mathbf{E}(R_n) = o(\sqrt{n})$.

55) a) **Inégalité de Paley-Zygmund :** si X est une variable aléatoire réelle strictement positive telle que $E(X^2) < +\infty$ et si $\lambda \in]0, 1[$, montrer que $\mathbf{P}(X \geq \lambda \mathbf{E}(X)) \geq \dfrac{(1-\lambda)^2 \mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.

b) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes strictement positives et d'espérance 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n le produit $X_1 X_2 \ldots X_n$. Montrer que P_n converge en probabilité vers 0 si et seulement si $\mathbf{E}(\sqrt{X_1}) \ldots \mathbf{E}(\sqrt{X_n})$ tend vers 0.

56) On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de "piles" soit égal au double du nombre de "faces". Quelle est la probabilité que l'on ne s'arrête jamais ? On pourra utiliser une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, 2\}$ et s'intéresser à la famille $(p_k)_{k\in\mathbb{Z}}$:

$$p_k = \mathbf{P}(\exists n \in \mathbb{N},\ k + X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0).$$

57) (X 2019) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Poisson de paramètre 1.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!} = \frac{1}{n!}$.

b) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $T_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(T_n \geq x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$.

58) Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$; on dit que X_n converge *en loi* vers X si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n = k)$ converge vers $\mathbf{P}(X = k)$.

a) Montrer que si X_n converge en loi vers X, G_{X_n} converge simplement vers G_X sur $[0, 1]$.

b) Soit $(x_n(k))_{n,k\geq 0}$ une familles de réels de $[0, 1]$ et soit $k_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que λ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n(k_0))_{n\geq 0}$. Montrer qu'il existe une extractrice $\varphi :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout k, $x_{\varphi(n)}(k)$ converge avec $x_{\varphi(n)}(k_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$.

c) Montrer la réciproque du a).

Variables aléatoires : corrigés

Exercices CCP

1) a) On peut noter $U = \{R_1, R_2, R_3, N_1, N_2, B_1, B_2, B_3, B_4\}$ l'ensemble des 9 boules, T l'ensemble des parties de U à deux éléments (T contient $\binom{9}{2} = 36$ éléments) et $\Omega = T^5$, que l'on muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme.

b) Si $\{A, B\}$ est un élément de T, nous noterons $f(\{A, B\}) = \begin{cases} 1 & \text{si les boules } A \text{ et } B \text{ ont la même couleur} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et, pour chaque $k \in \{1, \ldots, 5\}$, X_k la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega = (\{A_i, B_i\})_{1 \leq i \leq 5} \in \Omega,\ X_k(\omega) = f(\{A_k, B_k\})$$

Les variables X_k sont indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p, avec :

$$p = \frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ suit donc la loi binomiale de paramètre $(5, p)$ et nous avons :1 On a $E(X) = 5p = \dfrac{25}{18}$ et $V(X) = 5p(1-p) = \dfrac{325}{324}$.

2) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, avec $\mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(X \text{ est impair}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(1-p)^{2k} = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$ et, pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{P}(Y = n) = \mathbf{P}(X = 2n) = \mathbf{P}(1-p)^{2n-1}$.

On en déduit que Y est d'espérance finie, avec $E(Y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(1-p)^{2n-1}$. En dérivant l'égalité :

$$\forall q \in]-1, 1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} = \frac{1}{1-q^2},$$

nous obtenons :

$$\forall q \in]-1, 1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} 2nq^{2n-1} = \frac{2q}{(1-q^2)^2},$$

et donc :

$$E(Y) = p\,\frac{1-p}{(1-(1-p)^2)^2} = \frac{1-p}{p(2-p)^2}.$$

3) On peut modéliser cette "expérience aléatoire" par la donnée de l'espace probabilisé $\Omega = \{1, 2, 3\}^n$ muni de la probabilité uniforme, l'élément $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ représentant l'évènement élémentaire "pour tout k, la k-ième souris est entrée dans la cage de numéro a_k".

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, notons :

- A_i l'évènement "Toutes les souris sont entrées dans i-ième cage" ;
- B_i l'évènement "La i-ième cage reste vide et les deux autres ne le sont pas".

A_i est un singleton, donc $\mathbf{P}(A_i) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{1}{3^n}$.

Il y a autant d'éléments dans B_i que $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ contient de parties non vides et distinctes de I_n. En effet, on note j_1 et j_2 les deux élément de $\{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ et à chaque $I \in \mathcal{P}(I_n) \setminus \{\emptyset, I_n\}$, on associe bijectivement la suite $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ définie par :

$$\forall k,\ a_k = \begin{cases} j_1 & \text{si } k \in I, \\ j_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc $\mathbf{P}(B_i) = \dfrac{2^n - 2}{3^n}$.

La loi de X de calcule alors facilement :

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3) = \dfrac{3}{3^n} = \dfrac{1}{3^{n-1}} \\ \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3) = 3\,\dfrac{2^n - 2}{3^n} = \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1}} \\ \mathbf{P}(X = 0) = 1 - \mathbf{P}(X = 1) - \mathbf{P}(X = 2) = \dfrac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}} \end{cases}$$

La probabilité qu'une cage reste vide est donc égale à $\mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) = \dfrac{2^n - 1}{3^{n-1}}$ et :

$$E(X) = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} + 2\,\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{2^n}{3^{n-1}} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

4) Remarquons tout d'abord que pour $s \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{P}(X + Y = s) = \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{s} [X = n \text{ et } Y = s - n]\right) = \sum_{n=0}^{s} \mathbf{P}(X = n \text{ et } Y = s - n) = \sum_{n=0}^{s} \mathbf{P}(X = n)\mathbf{P}(Y = s - n)$$

par indépendance de X et Y, d'où :

$$\mathbf{P}(X + Y = s) = e^{-2} \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!}\frac{1}{(s-n)!} = \frac{e^{-2}}{s!} \sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} = e^{-2}\frac{2^s}{s!}.$$

Ainsi, $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre 2. En particulier, $P(X + Y = s)$ est non nul et on peut bien définir la loi de X conditionnellement à l'évènement $[X + Y = s]$.

On a ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{P}(X = n \mid X + Y = s) = \frac{\mathbf{P}(X = n)\mathbf{P}(Y = s - n)}{\mathbf{P}(X + Y = s)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > s \\ \dbinom{s}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^s & \text{si } 0 \leq n \leq s \end{cases}$$

La loi de X conditionnellement à $X + Y = s$ est donc la loi binomiale de paramètre $(s, 1/2)$.

5) a) Pour $n \geq 1$,notons R_n l'évènement "le joueur répond correctement à la n-ième question". Il faut évidemment comprendre que les R_n sont mutuellement indépendants. Nous avons :

$$\forall n \geq 0,\ \mathbf{P}(N = n) = \mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n \cap \overline{R_{n+1}}) = p_1 p_2 \dots p_n(1 - p_{n+1}) = r_n - r_{n+1}.$$

b) On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{p} n\mathbf{P}(E = n) = \sum_{n=0}^{p} n r_n - \sum_{n=0}^{p} n r_{n+1} = \sum_{n=0}^{p} n r_n - \sum_{n=1}^{p+1} (n-1) r_n = \sum_{n=0}^{p} r_n \xrightarrow[p \to +\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} r_n = E(N).$$

c) On obtient :

(i) $E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$;

(ii) $E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$;

(iii) $\forall n \geq 1,\ r_n = \frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\dots(n-1)(n+1)}{(n!)^2} = \frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2} = \frac{n+1}{2n}$ donc $E(N) = +\infty$.

6) a) Pour z tel que $|z| \leq 1$:

$$\begin{aligned}
G_S(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k \text{ et } N = n \right) \right) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k \text{ et } N = n \right) \right) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k \right) \mathbf{P}(N=n) \right) z^k \text{ car les variables } N,\ X_1,\ \dots,\ X_k \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N=n) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k \right) z^k \right) \text{ car la famille est sommable} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N=n)\, G_{X_1+\dots+X_k}(z) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N=n)\, (G_X(z))^k \text{ car les } X_i \text{ sont i.i.d} \\
&= G_N(G_X(z))
\end{aligned}$$

soit $G_S = G_N \circ G_X$.

Si N et X ont un moment d'ordre 1, G_N et G_X sont dérivable sur $[0,1]$, donc G_S l'est également et S possède un moment d'ordre 1, avec :

$$E(S) = G_S'(1) = G_N'(G_X(1))G_X'(1) = G_N'(1)G_X' = E(N)E(X).$$

Si N et X on un moment d'ordre 2, G_N et G_X sont deux fois dérivables sur $[0,1]$, donc G_S également et S possède un moment d'ordre 2, avec :

$$\begin{aligned}
E(S^2) &= G_S''(1) + G_S'(1) \\
&= G_N''(G_X(1))\,(G_X'(1))^2 + G_N'(G_X(1))G_X''(1) + E(N)E(X) \\
&= (E(N^2) - E(N))E(X)^2 + E(N)(E(X^2) - E(X)) + E(N)E(X) \\
&= (E(N^2) - E(N))E(X)^2 + E(N)E(X^2)
\end{aligned}$$

On a ensuite, après quelques calculs élémentaires :

$$V(S) = V(N)E(X)^2 + V(X)E(N).$$

7) a) La fonction `B` simule l'expérience : on stocke dans `k` le nombre de 1 consécutifs déjà observés et chaque appel `x = rd.randint(0,2)` simule une variable X_i. Si `x` prend la valeur 0, on ramène `k` à la valeur 0 ; sinon, si `k` était égal à 1, on a obtenu deux 1 consécutifs et on renvoie la valeur 1 ; sinon, on a un premier 1 et on assigne à `k` la valeur 1. Si on sort de la boucle, c'est que l'on n'a pas vu deux 1 consécutifs et on renvoie 0.

```python
import numpy.random as rd

def B(L):
    k = 0
    for i in range(L):
        x = rd.randint(0,2)
        if x == 0:
            k = 0
        else:
            if k == 1:
                return 1
            else:
                k = 1
    return 0

def f(L,N):
    s = 0
    for k in range(N):
        s += B(L)
    return(s/N)
```

On obtient les résultats :

```
>>> f(2,10000)
0.2459

>>> f(3,10000)
0.3784

>>> f(4,10000)
0.4998
```

b) La variable $(X_1, X_2, \dots, X_L)$ suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{0,1\}^L$. En notant $\mathcal{B}_L$ l'ensemble des suites $(x_i)_{1\leq i\leq L}$ qui contiennent deux 1 consécutifs, nous avons :

$$P(B_L) = \frac{\mathrm{Card}(\mathcal{B}_L)}{2^L}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_2 &= \{(1,1)\} \text{ et } P(B_2) = \frac{1}{4} \\
\mathcal{B}_3 &= \{(0,1,1),(1,1,0),(1,1,1)\} \text{ et } P(B_3) = \frac{3}{8} \\
\mathcal{B}_4 &= \{(0,0,1,1),(0,1,1,0),(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,0),(1,1,0,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\} \text{ et } P(B_4) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

8) (U,V) est à valeur dans $\{0,1,2\}$. Le tableau suivant donne la loi de ce couple, ainsi que les valeurs de S, de T et de $S(T-1)$

u	v	$\mathbf{P}(U=u,V=v)$	$s=(u-1)^2+(v-1)^2$	$t=(u-1)(v-1)+1$	$s(t-1)$
0	0	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	2	2	2
0	1	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$	1	1	0
0	2	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	2	0	-2
1	0	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$	1	1	0
1	1	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	0	1	0
1	2	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$	1	1	0
2	0	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	2	0	-2
2	1	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$	1	1	0
2	2	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	2	2	2

a) S est à valeur dans $\{0,1,2\}$, avec $\mathbf{P}(S=0)=\dfrac{1}{4}$, $\mathbf{P}(S=1)=\frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(S=2)=\frac{1}{4}$. On en déduit :

$$E(S)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1, E(S^2)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2} \text{ et } \sigma(S)=\sqrt{E(S^2)-E(S)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

b) Le tableau donne directement :

$$E(S(T-1))=0,\ \mathbf{P}(T=0)=\frac{1}{8},\ \mathbf{P}(T=1)=\frac{3}{4},\ \mathbf{P}(T=2)=\frac{1}{8} \text{ et } E(T)=\frac{3}{4}+2\times\frac{1}{8}=1.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Cov}(S,T)=E(ST)-E(S)E(T)=E(S(T-1))+E(S)-E(S)E(T)=0.$$

Pourtant, S et T ne sont pas indépendantes car $\mathbf{P}(S=0 \text{ et } T=0)=0$ alors que $\mathbf{P}(S=0)\mathbf{P}(T=0)\neq 0$.

9) On a (en utilisant l'indépendance de X et Y) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=Y) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbf{P}(X=Y=i)=\sum_{i=1}^{+\infty}\mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}(Y=i)\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}(1-p)^{i-1}pe^{-\lambda}\frac{\lambda_i}{i!}=\frac{p}{1-p}\,e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}\\
&= \frac{p}{1-p}\,e^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(X<Y) &= \sum_{1\leq i<j} \mathbf{P}(X=i \text{ et } Y=j) \\
&= \sum_{j=2}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=j)\left(\sum_{i=1}^{j-1}(1-p)^{i-1}p\right) \\
&= \sum_{j=2}^{+\infty} p\,\mathbf{P}(Y=j)\frac{1-(1-p)^{j-1}}{1-(1-p)} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{j=2}^{+\infty}(1-(1-p)^{j-1})\frac{\lambda^j}{j!} \\
&= e^{-\lambda}\left(e^{\lambda}-1-\lambda-\frac{1}{1-p}\left(e^{(1-p)\lambda}-1-(1-p)\lambda\right)\right) \\
&= 1+\frac{p}{1-p}\,e^{-\lambda}-\frac{1}{1-p}\,e^{-\lambda p}
\end{aligned}
$$

10) On a, en posant $q=1-p$:

$$
E(1/X)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\,\mathbf{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\,p(1-p)^{k-1}=\frac{p}{q}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^k}{k}=-\frac{p}{q}\,\ln(1-q)=\frac{-p\ln p}{1-p}
$$

11) Il suffit de faire le calcul :

$$
E\left(\frac{1}{1+X}\right)=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1+k}\,\frac{\lambda^k}{k!}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)=\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}
$$

12) La formule de transfert donne :

$$
\begin{aligned}
E(\max(X,Y)) &= \sum_{n,m\geq 1}\max(n,m)\,p(1-p)^{n-1}\,q(1-q)^{m-1} \\
&= pq\sum_{n=1}^{+\infty}\left[n(1-p)^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{n}(1-q)^{m-1}\right)+(1-p)^{n-1}\left(\sum_{m=n+1}^{+\infty}m(1-q)^{m-1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

On a, pour tout $x\in]-1,1[$:

$$
\sum_{m=n+1}^{+\infty}mx^{m-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{m=n+1}^{+\infty}x^m\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{n+1}}{1-x}\right)=\frac{(n+1)x^n(1-x)+x^{n+1}}{(1-x)^2}=\frac{x^n(n(1-x)+1)}{(1-x)^2}
$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
E(\max(X,Y)) &= pq\sum_{n=1}^{+\infty}\left[n(1-p)^{n-1}\frac{1-(1-q)^n}{q}+(1-p)^{n-1}\frac{(1-q)^n(nq+1)}{q^2}\right]\\
&= p\sum_{n=1}^{+\infty}n(1-p)^{n-1}+p\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}(1-q)^n\left(\frac{nq+1}{q}-n\right)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}np(1-p)^{n-1}+\frac{p(1-q)}{q}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}\\
&= E(X)+\frac{p(1-q)}{q}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p-q+pq)^{n-1}\\
&= \frac{1}{p}+\frac{p(1-q)}{q(p+q-pq)}\\
&= \frac{pq+p^2+q^2-pq^2-p^2q}{pq(p+q-pq)}
\end{aligned}$$

Exercices Mines-Centrale

13) a) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne, pour tout $a>0$:

$$\mathbf{P}\left(\left|\overline{X_n}-E(\overline{X_n})\right|\geq a\right)\leq\frac{V(\overline{X_n})}{a^2}$$

soit :

$$\mathbf{P}\left(\left|\overline{X_n}-p\right|\geq a\right)\leq\frac{p(1-p)}{na^2}\leq\frac{1}{4na^2}.$$

En choisissant $a=\dfrac{1}{2\sqrt{n\alpha}}$, nous aurons donc :

$$\mathbf{P}\left(\overline{X_n}-a<p<\overline{X_n}+a\right)\geq 1-\alpha$$

et $\left[\overline{X_n}-a,\overline{X_n}+a\right]$ sera un intervalle de confiance de risque α pour le paramètre p.

b) Soit $k\in\{1,2,\ldots,n\}$. Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
\forall t\in\mathbb{R},\ g(t) &= \ln\left((1-p)e^{-pt}+pe^{t(1-p)}\right)=\ln\left(e^{-pt}\left(1-p+pe^t\right)\right)=-pt+\ln\left(1-p+pe^t\right)\\
\forall t\in\mathbb{R},\ g'(t) &= -p+\frac{pe^t}{1-p+pe^t}\\
\forall t\in\mathbb{R},\ g''(t) &= \frac{p(1-p)e^t}{(1-p+pe^t)^2}.
\end{aligned}$$

En posant $h:\ t\longmapsto\dfrac{t^2}{8}-g(t)$, nous avons :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ h''(t)=\frac{1-2p+p^2-2p(1-p)e^t+p^2e^{2t}}{4(1-p+pe^t)^2}=\left(\frac{1-p-pe^t}{2(1-p+pe^t)}\right)^2\geq 0.$$

h' est donc croissante sur $[0,+\infty[$, avec $h'(0)=0$, donc h est croissante sur $[0,+\infty[$ avec $h(0)=0$, donc h est positive sur $[0,+\infty[$, soit en composant par la fonction croissante exponentielle :

$$\forall k\in\ [\![1,n]\!],\ \forall t\geq 0,\ E\left(e^{t(X_k-p)}\right)\leq e^{\frac{t^2}{8}}.$$

c) Soient $t > 0$ et $\varepsilon \geq 0$. Nous avons :

$$\left[\overline{X_n} - p \geq \varepsilon\right] = \left[\sum_{k=1}^{n}(X_k - p) \geq n\varepsilon\right] = \left[\exp\left(\sum_{k=1}^{n} t(X_k - p)\right) \geq \exp\left(nt\varepsilon\right)\right]$$

Comme la variable aléatoire $\exp\left(\sum_{k=1}^{n} t(X_1 k - p)\right)$ est positive et possède un moment d'ordre 1 (c'est une variable aléatoire finie), on peut appliquer l'inégalité de Markov et utiliser l'indépendance des variables X_k :

$$\mathbf{P}\left(\overline{X_n} - p \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{n} t(X_k - p)\right)\right)}{\exp(nt\varepsilon)} = \frac{E\left(\prod_{k=1}^{n} e^{t(X_k - p)}\right)}{\exp(nt\varepsilon)} = \frac{\prod_{k=1}^{n} E\left(e^{t(X_k-p)}\right)}{\exp(nt\varepsilon)} \leq e^{n\frac{t^2}{8} - nt\varepsilon}$$

Cette égalité étant valable pour tout $t > 0$, on peut l'appliquer en remplaçant t par $\frac{t}{n}$, ce qui donne :

$$\forall t > 0,\ \forall \varepsilon \geq 0,\ P\left(\overline{X_n} - p \geq \varepsilon\right) \leq e^{-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}},$$

et l'égalité est encore valable pour $t = 0$, puisque $P\left(\overline{X_n} - p \geq \varepsilon\right) \leq 1$.

En posant $Y_k = 1 - X_k$ pour tout k et $\overline{Y_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = 1 - \overline{X_n}$, on a par symétrie :

$$\forall t \geq 0,\ \forall \varepsilon \geq 0,\ P\left(\overline{Y_n} - (1 - p) \geq \varepsilon\right) \leq e^{-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}},$$

puisque les Y_k sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $1 - p$. On en déduit donc :

$$\forall t \geq 0,\ \forall \varepsilon \geq 0,\ \mathbf{P}\left(\overline{X_n} - p \leq -\varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\overline{Y_n} - (1 - p) \geq \varepsilon\right) \leq e^{-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}},$$

puis

$$\forall t \geq 0,\ \forall \varepsilon \geq 0,\ \mathbf{P}\left(|\overline{X_n} - p| \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\overline{X_n} - p \leq -\varepsilon\right) + \mathbf{P}\left(\overline{X_n} - p \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}}.$$

Cette majoration est optimale quand $-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}$ est minimal ; on choisit donc $t_0 = 4n\varepsilon$ et on obtient :

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \mathbf{P}\left(|\overline{X_n} - p| \geq \varepsilon\right) \leq 2\, e^{-2n\varepsilon^2}.$$

d) On choisit cette fois $\varepsilon = \sqrt{\frac{\ln 2 - \ln \alpha}{2n}}$ et l'intervalle $\left[\overline{X_n} - \varepsilon, \overline{X_n} + \varepsilon\right]$ est un intervalle de confiance de risque α pour le paramètre p. Les largeurs des deux intervalles de confiance sont donc respectivement :

$$L_1 = 2a = \frac{1}{\sqrt{n\alpha}} \text{ et } L_2 = 2\varepsilon = \sqrt{\frac{2\ln 2 - 2\ln\alpha}{n}}.$$

On a $\dfrac{L_2}{L_1} = \sqrt{2}\,\sqrt{\alpha \ln 2 - \alpha \ln \alpha}$, valeur strictement inférieure à 1 pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et qui tend vers 0 quand α tend vers 0. La seconde méthode donne donc un intervalle de fluctuation beaucoup plus précis que celui obtenu avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Par exemple, avec $n = 1000$ et $\alpha = 0,05$, on a $L_1 \simeq 0,14$ et $L_2 \simeq 0,04$.

14) a) Le plus pratique est de définir la suite des sauts dans le domaine complexe : $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur l'ensemble à 4 éléments $\{1, i, -1, -i\}$ et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On définit ensuite les variables aléatoire X_n et Y_n en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n + iY_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$$

b) Nous avons $E(S_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit que $E(X_n) + iE(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} E(S_k) = 0$, donc les X_n et Y_n sont centrées.

Par symétrie, nous avons $E(X_n^2) = E(Y_n^2)$. Nous avons d'autre part :

$$E(X_n^2 + Y_n^2) = E\left(\left|\sum_{k=1}^{n} S_k\right|^2\right) = E\left(\left[\sum_{k=1}^{n} S_k\right]\left[\sum_{k=1}^{n} \overline{S_k}\right]\right) = \sum_{1\leq k_1,k_2\leq n} E\left(S_{k_1}\overline{S_{k_2}}\right).$$

Comme les S_i sont indépendantes, $E\left(S_{k_1}\overline{S_{k_2}}\right) = E\left(S_{k_1}\right)\overline{E\left(S_{k_2}\right)} = 0$ si $k_1 \neq k_2$. Nous obtenons donc :

$$E(X_n^2) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} E\left(|S_k|^2\right) = \frac{n}{2}.$$

c) Pour toute variable aléatoire X possédant un moment d'ordre 2, $E(X^2) - E(X)^2 = \mathrm{Var}(X) \geq 0$. On en déduit :

$$E\left(\sqrt{X_n^2 + Y_n^2}\right) \leq \sqrt{E(X_n^2 + Y_n^2)} = \sqrt{n}.$$

d) Pour avoir $X_n = Y_n = 0$, il faut et il suffit qu'il y ait eu k sauts égaux à 1, k sauts à -1, q sauts égaux à i et q sauts égaux à $-i$, avec $2k + 2q = n$. Si n est impair, p_n est nul ; sinon, en écrivant $n = 2m$, les $2m$ premiers sauts étant indépendants et équiprobables, on obtient p_n par un simple calcul de dénombrement : il y a 4^{2m} suites de sauts possibles et les suites permettant de revenir à l'origine en effectuant k sauts vers la droite, k sauts vers la gauche, $m-k$ sauts vers le haut et $m-k$ sauts vers le bas sont au nombre de $\binom{2m}{k}\binom{2m-k}{k}\binom{2m-2k}{m-k}$ (on place les k sauts vers la droite parmi les $2m$ sauts, puis les k sauts vers la gauche parmi les $2m-k$ sauts restants, puis les m sauts vers le haut parmi les $2m-2k$ sauts restants, les m sauts vers le bas étant ensuite imposés). On en déduit :

$$p_{2m} = \frac{1}{4^{2m}}\sum_{k=0}^{m} \underbrace{\binom{2m}{k}\binom{2m-k}{k}\binom{2m-2k}{m-k}}_{=\frac{(2m)!}{k!\,k!\,(m-k)!\,(m-k)!}} = \frac{1}{4^{2m}}\binom{2m}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}^2 = \frac{1}{4^{2m}}\binom{2m}{m}^2$$

On peut donner une preuve combinatoire de la relation donnée par l'énoncé : considérons un ensemble $E = \{x_1, \ldots, x_{2m}\}$ de cardinal $2m$; on construit une et une seule fois chaque partie A de E de cardinal m en choisissant k entre 0 et m, en fixant une partie A_1 de $\{x_1, \ldots, x_m\}$ de cardinal k et une partie A_2 de $\{x_{m+1}, \ldots, x_{2m}\}$ de cardinal $m-k$ et en posant $A = A_1 \cup A_2$. Cela donne :

$$\binom{2m}{m} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{m}{m-k} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}^2.$$

On peut préférer une preuve à base de produit de Cauchy : on a $\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}x^k = (1+x)^{2m} = \left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k\right)^2$ et on obtient l'identité cherchée en identifiant les termes en x^m.

15) a) Pour $|z| \leq 1$ et $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(z) &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(Z_{n+1} = m) z^m \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(Z_{n+1} = m \text{ et } Z_n = k)\right) z^m \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{Z_n} N_{n,j} = m \text{ et } Z_n = k\right)\right) z^m \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{k} N_{n,j} = m \text{ et } Z_n = k\right)\right) z^m \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{k} N_{n,j} = m\right) P\left(Z_n = k\right)\right) z^m
\end{aligned}$$

car Z_n est indépendant de $\sum_{j=1}^{k} N_{n,j}$ d'après le lemme des coalitions (Z_n est une fonction des $N_{i,j}$ pour $i < n$). On travaille ici sur une famille sommable (car $|z| \leq 1$), donc on peut échanger l'ordre de sommation :

$$G_{n+1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(Z_n = k\right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} P\left(\sum_{j=1}^{k} N_{n,j} = m \right) z^m \right).$$

On reconnaît ici la fonction génératrice de $Y = \sum_{j=1}^{k} N_{n,j}$:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{k} N_{n,j} = m \right) z^m = G_Y(z) = \prod_{j=1}^{k} G_{N_{n,j}}(z) = \left(G(z)\right)^k$$

par indépendance des $N_{n,j}$ pour $1 \leq j \leq k$. On a ainsi :

$$G_{n+1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(Z_n = k\right) \left(G(z)\right)^k = G_n(G(z)).$$

Nous avons donc :

$$G_0 = Id \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ G_{n+1} = G_n \circ G$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ G_n = \underbrace{G \circ \cdots \circ G}_{n \text{ termes}} = G^{\circ n}.$$

b) G est continue sur $[0,1]$ et de classe C^2 sur $[0,1[$, avec :

$$\forall t \in\ [0,1[,\ G'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} np_n t^{n-1} \geq 0 \text{ et } G''(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} n(n-1)p_n t^{n-2} \geq 0.$$

Comme $p_0 \neq 0$, $G'(t) > 0$ sur $]0,1[$, donc G est strictement croissante et convexe sur $[0,1[$. On a d'autre part $G''(t) > 0$ sur $]0,1[$, sauf si $p_n = 0$ pour tout $n \geq 2$. On en déduit que G est strictement convexe sur $[0,1[$, sauf si $p_n = 0$ pour tout $n \geq 2$. Dans ce cas, G est affine.

c) La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est définie par la récurrence :

$$x_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = G(x_n).$$

Comme G est croissante et $x_0 = 0 \leq x_1$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1, donc converge vers un point fixe de G (car G est continue). Si G est affine, i.e. si $G(t) = p_0 + p_1 t$, 1 est le seul point fixe de G et x_n tend vers 1. Sinon, comme G est strictement convexe, G ne peut pas avoir plus de deux points fixes. La distinction va ensuite se faire selon la valeur de $m = G'(1)$:

- si $0 \leq m \leq 1$, le graphe de G est situé strictement au dessus de la tangente au point d'abscisse 1, donc

  $$\forall t \in [0,1[,\ G(t) > 1 + m(t-1) \geq t$$

  donc 1 est le seul point de G et x_n tend vers 1.

- sinon, $G(t) < t$ au voisinage de 1 et $G(0) = p_0 > 0$, donc le théorème des valeurs intermédiaires prouve que G possède un second point fixe $a \in]0,1[$. Comme $x_0 = 0 < a$, on a par récurrence évidente $x_n < a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc x_n converge vers a puisque a est le seul point de G inférieur à a.

Nous avons donc démontré :

- si $m = G'(1) \leq 1$ (ce qui contient le cas où G est affine, puisqu'on a alors $G'(1) = p_1 \leq 1$), $\mathbf{P}(Z_n = 0)$ tend vers 1 quand n tend l'infini : le nom N va s'éteindre presque sûrement en un temps infini ;

- si $m \geq 1$, $P(Z_n = 0)$ tend vers $a \in]0,1[$: le nom N va donc avoir une probabilité non nulle de ne pas s'éteindre en temps infini.

16) a) La fonction `M`, appliquée à d et n, renvoie la position M_n :

```
import numpy.random as rd

def M(d, n):
    L = [0 for i in range(d)]
    for t in range(n):
        i = rd.randint(d) # on choisit la coordonnée à modifier
        if rd.randint(2) == 0:
            L[i] -= 1 # avec probabilité 1/2, on soustrait 1
        else:
            L[i] += 1 # avec probabilité 1/2, on ajoute 1
    return(L)
```

b) On ajoute la variable N pour sortir de la boucle si la puce n'est toujours retournée à l'origine à l'instant N :

```
def T(d, N): # la borne N permet de sortir de la boucle si T est trop grand (ou infini)
    O = [0 for i in range(d)]
    L = [0 for i in range(d)]
    retour = False
    n = 0
    while (not retour) and n < N: # tant que l'on n'est pas revenu à l'origine
        i = rd.randint(d) # la puce saute
        if rd.randint(2) == 0:
            L[i] -= 1
        else:
            L[i] += 1
        retour = (L == O)
        n += 1 # et on incrémente n
    if retour:
        return(n) # la puce est revenue à l'origine à l'instant n <= N
    else:
        return(-1) # la puce n'est toujours pas retournée en O à l'instant N
```

Pour tester le comportement de T, nous utilisons la fonction

```
def proba(d, N, M):
    c = 0 # c compte le nombre de fois où on a obtenu T <= N
    for i in range(M):
        if T(d, N) != -1: c += 1
    return(c/M)
```

qui estime la probabilité de l'évènement $(T \leq N)$ en effectuant M simulations. On obtient :

```
>>> proba(1, 1000, 1000)
0.978
>>> proba(2, 10000, 500)
0.734
>>> a(2,100000,500)
0.768
>>>a(3,20000,500)
0.32
>>> a(3,50000,500)
0.33
```

C'est difficile de faire une conjecture, mais il semble que T est presque sûrement fini en dimension 1 (en tout cas $\mathbf{P}(T < +\infty)$ est très proche de 1) et pour les dimensions 2 et 3, il faudrait augmenter N pour voir si $\mathbf{P}(T \leq N)$ semble converger vers une valeur strictement inférieur à 1. On peut démontrer que $\mathbf{P}(T < +\infty)$ vaut 1 si et seulement si $d = 1$ ou $d = 2$.

c) Pour qu'il existe un chemin de (n, a) à (m, b), il faut et il suffit que $m-n$ et $b-a$ aient même parité et que $|b-a| \leq m-n$. Un chemin c de longueur $m-n$ partant de (n, a) est défini par une suite $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-n})$ de $\{-1, +1\}$. c arrive au point (m, b) si et seulement si le nombre s de ε_i égaux à 1 vérifie $a + s - (m - n - s) = b$ (il y a s saut $+1$ et $m - n - s$ sauts -1), soit $s = \dfrac{(m-n)-(b-a)}{2}$. Il existe ensuite $\dbinom{m-n}{s}$ suites $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-n})$ contenant exactement s fois $+1$: il existe donc

$$N_{n,a,m,b} = \binom{m-n}{\dfrac{(m-n)-(b-a)}{2}}$$

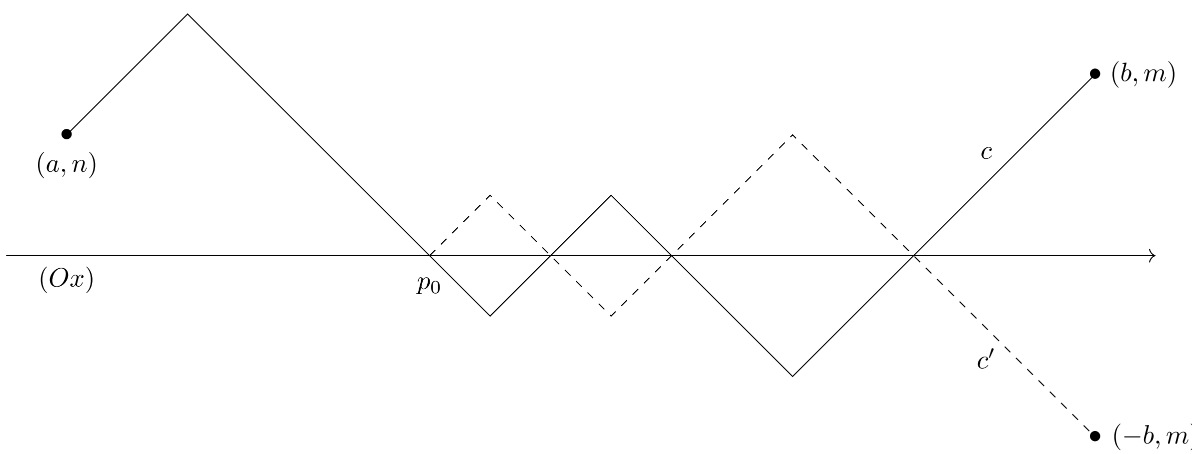
chemins de (n, a) à (m, b), avec la convention $\dbinom{i}{j} = 0$ si $j \notin \{0, 1, \dots, i\}$.

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des chemins de (n, a) à (m, b) qui rencontre l'axe (Ox). Si c est un tel chemin, avec :

$$c = ((n, y_n), (n+1, y_{n+1}), \dots, (m, y_m))$$

où $y_n = a$, $y_m = b$ et $|y_{p+1} - y_p| = 1$ pour tout $p \in \{n, \dots, m-1\}$, il existe un entier $p_0 \in \{n+1, m-1\}$ minimal tel que $y_{p_0} = 0$. On pose alors :

$$c' = ((n, y_n), (n+1, y_{n+1}), \dots, (p_0, y_{p_0}), (p_0 + 1, -y_{p_0+1}), \dots, (m, -y_m))$$



(on remplace la fin du chemin c par son image par la symétrie d'axe (Ox)) L'application $c \longmapsto c'$ est trivialement une bijection de l'ensemble $\mathcal{C}$ sur l'ensemble des chemins de (n, a) à $(m, -b)$. Il y a donc exactement $N_{n,a,m,-b}$ chemins de (n, a) à (m, b) qui rencontre l'axe (Ox).

Si $n = 0$, on a $\mathbf{P}(T = 2n) = 0$.

Soit $n \geq 1$. L'expérience aléatoire peut être modélisée par la donnée d'une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, avec

$$\forall n \geq 0,\ M_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Nous avons donc :

$$(T = 2n) = (X_1 \neq 0,\ X_1 + X_2 \neq 0, \dots, X_1 + \cdots + X_{2n-1} \neq 0,\ X_{2n} = 0)$$

Comme la suite $(X_1, \dots, X_{2n})$ suit une loi uniforme sur $\{-1, 1\}^{2n}$, nous avons :

$$\mathbf{P}(T = 2n) = \frac{\alpha_{2n}}{2^{2n}}$$

où α_{2n} est le cardinal de $\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}) \in \{-1, 1\}^{2n}, \varepsilon_1 \neq 0,\ \dots, \varepsilon_1 + \cdots \varepsilon_{2n-1} \neq 0 \text{ et } \varepsilon_1 + \cdots \varepsilon_{2n} = 0\}$. Autrement-dit, α_{2n} est le nombre de chemin qui vont de $(0, 0)$ à $(2n, 0)$ sans passer par l'axe (Ox) entre les deux extrémités. Ces chemins sont de deux types :

- ceux qui commencent par un saut $\varepsilon_1 = 1$ et se terminent par un saut $\varepsilon_{2n} = -1$: il y en a autant que de chemins allant de $(1,1)$ à $(2n-1,1)$ sans couper l'axe (Ox) ; comme il y a $N_{1,1,2n-1,1}$ chemins allant de $(1,1)$ à $(2n-1,1)$ et que parmi ces chemins, $N_{1,1,2n-1,-1}$ rencontrent l'axe (Ox) , cela donne $N_{1,1,2n-1,1} - N_{1,1,2n-1,-1}$ chemins ;

- ceux qui commencent par un saut $\varepsilon_1 = -1$ et se terminent par un saut $\varepsilon_{2n} = 1$: par symétrie, on retrouve le même nombre de chemins.

Nous avons donc :

$$\alpha_{2n} = 2\left(N_{1,1,2n-1,1} - N_{1,1,2n-1,-1}\right) = 2\left(\left(\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}\right)\right) = 2\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

puis

$$\mathbf{P}(T = 2n) = \frac{1}{n2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}.$$

d) On a, pour $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{1/2}{n}(-x)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1/2(-1/2)(-3/2)\dots(-n+3/2)}{n!}(-1)^n\,x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2^n n!}\,x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}\,x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(T = 2n)\,x^n
\end{aligned}$$

On en déduit que pour $x \in [0,1]$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(T = n)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(T = 2n)x^{2n} = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

(l'égalité est valable pour $x \in [0,1[$, et donc également pour $x = 1$, puisque la série converge normalement sur $[0,1]$: sa somme est continue sur $[0,1]$). On a en particulier $\mathbf{P}(T < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(T = n) = 1$: la marche aléatoire revient presque sûrement à son point de départ.

On peut maintenant parler de la fonction génératrice G_T de la variable T :

$$\forall x \in [-1,1],\ G_T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(T = n)x^n = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

Comme G_T n'est pas dérivable en 1, T est d'espérance infinie.

17) a) Si $\alpha > 1$, on a pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \leq \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}}_{\text{T.G.S.C.}}$$

donc $A = \Omega$ et $P(A) = 1$.

b) On a :

$$\mathbf{P}(X_n > n^\beta) = p \sum_{k=\lceil n^\beta \rceil}^{+\infty} q^{k-1} = pq^{\lceil n^\beta \rceil -1} \frac{1}{1-q} = q^{\lceil n^\beta \rceil -1} \leq q^{n^\beta - 1}.$$

On a donc :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} [X_n > n^\beta]\right) \leq \sum_{n=k}^{+\infty} P(X_n > n^\beta) \leq \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n^\beta - 1}$$

Cette somme est bien convergente, car $q^{n^\beta - 1} = o(1/n^2)$ au voisinage de $+\infty$:

$$n^2 q^{n^\beta - 1} = e^{\ln q n^\beta 2 + 2\ln n - \ln q} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \text{ car } \beta > 0.$$

La suite d'évènements $\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} [X_n \leq n^\beta]\right)_{k \geq 1}$ est croissante, donc par le théorème de limite monotone, on a :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} [X_n \leq n^\beta]\right)\right) = \lim_{+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} [X_n \leq n^\beta]\right) = 1 - \lim_{+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} [X_n > n^\beta]\right) = 0$$

puisque le reste de la série convergente de la question a) tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

Pour $\omega \in B = \bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} [X_n \leq n^\beta]\right)$, il existe $k \geq 1$ tel que pour tout $n \geq k$, $X_n(\omega) \leq n^\beta$; on en déduit donc :

$$\forall n \geq k,\ 0 \leq \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \geq \frac{1}{n}$$

et la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ diverge. On a donc $A \subset \Omega \setminus B$ et $P(A) = 0$. La série est donc presque sûrement divergente quand $\alpha \in]0,1[$.

18) a) $p_0 = 0$ puisque Romane et Philippe ne sont pas affectés à la même base à l'instant initial. Après la premières semaines, les bases d'affectations peuvent être, avec équi-probabilité, (B,B), (B,C), (B,M), (C,B), (C,C), (C,M), (M,B), (M,C) ou (M,M), donc il y a 3 chances sur 9 que Romane et Philippe se retrouvent : on a donc $p_1 = \dfrac{1}{3}$. Le calcul de p_2 est fastidieux, et peut se faire en regardant la position (R_1, P_1) des deux soldats à l'instant 1 :

- si $(R_1, P_1) = (B, C)$, il y a 12 déplacements équiprobables possibles à l'instant 2 car R_2 peut prendre 3 valeurs et P_2 4 valeurs) et parmi ces 12 possibilités, seules (S,S) et (V,V) nous intéresse : ce cas se produit avec probabilité $\dfrac{1}{9} \times \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{54}$;
- si $(R_1, P_1) = (B, M)$, on se retrouve dans la même situation qu'au départ et il y a une chance sur trois que $R_2 = P_2$, d'où la probabilité $\dfrac{1}{9} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$ d'être dans ce cas ;
- les 4 autres cas sont symétriques.

Nous obtenons donc $p_2 = \dfrac{1}{54} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{54} + \dfrac{1}{54} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{54} = \dfrac{4}{27}$.

b) Notons $S = 0$, $M = 1$, $V = 2$, $B = 3$ et $C = 4$. Si on en au sommet i, la liste des sommet reliés à i est représentée par une liste stockée dans la i-ème case d'une liste V :

$$V = [[1,3,4],\ [0,2,4],\ [1,3,4],\ [0,2,4],\ [0,1,2,3]]$$

On initialise deux variables R et P aux valeurs 0 et 2 et un compteur N à la valeur 0 ; tant que $R \neq P$, on modifie R et P en choisissant uniformément un élément dans chaque case $V[R]$ et $V[P]$ et on incrémente N. On renvoie N à la sortie de la boucle `while` :

```python
import numpy.random as rd

def N():
    V = [[1, 3, 4], [0, 2, 4], [1, 3, 4], [0, 2, 4], [0, 1, 2, 3]]
    R, P, N = 0, 2, 0
    while R != P:
        R = V[R][rd.randint(len(V[R]))]
        P = V[P][rd.randint(len(V[P]))]
        N += 1
    return(N)

def distribution(M):
    a, b = 0, 0
    for i in range(M):
        n = N()
        if n == 1:
            a += 1
        elif n == 2:
            b += 1
    return(a/M,b/M)

def moyenne_empirique(M):
    S = 0
    for i in range(M):
        S += N()
    return(S/M)
```

On obtient les valeurs approchées :

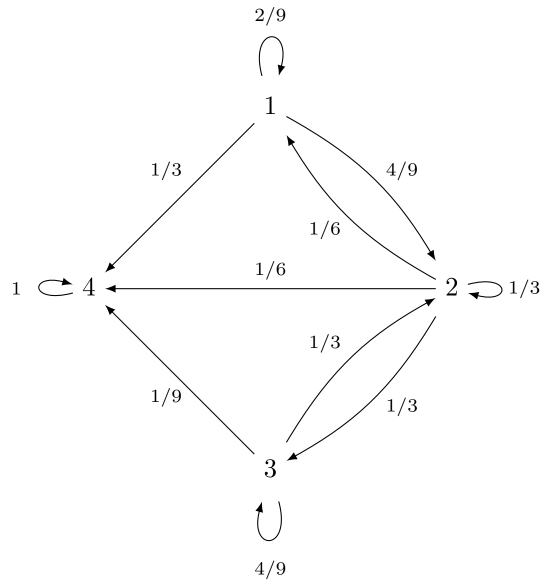
```
>>> distribution(500000)
(0.334624, 0.148158)
>>> moyenne_empirique(500000)
4.69461
```

On a bien $0.334624 \simeq \dfrac{1}{3}$ et $0,148158 \simeq \dfrac{4}{27}$ et nous verrons à la fin de l'exercice si la moyenne empirique est bien proche de l'espérance mathématique.

c) La situation étant décrite par la valeur du couple (R, P), nous devrions considérer un graphe à 25 sommets. La simplification permet de se ramener à 4 sommets, puisque seule compte la position relative de Romane et Philippe. Si Romane et Philippe sont en position 1 la semaine n, la probabilité qu'ils soient en position i la semaine suivante vaut :

- $2/9$ si $i = 1$ (il y a 9 déplacements dont 2 les laissent en position 1) ;
- $4/9$ si $i = 2$ (il faut que l'un soit affecté au centre et que l'autre n'y soit pas affecté, d'où 4 possibilités) ;
- 0 si $i = 3$ (aucun des 9 déplacements ne peut les amener en position 3) ;
- $3/9$ si $i = 4$ (3 déplacements les amènent sur la même base).

Le même type de calcul nous donne le graphe probabiliste ci-dessous, chaque arête entre un état i et un état j étant étiqueté par la probabilité que l'on passe de la position i à la position j lors d'un déplacement :



On a choisi de rester avec probabilité 1 à l'état 4 une fois qu'il a été atteint, puisque l'on peut supposer que l'étude est terminée dès que Romane et Philippe sont réunis. Nous avons donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i, j \in \{1,2,3,4\},\ P(C_{n+1} = i \,|\, C_n = j) = p_{i,j}$$

$$\text{avec } P = (p_{i,j})_{1 \le i,j \le 4} = \begin{pmatrix} 2/9 & 1/6 & 0 & 0 \\ 4/9 & 1/3 & 4/9 & 0 \\ 0 & 1/3 & 4/9 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/9 & 1 \end{pmatrix}.$$

En fait, nous avons une propriété plus forte qui correspond à la définition d'une *chaîne de Markov* :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j \in \{1,2,3,4\},\ P(C_{n+1} = i \,|\, C_n = j \text{ et } C_{n-1} = i_{n-1} \text{ et } \ldots \text{ et } C_0 = i_0) = p_{i,j}$$

C'est cette propriété dont nous aurons besoin à la question d et elle correspond bien à la situation pratique : la position occupée par nos deux élèves à l'instant $n+1$ ne dépend que de leur position à l'instant n.

d) Nous allons appliquer la formule des probabilités totales à une espérance conditionnelle. En notant P_A la probabilité conditionnelle relativement à un évènement de probabilité non nulle A, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(X_0=i)}(T = n+1) &= \sum_{j=1}^{4} \mathbf{P}_{(X_0=i)}(T = n+1 \,|\, X_1 = j)\, \mathbf{P}_{(X_0=i)}(X_1 = j) \\ &= \sum_{j=1}^{4} \mathbf{P}(T = n+1 \,|\, X_1 = j \text{ et } X_0 = i)\, \mathbf{P}_{(}X_1 = j \,|\, X_0 = i) \end{aligned}$$

On a, pour $1 \le j \le 3$:

- $\mathbf{P}(T = n+1 \,|\, X_1 = j \text{ et } X_0 = i) = \mathbf{P}(T = n \,|\, X_0 = j)$ (par translation) et
- $\mathbf{P}(T = n+1 \,|\, X_1 = 4 \text{ et } X_0 = i) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On obtient :

$$\begin{cases} q_{1,n+1} = \dfrac{2}{9}\, q_{1,n} + \dfrac{4}{9}\, q_{2,n} + \dfrac{1}{3}\, \delta_{n=0} \\ q_{2,n+1} = \dfrac{1}{6}\, q_{1,n} + \dfrac{1}{3}\, q_{2,n} + \dfrac{1}{3}\, q_{3,n} + \dfrac{1}{6} \delta_{n=0} \\ q_{3,n+1} = \dfrac{4}{9}\, q_{2,n} + \dfrac{4}{9}\, q_{3,n} + \dfrac{1}{9}\, \delta_{n=0} \end{cases}$$

puis, pour $x \in [-1,1]$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q_{1,n+1} x^{n+1} = x \left(\frac{2}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} q_{1,n} x^n + \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} q_{2,n} x^n + \frac{1}{3} \right) \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q_{2,n+1} x^{n+1} = x \left(\frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} q_{1,n} x^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} q_{2,n} x^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} q_{3,n} x^n + \frac{1}{6} \right) \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q_{3,n+1} x^{n+1} = x \left(\frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} q_{2,n} x^n + \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} q_{3,n} x^n + \frac{1}{9} \right) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} f_1(x) = f_1(x) - q_{1,0} = \dfrac{2}{9}\, x f_1(x) + \dfrac{4}{9} x f_2(x) + \dfrac{x}{3} \\ f_2(x) = f_2(x) - q_{2,0} = \dfrac{1}{6}\, x f_1(x) + \dfrac{1}{3} x f_2(x) + \dfrac{1}{3} x f_3(x) \dfrac{x}{6} \\ f_3(x) = f_3(x) - q_{3,0} = \dfrac{4}{9} x f_2(x) + \dfrac{4}{9} x f_3(x) \dfrac{x}{9} \end{cases}$$

On obtient en résolvant ce système :

$$f_1(x) = \frac{x(81 - 45x - 4x^2)}{243 - 243x + 24x^2 + 8x^3}$$

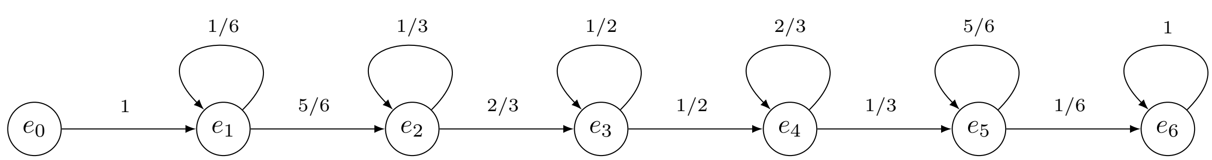
On en déduit que $\mathbf{P}(T < +\infty \,|\, C_0 = 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_{1,n} = f_1(1) = 1$, donc $\mathbf{P}(T = \infty \,|\, C_0 = 1) = 0$. Ainsi, Romane et Philippe vont presque sûrement se retrouver en temps fini.

e) Comme f_1 est de classe C^2 sur $[0,1]$, la loi de T conditionnellement à $(C_0 = 1)$ possède des moments d'ordre 1 et 2. On a :

$$E(T \,|\, C_0 = 1) = f'(1) = \frac{75}{16} \text{ et } V(T \,|\, C_0 = 1) = f''(1) + f'(1) - f'(1)^2 = \frac{105}{4}.$$

On a $\dfrac{75}{16} = 4,6875$, ce qui est cohérent avec la simulation de la question b).

19) Si on est dans l'état e_i à un certain instant (avec $0 \leq i \leq 5$), on sera, à l'instant suivant, soit dans l'état e_{i+1} avec probabilité $p_{i,i+1} = \dfrac{6-i}{6}$, soit dans l'état e_i avec probabilité $p_{i,i} = \dfrac{i}{6}$. Ceci nous permet de considérer le graphe probabiliste :



Cela revient à considérer une suite de variables aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0,1,2,\ldots,6\}$ telle que X_n est le nombre de faces différentes vues après les n premiers lancers du dés, dont les lois sont définies par :

$$\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall i,j \in \{0,1,\ldots,6\},\ \mathbf{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) = p_{i,j}$$

où $(p_{i,j})_{0\leq i,j\leq 6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1 \end{pmatrix}$.

Si nous notons T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaire pour obtenir pour la première fois l'état e_6, $P(T=0)=0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(T=n) = \mathbf{P}(X_n = 6 \text{ et } X_{n-1}=5) = \mathbf{P}(X_n = 6 \,|\, X_{n-1}=5)\mathbf{P}(X_{n-1}=5) = p_{n-1,n}\mathbf{P}(X_{n-1}=5).$$

Nous avons donc $g_T(x) = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X_n=5)x^{n+1}$.

Ceci nous incite à définir les séries entières (toutes absolument convergente sur $[-1,1]$) :

$$\forall i \in \{0,1,2,3,4,5,6\},\ \ f_i(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X_n=i)x^n.$$

Pour $k \in \{1,2,\ldots,6\}$, nous avons $\mathbf{P}(X_0=k)=0$ et (formule des probabilités totales) :

$$\forall n \geq 1,\ \ \mathbf{P}(X_n=k) = p_{k,k}\,\mathbf{P}(X_{n-1}=k) + p_{k-1,k}\,\mathbf{P}(X_{n-1}=k-1)$$

donc $f_k(x) = p_{k,k}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(X_{n-1}=k)x^n + p_{k-1,k}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(X_{n-1}=k-1)x^n = p_{k,k}xf_k(x) + p_{k-1,k}xf_{k-1}(x)$, soit :

$$f_k(x) = \frac{7-k}{6-kx}\,x\,f_{k-1}(x).$$

Comme $f_0(x)=1$ et $g_T(x) = \dfrac{1}{6}\,xf_5(x)$, nous obtenons :

$$g_T(x) = \frac{120x^6}{(6-5x)(6-4x)(6-3x)(6-2x)(6-x)}.$$

On a ensuite $E(T) = g_T'(1)$, qui se calcule facilement grâce à la dérivée logarithmique :

$$E(T) = \frac{g_T'(1)}{g_T(1)} = \left(6x^5 + \frac{5}{6-5x} + \frac{4}{6-4x} + \frac{3}{6-3x} + \frac{2}{6-2x} + \frac{1}{6-x}\right)_{x=1} = \frac{147}{10}.$$

20) On peut modéliser la situation par un graphe probabiliste dont l'ensemble des sommets est $\{0,1,2,3,4\}^2$ (le couple (i,j) représente la position sur le pentagone des deux frisbees), le sommet (i,j) étant reliés aux sommets $(i+1,j+1)$, $(i-1,j-1)$, $(i+1,j-1)$ et $(i-1,j+1)$ par des arcs de poids $1/4$ (les calculs se faisant modulo 5). On obtient ainsi une chaine de Markov à 25 états, ce qui n'est pas raisonnable. Nous allons réduire le graphe en ne distinguant que trois états :

État 0 : les deux frisbees sont sur le même sommet ;

État 1 : les deux frisbees sont sur des sommets voisins ;

État 2 : les deux frisbees sont sur deux sommets distincts non voisins.

La définition précise d'une chaîne de Markov (discrète) est la suivante : un ensemble fini $\mathcal{E}$ étant fixé (c'est l'ensemble des *états*), une chaîne de Markov sur $\mathcal{E}$ est une suite de variables aléatoires $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{E}$ telles que l'évolution du système ne dépend que du présent et pas du passé, ce qui se traduit précisément par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall e_0, e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{E} \text{ tels que } P(E_0=e_0,\ldots,E_n=e_n) \neq 0,\ \forall e_{n+1} \in \mathcal{E},$$

$$P(E_{n+1}=e_{n+1} \,|\, E_0=e_0,\ldots,E_n=e_n) = P(E_{n+1}=e_{n+1} \,|\, E_n=e_n).$$

Une telle chaîne est dite *homogène* si, en plus de cette propriété, $P(E_{n+1}=e' \,|\, E_n=e) = p(e,e')$ ne dépend par de n pour tout $e,e' \in \mathcal{E}^2$. Une telle chaîne est alors définie par la donnée de la loi de X_0 et de la famille $P = (p(e,e'))_{e,e'\in\mathcal{E}}$. Si on suppose que $\mathcal{E} = [\![0,n-1]\!]$, P est une matrice, appelée matrice de transition de la chaîne de Markov homogène.

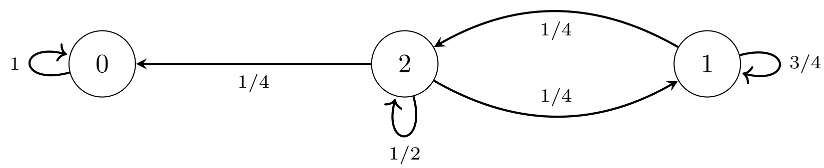
En notant $(E_n)_{n\geq 0}$ la suite des états de notre système de frisbees, nous avons donc une chaîne de Markov homogène associée à la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

puisque l'on a :

- dans l'état 0, le jeu s'arrête et on reste dans l'état 0 ;
- dans l'état 1, il y a 4 déplacements équiprobables possibles : 3 nous laissent dans l'état 1 et 1 nous amène dans l'état 2 ;
- dans l'état 0, un déplacement nous amène à l'état 0, un à l'état 1 et les deux autres nous laissent dans l'état 2.

On peut représenter la situation graphiquement :



En notant $V_n = \begin{pmatrix} P(E_n=0) \\ P(E_n=1) \\ P(E_n=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, nous avons alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = QV_n \text{ avec } Q = {}^tP$$

ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = Q^n V_0.$$

En notant $T = \inf\{n \in \mathbb{N},\ E_n = 0\}$ la durée de jeu (avec $T = \infty$ si le jeu ne s'arrête pas), nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (T = n) = (E_n = 0 \text{ et } E_{n-1} = 2)$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(T = n) = P(E_n = 0 \mid E_{n-1} = 2)\, P(E_{n-1} = 2) = \frac{1}{4}\, c_{n-1}.$$

a) Une première méthode consiste à calculer la loi de T en calculant les V_n. Cela se fait en diagonalisant Q, qui a trois valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$ et $\lambda_3 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8} = \overline{\lambda_2}$. Des calculs un peu fastidieux donnent :

$$Q = A \operatorname{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\, A^{-1} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 3+\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \\ 0 & -1-\sqrt{5} & -1+\sqrt{5} \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à $V_n = A \operatorname{Diag}(1, \lambda_2^n, \lambda_3^n)\, A^{-1} V_0$, soit après calculs :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_n = 1 - \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}\lambda_2^n - \dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}\lambda_3^n \\[2ex] b_n = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\lambda_2^n + \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\lambda_3^n \\[2ex] c_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\lambda_2^n - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\lambda_3^n \end{cases}$$

On a donc :

$$P(T = 0) = 0 \text{ et } \forall n \geq 1,\ P(T = n) = \frac{\sqrt{5}}{20}(\lambda_2^{n-1} - \lambda_3^{n-1}).$$

On en déduit que $P(T < +\infty) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n) = \frac{\sqrt{5}}{20}\left(\frac{1}{1-\lambda_2} - \frac{1}{1-\lambda_3}\right) = 1$: le jeu est donc presque sûrement fini. Ensuite :

$$E(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, P(T = n) = \frac{\sqrt{5}}{20}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\lambda_2^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\lambda_3^n\right) = \frac{\sqrt{5}}{20}\left(\frac{1}{(1-\lambda_2)^2} - \frac{1}{(1-\lambda_3)^2}\right) = 12$$

puis, par un calcul similaire, $E(T^2) = 244$ et $V(T) = 100$.

b) Il existe heureusement une méthode plus rapide, qui utilise des fonctions génératrices. Posons, pour $x \in [-1,1]$:

$$\forall i \in \{a,b,c\},\ G_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(E_n = i)\, x^n \text{ et } G_T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n)\, x^n.$$

La relation $V_{n+1} = Q\, V_n$ donne, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$:

$$\begin{cases} a_{n+1}\, x^{n+1} = x \left(a_n\, x^n + \dfrac{1}{4}\, c_n\, x^n \right) \\[2ex] b_{n+1}\, x^{n+1} = x \left(\dfrac{3}{4}\, b_n\, x^n + \dfrac{1}{4}\, c_n\, x^n \right) \\[2ex] c_{n+1}\, x^{n+1} = x \left(\dfrac{1}{4}\, b_n\, x^n + \dfrac{1}{2}\, c_n\, x^n \right) \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} G_a(x) - a_0 = x \left(G_a(x) + \dfrac{1}{4}\, G_c(x) \right) \\[2ex] G_b(x) - b_0 = x \left(\dfrac{3}{4}\, G_b(x) + \dfrac{1}{4}\, G_c(x) \right) \\[2ex] G_c(x) - c_0 = x \left(\dfrac{1}{4}\, G_b(x) + \dfrac{1}{2}\, G_c(x) \right) \end{cases} \text{, soit } \begin{cases} (1-x)\, G_a(x) - \dfrac{x}{4}\, G_c(x) = 0 \\[2ex] \left(1 - \dfrac{3x}{4}\right) G_b(x) - \dfrac{x}{4}\, G_c(x) = 1 \\[2ex] -\dfrac{x}{4}\, G_b(x) + \left(1 - \dfrac{x}{2}\right) G_c(x) = 0 \end{cases}$$

Comme $G_T(x) = \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1} x^n = \dfrac{x}{4}\, G_c(x)$, nous obtenons en résolvant le système :

$$\forall x \in [-1,1],\ G_T(x) = \frac{x}{4}\, \frac{\begin{vmatrix} 1 - 3x/4 & 1 \\ -x/4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - 3x/4 & -x/4 \\ -x/4 & 1 - x/2 \end{vmatrix}} = \frac{x^2}{5x^2 - 20x + 16}$$

On en déduit que $P(T < +\infty) = G_T(1) = 1$: le jeu est presque sûrement fini. En dérivant $(5x^2 - 20x + 16)\, G_T(x) = x^2$, on obtient :

$$10(x-2)\, G_T(x) + (5x^2 - 20x + 16)\, G_T'(x) = 2x \text{ et } 10\, G_T(x) + 20(x-1)\, G_T'(x) + (5x^2 - 20x + 16)\, G_T''(x) = 2$$

ce qui donne $G_T'(1) = 12$ et $G_T''(1) = 232$. On en déduit :

$$E(T) = G_T'(1) = 12 \text{ et } V(X) = G_T''(1) + E(X) - E(X)^2 = 100.$$

L'espérance du temps de jeu est donc égale à 12, avec un écart-type égal à 10.

Remarque : on peut calculer encore plus rapidement l'espérance de T, en utilisant des espérances conditionnelles. Pour cela, nous avons besoin :

- de définir l'espérance d'une variable aléatoire X conditionnellement à un événement A tel que $P(A) \neq 0$:

$$E(X \mid A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x \mid A)$$

- de remarquer que conditionner par rapport à A puis par rapport à B revient à conditionner par rapport à $A \cap B$: si A, B, C sont trois évènements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(A \mid B) \neq 0$, on a :

$$P_A(C \mid B) = \frac{P_A(B \cap C)}{P_A(B)} = \frac{\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)}}{\frac{P(A \cap B)}{P(A)}} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = P(C \mid A \cap B).$$

Supposons maintenant que E_0 suive une loi uniforme sur $\mathcal{E}$. L'espérance cherchée est égale à $p_1 = E(T \mid E_0 = 1)$ et la formule des probabilités totales donne facilement :

$$\forall i, j \in \{0, 1, 2\},\ E(T \mid E_0 = i) = \sum_{j=0}^{2} E(T \mid E_0 = i \text{ et } E_1 = j)\, P(E_1 = j \mid E_0 = i)$$

(avec un abus d'écriture, car on devrait limiter la somme aux j tels que $P(E_1 = j \mid E_0 = i)$ est non nul), ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} p_0 = E(T \mid E_0 = 0) = 0 \\ p_1 = E(T \mid E_0 = 1) = \dfrac{3}{4} E(T \mid E_0 = 1 \text{ et } E_1 = 1) + \dfrac{1}{4} E(T \mid E_0 = 1 \text{ et } E_1 = 2) \\ p_2 = E(T \mid E_0 = 2) = \dfrac{1}{4} E(T \mid E_0 = 2 \text{ et } E_1 = 0) + \dfrac{1}{4} E(T \mid E_0 = 2 \text{ et } E_1 = 1) + \dfrac{1}{2} E(T \mid E_0 = 2 \text{ et } E_1 = 2) \end{cases}$$

Il reste à opérer un petit tour de passe-passe, en écrivant que $E(T \mid E_0 = i \text{ et } E_1 = j) = 1 + E(T \mid E_0 = j)$ chaque fois que $P(E_0 = i \text{ et } E_1 = j)$ est non nul, puisque sachant que $E_1 = j$, nous sommes revenu à la situation initiale, mais après avoir fait un décalage d'une unité dans le temps. Nous avons donc :

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = \dfrac{3}{4}(1 + p_1) + \dfrac{1}{4}(1 + p_2) \\ p_2 = \dfrac{1}{4}(1 + p_0) + \dfrac{1}{4}(1 + p_1) + \dfrac{1}{2}(1 + p_2) \end{cases}$$

On obtient ainsi $p_1 = 12$ et $p_2 = 8$: on retrouve bien l'espérance cherchée.

21) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons A_i l'évènement “la pièce est tombée sur Pile (noté P dans la suite) au i-ème lancer”. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir PF. Pour $n \geq 2$, nous avons :

$$[T = n] = \bigcup_{k=0}^{n-2} \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_k} \cap A_{k+1} \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap \overline{A_n}$$

Cette réunion est disjointe et les A_i sont deux à deux indépendants, donc :

$$\mathbf{P}(T = n) = \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n-1}{2^n}.$$

La variable T est bien d'espérance finie et :

$$E(T) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^n}.$$

Nous avons :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

donc $x = 1/2$ donne :

$$E(T) = \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 4.$$

L'espérance du nombre de lancers nécessaires pour obtenir la séquence PF est donc égale à 4.

Il existe une méthode beaucoup plus rapide pour calculer cette espérance. Intuitivement, si nous notons x l'espérance cherchée et y l'espérance du nombre de lancer que l'on doit encore faire sachant que l'on vient de tirer P, nous avons :

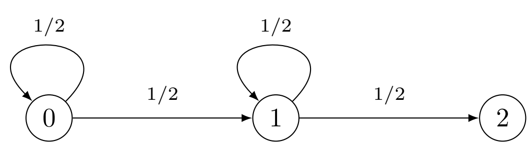
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \times (1+x) + \frac{1}{2} \times (1+y) \\ y = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (1+y) \end{cases}$$

En effet, si l'on est encore en attente du premier P, le premier lancer donne F (resp. P) avec probabilité $1/2$ et le nombre moyen de lancers nécessaire après ce premier lancer est x (resp. y), ce qui donne bien la première relation. Pour la seconde, si l'on vient d'obtenir un "pile", on a une chance sur 2 de tirer "face" dès le lancer suivant (on arrête donc au bout d'un lancer) et une chance sur deux de tirer P et il faudra en moyenne y nouveaux lancers pour obtenir F. Ces arguments ne sont bien sûr pas très rigoureux mais on obtient bien $y = 2$ et $x = 4$!

Pour préciser cela, nous avons besoin de parler d'espérance conditionnelle : si X est une variable aléatoire et si A est un évènement tel que $\mathbf{P}(A) \neq 0$, l'*espérance conditionnelle de X sachant A* est simplement l'espérance de X (sous réserve d'existence) pour la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_A$. Autrement-dit, en notant $(x_i)_{i\in I}$ les valeurs prises par la variable discrète X, nous avons :

$$E(X \mid A) = \sum_{i\in I} x_i \mathbf{P}(X = x_i \mid A).$$

La situation étudiée peut alors être modélisée comme une marche aléatoire sur le graphe :



associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

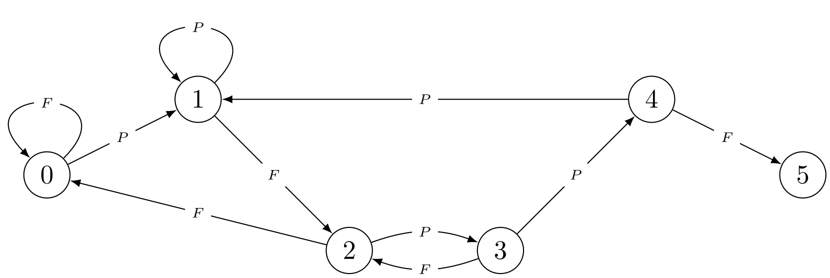
On suppose définie une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0,1,2\}$ telle que X_0 suit une loi uniforme sur $\{0,1,2\}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i,j \in \{0,1,2\},\ \mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = A[i,j].$$

Nous posons alors $T = \inf\{n \in \mathbb{N}, / X_n = 2\}$ et le problème initial revient à calculer $E(T \,|\, X_0 = 0)$. En posant $e_i = E(T \,|\, X_0 = i)$ pour $i \in \{0,1,2\}$, nous avons :

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Cette méthode fonctionne pour calculer l'espérance du temps d'apparition de tout motif u, le graphe correspondant à l'automate déterministe de reconnaissance du motif u. Ainsi, avec le motif $u = PFPPF$, nous pourrions utiliser le graphe



associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En résolvant le système $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + AX$, on montre que l'espérance du temps d'attente du motif $PFPPF$ est égale à 36.

À lire : article "Les surprises du jeu de pile ou face" de Jean-Paul Delahaye.

22) a) Question de cours sur l'écriture en base 2 des entiers naturels.

b) A est une réunion dénombrables d'intersections dénombrables d'évènements :

$$A = \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \geq n_0} X_n^{-1}(\{0\}) \right)$$

donc A est bien un évènement.

c) Comme $\mathbf{P}(A) = 1$, la fonction X est presque partout définie et à valeur dans $\mathbb{N}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n 2^n$ la décomposition de N en base 2. Nous avons :

$$X^{-1}(N) = \bigcap_{n \geq 0} X_n^{-1}(\{\varepsilon_n\}) \in \mathcal{A}$$

donc X est bien une variable aléatoire.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les entiers n pour lesquels $\varepsilon_N = 1$ sont les entiers de la forme $n = a + 2^N(2k+1)b$ avec $a \in [\![0, 2^N - 1]\!]$ et $k \in \mathbb{N}$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} p_N &= \sum_{a=0}^{2^N-1} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(X = a + 2^N(2k+1)) \right) \\ &= \sum_{a=0}^{2^N-1} \left(\frac{1}{2^{a+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k+1} \right) \quad \text{en notant } q = 2^{2^N} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{a=0}^{2^N-1} \frac{1}{2^a} \right) \times \frac{q}{q^2-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1-1/q}{1-1/2} \times \frac{q}{q^2-1} \\ &= \frac{1}{q+1} \\ &= \frac{1}{2^{2^N}+1} \end{aligned}$$

Remarque : on peut remarquer que

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X_0 = X_1 = 0) = \mathbf{P}(X \equiv 0 \bmod 4) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{4k+1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-1/16} = \frac{8}{15} \\ \mathbf{P}(X_0 = 0) \times \mathbf{P}(X_1 = 0) = (1-p_0)(1-p_1) = \dfrac{8}{15} \end{cases}$$

donc les variables de Bernoulli X_0 et X_1 sont indépendantes. On peut prolonger cet exercice en étudiant l'indépendance deux à deux des variables X_i.

23) a) On a $P_{n+1} = (X+n)P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} X^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k = n \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \right) X^k + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} X^{n+1}$$

On obtient donc, par identification :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, n\}, \\ \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \end{cases}$$

ce qui permet de calculer les coefficients $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ par récurrence, à partir de $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$.

On obtient ainsi le triangle :

$$\begin{array}{lc} n=0 & 1 \\ n=1 & 0,\ 1 \\ n=2 & 0,\ 1,\ 1 \\ n=3 & 0,\ 2,\ 3,\ 1 \\ n=4 & 0,\ 6,\ 11,\ 6,\ 1 \\ n=5 & 0,\ 24,\ 50,\ 35,\ 10,\ 1 \end{array}$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, notons $A_{n,k}$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_n$ comportant k cycles et $a_{n,k}$ son cardinal. En posant $a_{0,0} = 0$, nous avons bien $a_{1,0} = 0a_{0,0}$ et $a_{1,1} = a_{0,0} = 1$. Pour $n \geq 1$, nous avons ensuite :

- $a_{n+1,0} = 0 = na_{n,0}$;
- pour $k \in \{1, \dots, n\}$, nous allons construire une bijection φ entre $A_{n+1,k}$ et $(\{1, 2, \dots, n\} \times A_{n,k}) \sqcup A_{n,k-1}$. Soit $\sigma \in A_{n+1,k}$. Si $\sigma(n+1) = n+1$, $\varphi(\sigma)$ est la restriction σ' de σ à $\{1, 2, \dots, n\}$: c'est un élément de $A_{n,k-1}$; sinon, on note $j = \sigma^{-1}(n+1) \in \{1, 2, \dots, n\}$ et on définit $\varphi(\sigma) = (j, \sigma')$ avec :

  $$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } i \neq j \\ \sigma(n+1) & \text{si } i = j \end{cases}$$

  On a clairement $\sigma' \in A_{n,k}$ et l'application φ est bijective :
  (i) si $\sigma' \in A_{n,k-1}$, on définit σ en prolongeant σ' ($\sigma(n+1) = n+1$) et σ est l'unique antécédent de σ' par φ ;
  (ii) si $(j, \sigma') \in \{1, 2, \dots, n\} \times A_{n,k}$, on définit σ en “intercalant” $n+1$ entre j et $\sigma'(j)$:

  $$\forall i \in \{1, \dots, n+1\},\ \sigma(i) = \begin{cases} n+1 & \text{si } i = j \\ \sigma'(j) & \text{si } i = n+1 \\ \sigma'(i) & \text{sinon} \end{cases}$$

  et on a bien que σ est l'unique antécédent par φ de (j, σ').
  Nous avons donc :
  $$a_{n+1,k} = \mathrm{Card}(\{1, 2, \dots, n\} \times A_{n,k}) + \mathrm{Card}(A_{n,k-1}) = na_{n,k} + a_{n,k-1}$$
- $a_{n+1,n+1} = 1 = a_{n,n}$.

Comme les familles $(a_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ et $\left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right)_{0\leq k\leq n}$ vérifient les mêmes relations de récurrence et la même condition initiale, elles sont égales : il existe donc $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ constituées de k cycles disjoints.

c) On a : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X(\sigma) = k) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{P_n'(1)}{P_n(1)}$. Comme $\displaystyle\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k}$, on obtient :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

24) a) On prouve le résultat par récurrence sur q, en fixant $p \in \mathbb{N}$:

- on a bien $\displaystyle\sum_{k=p}^{p} \binom{k}{p} = \binom{p+1}{p+1}$ donc la propriété est vraie quand $q = p$;

- soit $q \geq p$ et supposons que $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$. On a alors :

$$\sum_{k=p}^{q+1} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p} + \binom{q+1}{p+1} = \binom{q+2}{p+1}$$

  donc l'égalité est également vraie au rang $q+1$.

b) On peut modéliser la situation en numérotant les a boules blanches de 1 à a et les b boules noires de $a+1$ à $a+b$. On peut imaginer que l'on a tiré, sans remise, les $a+b$ boules de l'urne, obtenant ainsi une permutation aléatoire Σ de $\mathfrak{S}_n$ ($\Sigma(i)$ est le numéro de la boule choisie au i-ème tirage) : Σ suit une loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. Pour $k \in [\![a, a+b]\!]$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = k) &= \mathbf{P}\left(\max(\Sigma(1), \dots, \Sigma(a)) = k)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{a} \mathbf{P}\left(\max(\Sigma(1), \dots, \Sigma(a)) = \Sigma(j) \text{ et } \Sigma(j) = k\right) \\
&= \frac{1}{(a+b)!} \sum_{j=1}^{a} \text{ Card } \{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma(1), \dots, \sigma(j-1), \sigma(j+1), \dots, \sigma(a) \in [\![1, k-1]\!] \text{ et } \sigma(j) = k\} \\
&= \frac{1}{(a+b)!} \sum_{j=1}^{a} (k-1)(k-2)\dots(k-a+1)\, b!
\end{aligned}$$

puisqu'on doit a $k-1$ choix pour $\sigma(1)$, $k-2$ choix pour $\sigma(2)$, et ainsi de suite jusqu'à $k-a+1$ choix pour $\sigma(a)$ (en sautant $\sigma(j)$), 1 choix pour $\sigma(j)$, puis $b!$ choix pour placer les b boules noires dans les b emplacements restants.

On obtient ainsi :

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{a(k-1)!b!}{(k-a)!(a+b)!} = \frac{(k-1)!a!b!}{(a-1)!(k-a)!(a+b)!} = \frac{\binom{k-1}{a-1}}{\binom{a+b}{a}}$$

On remarque que la formule démontrée au a) donne :

$$\sum_{k=a}^{a+b} \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{\binom{a+b}{a}} \sum_{q=a-1}^{a+b-1} \binom{q}{a-1} = 1.$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \binom{a+b}{a}^{-1} \sum_{k=a}^{a+b} k \binom{k-1}{a-1} = \binom{a+b}{a}^{-1} \sum_{k=a}^{a+b} a \binom{k}{a} \\
&= \binom{a+b}{a}^{-1} a \binom{a+b+1}{a+1} = \frac{a(a+b+1)}{a+1}
\end{aligned}$$

On peut ensuite calculer, de la même façon, $E(X(X+1))$:

$$\begin{aligned}
E(X(X+1)) &= \binom{a+b}{a}^{-1} \sum_{k=a}^{a+b} k(k+1) \binom{k-1}{a-1} = \binom{a+b}{a}^{-1} \sum_{k=a}^{a+b} \frac{(k+1)!}{(a-1)!(k-a)!} \\
&= \binom{a+b}{a}^{-1} (a+1)a \sum_{q=a+1}^{a+b+1} \binom{q}{a+1} = \binom{a+b}{a}^{-1} (a+1)a \binom{a+b+2}{a+2} \\
&= \frac{a(a+b+2)(a+b+1)}{a+2}
\end{aligned}$$

On en déduit que $V(X) = E(X(X+1)) - E(X) - E(X)^2 = \dfrac{ab(a+b+1)}{(a+1)^2(a+2)}$.

25) a) Comme X et Y sont indépendantes, $G_S = G_X G_Y$.

b) Si S suit la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$, $G_S(x) = \dfrac{1}{11} \displaystyle\sum_{n=1}^{12} x^n = x^2 \sum_{n=0}^{1} 0x^n$. On en déduit que le polynôme G_S est de degré 12 et a pour racines 0 (qui est double) et les 10 racines onzième de l'unité distinctes de 1. En particulier, 0 est la seule racine réelle de G_S. Comme :

$$G_S(x) = G_X(x) G_Y(x) = x^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{5} \mathbf{P}(X = n+1) x^n}_{=A(x)} \underbrace{\sum_{n=0}^{5} \mathbf{P}(Y = n+1) x^n}_{=B(x)},$$

les polynômes $A(x)$ et $B(x)$ sont de degré 5 et n'ont pas de racines réelles : c'est absurde (tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle, par le théorème des valeurs intermédiaires.) Il est donc impossible de piper deux dés à 6 faces de sorte que la somme des dés suive une loi uniforme.

c) Le même argument fonctionne quand N est pair. Pour $N = 3$, poursuivons l'analyse du b) : les polynômes $A(x)$ et $B(x)$ sont de degré 2 avec

$$A(x)B(x)Q = \frac{1}{5}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$$

Comme la factorisation en produit de facteur premier de $1+x+x^2+x^3+x^4$ est $(1+2\cos(2\pi/5)+x^2)(1-2\cos(2\pi/5)\,x+x^2)$, il faudrait que $A(x)$ et $B(x)$ soient proportionnels à ces deux polynômes, ce qui n'est pas possible car $G_X(x) = xA(x)$ et $G_Y(x) = xB(x)$ sont à coefficient dans $\mathbb{R}^+$ et $-\cos(2\pi/5) < 0$. On ne peut donc pas piper les deux dés à 3 faces pour que S suive une loi uniforme sur $\{2, 3, 4, 5, 6\}$.

26) a) On utilise la fonction `randint` du module `numpy.random` ; la liste $L = [p, q]$ contient les nombres de cigarettes restant dans chaque poche. On fait ensuite une boucle : on choisit un entier $a \in \{0, 1\}$ (avec une loi uniforme) qui désigne le numéro de la poche choisie. Si $L[a]$ est nul, on renvoie le nombre de cigarettes qui restent dans la seconde poche ; sinon, on enlève une cigarette dans la poche a. Cela donne :

```python
import numpy.random as rd

def X(N):
    L = [N,N]
    while true:
        a = rd.randint(0,2)
            if L[a] == 0:
                return(L[1-a])
            else:
                L[a] -= 1
```

On peut ensuite calculer la fréquence des résultats obtenus quand on fait un (grand) nombre M de simulation

```python
def frequences(N,M):
    P = [0]*(N+1)
    for i in range(M):
        P[X(N)] +=1
    for i in range(N+1):
        P[i] = P[i]/M
    return(P)
```

On obtient par exemple $\mathbf{P} = [0.1974, 0.1962, 0.1817, 0.1565, 0.1208, 0.079, 0.0465, 0.0177, 0.0042]$ avec $N = 8$ et $M = 10000$.

b) On peut modéliser les choix entre la poche droite et la poche gauche par une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'ensemble $\Omega = \{G, D\}^{2N+1}$ (il y a au maximum $2N + 1$ tirage dans l'une des deux poches), Ω étant muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

c) À l'étape n, $n - 1$ cigarettes ont été fumées. On en déduit que $X_N = k$ (avec $k \in [\![0, N]\!]$) quand on a choisi la poche contenant le paquet vide à l'instant $n = 2N - k + 1$ (à ce moment, $2N - k$ cigarettes ont été fumées). L'évènement $(X_N = k)$ contient donc les éléments $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{1 \leq n \leq 2N+1} \in \Omega$ vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

- $\varepsilon_n = 0$, $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ contient N fois la valeur 0 et $n - 1 - N$ fois la valeur 1 et $(\varepsilon_{n+1}, \ldots, \varepsilon_{2N+1})$ est quelconque ;
- $\varepsilon_n = 1$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ contient N fois la valeur 1 et $n - 1 - N$ fois la valeur 0 et $(\varepsilon_{n+1}, \ldots, \varepsilon_{2N+1})$ est quelconque.

Il y a $\binom{n-1}{N} 2^{2N+1-n}$ suites ε correspondant à chacune de ces deux alternatives, donc :

$$\forall k \in [\![0, N]\!],\ \mathbf{P}(X_N = k) = 2\,\frac{\binom{n-1}{N} 2^{2N-n+1}}{2^{2N+1}} = \frac{\binom{2N-k}{N}}{2^{2N-k}}.$$

Avec $N = 8$, on obtient les valeurs (arrondies) $[0.1974, 0.1962, 0.1817, 0.1565, 0.1208, 0.079, 0.0465, 0.0177, 0.0042]$, qui sont effectivement proches des valeurs estimées à la question a).

d) On en déduit, pour $0 \leq k < N$:

$$\begin{aligned}(2N-k)\mathbf{P}(X_N = k+1) &= \frac{(2N-k)\binom{2N-k}{N}}{2^{2N-k}} = \frac{(2N-k)!}{N!(N-k-1)!2^{2N-k-1}} = 2(N-k)\,\frac{(2N-k)!}{N!(N-k)!2^{2N-k}} \\ &= 2(N-k)\mathbf{P}(X_N = k)\end{aligned}$$

et cette relation reste valable quand $k = N$ puisque $\mathbf{P}(X_N = N + 1) = 0$.

En sommant cette relation pour k variant de 0 à N, on obtient :

$$(2N+1)\underbrace{\sum_{k=0}^{N}\mathbf{P}(X_N = k+1)}_{=1-\mathbf{P}(X_N=0)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{N}(k+1)\mathbf{P}(X_N = k+1)}_{=E(X)} = 2N\sum_{k=0}^{N}\mathbf{P}(X_N = k) - 2\underbrace{\sum_{k=0}^{N}k\mathbf{P}(X_N = k)}_{=E(X_N)}$$

d'où $E(X_N) = 2N - (2N+1)(1 - \mathbf{P}(X_N = 0)) = (2N+1)\dfrac{\dbinom{2N}{N}}{2^{2N}} - 1.$

En utilisant l'équivalent de Stirling, on obtient :

$$\frac{\dbinom{2N}{N}}{2^{2N}} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N}}$$

d'où $E(X_N) \sim_{+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{N}$: $E(X_N)$ tend vers $+\infty$ quand N tend vers l'infini.

27) a) La fonction T_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$ et pour $j \in [\![2, n+1]\!]$:

$$[T_n = j] = \left(\bigcap_{1 \leq i_1 < i_2 \leq j-1} [X_{i_1} \neq X_{i_2}] \right) \bigcap \left(\bigcup_{1 \leq i \leq j-1} [X_i = X_j] \right)$$

donc $[T_n = j]$ est bien un évènement : T_n est une variable aléatoire.

On utilise la fonction `randint` de la bibliothèque `numpy.random` pour simuler T_n :

```
import numpy.random as rd

def T(n):
    j, x, L = 1, rd.randint(1,n+1), []
    while not(x in L):
        L.append(x)
        x = rd.randint(1,n+1)
        j += 1
    return(j)
```

b) On estime $E(T_n)$ par la moyenne empirique obtenue en effectuant 50000 simulations de T_n :

```
def E(n):
    S = 0
    for i in range(50000):
        S += T(n)
    return(S/50000)
```

On peut vérifier que cette approximation n'est pas très performante, en calculant plusieurs fois la valeur $E(10)$:

```
>>> [E(10) for i in range(10)]
[4.65912, 4.6495, 4.65998, 4.65964, 4.65266, 4.6736, 4.66972, 4.65554, 4.64884, 4.65518]
```

mais on peut espérer que l'approximation soit suffisante pour obtenir le graphe demandé :

```
import matplotlib.pyplot as plt

def graphe(N):
    x = []
```

```
y = []
for n in range(1,N+1):
    x.append(n)
    y.append((n))
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

c) Pour k compris entre 1 et n, l'évènement $[T_n \geq k+1]$ est la réunion disjointe des évènements

$$[X_1 = i_1,\ X_2 = i_2,\ \ldots,\ X_k = i_k]$$

quand $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ décrit l'ensemble des familles de k éléments distincts de E_n. Chacun de ces évènements est de probabilités $1/n^k$ (les X_i sont mutuellement indépendants) et il y a $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ k-uplets $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ différents (on a n choix pour i_1, puis $n-1$ choix pour i_2, et ainsi de suite jusqu'à $n-k+1$ choix pour i_k). On a donc :

$$\mathbf{P}(T_n \geq k+1) = \frac{1}{n^k}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \frac{n!}{n^k\,(n-k)!}.$$

d) Nous avons alors :

$$E(T_n) = \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbf{P}(T_n = k) = \sum_{k=2}^{n+1} k\big[\mathbf{P}(T_n \geq k) - \mathbf{P}(T_n \geq k+1)\big]$$

Après téléscopage, et en remarquant que $\mathbf{P}(T_n \geq 2) = 1$ et $\mathbf{P}(T_n \geq n+2) = 0$, nous obtenons :

$$E(T_n) = 2 + \sum_{k=2}^{n}\mathbf{P}(T_n \geq k+1) = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{n!}{n^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}.$$

L'intégrale proposée par l'énoncé est bien convergente, car la fonction intégrée est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable devant $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$. Nous avons d'autre part (en remarquant que la convergence de toutes les intégrales permet d'échanger somme finie et intégrale) :

$$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k}\right)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!\,n^k}\underbrace{\int_0^{+\infty} x^k\,e^{-x}\,\mathrm{d}x}_{=\Gamma(k+1)=k!} = E(T_n).$$

28) On peut modéliser la situation par la donnée de N et $(X_i)_{i\geq 1}$, variables aléatoires indépendantes, avec $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $X_i \sim \mathcal{B}(p)$: N est le nombre de clients et $X_i = 1$ si le i-ème client s'est fait voler son portefeuille. Le nombre Y de porte-feuilles volés est donc :

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

On a, pour $x \in]-1,1[$:

$$G_Y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(Y=k)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(N=n \text{ et } X_1+\cdots+X_n=k)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(N=n)\mathbf{P}(X_1+\cdots+X_n=k)\right)x^k$$

Cette famille étant sommable, on peut échanger les deux sommes :

$$\begin{aligned} G_Y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N=n) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n = k) x^k \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N=n)\, G_{X_1+\cdots+X_n}(x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N=n)\, (G_X(x))^n \\ &= G_N \circ G_X(x) \end{aligned}$$

Comme $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $X \sim \mathcal{B}(p)$, on obtient :

$$G_Y(x) = e^{-\lambda(1-G_X(x))} = e^{\lambda p(1-x)}.$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λp : $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ et $E(Y) = V(Y) = \lambda p$.

29) Nous pouvons voir X comme une variable aléatoire définie sur l'espace $\Omega = \mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$. Nous avons alors :

$$E(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{A \subset \{1,2,\ldots,n\}} X(A)$$

Comme l'application $A \longmapsto \overline{A}$ est bijective de Ω sur lui-même, nous avons par changement d'indice :

$$E(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{A \subset \{1,2,\ldots,n\}} X(\overline{A}) = \frac{1}{2^n} \sum_{A \subset \{1,2,\ldots,n\}} \big(1 + 2 + \cdots + n - X(A)\big) = \frac{n(n+1)}{2} - E(X)$$

d'où $E(X) = \dfrac{n(n+1)}{4}$.

30) a) Les fonctions `X` et `Y` simulent les variables X_k et Y ; on estime ensuite $E(Y)$ encaissant la moyenne de n tirages indépendants de la variable Y :

```python
import numpy.random as rd

def X(p):
   i=1
   while rd.random()>p:
      i+=1
   return(i)

def Y(N,p):
    M = X(p)
    for k in range(N-1):
        M = max(M,X(p))
    return(M)

def estimation(N,p,n):
    s = 0
    for i in range(n):
        s += Y(N,p)
    return(s/n)

print(estimation(10,1/3,5000))
```

J'ai obtenu la valeur 7.6846, qui est donc une estimation de $E(Y)$.

b) Comme S est la somme de N variables aléatoires indépendantes qui suivent toute la même loi géométrique de paramètre p, on a $G_S = G_X^N$ où G_X désigne la fonction génératrice de la loi $\mathcal{G}(p)$, i.e.

$$\forall x \in [-1,1],\ G_S(x) = \frac{p^N x^N}{(1-(1-p)x)^N}.$$

On peut ensuite développer cette fonction en série entière :

$$\forall x \in [-1,1],\ G_S(x) = p^N x^N \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-N}{n} (-1)^n (1-p)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(N+n-1)!}{(N-1)!\,n!}(1-p)^n p^N x^{N+n}$$

ce qui donne (unicité du DSE) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(S=n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < N; \\ \displaystyle\binom{n-1}{N-1}(1-p)^{n-N}p^N & \text{si } n \geq N. \end{cases}$$

Les X_k sont indépendantes et de même loi, donc $E(S) = NE(X_1) = \dfrac{N}{p}$ et $V(S) = NV(X_1) = \dfrac{Np}{(1-p)^2}$.

c) Le calcul est élémentaire :

$$\forall n \geq 0,\ P(Y \leq n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{N}(X_k \leq n)\right) = \prod_{k=1}^{N} P(X_k \leq n) = \left(\sum_{i=1}^{n} p(1-p)^i\right)^N = \left(1-(1-p)^n\right)^N.$$

On en déduit la loi de Y (qui est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$) :

$$\forall n \geq 1,\ P(Y=n) = P(Y \geq n) - P(Y \geq n-1) = (1-(1-p)^n)^N - (1-(1-p)^{n-1})^N.$$

Avec un système de calcul formel, on peut calculer l'espérance de Y quand $N = 10$ et $p = 1/3$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left[(1-(2/3)^n)^1 0 - (1-(2/3)^{n-1})^1 0\right] = \frac{22307870746762629}{2888227172412725} \simeq 7,72$$

et le résultat du a) est cohérent.

31) a) On simule le tirage par le biais de l'instruction `rd.randint(1,r+1)`. On obtient :

```
import numpy.random as rd

def X(r):
    return(rd.randint(1,r+1))

def T(r):
    S = [False for i in range(r)]   # S[k-1] = True ssi la valeur k a été tirée
    t = 0                           # t = nombre du tirages deja effectués
    c = 0                           # nombre de valeurs distinctes déjà tirées
    while(c != r):                  # tant que les r valeurs ne sont pas apparues
        k = X(r)                    # on effectue un tirage
        if not(S[k-1]):             # si on obtient une nouvelle valeur,
            S[k-1] = True               # on modifie S
            c += 1                      # on incrémente c
        t += 1                      # dans tous les cas, on incrémente t
    return(t)                       # on renvoie t

# Cette méthode est risquée car le calcul pourraît se prolonger au delà du raisonnable
```

```
# On peut ajouter un paramètre N pour sortir de la boucle après N tirages

def Tbis(r,N):
    S = [False for i in range(r)]
    t = 0
    c = 0
    while(c != r and t < N):
        k = X(r)
        if not(S[k-1]):
            S[k-1]=True
            c += 1
        t += 1
    if c == r:
        return(t)                   # on renvoie t si le calcul a abouti
    else:
        return(-1)                  # sinon, on renvoie -1

def estimation(r,N):
    S = 0
    for i in range(N):
        S += T(r)
    return(S/N)

def estimation_bis(r,N):
    S = 0
    n = 0
    for i in range(N):
        a = Tbis(r,10000)
        if a != -1:
            S += T(r)
            n += 1
    return(S/n)
```

Dans notre situation, la fonction `T` ne conduit pas à des temps de calculs trop longs et on obtient :

```
>>> estimation(20,100)
70.79
>>> estimation(20,1000)
72.088
>>> estimation(20,10000)
72.1094
>>> estimation(200,100)
1177.57
>>> estimation(200,1000)
1176.473
>>> estimation(200,10000)
1174.9399
```

b) Les T_i ne sont pas indépendantes quand $r \geq 3$, puisque pour $i \in [\![3, r]\!]$, on a :

$$\begin{cases} \mathbf{P}(T_{i-1} = i-1 \text{ et } T_i = i) = \mathbf{P}(T_i = i) = 1 \times \dfrac{r-1}{r} \times \cdots \times \dfrac{r-i+1}{r} \\ \mathbf{P}(T_{i-1} = i-1)\mathbf{P}(T_i = i) = 1 \times \dfrac{r-1}{r} \times \cdots \times \dfrac{r-i+2}{r}\mathbf{P}(T_i = i) < \mathbf{P}(T_i = i) \end{cases}$$

Quand $r = 2$, $T_1 = 1$ donc T_1 et T_2 sont indépendantes.

Soient $i \in [\![2, r]\!]$ et $k \geq i$. On a :

$$\mathbf{P}(Y_i = k) = \sum_{t=i-1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_i = k \text{ et } T_{i-1} = t) = \sum_{t=i-1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_i = k \mid T_{i-1} = t)\,\mathbf{P}(T_{i-1} = t)$$

car $\Big((T_{i-1} = t)\Big)_{t \geq i-1}$ est un système complet d'évènements. On a ensuite :

$$\forall t \geq i-1,\ \mathbf{P}(Y_i = k \mid T_{i-1} = t) = \left(\frac{i-1}{r}\right)^{k-1} \frac{r-i+1}{r}$$

puisqu'une fois $i-1$ valeurs "tirées", la probabilité de tirer une nouvelle valeur vaut $p = \dfrac{r-i+1}{r}$ et la loi de Y_i conditionnellement à l'évènement $T_{i-1} = t$ est une loi géométrique de paramètre p. Comme souvent, cette preuve n'est pas très précise et s'appuie sur la notion informelle de conditionnement. Pour préciser les choses, il faut décomposer l'évènement $T_{i-1} = t$ en évènements élémentaires :

$$(T_{i-1} = t) = \bigsqcup_{x \in I} ((X_1, \ldots, X_t) = x)$$

où I désigne l'ensemble des $x = (x_1, \ldots, x_t) \in [\![1, r]\!]^t$ tels que $\mathrm{Card}(\{x_1, \ldots, x_t\}) = i-1$. On peut alors écrire, en notant $E_x = \{x_1, \ldots, x_t\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y_i = k \text{ et } T_{i-1} = t) &= \sum_{x \in I} \mathbf{P}(Y_k = i,\ (X_1, \ldots, X_t) = x) \\
&= \sum_{x \in I} \mathbf{P}((X_1, \ldots, X_t) = x,\ X_{t+1} \in E_x,\ \ldots,\ X_{t+k-1} \in E_x,\ X_{t+k} \notin E_x) \\
&= \sum_{x \in I} \mathbf{P}((X_1, \ldots, X_t) = x)\,\mathbf{P}(X_{t+1} \in E_x) \ldots \mathbf{P}(X_{t+k-1} \in E_x)\,\mathbf{P}(X_{t+k} \notin E_x) \\
&= \left(\frac{i-1}{r}\right)^{k-1} \frac{r-i+1}{r} \sum_{x \in I} \mathbf{P}((X_1, \ldots, X_t) = x) \qquad \text{par indépendance des } X_i \\
&= \left(\frac{i-1}{r}\right)^{k-1} \frac{r-i+1}{r}\, P(T_{i-1} = t)
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\forall i \in [\![2, r]\!],\ \forall k \geq i,\ \mathbf{P}(Y_i = k) = \left(\frac{i-1}{r}\right)^{k-1} \frac{r-i+1}{r} \sum_{t=i-1}^{+\infty} \mathbf{P}(T_{i-1} = t) = \left(\frac{i-1}{r}\right)^{k-1} \frac{r-i+1}{r}.$$

c) Le résultat précédent montre que Y_i et T_{i-1} sont indépendantes et que Y_i suit une loi géométrique de paramètre $p_i = 1 - \dfrac{i-1}{r}$. Comme $T_i = Y_i + T_{i-1}$, ceci permet de calculer les fonctions génératrices des T_i :

$$\begin{cases}
G_{T_1}(x) = x & \text{car } T_1 = 1 \\
G_{T_2}(x) = G_{Y_2}(x) G_{T_1}(x) = \dfrac{p_2 x^2}{1 - (1-p_2)z} \\
\qquad \vdots \\
G_{T_r}(x) = G_{Y_r}(x) G_{T_{r-1}}(x) = \dfrac{p_r p_{r-1} \ldots p_2 x^r}{(1-(1-p_r)z) \ldots (1-(1-p_2)z)}
\end{cases}$$

ce qui donne :

$$\forall x \in [-1, 1],\ G_T(x) = \left(\prod_{i=1}^{r-1} \frac{1 - \frac{i}{r}}{1 - \frac{i}{r}x}\right) x^r = (r-1)!\,(r-x)^{-1}(r-2x)^{-1} \ldots (r-(r-1)x)^{-1}\, x^r.$$

On a donc :

$$\forall x \in [-1,1],\ G_T'(x) = G_T(x)\left(\frac{r}{x} + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{i}{r-ix}\right)$$

et en particulier :

$$E(T) = G_T'(1) = r + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{i}{r-i} = r + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{r-j}{j} = 1 + r\sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{j} = 1 + rH_{r-1}.$$

On obtient :

$$\begin{cases} E(T) = \dfrac{279175675}{3879876} \simeq 71,95 & \text{pour } r = 20, \\ E(T) \simeq 1175,6 & \text{pour } r = 200, \\ E(T) = r(\ln r + \gamma) + o(r) & \text{au voisinage de } +\infty. \end{cases}$$

Avec $\gamma \simeq 0,5772$, cette dernière approximation est excellente, puisque $r(\ln r + \gamma) \simeq 1175,10$.

32) Comme X et Y sont indépendantes de même loi, on a $E(X/Y) = E(X)E(1/Y)$ et $E(1/Y) = E(1/X)$. On peut ensuite appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$E(X/Y) = E(X)E(1/X) \geq \left(E\left(\sqrt{X}\sqrt{1/X}\right)\right)^2 = 1.$$

33) a) On obtient facilement :

```python
import numpy.random as rd

def N(n):
    A = []
    X = rd.randint(1,n+1)
    m = 1
    while not(X in A):
        A.append(X)
        X = rd.randint(1,n+1)
        m += 1
    return(m)

def Distribution(n,M):
    P = [0 for k in range(n+2)]
    for i in range(M):
        P[N(n)] += 1
    for k in range(n+2):
        P[k] *= 1/M
    return(P)
```

Cela donne par exemple :

```
>>> Distribution(10,100000)
[0.0, 0.0, 0.09910000000000001, 0.18072000000000002, 0.21492000000000003,
   0.20031000000000002, 0.15215, 0.09144000000000001, 0.042530000000000005,
   0.01502, 0.00337, 0.00044]
```

b) Notons X_k le résultat du k-ème tirage : les X_k sont mutuellement indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots n\}$. Notons N le nombre de tirages effectués. N est à valeurs dans $\{2, \ldots, n+1\}$, avec :

$$\forall k,\ (N = k) = (\text{Card}\,(\{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\}) = k-1 \text{ et } X_k \in \{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\}$$

En notant $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de cardinal k, nous avons donc, pour $k \in \{2, \ldots, n+1\}$:

$$(N = k) = \bigsqcup_{A \in \mathcal{P}_{k-1}} (\{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\} = A \text{ et } X_k \in A)$$

donc, par indépendance de X_k et de $(X_1, \ldots, X_{k-1})$:

$$\mathbf{P}(N = k) = \sum_{A \in \mathcal{P}_{k-1}} \mathbf{P}\left(\{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\} = A\right) \mathbf{P}(X_k \in A)$$

Comme $(X_1, \ldots, X_{k-1})$ suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}^{k-1}$, on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}_{k-1},\ \mathbf{P}\left(\{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\} = A\right) = \frac{(k-1)!}{n^{k-1}}$$

puisqu'il existe exactement $(k-1)!$ familles $(i_1, \ldots, i_{k-1}) \in \{1, 2, \ldots, n\}^{k-1}$ telles que $\{i_1, \ldots, i_{k-1}\} = A$.

Comme X_k suit une loi uniforme, $\mathbf{P}(X_k \in A) = \frac{k-1}{n}$, ce qui donne :

$$\mathbf{P}(N = k) = \sum_{A \in \mathcal{P}_{k-1}} = \sum_{A \in \mathcal{P}_{k-1}} \frac{(k-1)!}{n^{k-1}} \frac{k-1}{n} = \binom{n}{k-1} \frac{(k-1)(k-1)!}{n^k} = \frac{(k-1)\, n!}{(n^k\, (n-k+1)!}$$

On peut comparer ce résultat exacte aux estimation obtenues avec Python :

```
def Distribution_exacte(n):
    P = [0 for k in range(n+2)]
    for k in range(2,n+2):
        P[k] = factorial(n)*(k-1)/(factorial(n-k+1)*n**k)
    return(P)

def Comparaison(n,M):
    D1 = Distribution(n,M)
    D2 = Distribution_exacte(n)
    return max([abs(D1[k]-D2[k]) for k in range(n+2)])
```

ce qui donne :

```
>>> Comparaison(10,1000000)
0.0004659999999999942
>>> Comparaison(20,1000000)
0.0006367425000000024
```

On en déduit que le générateur de nombre pseudo-aléatoire de Python est assez pertinent ... et que notre formule théorique est sans doute correcte !

34) Supposons que X est à valeurs entières. On a alors, pour $x > 0$ et en posant $n = \lfloor x \rfloor$:

$$x\mathbf{P}(X \geq x) \sim_{+\infty} n\mathbf{P}(X \geq x) \leq n \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} k\mathbf{P}(X = k) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

car on reconnaît le reste d'une série convergente. On en déduit que $x\mathbf{P}(X \geq x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, i.e. que $\mathbf{P}(X \geq x) = o(1/x)$ au voisinage de $+\infty$.

Si X est à valeur dans $\mathbb{R}^+$, posons $Y = \lfloor X \rfloor$. Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et possédant une espérance (car $Y \leq X + 1$). Comme l'évènement $(X \geq x)$ est contenu dans $(Y \geq x - 1)$, nous avons :

$$\mathbf{P}(X \geq x) = O(\mathbf{P}(Y \geq x - 1)) = o(1/(x-1)) = o(1/x) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

35) Soit $K \in \mathbb{R}^+$ tel que $0 \leq X \leq K$. Pour $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X^n est bornée par K^n, donc elle admet une espérance : X possède donc des moments de tous ordres.

$X(\Omega)$ est un ensemble au plus dénombrable, que nous pouvons écrire $\{x_i,\ i \in I\}$ avec $I = \{1, 2, \ldots, N\}$ ou $I = \mathbb{N}$. On peut donc écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt[n]{M_n} = \left[\sum_{i \in I} x_i^n \mathbf{P}(X = x_i)\right]^{1/n}$$

Pour deviner le résultat, plaçons nous dans le cas particulier où $I = \{1, 2\}$. Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt[n]{M_n} = [x_1^n \mathbf{P}(X = x_1) + x_2^n \mathbf{P}(X = x_2)]^{1/n}$$

Si $x_1 < x_2$ et $\mathbf{P}(X = x_2) \neq 0$, $x_1^n \mathbf{P}(X = x_1) + x_2^n \mathbf{P}(X = x_2)$ est équivalent à $x_2^n \mathbf{P}(X = x_2)$ quand n tend vers l'infini, et on pourrait démontrer que $[x_1^n \mathbf{P}(X = x_1) + x_2^n \mathbf{P}(X = x_2)]^{1/n}$ se comporte comme $[x_2^n \mathbf{P}(X = x_2)]^{1/n}$, qui tend vers x_2 quand n tend vers l'infini. Si $\mathbf{P}(X = x_2) = 0$, on a directement $\sqrt[n]{M_n} = x_1$, qui tend vers x_1. Cette preuve peut se faire facilement pour I fini : nous allons la généraliser pour I quelconque.

Comme esquissé ci-dessus, il faut se limiter aux indices i tels que $\mathbf{P}(X = x_i) \neq 0$. Nous posons donc :

$$J = \{i \in I,\ \mathbf{P}(X = x_i) \neq 0\} \text{ et } M = \sup_{i \in J} x_i.$$

Si $M = 0$, X est nulle et $\sqrt[n]{M_n} = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = M$. Sinon, on a :

- $$\sqrt[n]{M_n} = \left[\sum_{i \in J} x_i^n \mathbf{P}(X = x_i)\right]^{1/n} \leq \left[\sum_{i \in I} M^n \mathbf{P}(X = x_i)\right]^{1/n} = M.$$
- pour $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < M$, il existe $i \in J$ tel que $M - \varepsilon < x_i$. On en déduit :

  $$\sqrt[n]{M_n} \geq \sqrt[n]{(x_i)^n \mathbf{P}(X = x_i)} \geq (M - \varepsilon) \sqrt[n]{\mathbf{P}(X = x_i)}$$

  Comme $\mathbf{P}(X = x_i)$ est non nul, $(M - \varepsilon) \sqrt[n]{\mathbf{P}(X = x_i)}$ tend vers $M - \varepsilon$ quand n tend vers l'infini. Il existe donc n_ε tel que :

  $$\forall n \geq n_\varepsilon,\ (M - \varepsilon) \sqrt[n]{\mathbf{P}(X = x_i)} \geq M - 2\varepsilon.$$

Nous avons donc démontré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ M - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{M_n} \leq M$$

ce qui traduit que $\sqrt[n]{M_n}$ tend vers M quand n tend vers l'infini.

Remarques :

- La valeur M s'appelle la *borne supérieure essentielle* de X. On la définit de la façon suivante :

  > si X est une variable aléatoire réelle, un *presque-majorant* de X est un réel K tel que $X \leq K$ presque sûrement (i.e. tel que $\mathbf{P}(X > K) = 0$). Si X admet un presque majorant, sa borne supérieure essentielle est le plus petit des presque-majorants.

- Dans le domaine continu, l'équivalent de cet exercice est le suivant :

  > Démontrer que si $f\ :\ [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ (avec $a < b$) est continue, $\|f\|_n = \sqrt[n]{\int_a^b (f(t))^n \,\mathrm{d}t}$ tend vers $\|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$ quand n tend vers l'infini (si f n'est que continue par morceaux, il faut remplacer $\|f\|_\infty$ par le sup essentiel de f).

36) a) On utilise la fonction `random` de la bibliothèque `numpy.random`, qui renvoie un réel de $[0, 1[$ en simulant une loi uniforme. Elle permet de simuler une variable de Bernoulli de paramètre p :

```
def b(p):
    if rd.random() < p:
       return 1
    else:
       return 0

def simulation(p):
    x = g(p)                    # x est la valeur du premier tirage
    n1 = 1
    while x == b(p):            # tant que le tirage donne le meme resultat
        n1 += 1                 # on incremente n1
                # ensortie de boucle, n1 contient la longueur de la premiere serie
                # et on a deja tire une fois la nouvelle valeur
    x = 1-x
    n2 = 1
    while x == g(p):            # meme traitement pour calculer n2
        n2 += 1
    return n1, n2
```

On peut ensuite estimer les lois de N_1 et N_2, ainsi que leurs espérances :

```
def estimation_lois(p,N,M):
    # On effectue M fois l'experience et on calcule la frequence d'apparition
    # des valeurs 1,2,...,N-1,N pour les variables N1 et N2
    # dans la case de N, on recense tous les resultats superieurs ou egaux a N
    N1, N2 = [0]*N, [0]*N
    for i in range(M):
        n1,n2 = simulation(p)
        if n1<N:
            N1[n1-1] += 1
        else:
            N1[N-1] += 1
        if n2<N:
            N2[n2-1] += 1
        else:
            N2[N-1] += 1
    for i in range(N):
        N1[i] /= M
        N2[i] /= M
    return N1, N2

def estimation_esperances(p,M):
    # Les esperances sont estimees par les moyennes empiriques calculees apres
    # M simulations
    N1 = 0
    N2 = 0
    for i in range(M):
        n1,n2 = simulation(p)
        N1 += n1
        N2 += n2
    return N1/M, N2/M
```

On obtient :

```
In [5]: estimation_lois(.3,10,50000)
Out [5]:
        ([0.42108,0.2091,0.12144,0.07684,0.05348,0.03518,0.0246,0.01724,0.01244,0.0286],
        [0.58096,0.21064,0.085,0.04394,0.02592,0.01706,0.01174,0.00714,0.00512,0.01248])

In [6]: estimation_esperances(.3,100000)
Out[6]: Out[10]: (2.75674, 2.00527)
```

b) On peut modéliser les résultats des lancers par la donnée d'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. On a ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$(N_1 = n) = (X_1 = \cdots = X_n \neq X_{n+1}) = (X_1 = \cdots = X_n = 0 \text{ et } X_{n+1} = 1) \sqcup (X_1 = \cdots = X_n = 1 \text{ et } X_{n+1} = 0)$$

d'où $\mathbf{P}(N_1 = n) = (1-p)^n p + p^n(1-p) = pq(p^{n-1} + q^{n-1})$.

On a de la même facon :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(N_1 = n \text{ et } N_2 = m) = (1-p)^n p^m (1-p) + p^n (1-p)^m p = q^{n+1}p^m + p^{n+1}q^m$$

On en déduit :

$$\forall m \geq 1,\ \mathbf{P}(N_2 = m) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N_1 = n \text{ et } N_2 = m) = p^m \frac{q^2}{1-q} + q^m \frac{p^2}{1-p} = p^{m-1}q^2 + q^{m-1}p^2.$$

On remarque (il est temps) que N_1 et N_2 sont presque sûrement définies :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N_1 = n) = pq\left(\frac{1}{1-p} + \frac{1}{1-q}\right) = p + q = 1 \text{ et } \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N_2 = m) = \frac{q^2}{1-p} + \frac{p^2}{1-q} = q + p = 1$$

et on calcule facilement leurs espérances :

$$\begin{aligned} E(N_1) &= pq\left(\sum_{n=1}^{+\infty} np^{n-1} + nq^{n-1}\right) = pq\left(\frac{1}{(1-p)^2} + \frac{1}{(1-q)^2}\right) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \\ E(N_2) &= q^2 \sum_{m=1}^{+\infty} mp^{m-1} + p^2 \sum_{m=1}^{+\infty} mq^{m-1} = \frac{q^2}{1-p)^2} + \frac{p^2}{1-q)^2} = 2 \end{aligned}$$

On peut vérifier que les valeurs calculées à la partie a (avec $p = 0,3$) sont effectivement proches des valeurs estimées.

N_1 et N_2 sont indépendantes si et seulement $\mathbf{P}(N_1 = n \text{ et } N_2 = m) = \mathbf{P}(N_1 = n)\mathbf{P}(N_2 = m)$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$. On a ici :

$$\mathbf{P}(N_1 = 1 \text{ et } N_2 = 1) = q^2 p + p^2 q = pq \text{ et } \mathbf{P}(N_1 = 1)\mathbf{P}(N_2 = 1) = 2pq(p^2 + q^2).$$

Pour que N_1 et N_2 soient indépendantes, il faut donc avoir $2(p^2 + q^2) = 1$, soit $4p^2 - 4p + 1 = 0$, i.e. $p = 1/2$.

Réciproquement, si $p = 1/2 = q$, on a, pour tous $n, m \geq 1$:

$$\mathbf{P}(N_1 = n \text{ et } N_2 = m) = 2p^{n+m+1} = p^{n+m} \text{ et } \mathbf{P}(N_1 = n)\mathbf{P}(N_2 = m) = 2p^{n+1} \times 2p^{m+1} = p^{n+m}$$

On en déduit que N_1 et N_2 sont indépendantes si et seulement si $p = 1/2$.

37) Notons N la variable aléatoire égale au nombre d'œufs pondus. On a, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{P}(K = k \mid N = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(K = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}(K = k \mid N = n)\mathbf{P}(N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{\lambda^k p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-p}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}. \end{aligned}$$

K suit donc une loi de poisson de paramètre λp.

Autre méthode : on peut modéliser les choses en imaginant que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$ ($X_i = 1$ si le i-ème œufs éclot et 0 sinon) et N est le nombre d'œufs pondu, avec N indépendant de (X_i). Notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, pour $n \geq 0$. On a alors $K = \sum_{i=1}^{N} X_i$ et on retrouve un calcul classique en passant par les séries génératrice :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,1],\ G_K(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(K=k)x^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(K=k \text{ et } \ N=n)\right) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n=k \text{ et } \ N=n)\right) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n=k)\mathbf{P}(N=n)\right) x^k \qquad \text{par indépendance de } (X_1,\dots,X_n) \text{ et } N
\end{aligned}$$

Comme on somme des termes positifs, on peut échanger les deux sommes :

$$\forall x \in [0,1],\ G_K(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n=k)x^k\right)}_{=G_{S_n}(x)} \mathbf{P}(N=n)$$

Comme les X_i sont indépendants et de même loi, $G_{S_n} = (G_{X_1})^n$. On obtient donc :

$$\forall x \in [0,1],\ G_K(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (G_{X_1}(x))^n \ \mathbf{P}(N=n) = G_N\left(G_{X_1}(x)\right) = e^{-\lambda(1-G_{X_1}(x))} = e^{-\lambda p(1-x)}$$

et on retrouve bien la série génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λp.

38) a) Notons R_i l'événement : « Une boule rouge a été tirée au i-ème tirage »et $N_i = \overline{R_i}$. Nous avons :

$$P(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap N_{k+1} \cap \dots N_n) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{a+ic}{a+b+ic} \times \prod_{i=0}^{n-k-1} \frac{b+ic}{a+b+(k+i)c}$$

d'après la formule des probabilités composées.

b) Pour $k \in [\![0,n]\!]$, l'événement $(X_n = k)$ est la réunion disjointe des événements :

$$E_{i_1,\dots,i_k} = N_1 \cap \cdots \cap N_{i_1-1} \cap R_{i_1} \cap N_{i_1+1} \cap \cdots \cap N_{i_2-1} \cap R_{i_2} \cap N_{2_1+1} \cap \cdots \cap N_{i_k-1} \cap R_{i_k} \cap N_{i_k+1} \cap \cdots \cap N_n$$

où $(i_1,\dots,i_k)$ décrit les $\binom{n}{k}$ suites vérifiant $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Par la formule des probabilités composées, les événements $E_{i_1,\dots,i_k}$ ont tous la même probabilité (on retrouve les mêmes fractions qu'à la question a), mais les numérateurs apparaissent dans un ordre différent). On en déduit :

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(a+ic) \times \prod_{i=0}^{n-k-1}(a+ib)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(a+b+ic)}.$$

c) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, nous avons :

$$\begin{cases} P(X_{n+1} = k \,|\, X_n = k) = P(B_{n+1} \,|\, X_n = k) = \dfrac{b + (n-k)c}{a + b + nc} \\ \\ P(X_{n+1} = k+1 \,|\, X_n = k) = P(R_{n+1} \,|\, X_n = k) = \dfrac{a + kc}{a + b + nc} \\ \\ \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{k, k+1\},\ P(X_{n+1} = i \,|\, X_n = k) = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= \sum_{q=0}^{n+1} q P(X_{n+1} = q) \\ &= \sum_{q=0}^{n+1} q \left(\sum_{k=q-1}^{q} P(X_{n+1} = q \,|\, X_n = k)\, P(X_n = k) \right) \\ &= \sum_{k=-1}^{n+1} P(X_n = k) \sum_{q=k}^{k+1} q P(X_{n+1} = q \,|\, X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) \left(k \,\frac{b + (n-k)c}{a + b + nc} + (k+1)\, \frac{a + kc}{a + b + nc} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) \left(k \,\frac{a + b + (n+1)c}{a + b + nc} + \frac{a}{a + b + nc} \right) \\ &= \frac{a + b + (n+1)c}{a + b + nc}\, E(X_n) + \frac{a}{a + b + nc} \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore :

$$E\left(\frac{X_{n+1}}{a + b + (n+1)c} \right) = E\left(\frac{X_n}{a + b + nc} \right) + \underbrace{\frac{a}{(a + b + nc)(a + b + (n+1)c)}}_{= \frac{a}{c} \left(\frac{1}{a+b+nc} - \frac{1}{a+b+(n+1)c} \right)}$$

En sommant ces inégalités, nous obtenons :

$$E\left(\frac{X_n}{a + b + nc} \right) = E\left(\frac{X_0}{a + b} \right) + \frac{a}{c} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a + b + kc} - \frac{1}{a + b + (k+1)c} \right) = \frac{a}{c} \left(\frac{1}{a + b} - \frac{1}{a + b + nc} \right)$$

ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_n) = \frac{na}{a + b}.$$

d) On a $(T = +\infty) = (\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = 0) = \bigcap_{n \geq 0} (X_n = 0)$; comme la suite d'événements $(X_n = 0)_{n \geq 0}$ est décroissante, $P(T = +\infty)$ est la limite de $P(X_n = 0)$ quand n tend vers l'infini (théorème de continuité décroissante). Or $P(X_n = 0) = \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{b + kc}{a + b + kc} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \dfrac{a}{a + b + kc} \right)$. En prenant le ln, on obtient :

$$\ln(P(X_n = 0)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{a}{a + b + kc} \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$$

car $\ln \left(1 - \dfrac{a}{a + b + kc} \right) \sim_{+\infty} -\dfrac{a}{kc}$ qui est un terme général négatif de série divergente : on a donc $P(T = +\infty) = 0$ et T est presque sûrement finie.

La loi de T est facile à calculée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(T=n) = P(N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1} \cap R_n) = \frac{b(b+c)\cdots(b+(n-2)c)a}{(a+b)(a+b+c)\cdots(a+b+(n-1)c)}.$$

On a ensuite :

$$nP(T=n) = n\,\frac{a}{a+b+(n-1)c}\prod_{k=0}^{n-2}\frac{b+kc}{a+b+kc} \sim_{+\infty} \frac{a}{c}\prod_{k=0}^{n-2}\left(1-\frac{a}{a+b+kc}\right).$$

On a :

$$\ln\left(1-\frac{a}{a+b+kc}\right) = \ln(1-\frac{a}{kc}+O(1/k^2)) = -\frac{a}{kc}+u_k \text{ où } u_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

On en déduit :

$$\prod_{k=1}^{n-2}\left(1-\frac{a}{a+b+kc}\right) = \exp\left(-\frac{a}{c}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}+\frac{a}{c}\sum_{k=1}^{n-2}u_k\right) = \exp\left(-\frac{a}{c}\ln n+\delta+o(1)\right)$$

avec $\delta = \dfrac{a}{c}\left(-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}u_k\right)$. Nous obtenons enfin :

$$\prod_{k=1}^{n-2}\left(1-\frac{a}{a+b+kc}\right) \sim_{+\infty} \frac{e^\delta}{n^{a/c}}$$

Ainsi, $nP(T=n) \sim_{+\infty} \dfrac{K}{n^{a/c}}$ où K est une constante strictement positive. On en déduit que T est d'espérance finie si et seulement si $a>c$.

39) Pour $i \in [\![1,k]\!]$, notons Y_i l'indicatrice de l'évènement $(i \in \{X_1,\ldots,X_n\})$. On a, en utilisant l'indépendance des X_j :

$$P(Y_i=0) = P\left(\bigcap_{1\le j\le n}[X_j \neq i]\right) = \prod_{j=1}^n P(X_j\neq i) = \left(\frac{k-1}{k}\right)^n$$

On en déduit que $E(Y_i) = 1-\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^n$, puis $E(N) = E(Y_1+\cdots+Y_k) = E(Y_1)+\cdots+E(Y_k) = k\left(1-\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^n\right)$.

40) a) Comme les évènements $(T=n)$ et $(T\ge n+1)$ sont disjoints, on a :

$$\mathbf{P}(T=n\,|\,T\ge n)+\mathbf{P}(T\ge n+1\,|\,T\ge n) = \mathbf{P}\left((T=n)\cup(T\ge n+1)\,|\,T\ge n\right) = \mathbf{P}(T\ge n\,|\,T\ge n) = 1,$$

d'où $\mathbf{P}(T\ge n+1\,|\,T\ge n) = 1-t_n$.
Cela donne :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1-t_{n-1} = \mathbf{P}(T\ge n\,|\,T\ge n-1) = \frac{\mathbf{P}((T\ge n)\cup(T\ge n-1))}{\mathbf{P}(T\ge n-1)} = \frac{\mathbf{P}(T\ge n)}{\mathbf{P}(T\ge n-1)}.$$

Comme $P(T\ge 0)=1$, on obtient par récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbf{P}(T\ge n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-t_k).$$

On a ensuite :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ p_n = \mathbf{P}(T\ge n)-\mathbf{P}(T\ge n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-t_k)-\prod_{k=0}^{n}(1-t_k) = t_n\prod_{k=0}^{n-1}(1-t_k).$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme t_n est la probabilité conditionnelle d'un évènement, on a $0 \leq p_n \leq 1$ et si t_n était égal à 1, on aurait $\mathbf{P}(T \geq n+1) = \prod_{k=0}^{n}(1-t_k) = 0$, ce qui contredirait l'hypothèse.

Nous avons démontré au a) que $P(T \geq n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1-t_k)$ pour tout $n \geq 0$. Comme la suite d'évènements $\big((T \geq n)\big)_{n \geq 0}$ est décroissante, le théorème de continuité monotone donne :

$$0 = \mathbf{P}\left(\underbrace{\bigcap_{n \geq 0}(T \geq n)}_{=\emptyset}\right) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n-1}(1-t_k).$$

Comme les t_k sont tous dans $[0,1[$, on obtient en prenant le logarithme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1-t_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$$

ce qui traduit que $\alpha_n = \ln(1-t_n)$ est le terme général d'une série divergente.

Si t_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, la série de terme générale t_n est grossièrement divergente ; sinon, on a $\alpha_n \sim_{+\infty} -t_n$ et le théorème de comparaison des séries de signe constante prouve que $\sum_{n \geq 0} t_n$ est également divergente.

c) Soit $(t_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels de $[0,1[$ telle que $\sum_{n \geq 0} t_n$ diverge. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $p_n = t_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-t_k)$. Nous avons $0 \leq p_n \leq 1$ pour tout n et une récurrence évidente donne :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \ \sum_{m=0}^{n} p_m = 1 - \prod_{k=0}^{n-1}(1-t_k)$$

Comme la série de terme général t_n diverge, on prouve comme à la question b) que $\prod_{k=0}^{n-1}(1-t_k)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini : ceci prouve que la série de terme général p_n converge et a pour somme 1.

Nous avons $(p_n)_{n \geq 0} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$: il existe donc une variable aléatoire T à valeurs dans N telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbf{P}(T=n) = p_n$. On montre ensuite facilement que pour tout n, $\mathbf{P}(T \geq n)$ est non nul et que $\mathbf{P}(T = n \,|\, T \geq n) = t_n$.

41) On a $X = X\,\mathbf{1}_{X < a\mathbf{E}(X)} + X\,\mathbf{1}_{X \geq a\mathbf{E}(X)} \leq a\mathbf{E}(X) + X\,\mathbf{1}_{X \geq a\mathbf{E}(X)}$, d'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbf{E}(X) \leq a\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}\left(X\,\mathbf{1}_{X \geq a\mathbf{E}(X)}\right) \leq a\mathbf{E}(X) + \sqrt{\mathbf{E}(X^2)}\,\sqrt{\mathbf{E}(\,\mathbf{1}_{X \geq a\mathbf{E}(X)}^2)} = a\mathbf{E}(X) + \sqrt{\mathbf{E}(X^2)}\,\sqrt{\mathbf{P}(X \geq a\mathbf{E}(X))}$$

ce qui donne le résultat demandé.

42) a) Supposons que $X \preceq Y$ et soit $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ croissante et bornée. Nous avons :

$$\mathbf{E}(h(X)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} h(n)\mathbf{P}(X=n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} h(n)(\mathbf{P}(X \geq n) - \mathbf{P}(X \geq n+1)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} h(n)\mathbf{P}(X \geq n) - \sum_{n \geq 1} h(n-1)\mathbf{P}(X \geq n)$$

en remarquant que l'on peut séparer les deux sommes car, h étant bornée, les deux séries sont trivialement convergentes. Nous obtenons donc :

$$\mathbf{E}(h(X)) = h(0) + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \underbrace{(h(n) - h(n-1))}_{\geq 0}\,\underbrace{\mathbf{P}(X \geq n)}_{\leq \mathbf{P}(Y \geq n)} \leq h(0) + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (h(n) - h(n-1))\,\mathbf{P}(Y \geq n) = \mathbf{E}(h(Y))$$

Supposons réciproquement que $\mathbf{E}(h(X) \leq \mathbf{E}(h(Y))$ pour tout fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ croissante et bornée. Pour $t \in \mathbb{R}$, on peut appliquer cette propriété à $h = \mathbf{1}_{[t,+\infty[\cap\mathbb{N}}$, qui est bien croissante et bornée :

$$\mathbf{P}(X \geq t) = \mathbf{E}(h_t(X)) \leq \mathbf{E}(h_t(Y)) = \mathbf{P}(Y \geq t)$$

donc $X \preceq Y$.

b) Supposons que $X \preceq Y$; pour $N \in \mathbb{N}$, l'application $h_N : \ n \longmapsto \min(n, N)$ est croissante et bornée. On a donc :

$$\sum_{n=0}^{N-1} n\mathbf{P}(X = n) + NP(X \geq N) = \mathbf{E}(h_N(X) \leq \mathbf{E}(h_N(Y)) = \sum_{n=0}^{N-1} n\mathbf{P}(Y = n) + NP(Y \geq N)$$

En passant à la limite quand N tend vers l'infini, obtient $\lambda = \mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y) = \mu$ (pour une variable entière $Z \geq 0$ possédant une espérance, on a $0 \leq N\mathbf{P}(Z \geq N) = N \sum_{n=N}^{+\infty} \mathbf{P}(Z = n) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} n\mathbf{P}(Z = n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$), comme reste d'une série convergente).

Supposons réciproquement que $\lambda \leq \mu$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$F_n : \ x \longmapsto e^{-x} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

F_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (on peut dériver la série entière de rayon infini sous le signe $\sum$) avec :

$$\forall x > 0, \ F_n'(x) = e^{-x} \left(-\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \right) = e^{-x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} > 0$$

On en déduit que F_n est strictement croissante, ce qui donne $\mathbf{P}(X \geq n) = F_n(\lambda) \leq F_n(\mu) = \mathbf{P}(Y \geq n)$: on a bien $X \preceq Y$.

c) Notons $p_n = \mathbf{P}(X = n)$; on a, en utilisant l'indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n \text{ et } Y = m) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\mathbf{P}(Y = m) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\mathbf{P}(Y \geq n) \\
&\geq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\mathbf{P}(X \geq n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \sum_{m=n}^{+\infty} p_m \\
&= \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n^2}_{=S_1} + \underbrace{\sum_{0\leq n<m} p_n p_m}_{=S_2}
\end{aligned}$$

On a d'autre part $1 = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} p_n p_m = S_1 + 2S_2$ puisque $\sum_{0\leq n<m} p_n p_m = \sum_{0\leq m<n} p_n p_m$ par symétrie : cela donne

$$\mathbf{P}(X \leq Y) \geq S_1 + S_2 \geq \frac{S_1}{2} + S_2 = \frac{1}{2}.$$

43) a) Notons $Y_i = X_i - m$: ces variables aléatoires sont i.i.d. et centrées. On a :

$$A_n^\varepsilon = \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \right)^4 \geq \varepsilon^4 \right).$$

Comme la variable $Z_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i\right)^4$ est positive et d'espérance finies on peut lui appliquer l'inégalité de Markov : $\mathbf{P}(A_n^\varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}(Z_n)}{\varepsilon^4}$. Nous avons d'autre part :

$$Z_n = \frac{1}{n^4}\left(\sum_i Y_i^4 + \alpha \sum_{i\neq j} Y_i^3 Y_j + \beta \sum_{i<j}^n Y_i^2 Y_j^2 + 6 \sum_i \sum_{\substack{j<k \\ j\neq i \text{ et } k\neq i}} Y_i^2 Y_j Y_k\right)$$

puisque, pour $i<j$ fixés, le développement de $(Y_1+\cdots+Y_n)^4$ contient $\binom{4}{2}$ fois le terme $Y_i^2Y_j^2$ (les valeurs de α et β ne sont pas utiles pour la suite du calcul).

Comme les Y_i sont indépendantes, on a :

$$\begin{cases} \forall i,\ \mathbf{E}(Y_i^4) = V_4 \\ \forall i\neq j,\ \mathbf{E}(Y_i^3Y_j) = \mathbf{E}(Y_i^3)\mathbf{E}(Y_j) = 0 \\ \forall i,j,k \text{ distincts}, \mathbf{E}(Y_i^2Y_jY_k) = \mathbf{E}(Y_i^2)\mathbf{E}(Y_j)\mathbf{E}(Y_k) = 0 \\ \forall i\neq j,\ \mathbf{E}(Y_i^2Y_j^2) = \mathbf{E}(Y_i^2)\mathbf{E}(Y_j^2) = V_2^2 \end{cases}$$

On en déduit que $\mathbf{E}(Z_n) = \frac{1}{n^4}\left(nV_4 + 6\frac{n(n-1)}{2}V_2^2\right)$, ce qui donne :

$$\mathbf{P}(A_n^\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^4 n^4}\left(nV_4 + 6\frac{n(n-1)}{2}V_2^2\right).$$

b) $\mathbf{P}(A_n^\varepsilon)$ est ainsi un $O(1/n^2)$: c'est le terme général d'une série convergente.

c) $\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n^\varepsilon\right)_{p\geq 1}$ est une suite décroissante d'événement, donc le théorème de continuité monotone donne :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{p=1}^{+\infty}\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n^\varepsilon\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n^\varepsilon\right).$$

On a d'autre part :

$$\forall p\geq 1,\ \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n^\varepsilon\right) \leq \sum_{n=p}^{+\infty}\mathbf{P}(A_n^\varepsilon)$$

On en déduit le résultat demandé, puisque le reste de cette série convergente tend vers 0.

44) Nous avons, pour tout $n\geq 1$:

$$(Y_1 = n) = (X_1 = n \text{ et } X_2 > n) \sqcup (X_1 = n \text{ et } X_2 = n) \sqcup (X_1 > n \text{ et } X_2 = n)$$

donc, par indépendance de X_1 et X_2 et en notant $q_i = 1 - p_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_1 = n) &= \mathbf{P}(X_1 = n)\mathbf{P}(X_2 > n) + \mathbf{P}(X_1 = n \text{ et } X_2 = n) + \mathbf{P}(X_1 > n)\mathbf{P}(X_2 = n) \\ &= p_1p_2\left(q_1^{n-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty} q_2^{k-1} + q_1^{n-1}q_2^{n-1} + q_2^{n-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty} q_1^{k-1}\right) \\ &= p_1q_1^{n-1}q_2^n + p_1p_2q_1^{n-1}q_2^{n-1} + p_2q_1^nq_2^{n-1} \\ &= q_1^{n-1}q_2^{n-1}(p_1q_2 + p_1p_2 + p_2q_1) \\ &= q_1^{n-1}q_2^{n-1}(p_1 + p_2 - p_1p_2) \end{aligned}$$

On en déduit que Y_1 suit une loi géométrique de paramètre $p_1 + p_2 - p_1p_2$, d'où $\mathbf{E}(Y_1) = \dfrac{1}{p_1 + p_2 - p_1p_2}$.

D'autre part, $Y_1 + Y_2 = X_1 + X_2$, donc par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(Y_2) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2) - \mathbf{E}(Y_1) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1 + p_2 - p_1p_2}.$$

45) a) On crée une séquence $s1$ de longueur m qui ne contient que des deux et on initialise un compteur t à la valeur 0 ; tant que $s \neq s_1$, on supprime le premier élément de s_1 et on ajoute un 0 ou un 1 (on utilise la fonction `randint` de `numpy.random`) à la fin de s_1, puis on incrémente t. : il suffit ensuite de renvoyer la valeur de t quand on sort de la boucle. Il faut remarquer que ceci fonctionne car T_S est presque sûrement finie et d'espérance assez petite. On estime ensuite l'espérance de T_S en calculant la moyenne de sur 20000 simulations.

```
def T(s):
    s1 = [2 for i in range(len(s))]
    t = 0
    while s != s1:
        del s1[0]
        s1.append(rd.randint(0,2))
        t += 1
    return(t)

def E(s):
    n = 0
    for i in range(10000):
        n += T(s)
    return(n/10000)

for i in range(2):
    for j in range(2):
        for k in range(2):
            print([i,j,k],esp([i,j,k]))

[0, 0, 0] 13.97625
[0, 0, 1] 8.0191
[0, 1, 0] 10.0592
[0, 1, 1] 7.98225
[1, 0, 0] 7.9791
[1, 0, 1] 9.883
[1, 1, 0] 7.9803
[1, 1, 1] 14.1128
```

On peut conjecturer que les espérances des temps d'attente valent 14 pour $(0,0,0)$ et $(1,1,1)$, 8 pour $(0,0,1)$, $(1,1,1)$, $(1,0,0)$ et $(1,1,0)$ et 10 pour $(0,1,0)$ et $(1,0,1)$.

b) On reprend à peu près la même méthode :

```
def match(s1,s2):
    s = [2 for i in range(len(s1))]
    while True:
        del s[0]
        s.append(rd.randint(0,2))
        if s == s1:
            return(1)    # on renvoie 1 quand S1 gagne
        elif s == s2:
            return(0)    # on renvoie 0 quand S2 gagne

def proba(s1,s2):
    n=0
    for i in range(20000):
```

```
        n += match(s1,s2)
    return(n/20000)

liste = [[1,1,0],[1,0,0],[0,0,1],[0,1,1]]

for i in range(4):
    for j in range(4):
        if i != j:
            print([i+1,j+1],proba(liste[i],liste[j]))
```

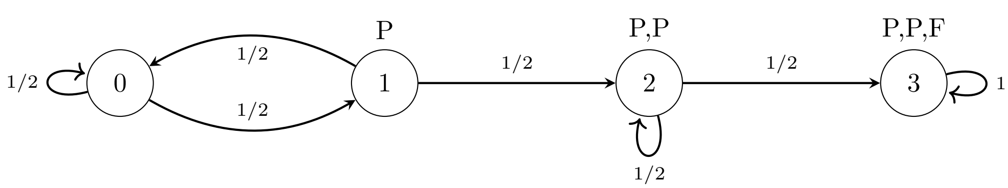
```
[1, 2] 0.66965
[1, 3] 0.49545
[1, 4] 0.25295
[2, 1] 0.3325
[2, 3] 0.7519
[2, 4] 0.50375
[3, 1] 0.4976
[3, 2] 0.24595
[3, 4] 0.6731
[4, 1] 0.7516
[4, 2] 0.4975
[4, 3] 0.33135
```

Les valeurs des différentes probabilités semblent donc être les valeurs données par le tableau :

	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
S_2	$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
S_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{3}$
S_4	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	

Ainsi, S_1 est plus forte que S_2, qui est plus forte que S_2, qui est plus forte que S_4, qui est plus forte que S_1 !

c) L'attente de la séquence S_1 peut être modélisée par une marche aléatoire sur le graphe probabiliste :



Autrement-dit, on suppose définie une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 0}$ telles que $Y_0 = 0$ et :

$$\forall n \geq 0,\ \forall i, j \in [\![0, 3]\!],\ P(Y_{n+1} = i \,|\, Y_n = j) = p_{i,j}$$

où $p_{i,j}$ est le poids de l'arc qui relie l'état j à l'état i (avec $p_{i,j} = 0$ s'il n'y a pas d'arc). Le temps d'attente de la séquence S_1 est donc défini par :

$$T_{S_1} = \min\{n \in \mathbb{N},\ Y_n = 3\}.$$

L'utilisation de séries génératrices permet de calculer facilement l'espérance de T_{S_1} ; on pose :

$$\forall i \in [\![0, 3]\!],\ \forall t \in [-1, 1],\ f_i(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y_n = i) t^n$$

La formule des probabilités totales donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} P(Y_{n+1}=0) = \frac{1}{2}\,P(Y_n=0) + \frac{1}{2}\,P(Y_n=1) \\ P(Y_{n+1}=1) = \frac{1}{2}\,P(Y_n=0) \\ P(Y_{n+1}=2) = \frac{1}{2}\,P(Y_n=1) + \frac{1}{2}\,P(Y_n=2) \\ P(Y_{n+1}=3) = \frac{1}{2}\,P(Y_n=2) + P(Y_n=3) \end{cases}$$

d'où, en multipliant ces égalités par t^n et en les sommant :

$$\forall t \in [-1,1], \quad \begin{cases} f_0(t) - 1 = \frac{t}{2}\,f_0(t) + \frac{t}{2}\,f_1(t) \\ f_1(t) = \frac{t}{2}\,f_0(t) \\ f_2(t) = \frac{t}{2}\,f_1(t) + \frac{t}{2}\,f_2(t) \\ f_3(t) = \frac{t}{2}\,f_2(t) + t\,f_3(t) \end{cases}$$

Nous avons enfin :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(T_1 = n) = P(Y_n = 3 \text{ et } Y_{n-1} = 2) = \frac{1}{2}P(Y_{n-1} = 2)$$

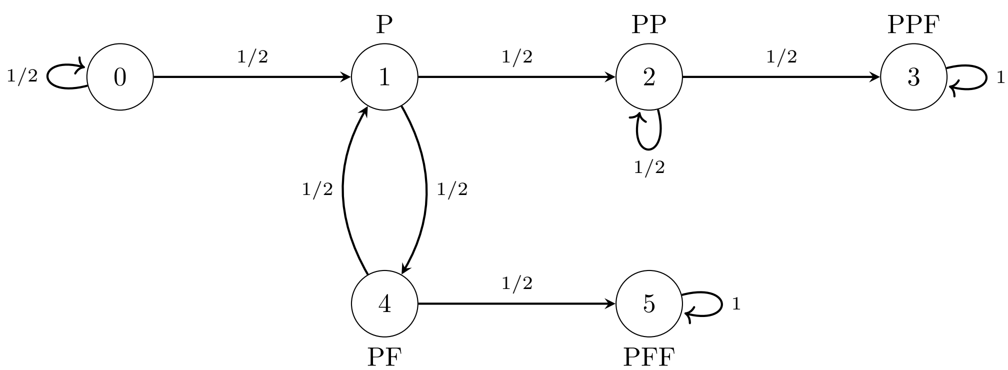
donc $\forall t \in [-1,1],\ G_{T_1}(t) = P(T_1 = 0) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y_{n-1}=2)t^n = \dfrac{t}{2}\,f_2(t).$

Un calcul élémentaire donne donc :

$$\forall t \in [-1,1],\ G_{T_1}(t) = \frac{t}{t^3 - 8t + 8}$$

ce qui permet de calculer $E(T_1) = G_T'(1) = 8$.

Pour décrire le "match" entre les séquences S_1 et S_2, nous pouvons considérer la marche aléatoire sur le graphe suivant :



Dans cette marche aléatoire, la séquence S_1 apparaît avant S_2 (resp. S_2 apparaît avant S_1) si on arrive en 3 (resp. en 4). Il est encore possible d'utiliser la méthode du a), en notant $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de variable aléatoire modélisant cette marche aléatoire ; on a encore, en notant $f_i(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y_n = i)t^n$ pour tout $i \in [\![0,5]\!]$:

$$\forall t \in [-1,1], \quad \begin{cases} f_0(t) - 1 = \frac{t}{2}\,f_0(t) \\ f_1(t) = \frac{t}{2}\,(f_0(t) + f_2(t) + f_4(t)) \\ f_2(t) = \frac{t}{2}\,(f_1(t) + f_2(t)) \\ f_3(t) = \frac{t}{2}\,f_2(t) + t\,f_3(t) \\ f_4(t) = \frac{t}{2}\,f_1(t) \\ f_5(t) = \frac{t}{2}\,f_4(t) + f_5(t) \end{cases}$$

En notant A l'évènement "S_1 bat S_2", nous avons :

$$p_{S_1,S_2} = P(A) = P\left(\bigsqcup_{n\geq 1}(Y_n = 3 \text{ et } Y_{n-1} = 2)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\,P(Y_{n-1} = 2) = \frac{f_2(1)}{2}$$

Il reste donc à résoudre le système :

$$\forall t \in [-1,1],\quad \begin{cases} 2f_0(1) - 2 = f_0(1) \\ 2f_1(1) = f_0(1) + f_2(1) + f_4(1) \\ 2f_2(1) = f_1(t) + f_2(t) \\ 2f_3(1) = f_2(t) + 2\,f_3(t) \\ 2f_4(1) = f_1(1) \\ 2f_5(1) = f_4(1) + f_5(1) \end{cases}$$

pour obtenir $P(A) = \dfrac{2}{3}$. Comme S_1 apparaît presque sûrement, la probabilité que S_2 apparaisse avant $S1$ est égale à $1/3$ (elle vaut aussi $f_4(1)/2$) .

On peut aussi calculer $P(A)$ en remarquant que les séquences de Pile et Face qui conduisent à l'état 3 sont les suites (finies) de la forme

$$S_{a,b,c} = (\underbrace{F,\dots,F}_{a}, P, \underbrace{F,P,F,P,\dots,F,P}_{2b}, P, \underbrace{P,\dots,P}_{c}, F)$$

pour $a,b,c \in \mathbb{N}$. A est donc la réunion des évènements $A_{a,b,c}$: "la suite infinie de lancers commence par ma séquence $S_{a,b,c}$", ce qui donne :

$$p_{S_1,S_2} = \sum_{a,b,c\in\mathbb{N}} P(A_{a,b,c}) = \sum_{a,b,c\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{a+1+2b+1+c+1}} = \frac{1}{8}\left(\sum_{a\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^a}\right)\left(\sum_{a\in\mathbb{N}}\frac{1}{4^b}\right)\left(\sum_{c\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^c}\right) = \frac{2}{3}.$$

Exercices X-ENS

46) a) C'est une inégalité de convexité appliquée à la fonction exponentielle entre $-t$ et t, en remarquant que les masses $\dfrac{1-x}{2}$ et $\dfrac{1+x}{2}$ sont positives et de somme égale à 1.

b) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a (en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n)! \geq 2 \times 4 \times \cdots \times (2n) = 2^n\,n!$) :

$$\operatorname{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2^n\,n!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

c) Par indépendance mutuelle des X_i, on a :

$$E\left(e^{t(X_1+\cdots+X_n)}\right) = E\left(e^{tX_1}e^{tX_2}\dots e^{tX_n}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{tX_i}\right)$$

Pour chaque i, nous avons :

$$e^{tX_i} \leq \frac{1-X_i}{2}e^{-t} + \frac{1+X_i}{2}e^t$$

donc

$$E\left(e^{tX_i}\right) \leq E\left(\frac{1-X_i}{2}e^{-t} + \frac{1+X_i}{2}e^t\right) = \frac{1-E(X_i)}{2}e^{-t} + \frac{1+E(X_i)}{2}e^t = \operatorname{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

puisque la variable X_i est centrée. Cela donne donc, pour tout $t > 0$:

$$E\left(e^{t(X_1+\cdots+X_n)}\right) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2}\right)$$

Nous pouvons ensuite appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive $e^{t(X_1+\cdots+X_n)}$:

$$\mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq a) = \mathbf{P}\left(e^{t(X_1+\cdots+X_n)} \geq e^{ta}\right) \leq \frac{e^{nt^2/2}}{e^{ta}} = \exp\left(\frac{nt^2}{2} - ta\right)$$

En appliquant la même inégalité aux variables $-X_i$, nous obtenons :

$$\mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq -a) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2} - ta\right)$$

ce qui donne

$$\forall t > 0,\ \mathbf{P}(|X_1 + \cdots + X_n| \geq a) \leq 2\exp\left(\frac{nt^2}{2} - ta\right).$$

On obtient l'inégalité demandée en choisissant $t = \dfrac{a}{n}$ (c'est la valeur de t qui minimise $nt^2 2 - ta$).

47) a) On sait que les fonctions S_n sont les variables aléatoires. Pour tout entier naturel k, nous avons :

$$[T = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [S_i = 0]\right) \bigcap [S_k = 1]$$

donc la partie $[T = k]$ est un évènement. On en déduit que $[T = +\infty]$ en est également un, puique c'est le complémentaire de la réunion dénombrable des parties $[T = k]$.

b) Comme $[T = 1] = [B_1 = 1]$, $\mathbf{P}([T = 1]) = p$.

Pour $n \geq 2$, nous avons :

$$[T = n] = \bigcup_{k=2}^{n-1} \underbrace{\left[\forall i \in [\![1, k-1]\!],\ S_i < 0 \text{ et } S_k = 0 \text{ et } \forall i \in [\![k+1, n-1]\!],\ S_i \leq 0 \text{ et } S_n = 1\right]}_{=A_k}.$$

Pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, notons :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ S'_i = \sum_{j=2}^{i+1} B_j \text{ et } T' = \inf\ \{j \in \mathbb{N},\ S'_j = 1\}$$

$$\forall i \in \mathbb{N},\ S''_i = \sum_{j=k+2}^{k+i} B_j \text{ et } T'' = \inf\ \{j \in \mathbb{N},\ S''_j = 1\}$$

Les variables B_1, $(S'_1, \ldots, S'_{k-1})$ et $(S''_1, \ldots, S''_{n-k})$ sont indépendantes et les trois variables T, T' et T'' suivent la même loi. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_k) &= P\left([B_1 = -1] \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{k-2} [S'_i \leq 0]\right) \bigcap\ [S'_{k-1} = 1] \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{n-k-1} [S''_i \leq 0]\right) \bigcap\ [S''_{n-k} = 1]\right) \\
&= \mathbf{P}\left(B_1 = -1\right) \mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-2} [S'_i \leq 0]\right) \bigcap\ [S'_{k-1} = 1]\right) \mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-k-1} [S''_i \leq 0]\right) \bigcap\ [S''_{n-k} = 1]\right) \\
&= q\mathbf{P}(T' = k-1)\mathbf{P}(T'' = n-k) \\
&= q\mathbf{P}(T = k-1)\mathbf{P}(T = n-k)
\end{aligned}$$

Comme les A_k sont deux à deux disjoints, nous obtenons la relation :

$$\forall n \geq 2,\ \mathbf{P}(T=n) = q \sum_{k=2}^{n-1} \mathbf{P}(T=k-1)\mathbf{P}(T=n-k).$$

c) La série à terme positif $\sum \mathbf{P}(T=n)$ est convergente donc la série entière $\sum \mathbf{P}(T=n)z^n$ converge normalement sur $[-1,1]$: g est définie et continue sur le segment $[-1,1]$.

Par produit de Cauchy, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\forall s \in \mathbb{C},\ |s| \leq 1,\ qsg^2(s) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(q \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(T=k)\mathbf{P}(T=n-k) \right) s^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(q \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(T=k)\mathbf{P}(T=n-k) \right) s^{n+1} \text{ (car } \mathbf{P}(T=0)=0) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(q \sum_{k=2}^{n} \mathbf{P}(T=k-1)\mathbf{P}(T=n+1-k) \right) s^{n+1} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(q \sum_{k=2}^{n-1} \mathbf{P}(T=k-1)\mathbf{P}(T=n-k) \right) s^{n} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{P}(T=n)s^n \\
&= g(s) - \mathbf{P}(T=0) - \mathbf{P}(T=1)s \\
&= g(s) - ps
\end{aligned}$$

Comme $q>0$, on en déduit que pour tout $s \in [-1,1] \setminus \{0\}$, il existe $\varepsilon(s) \in \{-1,1\}$ tel que :

$$g(s) = \frac{1+\varepsilon(s)\sqrt{1-4\,p\,q\,s^2}}{2qs}$$

La fonction $s \longmapsto 1-4\,p\,q\,s^2$ ne s'annule pas sur $]0,1[$ et ε est continue sur $]0,1[$, puisque l'on peut écrire :

$$\forall s \in]0,1[,\ \varepsilon(s) = \frac{2\,q\,s\,g(s)-1}{\sqrt{1-4\,p\,q\,s^2}}$$

Cette fonction est donc constante sur $]0,1[$ et g admettant une limite en 0^+, on a nécessairement $\varepsilon(s)=-1$ pour tout $s \in]0,1[$. Un argument identique donne $\varepsilon(s)=-1$ pour tout $s \in]-1,0[$. En prolongeant par continuité en -1 et 1, nous obtenons donc :

$$\forall s \in\ [-1,1] \setminus \{0\},\ g(s) = \frac{1-\sqrt{1-4\,p\,q\,s^2}}{2qs}$$

On en déduit :

$$\mathbf{P}(T=+\infty) = 1-g(1) = \frac{2q-1+\sqrt{1-4\,p\,q}}{2q} = \frac{1-2p+|2p-1|}{2(1-p)} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq 1/2 \\ \dfrac{1-2p}{1-p} & \text{sinon} \end{cases}$$

La variable T est donc presque sûrement finie si et seulement si $p \geq 1/2$.

Les formules usuelles de DSE donnent :

$$\forall s \in \left]-\frac{1}{2\sqrt{p\,q}}, \frac{1}{2\sqrt{p\,q}}\right[,\ \frac{1-\sqrt{1-4\,p\,q\,s^2}}{2qs} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \binom{1/2}{k} \frac{(-4\,p\,q\,s^2)^k}{2qs} = \frac{1}{2q}\sum_{k=1}^{+\infty} \binom{1/2}{k} \frac{(-1)^{k+1}(4\,p\,q)^k\,s^{2k-1}}{2q}$$

Par unicité du DSE, nous obtenons donc, après les simplifications habituelles :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(T = 2k) = 0 \text{ et } \mathbf{P}(T = 2k+1) = \binom{2k}{k} \frac{p^{k+1}q^k}{k+1}.$$

48) a) On sait d'après le cours que $L_2(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel (si X et Y possèdent un moment d'ordre 2, XY possède une espérance et $(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$ également). L'application $(X,Y) \to E(XY)$ est ensuite trivialement une forme bilinéaire positive sur $L_2(\Omega)$.

Notons $I = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \le p < q\}$. Pour $(p,q) \in I$, nous avons :

$$\varphi(\varepsilon_p\varepsilon_q, \varepsilon_p\varepsilon_q) = E(\varepsilon_p^2\varepsilon_q^2) = E(1) = 1$$

donc les éléments de la famille étudiée sont “unitaires” pour φ.

Pour $(p,q), (p',q')$ éléments distincts de I, on a deux cas possibles :

- les entiers $\{p,q\} \cap \{p',q'\} = \emptyset$: $\varphi(\varepsilon_p\varepsilon_q, \varepsilon_{p'}\varepsilon_{q'}) = E(\varepsilon_p)E(\varepsilon_q)E(\varepsilon_{p'})E(\varepsilon_{q'}) = 0$ car $\varepsilon_p, \varepsilon_q, \varepsilon_{p'}, \varepsilon_{q'}$ sont mutuellement indépendantes et centrées ;

- $\{p,q\} \cap \{p',q'\}$ est un singleton : quand par exemple $p = p'$, $\varphi(\varepsilon_p\varepsilon_q, \varepsilon_{p'}\varepsilon_{q'}) = E(\varepsilon_q\varepsilon_{p'}) = 0$ (et on a le même résultat dans les autres cas).

Soit $X \in L_2(\Omega)$. On a un parallèle immédiat avec la notion de projection orthogonale : pour $N \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons poser $Y = \displaystyle\sum_{1 \le p < q \le N} \varphi(\varepsilon_p\varepsilon_q X)\varepsilon_p\varepsilon_q$ et nous avons :

$$\varphi(X,X) = \varphi(Y+X-Y, Y+X-Y) = \varphi(Y,Y) + 2\underbrace{\varphi(Y, X-Y)}_{=0} + \varphi(X-Y, X-Y) = \varphi(Y,Y) + \underbrace{\varphi(X-Y, X-Y)}_{\ge 0} \ge \varphi(Y,Y).$$

Comme $\varphi(Y,Y) = \displaystyle\sum_{1 \le p < q \le N} (\varphi(\varepsilon_p\varepsilon_q X))^2$, nous obtenons :

$$\forall N \ge 1, \sum_{1 \le p < q \le N} (\varphi(\varepsilon_p\varepsilon_q X))^2 \le E(X^2)$$

donc la famille est sommable.

b) Nous avons :

$$A = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Big[|S_n| \le M \Big] \right)$$

donc par le théorème de limite monotone, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big[|S_n| \le M\Big]\right) \xrightarrow[M \to +\infty]{} \mathbf{P}(A) > 0$. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big[|S_n| \le M\Big]$ soit de probabilité strictement positive. Pour $1 \le p < q$, posons $X_{p,q} = \left(\displaystyle\sum_{k=p+1}^{q} a_k\varepsilon_k\right)^2 \mathbf{1}_B$. Nous avons $X_{p,q} = (S_q - S_p)^2\ \mathbf{1}_B \le 4M^2\ \mathbf{1}_B$, donc $E(X_{p,q}) \le 4M^2\mathbf{P}(C)$.

Nous avons d'autre part :

$$E(X_{p,q}) = \left(\sum_{i=p+1}^{q} a_i^2\right) E(\mathbf{1}_B) + 2 \sum_{p+1 \le i < j \le q} a_i a_j E(\varepsilon_i\varepsilon_j\ \mathbf{1}_B) = \mathbf{P}(B) \sum_{i=p+1}^{q} a_k^2 + 2 \sum_{p+1 \le i < j \le q} a_i a_j E(\varepsilon_i\varepsilon_j\ \mathbf{1}_B).$$

Appliquons ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz à cette dernière somme :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{p+1 \le i < j \le q} a_i a_j E(\varepsilon_i\varepsilon_j\ \mathbf{1}_B) \right| &\le \sqrt{\sum_{p+1 \le i < j \le q} a_i^2 a_j^2} \sqrt{\sum_{p+1 \le i < j \le q} (E(\varepsilon_i\varepsilon_j\ \mathbf{1}_B))^2} \\
&\le \left(\sum_{p+1 \le i \le q} a_i^2 \right) \sqrt{\sum_{p+1 \le i < j \le +\infty} (E(\varepsilon_i\varepsilon_j\ \mathbf{1}_B))^2}
\end{aligned}$$

Comme la famille $\left((E(\varepsilon_i\varepsilon_j\,\mathbf{1}_B))^2\right)_{1\le i<j}$ est sommable, on peut, pour $\eta>0$ quelconque, choisir p_0 tel que :

$$\sum_{p_0+1\le i<j\le+\infty}(E(\varepsilon_i\varepsilon_j\,\mathbf{1}_B))^2\le\eta^2.$$

On a alors :

$$\left|\sum_{p_0+1\le i<j\le q}a_ia_jE(\varepsilon_i\varepsilon_j\,\mathbf{1}_B)\right|\le\eta\sum_{p_0+1\le i\le q}a_i^2.$$

ce qui donne, pour tout $q>p_0$:

$$4M^2\,\mathbf{P}(C)\ge E(X_{p_0,q})\ge(\mathbf{P}(C)-2\eta)\sum_{p_0+1\le i\le q}a_i^2$$

En choisissant $\eta\in\left]0,\frac{\mathbf{P}(C)}{2}\right[$, nous avons donc prouvé l'existence de p_0 tel que :

$$\forall q>p_0,\ \sum_{i=p_0+1}^{q}a_i^2\le\frac{4M^2\,\mathbf{P}(C)}{\mathbf{P}(C)-2\eta}$$

ce qui prouve la convergence de la série de terme général a_n^2.

Pour $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, la famille (a_n^2) n'est pas sommable, donc $\mathbf{P}(A)=0$: ceci prouve que presque sûrement, la suite des sommes partielles de la série de terme général $\dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}$ est non bornée, donc divergente. Autrement-dit, la série $\displaystyle\sum_{n\ge1}\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}$ est presque sûrement divergente.

49) Si X possède une variance, on a $V(X_1+X_2)=V(X_1)+V(X_2)=2V(X)$ (car X_1 et X_2 sont indépendantes) et $V(X_1+X_2)=V(2X)=4V(X)$. On en déduit que $V(X)=0$: X est presque sûrement constante.

L'idée consiste à se ramener à une variable possédant un moment d'ordre 2 ; on pose $Y=e^{-X}$ et on a :

- Y est à valeurs dans $]0,1]$, donc elle possèdent un moment d'ordre 2 ;
- $E(Y^2)=E(e^{-2X})=E(e^{-(X_1+X_2)})=E(e^{-X_1})E(e^{-X_2})=E(Y)^2$.

On en déduit que $V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=0$: Y est presque sûrement constante et X l'est également.

50) a) Notons $\{x_i,\ i\in I\}=X(\omega)$. Si I est fini, Φ_X est de classe C^∞, comme somme finie de fonctions C^∞, sur $[0,+\infty[$. Sinon, on peut supposer que $I=\mathbb{N}$ et Φ_X est définie et continue sur $[0,+\infty[$, comme somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement, donc uniformément :

$$\forall\lambda\ge0,\ \forall i\in\mathbb{N},\ 0\le e^{-\lambda x_i}\mathbf{P}(X=x_i)\le\underbrace{\mathbf{P}(X=x_i)}_{\text{T.G.S.C.}}$$

Montrons par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}_k:\ \Phi_X\text{ est de classe }C^k\text{ sur }]0,\infty[\text{ et }\Phi_X^{(k)}:\ \lambda\longmapsto\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^kx_i^ke^{-\lambda x_i}\mathbf{P}(X=x_i).$$

L'initialisation est faite, puisque Φ est continue sur $[0,+\infty[$. Soit $k\ge0$ et supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie. Nous pouvons alors appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme :

- pour tout $i\in I$, l'application $u_i:\ \lambda\longmapsto(-x_i)^ke^{-\lambda x_i}\mathbf{P}(X=x_i)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$;
- la série de terme général u_i converge simplement sur $]0,+\infty[$ (d'après l'hypothèse de récurrence) ;

- la série de terme général u_i' converge normalement, donc uniformément, sur tout $[a,b]$ contenu dans $]0,+\infty[$:

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \forall \lambda \in [a,b],\ |u_i^{(k+1)}(\lambda)| = x_i^{k+1} e^{-\lambda x_i} \mathbf{P}(X = x_i) \leq x_i^{k+1} e^{-a x_i}\, \mathbf{P}(X = x_i) \leq \underbrace{M\, \mathbf{P}(X = x_i)}_{\text{T.G.S.C.}}$$

  où M est un majorant sur $[0,+\infty[$ de l'application $t \longmapsto t^{k+1} e^{-at}$ (cette fonction est bornée car elle est continue sur $[0,+\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$).

La propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vraie.

b) Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda a)$. On a :

$$\sum_{0 \leq k \leq \lambda x} e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^k}{k!} = \mathbf{P}(Z \leq \lambda x).$$

Si $x < a$, nous avons en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ;

$$\mathbf{P}(Z \leq \lambda x) = P\Big(Z - \lambda a \leq -\lambda(a-x)\Big) \leq P\Big(|Z - E(Z)| \geq \lambda(a-x)\Big) \leq \frac{V(Z)}{\lambda^2 (a-x)^2} = \frac{a}{\lambda (a-x)^2} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0.$$

Si $x > a$, on adapte la preuve en passant à l'évènement contraire :

$$\mathbf{P}(Z > \lambda x) = P\Big(Z - \lambda a > \lambda(x-a)\Big) \leq P\Big(|Z - E(Z)| \geq \lambda(x-a)\Big) \leq \frac{V(Z)}{\lambda^2 (x-a)^2} = \frac{a}{\lambda (x-a)^2} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0.$$

Cela donne bien le résultat demandé. On peut remarquer que ce résultat est trivialement valable pour $a = 0$: si $x > 0$, on a alors

$$\sum_{0 \leq k \leq \lambda x} e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^k}{k!} = 1 \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 1$$

ce qui servira dans la question c).

c) Pour appliquer la question b), on peut penser à poser, pour $i \in I$:

$$\forall \lambda > 0,\ v_i(\lambda) = \sum_{0 \leq k \leq \lambda x} e^{-\lambda x_i} \frac{(\lambda x_i)^k}{k!}.$$

Comme $0 \leq v_i(\lambda) \leq 1$, on peut ensuite sommer la famille $\Big(\mathbf{P}(X = x_i) v_i(\lambda)\Big)_{i \in I}$, et poser :

$$\begin{aligned}
\forall \lambda > 0,\ F(\lambda) &= \sum_{i \in I} \mathbf{P}(X = x_i)\, v_i(\lambda) \\
&= \sum_{i \in I} \mathbf{P}(X = x_i) \sum_{0 \leq k \leq \lambda x} e^{-\lambda x_i} \frac{(\lambda x_i)^k}{k!} \\
&= \sum_{0 \leq k \leq \lambda x} \sum_{i \in I} \mathbf{P}(X = x_i)\, e^{-\lambda x_i} \frac{(\lambda x_i)^k}{k!} \\
&= \sum_{0 \leq k \leq \lambda x} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} \Phi_X^{(k)}(\lambda)
\end{aligned}$$

En fixant $x \in]0,+\infty[$ distincts de tous les x_i, nous avons :

- pour tout $i \in I$, $\mathbf{P}(X = x_i) v_i(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \mathbf{P}(X = x_i) 1_{x > x_i}$;
- la série (ou la somme finie) de terme général, $\mathbf{P}(X = x_i) v_i(\lambda)$ converge normalement sur $[0,+\infty[$ puisque :

$$\forall \lambda \geq 0,\ \forall i \in I,\ 0 \leq \mathbf{P}(X = x_i)\, v_i(\lambda) \leq \mathbf{P}(X = x_i)_{\text{T.G.S.C.}}.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de la double limite :

$$\sum_{0\leq k\leq \lambda x} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} \Phi_X^{(k)}(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \sum_{i\in I} \mathbf{P}(X=x_i)\mathbf{1}_{x_i<x} = \mathbf{P}(X<x) = \mathbf{P}(X\leq x) = F_X(x)$$

en notant F_X la fonction de répartition de la variable X.

Comme la fonction de répartition F_X est continue à droite (par le théorème de limite monotone), on en déduit que la fonction F_X est entièrement déterminée par Φ_X (puisqu'elle est déterminée sur $\mathbb{R}\setminus\{x_i,\ i\in I\}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$), puis que la loi de X l'est également puisque F_X détermine la loi de X : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathbf{P}(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-)$.

51) a) Pour $k\in [\![0,n]\!]$, on a :

$$P(X_n=k) = \frac{1}{n!}\,\mathrm{Card}\left(\{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\ \sigma \text{ a } k \text{ points fixes}\}\right) = \frac{\binom{n}{k} d_{n-k}}{n!}$$

où d_i est le nombre de permutations sans point fixe d'un ensemble de cardinal i (nombre de dérangements). En effet, on construit une et une seule fois chaque permutation à k points fixes en choisissant les k points fixes et en dérangeant les $n-k$ autres éléments. On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k} d_{n-k}}{n!} = 1$$

ce qui donne :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\frac{d_{n-k}}{(n-k)!} = 1$$

En introduisant la série génératrice $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n$ (qui est de rayon $R\geq 1$ car $d_n\leq n!$), on reconnaît un produit de Cauchy :

$$\forall x\in]-R,R[,\ e^x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Ceci prouve que $R=1$, puis toujours par produit de Cauchy :

$$\forall x\in]-1,1[,\ f(x) = e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)x^n.$$

Par identification, nous obtenons :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

ce qui donne :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\in [\![0,n]\!],\ P(X_n=k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

On obtient ensuite directement que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $P(X_n=k)$ tend vers $\dfrac{1}{e\,k!}$ quand n tend vers l'infini. On retrouve le résultat classique : quand n tend vers l'infini, la probabilité qu'une permutation aléatoire de n éléments n'ait aucun point fixe tend vers $1/e$.

b) On a : $\delta_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left|\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} - \frac{1}{e}\right| + \frac{1}{e}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| + \frac{1}{e}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}.$

Comme $\dfrac{1}{i!}$ décroit vers 0, le théorème spécial des séries alternées donne $\left|\displaystyle\sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\right| \leq \dfrac{1}{(n-k+1)!}$ pour tout k, n tels que $0 \leq k \leq n$. On en déduit :

$$0 \leq \delta_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k+1)!} + \frac{1}{e} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} + \frac{1}{e} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{e} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

donc δ_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

52) a) Si X et Y sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ, on a :

$$\forall x \in [1,1],\ G_{X+Y}(x) = G_X(x)G_Y(x) = e^{-\lambda}e^{\lambda x}e^{-\mu}e^{\mu x} = e^{-(\lambda+\mu)}e^{(\lambda+\mu)x}$$

donc $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. Par récurrence sur n, on en déduit que S_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

Pour tout $t > 1$, on peut écrire $(S_n > n(\lambda+\varepsilon)) = \left(t^{S_n} > t^{n(\lambda+\varepsilon)}\right)$ et la variable t^{S_n} est positive d'espérance finie, donc l'inégalité de Markov donne :

$$P(S_n > n(\lambda+\varepsilon)) \leq \frac{E(t^{S_n})}{t^{n(\lambda+\varepsilon)}} = t^{-n(\lambda+\varepsilon)}G_{S_n}(t) = t^{-n(\lambda+\varepsilon)}e^{-n\lambda(1-t)} = e^{-n(\lambda(1-t)+(\lambda+\varepsilon)\ln t)}.$$

La fonction $\varphi :\ t \longmapsto \lambda(1-t) + (\lambda+\varepsilon)\ln t$ vérifie $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(1) = \varepsilon > 0$: on peut donc choisir $t_0 > 1$ tel que $c = \varphi(t_0) > 0$, ce qui donne le résultat demandé.

b) On utilise la même méthode pour $t \in]0,1[$: $(S_n \leq n(\lambda-\varepsilon)) = \left(t^{S_n} \geq t^{n(\lambda-\varepsilon)}\right)$ donne, toujours avec l'inégalité de Markov :

$$P(S_n < n(\lambda-\varepsilon)) \leq \frac{E(t^{S_n})}{t^{n(\lambda-\varepsilon)}} = e^{-n(\lambda(1-t)+(\lambda-\varepsilon)\ln t)}.$$

Cette fois-ci, la fonction $\psi :\ t \longmapsto \lambda(1-t) + (\lambda-\varepsilon)\ln t$ vérifie $\psi(1) = 0$ et $\psi'(1) = -\varepsilon < 0$: on peut donc choisir $t_0 \in]0,1[$ tel que $d = \psi(t_0) > 0$, ce qui permet de conclure.

c) Nous allons démontrer que $\dfrac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers λ (cas particulier de la loi forte des grands nombres), i.e. que l'évènement $A = \left(\dfrac{S_n}{n} \text{ tend vers } \lambda\right)$ est de mesure 1. Nous avons :

$$\omega \in A \Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq p,\ \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - \lambda\right| \leq \frac{1}{k}$$

donc

$$A = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{p \geq 1} \bigcap_{n \geq p} \left(\left|\frac{S_n(\omega)}{n} - \lambda\right| \leq \frac{1}{k}\right).$$

Comme l'intersection sur k est décroissante, le théorème de continuité monotone nous donne :

$$\begin{aligned} P(A) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P\left(\bigcup_{p\geq 1} \bigcap_{n\geq p} \left(\left|\frac{S_n(\omega)}{n} - \lambda\right| \leq \frac{1}{k}\right)\right) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P\left(\bigcap_{p\geq 1} \bigcup_{n\geq p} \left(\left|\frac{S_n(\omega)}{n} - \lambda\right| > \frac{1}{k}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons, en utilisant les valeurs de c et d des questions précédentes pour la valeur $\varepsilon = 1/k$:

$$P\left(\bigcup_{n\geq p} \left(\left|\frac{S_n(\omega)}{n} - \lambda\right| > \frac{1}{k}\right)\right) \leq \sum_{n=p}^{+\infty} P\left(\left|\frac{S_n(\omega)}{n} - \lambda\right| > \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{n=p}^{+\infty} \left(e^{-c}\right)^n + \left(e^{-d}\right)^n \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

puisque les séries géométriques, de raison $e^{-c}, e^{-c} \in]0,1[$, sont convergentes. Le théorème de continuité monotone prouve donc que

$$P\left(\bigcap_{p\geq 1}\bigcup_{n\geq p}\left(\left|\frac{S_n(\omega)}{n}-\lambda\right|>\frac{1}{k}\right)\right)=0$$

ce qui achève la preuve.

53) a) Un simple dénombrement donne le tableau :

	$\mathbf{P}(N=1)$	$\mathbf{P}(N=2)$	$\mathbf{P}(N=3)$	$\mathbb{N}=4)$	$E(N)$
$n=2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			$\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$
$n=3$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{11}{6}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
$n=4$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{25}{12}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

b) L'idée, c'est que $X_i = i$ quand le cycle de i ne contient aucun des éléments $1, 2, \dots, i-1$. Pour que les choses apparaissent clairement, il faut compléter un peu le modèle proposé. Nous supposerons donc que $Y_1', Y_2', \dots, Y_n'$ sont des variables aléatoires indépendantes telles que pour tout i, Y_i' suit la loi uniforme sur $[\![1,i]\!]$. Notons I_n l'ensemble image de la variable aléatoire $(Y_1, \dots, Y_n)$: I_n est l'ensemble des n-uplets d'entiers $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ tels que

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ 1 \leq i_j \leq j.$$

Nous allons ensuite construire une bijection f_n de I_n sur $\mathfrak{S}_n$ de la façon suivante. Si $i = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in I$, on construit par récurrence $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_n$, où les σ_j seront décrites comme composées de cycles disjoints, et on posera $f(i) = \sigma_n$. Regardons tout d'abord le cas particulier $i = (1,1,3,2,1,3,7,5)$ avec $n = 8$. On pose :

$$\sigma_1 = (1),\ \sigma_2 = (1,2),\ \sigma_3 = (1,2)(3),\ \sigma_4 = (1,2,4)(3),\ \sigma_5 = (1,5,2,4)(3),$$

$$\sigma_6 = (1,5,2,4)(3,6),\ \sigma_7 = (1,5,2,4)(3,6)(7) \text{ et } \sigma_8 = (1,5,8,2,4)(3,6)(7)$$

Dans tous les cas, $i_1 = 1$ et $\sigma_1 = (1)$; ensuite, si $1 \leq j < n$ et si σ_j a été construit, deux cas peuvent se produire :

- si $i_j = j$, on “ajoute” à σ_j le cycle (j) (le nombre d'orbites augmente d'une unité) ;
- sinon, on place j juste après i_j dans le cycle qui contient i_j et qui apparaît dans la décomposition de σ_j en produit de cycle (le nombre d'orbites est conservé).

On peut montrer par récurrence que les f_n sont bijectives de I_n sur $\mathfrak{S}_n$

- c'est évident si $n = 1$, puisque f_1 est l'application qui à la suite (1) associe la permutation (1) ;
- soit $n \geq 2$ et supposons que f_{n-1} soit bijective. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on peut la décomposer en produit de cycles disjoints ; si $\sigma^{-1}(n) = n$, on note $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$ la restriction de σ à $[\![1, n-1]\!]$; sinon, $k = \sigma^{-1}(n) \in [\![1, n-1]\!]$ et on définit alors $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$ par :

  $$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \tau(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } i \neq k \\ \sigma(n) & \text{si } i = k \end{cases}$$

  Autrement-dit, τ est obtenu en supprimant n dans la décomposition de σ en produit de cycles disjoints. Les deux cas précédents correspondent à ces deux exemples (pour $n = 8$) :

  $$\begin{aligned} \sigma = (1,5,2)(3,7,6,4)(8) &\longmapsto \tau = (1,5,2)(3,7,6,4) \\ \sigma = (1,5,2)(3,7,8,6)(4) &\longmapsto \tau = (1,5,2)(3,7,6)(4) \end{aligned}$$

Il existe alors, par hypothèse de récurrence, une suite $j = (i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}) \in I_{n-1}$ telle que $f_{n-1}(j) = \tau$. On pose alors $i = (i_1, \ldots, i_{n-1}, \sigma^{-1}(n))$ et on a $\sigma = f(i)$, puisque $\sigma_{n-1} = \tau$, puis $\sigma_n = \sigma$ par définition de τ. Ainsi, f_n est surjective, donc bijective puisque I_n et $\mathfrak{S}_n$ sont tous deux de cardinal $n!$.

On peut ainsi définir la variable aléatoire $Z' = f_n(Y_1', Y_2', \ldots, Y_n')$, qui suit une loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$, puisque pour tout $\sigma = f_n(i)$, on a :

$$\mathbf{P}((Z' = \sigma) = \mathbf{P}((Y_1' = i_1, Y_2' = i_2, \ldots, Y_n = i_n) = \mathbf{P}((Y_1' = i_1)\,\mathbf{P}((Y_2' = i_2 - \ldots \mathbf{P}((Y_n = i_n) = 1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\cdots\,\frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.$$

On peut ensuite définir la variable aléatoire N' égale au nombre de d'orbites de Z' : N suit la même loi que N' car Z suit la même loi que Z'. Par construction, on a $Z' = \mathrm{Card}\,(i \in [\![1, n]\!],\ Y_i = i)$. En notant :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ X_j' = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_j = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

les variables $X_1', \ldots, X_n'$ sont indépendantes, chaque X_i' suit la loi uniforme sur $[\![1, i]\!]$ et $N' = X_1' + \cdots + X_n'$. On en déduit que N suit la même loi que $X_1' + \cdots + X_n'$, qui est aussi la loi de $X_1 + \cdots + X_n$. On en déduit :

$$E(N) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n.$$

54) Indication : montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$, $E(R_n) \leq a + n\mathbf{P}(X_1 \geq a)$.

Pour $a \in \mathbb{N}$, on a :

$$R_n = \underbrace{\mathrm{Card}\,(\{X_1, \ldots, X_n\} \cap [\![0, a[\![)}_{\leq a} + \underbrace{\mathrm{Card}\,(\{X_1, \ldots, X_n\} \cap [\![a, +\infty[\![)}_{\leq \mathrm{Card}\{i \in [\![1,n]\!],\ X_i \geq a\}}$$

d'où :

$$E(R_n) \leq a + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \geq a) = a + n\mathbf{P}(X_1 \geq a).$$

a) Pour $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}(X_1 \geq a) \leq \varepsilon$, ce qui donne :

$$0 \leq E(R_n) \leq a + n\varepsilon \leq 2n\varepsilon$$

pour $n \geq \dfrac{a}{\varepsilon} = n_\varepsilon$. On a donc montré que $E(R_n) = o(n)$.

b) On va affiner ce résultat en améliorant un peu l'inégalité de Markov, pour $a \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(X_1 \geq a) = \sum_{j=a}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 = j) \leq \sum_{j=a}^{+\infty} \frac{j}{a}\,\mathbf{P}(X_1 = j) = \frac{1}{a} \sum_{j=a}^{+\infty} j\,\mathbf{P}(X_1 = j).$$

On en déduit que $\mathbf{P}(X_1 \geq a) = o\left(\dfrac{1}{a}\right)$ quand a tend vers $+\infty$. En choisissant $a = \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor$, on obtient :

$$E(R_n) \leq \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor + n\,o\left(\frac{1}{\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor}\right) \leq \varepsilon\sqrt{n} + o(\sqrt{(n)}) \leq 2\varepsilon\sqrt{n}$$

pour n assez grand.

55) a) On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} E(X^2)\,\mathbf{P}(X \geq \lambda E(X)) &= E(X^2)E(\,\mathbf{1}_{X \geq \lambda E(X)}) \\ &\geq \left(E(X\,\sqrt{\mathbf{1}_{X \geq \lambda E(X)}})\right)^2 \\ &= \left(E(X\ \mathbf{1}_{X \geq \lambda E(X)})\right)^2 \\ &= \left(E(X) - E(X\ \mathbf{1}_{X < \lambda E(X)})\right)^2 \\ &\geq ((1-\lambda)E(X))^2 \end{aligned}$$

b) Supposons que P_n converge vers 0 en probabilité $u_n = \prod_{k=1}^{n} E(\sqrt{X_i}) = E(\sqrt{P_n})$. On applique l'inégalité du a) à la variable P_n (qui admet bien un moment d'ordre 2) avec $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\mathbf{P}\left(\sqrt{P_n} \geq \frac{1}{2}E(\sqrt{P_n})\right) \geq \frac{1}{4}\left(\prod_{k=1}^{n} E(\sqrt{X_i})\right)^2.$$

Si la suite (u_n) ne convergeait pas vers 0, il existerait $a > 0$ et une extractrice φ tels que $u_{\varphi(n)} \geq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On aurait donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}\left(\sqrt{P_{\varphi(n)}} \geq \frac{a}{2}\right) \geq \mathbf{P}\left(\sqrt{P_{\varphi(n)}} \geq \frac{u_{\varphi(n)}}{2}\right) \geq \frac{1}{4}\left(u_{\varphi(n)}\right)^2 \geq \frac{a^2}{4}$$

ce qui est absurde car $\mathbf{P}\left(\sqrt{P_{\varphi(n)}} \geq \frac{a}{2}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Le sens réciproque s'obtient directement en appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive $\sqrt{P_n}$.

56) En notant $T = \inf\{n \geq 1,\ X_1 + \cdots + X_n = 0\}$, nous cherchons à calculer :

$$p = \mathbf{P}(T = +\infty) = 1 - \mathbf{P}(T < +\infty)$$

En effet, si $(Y_n)_{n\geq 1}$ est la suite de variable indépendantes de loi $\mathcal{B}(1/2)$ qui modélise la suite de lancers de la pièce ($Pile = 1$ et $Face = 0$), la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ X_n = \begin{cases} 2 & \text{si } Y_n = 1 \\ -1 & \text{si } Y_n = 0 \end{cases}$$

est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{1, 2\}$ et l'évènement : on a obtenu deux fois plus de $Pile$ que de $Face$ après n tirages est exactement égal à l'évènement $X_1 + \cdots + X_n = 0$. “Le jeu ne se termine pas” est donc exactement l'évènement $(T = +\infty)$.

On a ensuite :

$$\mathbf{P}(T < +\infty) = \mathbf{P}(T < +\infty \,|\, X_1 = 2)\mathbf{P}(X_1 = 2) + \mathbf{P}(T < +\infty \,|\, X_1 = -1)\mathbf{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}\,p_2 + \frac{1}{2}\,p_{-1}.$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T < +\infty \,|\, X_1 = 2) &= \mathbf{P}(\exists n \geq 1,\ X_1 + \cdots + X_n = 0 \,|\, X_1 = 2) \\
&= \mathbf{P}(\exists n \geq 2,\ 2 + X_2 + \cdots + X_n \,|\, X_1 = 2) \\
&= \mathbf{P}(\exists n \geq 2,\ 2 + X_2 + \cdots + X_n) \\
&= p_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T < +\infty \,|\, X_1 = -1) &= \mathbf{P}(\exists n \geq 1,\ X_1 + \cdots + X_n = 0 \,|\, X_1 = -1) \\
&= \mathbf{P}(\exists n \geq 2,\ -1 + X_2 + \cdots + X_n \,|\, X_1 = -1) \\
&= \mathbf{P}(\exists n \geq 2,\ -1 + X_2 + \cdots + X_n) \\
&= p_{-1}
\end{aligned}$$

car X_1 est indépendant de $(X_n)_{n\geq 2}$ et $(X_n)_{n\geq 2}$ a la même loi que $(X_n)_{n\geq 1}$.

Avec les mêmes arguments, nous avons :

$$\forall n \geq 1,\ \begin{cases} p_n = \frac{1}{2}\,p_{n-1} + \frac{1}{2}\,p_{n+2} \\ p_{-n} = \frac{1}{2}\,p_{-n-1} + \frac{1}{2}\,p_{-n+2} \end{cases}$$

La suite $(p_n)_{n\geq 0}$ vérifie donc la récurrence :

$$\forall n \geq 0,\ p_{n+3} - 2p_{n+1} + p_n = 0$$

donc il existe $A, B, C \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \geq 0,\ p_n = A + B\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n + C\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$$

puisque le polynôme $X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2+X-1)$ a pour racines 1, $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\overline{\alpha} = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Comme $p_0 = 1$ et (p_n) est bornée, on a $C = 0$ et $A = 1 - B$ (car $0 < \alpha < 1$ et $\overline{\alpha} < -1$). Nous avons donc prouvé l'existence de $B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \geq 0,\ p_n = 1 - B + B\alpha^n \text{ avec } \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Il manque une propriété de la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ pour calculer B. On peut peut-être démontrer que p_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui imposera $B = 1$. Une autre méthode consiste à étudier p_2. Pour que la marche aléatoire définie par les X_n à partir de la valeur 2 repasse par 0, il faut déjà qu'elle passe par la valeur 1 ; partant de 2, la probabilité d'atteindre la valeur 1 est égale à p_1 ; une fois la valeur 1 atteinte, la probabilité d'atteindre 0 est égale à p_1. On peut donc deviner que $p_2 = p_1^2$. Pour faire cette preuve, nous allons introduire un nouveau temps d'arrêt :

$$S = \inf\{n \in \mathbb{N},\ 2 + X_1 + \cdots + X_n = 1\}$$

Nous avons :

$$(\exists n \in \mathbb{N},\ 2 + X_1 + \cdots + X_n = 0) = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} (S = k \text{ et } \exists n \geq 1,\ 1 + X_{k+1} + \cdots + X_{k+n} = 0)$$

donc

$$p_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S = k \text{ et } \exists n \geq 1,\ 1 + X_{k+1} + \cdots + X_{k+n} = 0)$$

On peut ensuite exprimer l'évènement $S = k$ en fonction des variables $X_1, X_2, \ldots, X_k$:

$$(S = k) = (2 + X_1 \neq 1 \text{ et } \ldots \text{ et } 2 + X_1 + \cdots + X_{k-1} \neq 1 \text{ et } 2 + X_1 + \cdots + X_k = 1)$$

donc $(S = k)$ est indépendant de $(\exists n \geq 1,\ 1 + X_{k+1} + \cdots + X_{k+n} = 0)$. On a donc :

$$p_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S = k)\ \underbrace{\mathbf{P}(\exists n \geq 1,\ 1 + X_{k+1} + \cdots + X_{k+n} = 0)}_{=p_1} = p_1 \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S = k) = p_1\, \mathbf{P}(S < +\infty) = p_1^2$$

en utilisant que pour $k \geq 1$, $(X_{k+n})_{n\geq 1}$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ ont la même loi.

On en déduit que $(1 - B + B\alpha)^2 = 1 - B + B\alpha^2$, soit $B(B-1)(\alpha-1)^2 = 0$, i.e. $B = 0$ ou $B = 1$. La valeur $B = 0$ donnerait $p_1 = 0$, ce qui est absurde car $p_1 \geq \mathbf{P}(X_1 = X_2 = -1) = \dfrac{1}{4}$. On a donc $B = 1$ et $p_k = \alpha^k$ pour tout $k \geq 0$. En particulier, $p_2 = \alpha^2 = 1 - \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

En notant $(q_k)_{k\geq 0} = (p_{-k})_{k\geq 0}$, nous avons :

$$\begin{cases} q_0 = 1 \\ q_1 = p_{-1} = \dfrac{1}{2}\, p_1 + \dfrac{1}{2}\, p_{-2} = \dfrac{1}{2}\, p_1 + \dfrac{1}{2}\, q_2 \\ q_{n+3} = 2q_{n+2} - q_n & \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

Les racines de $X^3 - 2X^2 + 1$ sont égales à 1, $-\alpha$ et $-\overline{\alpha}$. Comme (q_n) est bornée et $q_0 = 1$, il existe une constante D telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q_n = 1 - D + D(-\alpha)^n.$$

La relation entre q_1 et q_2 donne ensuite

$$1 - D - D\alpha = \frac{1}{2}\,\alpha + \frac{1}{2}\,\left(1 - D + D\alpha^2\right)$$

d'où $D = \dfrac{1-\alpha}{2+\alpha} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$. On en déduit que $p_{-1} = 1 - D - D\alpha = 3 - \sqrt{5}$, puis :

$$p = 1 - \frac{1}{2}\,p_2 - \frac{1}{2}\,p_{-1} = \frac{3\sqrt{5}-5}{4} \simeq 0,427$$

57) a) Cette série est téléscopique … on peut trouver une suite $(x_k)_{k\geq 0}$ telle que

$$\forall k \geq 1,\ \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!} = x_{k-1} - x_k$$

avec $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et $x_0 = \dfrac{1}{n!}$. On peut chercher x_k sous la forme $\dfrac{y_k}{(n+k)!}$, puisque $(n+k)!$ est le dénominateur commun des k premiers termes de la séries. La suite (y_k) est donc définie par :

$$y_0 = 1 \text{ et } \forall k \geq 1,\ kn^{k-1} = (n+k)y_{k-1} - y_k$$

On obtient $y_0 =$, $y_1 = n$, $y_2 = n^2$ puis par récurrence évidente $y_k = n^k$. On a donc, en posant $x_k = \dfrac{n^k}{(n+k)!}$:

$$\forall K \geq 1,\ \sum_{k=1}^{K} \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!} = x_0 - x_K = \frac{1}{n!} - \frac{n^k}{(n+k)!} \xrightarrow[K\to+\infty]{} \frac{1}{n!}$$

(on peut par exemple dire que $\dfrac{n^k}{(n+k)!}$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini car c'est un terme général de série convergente, grâce au critère de d'Alembert).

b) La somme de deux variables aléatoires X et Y indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètre λ et μ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$, comme on le voit en calculant les fonctions génératrices :

$$\forall t \in [-1,1],\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda t}e^{\mu t} = e^{\lambda+\mu}t$$

et en se souvenant que la fonction génératrice d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ caractérise la loi de la variable. Par récurrence (et avec le lemme des coalitions : X_n et $X_1 + \cdots + X_{n-1}$ sont indépendantes), on en déduit que S_n suit une loi de Poisson de paramètre n.

T_n prend donc les valeurs $t_k = \dfrac{k}{\sqrt{n}}$, pour k entier relatif supérieur ou égal à $-n$

$$\forall k \geq -n,\ P(T_n = t_k) = P(S_n = n+k) = e^{-n}\frac{n^{n+k}}{(n+k)!}.$$

Ainsi, la fonction $f_n :\ x \longmapsto P(T_n > x)$ est en escalier ; en se restreignant au domaine $x \geq 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]t_k, t_{k+1}],\ f_n(x) = P(T_n \geq t_{k+1}) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(T_n = t_i) = e^{-n} \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{n^{n+i}}{(n+i)!}$$

On peut donc écrire :

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}(t_{k+1}-t_k)\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} e^{-n}\,\frac{n^{n+i}}{(n+i)!}\right) = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty}\frac{n^{n+i}}{(n+i)!}\right)$$

en convenant qu'en cas de divergence de l'intégrale (et donc de la série), on aura écrit $+\infty = +\infty$ (la fonction f_n est positive et la série est à termes positifs). La famille $\left(\dfrac{n^{n+i}}{(n+i)!}\right)_{0\le k<i}$ étant positive, on peut échanger les deux sommes :

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{i-1}\frac{n^{n+i}}{(n+i)!}\right) = \frac{e^{-n}n^{n+1}}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{+\infty} i\,\frac{n^{i-1}}{(n+i)!} = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$$

58) a) Supposons que pour tout k, $\mathbf{P}(X_n = k)$ converge vers $\mathbf{P}(X = k)$ quand n tend vers $+\infty$. Pour $x \in [0,1[$, la série

$$G_{X_n}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X_n = k)x^k$$

converge normalement, donc uniformément, par rapport à n car :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left|\mathbf{P}(X_n = k)x^k\right| \le x^k$$

et $\sum_{k\ge 0} x^k$ est convergente. Nous pouvons donc appliquer le théorème de la double limite : $G_{X_n}(x)$ converge vers $G_X(x)$ quand n tend vers $+\infty$. Comme la convergence est évidente quand $x = 1$, nous avons montré que G_{X_n} convergeait simplement vers G_X sur $[0,1]$.

b) Pour simplifier la rédaction, nous pouvons supposer que $k_0 = 0$. Il existe une extractrice φ_0 telle que :

$$x_{\varphi_0(n)}(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda.$$

La suite $(x_{\varphi_0(n)}(1))_{n\ge 0}$ est bornée : il existe donc une extractive φ_1 et un réel λ_1 tels que :

$$x_{\varphi_0(\varphi_1(n))}(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda_1.$$

Par récurrence immédiate, on peut ainsi construire une famille d'extractives $(\varphi_k)_{k\ge 0}$ et une famille de réels $(\lambda_k)_{k\ge 0}$ telles que :

$$\lambda_0 = \lambda \text{ et } \forall k \ge 0,\ x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda_k.$$

Définissons alors $\varphi :\ n \longmapsto \varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(n)$. L'application φ est bien strictement croissante et pour $k \in \mathbb{N}$, $(x_{\varphi(n)}(k))_{n\ge k}$ est une sous-suite de la suite $(x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}(k))_{n\ge k}$. Comme cette suite converge vers λ_k quand n tend vers $+\infty$, il en est de même pour $(x_{\varphi(n)}(k))_{n\ge k}$.

c) Supposons que G_{X_n} converge simplement vers G_X sur $[0,1]$ et fixons $k_0 \in \mathbb{N}$; la suite $\left(\mathbf{P}(X_n = k_0)\right)_{n\ge 0}$ est bornée : nous allons montrer que $\mathbf{P}(X = k_0)$ est son unique valeur d'adhérence, ce qui prouvera le résultat attendu. Soit donc λ une valeur d'adhérence de $\left(\mathbf{P}(X_n = k_0)\right)_{n\ge 0}$. On peut appliquer la question b) en posant $x_n(k) = \mathbf{P}(X_n = k)$; il existe une extractive φ et une famille (λ_k) telles que :

$$\lambda_{k_0} = \lambda \text{ et } \forall k \ge 0,\ \mathbf{P}(X_{\varphi(n)} = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda_k$$

Pour $x \in [0,1[$, la série $G_{X_{\varphi(n)}}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X_{\varphi(n)} = k)x^k$ converge normalement par rapport à n. On peut donc échanger $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}$, ce qui donne $G_X(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k x^k$. Ceci étant vrai pour tout $x \in [0,1[$, l'unicité du DSE donne $\lambda_k = \mathbf{P}(X = k)$ pour tout k. En particulier, $\lambda_{k_0} = \mathbf{P}(X = k_0)$, ce qui achève la preuve.