Algèbre bilinéaire : énoncés

Exercices CCP

1) Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, calculer :

$$\alpha = \inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{ij} - m_{ij})^2$$

2) Calculer de deux façons différentes le minimum de f dans les deux cas suivants :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ f(a,b) = \int_0^{\pi} \left(\sin t - at - bt^2\right)^2\, dt$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ f(a,b,c) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 dt$$

3) Soit E un espace préhilbertien. Montrer l'inégalité :

$$\forall x, y \in E,\ 1 + ||x+y||^2 \leq 2(1 + ||x||^2)(1 + ||y||^2)$$

4) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\forall P, Q \in E,\ \varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$. Montrer que φ est un produit scalaire et déterminer une base orthonormale de E.

5) Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Montrer qu'il n'existe pas de structure préhilbertienne sur E dont la norme soit celle de la convergence uniforme (on pensera à l'identité du parallélogramme).

6) Calculer $m = \inf \left\{ \displaystyle\int_0^1 t^2 (\ln t - at - b)^2\, \mathrm{d}t,\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

7) Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et P le plan d'équation $2x + y + 2z = 0$. Écrire les matrices des projections orthogonales sur $P^{\perp}$ et P et des symétries orthogonales par rapport à $P^{\perp}$ et P.

8) Montrer que $O(n)$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9) Soit E euclidien de dimension n et u une bijection de E sur E. On suppose que $u(0) = 0$ et que u est une isométrie, i.e. que $\|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in E$.

a) Montrer que pour tous $x, y \in E$, l'image par u du segment $[x, y]$ est le segment $[u(x), u(y)]$.

b) Montrer que pour tous $x, y \in E$, l'image du milieu de $[x, y]$ est le milieu de $[u(x), u(y)]$.

c) Montrer que tous $x, y \in E$, $u(x + y) = u(x) + u(y)$.

d) Montrer que $u \in O(E)$.

10) Appliquer la méthode de Gauss à la forme bilinéaire symétrique associée à la matrice :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

11) Montrer que $\varphi :\ (x, y) \longmapsto 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ et construire une base orthonormale pour φ.

Exercices Mines-Centrale: espaces préhilbertiens

12) Soit E un espace préhilbertien et $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall x\in E, \|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}\langle\, e_i\,|\,x\,\rangle^2$$

Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.

13) Soit φ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall\, X,Y\in\mathbb{R}^n,\ \varphi(X,Y)=(x_1y_2+x_2y_1)+(x_2y_3+x_3y_2)+\cdots+(x_ny_1+x_1y_n).$$

Construire une base dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

14) Soit φ la forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice $S=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&2\\1&2&1\end{pmatrix}$ dans la base canonique.

a) Montrer qu'il existe un plan $\mathcal{P}_0$ de $\mathbb{R}^3$ sur lequel φ induit un produit scalaire.

b) Montrer que si P est un plan vectoriel sur lequel φ induit un produit scalaire, il existe un vecteur v de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\varphi(v,v)=-1\quad\text{et}\quad P=\{u\in\mathbb{R}^3,\varphi(u,v)=0\}$$

c) Réciproquement, soit $v\in\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(v,v)=-1$. Montrer que $P=\{u\in\mathbb{R}^3,\varphi(u,v)=0\}$ est un plan sur lequel φ induit un produit scalaire.

15) Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur un espace réel E de dimension finie n. On note $S=(s_{ij})_{1\le i,j\le n}$ sa matrice dans une base $\mathcal{B}=(e_i)_{1\le i\le n}$ de E. Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement si :

$$\forall k\in\{1,\dots,n\},\ \Delta_k=\begin{vmatrix}s_{1,1}&s_{1,2}&\dots&s_{1,k}\\s_{2,1}&s_{2,2}&\dots&s_{2,k}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\s_{k,1}&s_{k,2}&\dots&s_{k,k}\end{vmatrix}>0$$

16) Théorème de projection

Soit E un espace préhilbertien. On suppose que E est *complet*, c'est-à-dire qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall p,q\in\mathbb{N},\ \left.\begin{matrix}p\ge n_0\\ \\ q\ge n_0\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\|x_p-x_q\|\le\varepsilon.$$

a) Soit F une partie convexe, fermée et non vide de E. Montrer qu'il existe un unique $x\in F$ tel que $\|x\|=\inf_{y\in F}\|y\|$.

b) Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E. Montrer que pour tout $x\in E$, la distance de x à F est atteinte en un unique point y de F. En déduire que F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.

17) Soit $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $\langle\, f\,|\,g\,\rangle=\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. On donne $c\in]0,1[$ et on note α la forme linéaire sur E :

$$f\mapsto\int_0^c f(t)\,dt.$$

Vérifier que α est continue, que $H = \operatorname{Ker}\alpha$ est un hyperplan fermé et que $H^\perp = \{0\}$.

18) Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé.

a) On suppose que $\| \ \|$ vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

et on définit l'application symétrique $\varphi :\ E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in E,\ \varphi(x,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

Démontrer successivement :

(i) pour tous $x, y \in E$, $\varphi(2x, y) = 2\varphi(x,y)$;

(ii) pour tous $x, x', y \in E$, $\varphi(x+x', y) = \varphi(x,y) + \varphi(x',y)$;

(iii) pour tous $x, y \in E$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x,y)$.

En déduire que φ est un produit scalaire associé à la norme $\| \ \|$ (on dit que $\| \ \|$ est une norme préhilbertienne).

b) Montrer que $\| \ \|$ est une norme préhilbertienne si et seulement si l'intersection de la sphère unité avec tout plan est une ellipse.

19) Soit E un espace préhilbertien, $(u_i)_{1\le i\le p}$ une famile de vecteurs de E et $C \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall\, (\varepsilon_i)_{1\le i\le p} \in \{-1,1\}^p,\ \left\|\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i\, u_i\right\| \le C$$

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2 \le C^2$.

20) On note ℓ_2 l'ensemble des suites réelles de carrés sommables :

$$\ell_2 = \{\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{n\ge 0} x(n)^2 \text{ converge}\}.$$

a) Montrer que ℓ_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et que l'application

$$\varphi :\ (x,y) \longmapsto < x, y > = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)y(n)$$

est un produit scalaire sur ℓ_2. On note $\| \ \|_2$ la norme associée à φ.

b) Montrer que ℓ_2 est un espace complet, c'est-à-dire que si une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'élément de ℓ_2 vérifie :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, p, q \ge k_\varepsilon,\ \|x_p - x_q\|_2 \le \varepsilon$$

alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans ℓ_2.

Exercices Mines-Centrale: espaces euclidiens

21) On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et on note (e_i) sa base canonique. Soit V un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. On pose $a(V) = \max\limits_{1\leq i\leq n} d(e_i, V)$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d^2(e_i, V) = n - k$.

b) Montrer que $a(V) \geq \sqrt{\dfrac{n-k}{n}}$ et qu'il y a égalité si et seulement si les e_i sont équidistants de V.

c) On suppose que V est stable par $\pi\ :\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_2, \ldots, x_n, x_1)$. Montrer que $a(V) = \sqrt{\dfrac{n-k}{n}}$.

d) Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, il existe un sous-espace vectoriel de dimension k vérifiant les conditions du c).

22) Résolution d'un système au sens des moindres carrés

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^p$. Dans le cas où le système $AX = B$ n'a pas de solution, on s'intéresse aux vecteurs $X_0 \in \mathbb{R}^q$ qui minimisent $\|AX_0 - B\|_2$: un tel X_0 sera appelé *solution de $AX = B$ au sens des moindres carrés* et nous noterons $\mathcal{S}$ l'ensemble de ces « solutions ».

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est non vide et caractériser $\mathcal{S}$.

b) Montrer qu'il existe une matrice A' et un vecteur B' tel que $X \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow A'X = B'$. Dans quel cas $\mathcal{S}$ est-il un singleton ?

c) Calculer les solutions au sens des moindres carrés du système $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

23) Soit E un espace vectoriel euclidien. On définit l'application $\mathcal{I}$ sur $E \setminus \{0\}$ par $\mathcal{I}(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$.

a) Montrer que $\mathcal{I}$ est une involution de classe C^1. Vérifier que $\|\mathcal{I}(x) - \mathcal{I}(y)\| = \dfrac{\|x - y\|}{\|x\| \times \|y\|}$ pour tous x, y non nuls.

b) Soient γ_1, γ_2 deux arcs de classe C^1 réguliers, définis sur un voisinage de 0, à valeurs dans $E \setminus \{0\}$. On suppose que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Montrer que les arcs $\delta_i = \mathcal{I} \circ \gamma_i$ sont de classe C^1 et réguliers et que $\widehat{\big(\delta_1'(0), \delta_2'(0)\big)} = \widehat{\big(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)\big)}$.

On rappelle que dans un espace euclidien, l'angle de deux vecteurs non nuls u et v est défini par son cosinus.

c) Déterminer l'image par $\mathcal{I}$:

- d'un hyperplan affine ne passant pas par 0.
- d'une sphère passant par 0.
- d'une sphère ne passant pas par 0.

24) $O(E)$ est engendré par les réflexions

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Pour $f \in O(E)$, nous noterons F_f l'ensemble des points fixes de f :

$$F_f = \{x \in E,\ f(x) = x\} = \mathrm{Ker}(f - Id).$$

a) Soit $f \in O(E) \setminus \{Id\}$ et $x \in E \setminus F_f$. Montrer que $H = \{y \in E,\ d(x, y) = d(y, f(x))\}$ est un hyperplan vectoriel de E, appelé *hyperplan médiateur* du segment $[x, f(x)]$. Si r désigne la réflexion d'hyperplan H, montrer que F_f est strictement contenu dans $F_{r\circ f}$.

b) Montrer que tout élément de $O(E)$ est le produit d'au plus n réflexions.

c) Donner une autre démonstration, en utilisant que pour $f \in O(E)$, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R_{\theta_k} \end{pmatrix}$$

avec $p, q, k \in \mathbb{N}$ et $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ réels non congrus à 0 modulo π, en notant $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

25) $SO(E)$ est engendré par les demi-tours

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$ et $f \in SO(E)$. En utilisant une base orthonormale dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R_{\theta_k} \end{pmatrix}$$

avec $p, q, k \in \mathbb{N}$ et $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ réels non congrus à 0 modulo π et en notant $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, montrer que f est la composée de demi-tours, i.e. de symétries orthogonales par rapport à des sous-espaces de codimension 2.

Exercices Mines-Centrale: matrices et endomorphismes symétriques

26) On note $\mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives de taille n.

a) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$. Montrer que $(\det A)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{1}{n}\mathrm{tr}A$.

Montrer que pour tout n-uplet $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ de réels non nuls, $(\gamma_i\gamma_j a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$. En déduire que $\det A \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

b) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$. En utilisant $f : t \longmapsto \ln(1+e^t)$ et les formes $\varphi_A : (X,Y) \longmapsto X^\top AY$ et $\varphi_B : (X,Y) \longmapsto X^\top BY$, montrer :

$$(\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}} \leq (\det(A+B))^{\frac{1}{n}}.$$

Quand a-t-on égalité ?

c) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $\varphi : (X,Y) \longmapsto X^\top A^{-1}Y$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et que l'endomorphisme $f : X \longmapsto ABX$ est symétrique pour ce produit scalaire. En déduire :

$$(\det AB)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\mathrm{tr}AB.$$

Quand a-t-on égalité ?

27) Soit u un endomorphisme symétrique défini positif d'un espace euclidien E. Calculer :

$$\min_{\|x\|=1} (u(x)\cdot x)\left(u^{-1}(x)\cdot x\right)$$

28) Un ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

a) Montrer que la relation $\big(A \leq B \Longleftrightarrow B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})\big)$ est un ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que toute suite croissante et majorée de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est convergente.

c) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $J_{A,Y}:\ X \longmapsto X^\top AX + 2\,Y^\top X$ atteint un minimum que l'on calculera.

En déduire que l'application $A \longmapsto A^{-1}$ est décroissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

29) (Centrale) Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

a) Montrer que si $f:\ I \to \mathbb{R}$ est convexe, où I est un intervalle contenant tous les λ_i, alors :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ a_{i,i} \in I \text{ et } \sum_{i=1}^{n} f(a_{i,i}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i).$$

b) En déduire que si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\det(A) \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

30) Soit E un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{S}(E)$. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de f et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres associée :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad f(\varepsilon_k) = \lambda_k\, \varepsilon_k.$$

a) Soient $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $(e_1, \ldots, e_k)$ une famille orthonormale de E. Montrer qu'il existe un vecteur unitaire y dans $\{e_1, \ldots, e_k\}^\perp$ tel que $\langle\, f(y) \,|\, y \,\rangle \leq \lambda_{k+1}$.

b) En déduire que si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une famille orthonormale de E, alors :

- si $k = n$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle f(e_i), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$;
- si $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle f(e_i), e_i\rangle \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$.

c) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$. Proposer des majorants pour λ_1, $\lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

31) (Centrale 2017) Soit E un espace euclidien et $f, g \in \mathcal{S}^+(E)$.

a) Montrer que pour tout $x \in E$, $g(x) = 0 \Longleftrightarrow\ < x, f(x) >= 0$.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f \circ g) \oplus \mathrm{Im}(f \circ g) = E$.

c) On pose $F = \mathrm{Im}\, f$, $f_1 = f_{|F}$ et $h = (f \circ g)_{|F}$. Montrer que $\varphi:\ (x, y) \longmapsto\ < f_1^{-1}(x), y >$ est un produit scalaire sur F et en déduire que h est diagonalisable.

d) Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.

32) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont supplémentaires, puis que A est de rang pair.

33) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est un *endomorphisme antisymétrique* si :

$$\forall x, y \in E,\ \langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle = -\,\langle\, x \,|\, f(y) \,\rangle\,.$$

On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E.

a) Montrer que pour $f \in \mathcal{L}(E)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in \mathcal{A}(E)$;

(ii) pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(iii) il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{A}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et que $\mathcal{A}(E) \oplus \mathcal{S}(E) = \mathcal{L}(E)$.

c) Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note f^* le symétrique de f par rapport à $\mathcal{S}(E)$ parallèlement à $\mathcal{A}(E)$. Démontrer :

- $\forall x, y \in E,\ \langle f(x) \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, f^*(y) \rangle$;
- $\mathrm{Ker}(f^*) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$ et $\mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$;
- $\mathrm{rg}(f^*) = \mathrm{rg}(f)$.

d) Soit $f \in \mathcal{A}(E)$. Montrer successivement :

- si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, $F^{\perp}$ est également stable par f ;
- si f possède une valeur propre réelle, cette valeur propre est nulle et f possède une droite stable ;
- si f ne possède pas de valeur propre réelle, f possède un plan stable (on pourra remarquer que $f^2 \in \mathcal{S}(E)$).

En déduire qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par bloc, de la forme Code : Tout sélectionner

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & & & & & & & \\ -\alpha_1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & \alpha_2 & & & & & & \\ & & -\alpha_2 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 0 & \alpha_k & & \\ & & & & & & -\alpha_k & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec $k \geq 0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}^*$.

Exercices X-ENS

34) (X) Soit E un espace euclidien. Pour $\varphi \in O(E)$, on note $M(\varphi) = \mathrm{Im}\,(\varphi - Id_E)$ et $F(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\varphi - Id_E)$. Si u est un vecteur non nul de E, s_u désigne la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $u^{\perp}$.

a) Soit $\varphi \in O(E)$. Montrer que $M(\varphi)$ et $F(\varphi)$ sont supplémentaires orthogonaux.

b) Si $(u_1, \ldots, u_k)$ est libre, montrer que $M(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_k}) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_k)$.

c) Soit $\mathcal{F}_1 = (u_1, \ldots, u_k)$ une famille libre de E et $\mathcal{F}_2 = (v_1, \ldots, v_k)$ une famille telle que $M(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_k}) = M(s_{v_1} \circ \cdots \circ s_{v_k})$. Montrer que si $\mathcal{F}_2$ est libre.

35) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Le produit scalaire de deux éléments x et y de E est noté $(x|y)$. Pour tout $f \in \mathcal{S}(E)$, on note $\lambda_1(f), \lambda_2(f), \ldots, \lambda_n(f)$ les valeurs propres décroissantes de f.

Pour $q \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{V}_q(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension q.

a) Pour $f \in \mathcal{S}(E)$, on définit :

$$\forall\, q \in [\![1, n]\!], \quad \begin{cases} M_q(f) = \min\limits_{F \in \mathcal{V}_q(E)} \left(\max\limits_{x \in F \setminus \{0\}} \dfrac{(f(x) \,|\, x)}{||x||^2} \right) \\ \\ m_q(f) = \max\limits_{F \in \mathcal{V}_q(E)} \left(\min\limits_{x \in F \setminus \{0\}} \dfrac{(f(x) \,|\, x)}{||x||^2} \right) \end{cases}$$

Exprimer les $M_q(f)$ et $m_q(f)$ en fonction des $\lambda_i(f)$.

On pourra fixer une base orthonormale (e_i) de E telle que $f(e_i) = \lambda_i(f) e_i$ pour tout i, et considérer les espaces $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-p+1})$ et $\mathrm{Vect}(e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

b) **Théorème d'entrelacement de Cauchy**

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ et H un hyperplan de E. On note p la projection orthogonale sur H et g la restriction de $p \circ f$ à H. Montrer que $g \in \mathcal{S}(H)$ et que

$$\lambda_1(f) \geq \lambda_1(g) \geq \lambda_2(f) \geq \lambda_2(g) \geq \cdots \geq \lambda_{n-1}(g) \geq \lambda_n(f)$$

c) **Théorème de perturbation de Weyl**

Soit $f, g \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $|\lambda_q(f) - \lambda_q(g)| \leq ||f - g||$ pour tout $q \in [\![1, n]\!]$.

36) (ENS 2017) Soient E un espace vectoriel réel de dimension fini et φ, ψ deux produits scalaires sur E.

a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E qui est orthonormale pour φ et orthogonale pour ψ.

b) Étudier le groupe $O(\varphi) \cap O(\psi)$.

37) a) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable à spectre inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Soient $A, B, C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que ABC est symétrique. Montrer que $ABC \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Algèbre bilinéaire : corrigés

Exercices CCP

1) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique :

$$\forall M,N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ < M\ ,\ N > = \sum_{1\le i,j\le n} m_{i,j}n_{i,j} = Tr(M^\top N).$$

Nous devons donc calculer la borne inférieure de $||A-M||^2$ pour M décrivant $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On montre facilement que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux : comme ils sont supplémentaires, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est donc $S=\dfrac{1}{2}\,(A+A^\top)$ et la borne inférieure cherchée α est atteint en ce point (et uniquement en celui-ci), avec :

$$\alpha = \|A-S\|^2 = \left\|\frac{1}{2}\,(A-A^\top)\right\|^2 = \sum_{1\le i,j\le n}\left(\frac{a_{i,j}-a_{j_i}}{2}\right)^2.$$

2) Dans les deux cas, la fonction f calcule la distance euclidienne d'un élément fixé à un élément qui décrit un espace vectoriel de dimension finie :

1er cas : $E=\mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle\, f \mid g\,\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

On pose $f:\ t\longmapsto \sin t$ et $F=\mathrm{Vect}(g,h)$ avec $g:\ t\longmapsto t$ et $h:\ t\longmapsto t^2$. On a :

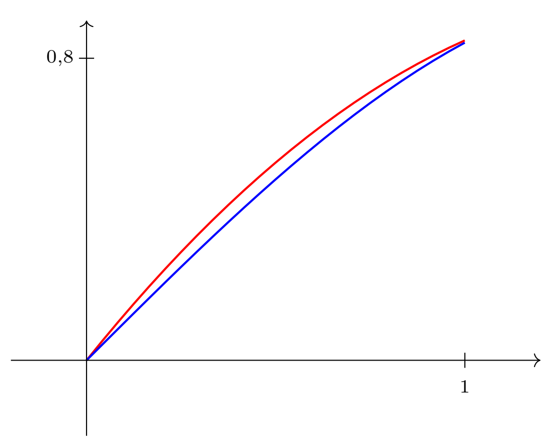
$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ f(a,b)=\|f-ag-bh\|^2$$

et f atteint un minimum m quand $ag+bh$ est le projeté orthogonal de f sur F. On a trois méthodes de calcul :

- on calcule une base orthogonale (g_1,h_1) de F et on utilise les formules de cours pour calculer le projeté orthogonal $p(f)$:

$$\begin{cases} g_1=g,\ h_1=h-\dfrac{\langle\, h\mid g_1\,\rangle}{\langle\, g_1\mid g_1\,\rangle}\,g_1:\ t\longmapsto t^2-\dfrac{3}{4}\,\pi t \\[2ex] p(f)=\dfrac{\langle\, f\mid g_1\,\rangle}{\langle\, g_1\mid g_1\,\rangle}g_1+\dfrac{\langle\, f\mid h_1\,\rangle}{\langle\, h_1\mid h_1\,\rangle}h_1:\ t\longmapsto \dfrac{12(20-\pi^2)}{\pi^4}\,t+\dfrac{20(\pi^2-16)}{\pi^5}\,t^2 \\[2ex] m=f\left(\dfrac{12(20-\pi^2)}{\pi^4},\dfrac{20(\pi^2-16)}{\pi^5}\right)=\dfrac{\pi^6-16\pi^4+320\pi^2-2560}{2\pi5}\end{cases}$$

On peut également tracer les graphes des fonctions f (en bleu) et $p(f)$ (en rouge) : $\|f-p(f)\|_2\simeq 0,04$:



- On peut faire le calcul sans passer par une base orthogonale : le projeté $p(f)$ s'écrit $ag+bh$ où a et b sont les seuls réels tels que $\langle\, f-ag-ah \,|\, g\,\rangle = \langle\, f-ag-ah \,|\, h\,\rangle = 0$. Ceci conduit à résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\pi^3}{3}\, a + \dfrac{\pi^4}{4}\, b = \pi \\ \\ \dfrac{\pi^4}{4}\, a + \dfrac{\pi^5}{5}\, b = \pi^2 - 4 \end{cases}$$

et on retrouve les valeurs $a = \dfrac{12(20-\pi^2)}{\pi^4}$ et $b = \dfrac{20(\pi^2-16)}{\pi^5}$.

- On peut enfin utiliser la différentiabilité de f : en le point à f atteint son minimum, la différentielle de f s'annule. Comme

$$f(a,b) = \frac{\pi^3}{3}\, a^2 + \frac{\pi^4}{2}\, ab + \frac{\pi^5}{5}\, b^2 - 2\pi^2\, b - 2\pi\, a + \frac{\pi}{2}$$

on obtient le système

$$\begin{cases} \dfrac{2\pi^3}{3}\, a + \dfrac{\pi^4}{2}\, b = 2\pi \\ \\ \dfrac{\pi^4}{2}\, a - \dfrac{2\pi^5}{5}\, b = 2\pi^2 - 8 \end{cases}$$

et on conclut comme précédemment.

2ème cas : $E = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R}),\ t \longmapsto f(t)^2 e^{-t} \text{ est sommable sur } [0,+\infty[\right\}$ muni du produit scalaire

$$\langle\, f \,|\, g\,\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

E contient les fonctions polynomiales ; on pose $f:\ t \longmapsto t^3$ et $F = \mathrm{Vect}(g_0, g_1, g2)$ avec $g_i:\ t \longmapsto t^i$.

Les méthodes vues précédemment donnent :

- base orthogonale de F :

$$h_0 : t \longmapsto 1,\ \ h_1 :\ t \longmapsto t-1 \text{ et } h_2 :\ t \longmapsto t^2 - 4t + 2$$

- projeté orthogonal de f sur F :

$$p(f) :\ t \longmapsto 9t^2 - 18t + 6$$

- expression de $f(a,b,c)$:

$$f(a,b,c) = a^2 + 2ab + 4ac + 2b^2 + 12bc + 24c^2 - 12a - 48b - 240c + 720$$

- minimum atteint pour :

$$a_0 = 6,\ \ b_0 = -18,\ \ c_0 = 9.$$

- valeur du minimum et distance de f à F :

$$f(a_0,b_0,c_0) = \|f - p(f)\|_2^2 = 36 \text{ et } d(f,F) = \|f - p(f)\| = 6.$$

3) Calculons la différence entre les deux expressions et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} (1+\|x\|^2)(1+\|y\|^2) - (1+\|x+y\|^2) &= 1 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|^2\|y\|^2 - 2\,\langle\, x \,|\, y\,\rangle \\ &\geq 1 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|^2\|y\|^2 - 2\|x\|\,\|y\| \\ &\geq \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\,\|y\| \\ &= (\|x\| - \|y\|)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

4) φ est clairement une forme bilinéaire symétrique et si $P \in E$ avec $\varphi(P,P) = 0$, $P(t) = 0$ pour tout $t \in [-1,1]$ (la fonction $t \longmapsto P^2(t)$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, donc $P = 0$ car P possède une infinité de racines.

On peut appliquer la méthode de Gram-Schmidt (on note $\| \ \|$ la norme associée à φ), en remarquant que si P est pair et Q impair, $\varphi(P,Q) = 0$:

- $\|X^0\|^2 = 2$ donc on pose $L_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
- on pose $P_1 = X - \varphi(X, L_0) = X$; on a $\|P_1\|^2 = \dfrac{2}{3}$: on pose $L_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2}\, X$;
- on pose $P_2 = X^2 - \varphi(X^2, L_0)\, L_0 = X^2 - \dfrac{1}{3}$; on a $\|P_2\|^2 = \dfrac{8}{45}$: on pose $L_2 = \dfrac{\sqrt{10}}{4}\,(3X^2-1)$;
- on pose $P_3 = X^3 - \varphi(X^3, L_1)\, L_1 = X^3 - \dfrac{3}{5}\, X$; on a $\|P_3\|^2 = \dfrac{8}{175}$: on pose $L_3 = \dfrac{\sqrt{14}}{4}\,(5X^3-3X)$.

La famille $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}\, X,\ \dfrac{\sqrt{10}}{4}\,(3X^2-1),\ \dfrac{\sqrt{14}}{4}\,(5X^3-3X)\right)$ est une base orthonormale de E.

5) La norme $\| \ \|_\infty$ ne vérifie pas l'identité du parallélogramme puisqu'avec $f :\ t \longmapsto 1$ et $g :\ t \longmapsto t$, nous avons :

$$2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2) = 4 \neq 5 = \|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2$$

Il n'existe donc pas de produit scalaire sur E associé à la norme de la convergence uniforme.

6) On travaille dans l'espace $E = \{f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{est de carré sommable sur }]0,1]\}$, muni du produit scalaire :

$$\forall f, g \in E,\ < f \,|\, g >= \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En notant F l'espace engendré par les fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto t^2$ et $f :\ t \longmapsto t\ln t$, nous cherchons à calculer le carré de la distance de f à F :

$$d^2(f,F) = \inf\{d^2(f,g),\ g \in F\} = \inf\left\{\int_0^1 (t\,\ln t - at^2 - bt)^2\,\mathrm{d}t,\ a,b \in \mathbb{R}\right\} = m$$

Cette borne inférieure est un minimum, atteint quand $t \longmapsto at^2 + bt$ est le projeté orthogonal de f que F. Nous devons donc calculer la solution du système :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 (f(t) - at^2 - at)t^2\,\mathrm{d}t = 0 \\ \\ \displaystyle\int_0^1 (f(t) - at^2 - at)t\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$$

Un peu de calcul nous donne le système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}\,a + \dfrac{1}{3}\,b = -\dfrac{1}{9} \\ \\ \dfrac{1}{5}\,a + \dfrac{1}{4}\,b = -\dfrac{1}{16} \end{cases}$$

puis la solution $(a_0, b_0) = \left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{19}{12}\right)$, soit pour conclure :

$$m = \int_0^1 (t\,\ln t - a_0t^2 - b_0t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{432}$$

Si l'on connait les déterminants de Gram :

$$G(x_1, \dots, x_n) = \det(< x_i \mid x_j >)_{1 \leq i,j \leq n}$$

on peut aussi noter $e_1 : \ t \longmapsto t$, $e_2 : \ t \longmapsto t^2$ et :

$$m = d^2(f,F) = \frac{G(e_1,e_2,f)}{G(e_1,e2)} = \frac{\begin{vmatrix} 1/3 & 1/4 & -1/9 \\ 1/4 & 1/5 & -1/16 \\ -1/9 & -1/16 & 2/27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/5 \end{vmatrix}} = \frac{1}{432}.$$

7) Notons p_F (resp. s_F) la projection (resp. la symétrie) orthogonale sur (resp. par rapport à) un sous-espace F. On rappelle que $s_F = 2p_F - Id$.

$P^\perp$ est la droite engendrée par le vecteur $\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc le projeté d'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur cette droite est :

$$p_{P^\perp}(X) = \frac{< X \mid \varepsilon >}{\|\varepsilon\|^2}\,\varepsilon = \frac{2x+y+2z}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4x+2y+4z \\ 2x+y+2z \\ 4x+2y+4z \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}(p_{P^\perp}, BC) &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = A \\
\mathrm{Mat}(p_P, BC) &= I_3 - A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \\
\mathrm{Mat}(s_{P^\perp}, BC) &= 2A - I_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\
\mathrm{Mat}(s_P, BC) &= I_3 - 2A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

8) Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, on peut le munir d'une norme quelconque (on pose par exemple $\|A\| = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) et il suffit de montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée :

- si $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a $\displaystyle\sum_{1 \leq j \leq n} a_{i,j}^2 = 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, donc $\|A\| \leq 1$: $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée.
- l'application $f : \ A \longmapsto A^\top A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (la transposition est continue car linéaire et le produit matriciel est continu car bilinéaire) et $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée, comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue f.

9) a) Nous avons : $\forall a,b,c \in E, \ \ c \in [a,b] \Longleftrightarrow d(a,b) = d(a,c) + d'(c,b)$ (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire).

Fixons $x, y \in E$ et posons $x' = u(x)$ et $y' = u(y)$. Nous avons :

- si $z \in [x,y]$, $d(x',y') = d(x,y) = d(x,z) + d(z,y) = d(x',u(z)) + d(u(z),y')$, donc $u(z) \in [x',y']$.

- soit $z' \in [x',y']$ et $z = u^{-1}(z')$. On a de même $d(x,y) = d(x',y') = d(x',z') + d(z',y') = d(x,z) + d(z,y)$, donc $z \in [x,y]$ et $z' = u(z) \in u([x,y])$.

ce qui prouve que $u([x,y]) = [u(x),u(y)]$.

b) Soient $x,y \in E$. Avec $m = \dfrac{x+y}{2}$, on a $u(m) \in [u(x),u(y)]$ et $d(u(x),u(m)) = d(x,m) = d(y,m) = d(u(y),u(m))$, donc $u(m)$ est le milieu de $[u(x),u(y)]$.

c) Soient $x,y \in E$. Comme $m = \dfrac{x+y}{2}$ est le milieu de 0 et de $x+y$, nous avons :

$$\frac{u(x)+u(y)}{2} = u(m) = \frac{u(0)+u(x+y)}{2} = \frac{u(x+y)}{2}$$

d'où $u(x+y) = u(x) + u(y)$.

d) Il reste à montrer que $u(\gamma x) = \gamma x$ pour tous $\gamma \in \mathbb{R}$ et $x \in E$. Soit $x \in E$ et notons $\Gamma = \{\gamma \in \mathbb{R},\ u(\gamma x) = \gamma x\}$. L'application u est continue (c'est une isométrie, donc elle est 1-lipschitzienne) donc Γ est une partie fermée de $\mathbb{R}$ (image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $\gamma \longmapsto u(\gamma x) - \gamma x$). Nous avons ensuite :

- $0 \in \Gamma$ et $1 \in \Gamma$;

- par récurrence (grâce à l'additivité de u), $\mathbb{N} \subset \Gamma$;

- pour tout entier $n \geq 0$, $0\dfrac{-nx+nx}{2}$, donc $0 = u(0) = \dfrac{u(-nx)+u(nx)}{2}$, d'où $u(-nx) = -u(nx) = -nx$: $\mathbb{Z}$ est contenu dans Γ ;

- si $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\mu = \dfrac{\gamma_1+\gamma_2}{2} \in \Gamma$, puisque :

$$u(\mu x) = u\left(\frac{\gamma_1 x + \gamma_2 x}{2}\right) = \frac{u(\gamma_1 x) + u(\gamma_2 x)}{2} = \frac{\gamma_1 u(x) + \gamma_2 u(x)}{2} = \mu u(x).$$

Comme Γ contient $\mathbb{Z}$, il contient $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, puis, par récurrence sur n, $\frac{p}{2^n} \in \Gamma$ pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\Gamma = \mathbb{R}$ car $\left\{\dfrac{p}{2^n},\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Nous avons donc démontré que u était linéaire : comme elle conserve les distances, $u \in O(E)$.

10) Nous avons, pour $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} X^\top S X &= x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 2yz \\ &= (x+y)^2 - 2y^2 + z^2 - 2yz \\ &= (x+y)^2 - 2\left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\,z^2 \end{aligned}$$

11) On peut appliquer la méthode de Gram-Schmidt, en notant (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$: $\varphi(e_1,e_1) = 2 > 0$ et on pose $\varepsilon_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,e_1$. On pose ensuite $\varepsilon_2' = e_2 - \varphi(e_2,\varepsilon_1)\,\varepsilon_1 = e_2 + \frac{1}{2}\,e_1$. Comme $\varphi(\varepsilon_2',\varepsilon_2') = \dfrac{1}{2} > 0$, on pose $\varepsilon_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \sqrt{2}\,e_2$ et $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est une base orthonormale pour φ (ce qui prouve que φ est un produit scalaire).

On peut aussi appliquer la méthode de Gauss, avec $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi(X,X) = 2x^2 - 2xy + y^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\,y\right)^2 + \frac{1}{2}\,y^2 = \left(\sqrt{2}\,x - \frac{\sqrt{2}}{2}\,y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,y\right)^2$$

Les nouvelles coordonnéees
$$\begin{cases} x' = \sqrt{2}\, x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, y \\ \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, y \end{cases}$$
sont donc les coordonnées dans une nouvelle base $\mathcal{B}$ qui est orthonormale pour φ. En inversant ces relations, on obtient :
$$\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ \\ y' \end{pmatrix}$$
et on retrouve la base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e_1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e_1 + \sqrt{2} e_2 \right)$.

Exercices Mines-Centrale: espaces préhilbertiens

12) Notons $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Si $x \in F^\perp$, $\|x\|^2 = 0$ donc $x = 0$. On a donc $F^\perp = \{0\}$ et $E = F \oplus F^\perp = F$ (car F est de dimension finie).

On a ensuite, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$:
$$\|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle\, e_j \mid e_i \,\rangle^2 = \|e_i\|^4 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \langle\, e_j \mid e_i \,\rangle^2$$
Comme e_i est unitaire, on obtient $\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \underbrace{\langle\, e_j \mid e_i \,\rangle^2}_{\geq 0} = 0$ donc $\langle\, e_j \mid e_i \,\rangle = 0$ pour tout $j \neq i$: la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthonormale. La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est ainsi une famille génératrice orthonormale : c'est une base orthonormale de E.

13) Avec $n = 3$, on peut appliquer la méthode de Gauss :
$$\varphi(X, X) = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 2(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) - 2x_3^2 = \frac{(x_1 + x_2 + 2x_3)^2}{2} - \frac{(x_1 - x_2)^2}{2} - 2x_3^2$$
d'où la matrice de passage
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et on obtient une base $\mathcal{B}$ qui réduit φ en inversant Q :
$$\mathcal{P}_{BC}^{\mathcal{B}} = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Dans la base formée par les colonnes de P, l'expression de $\varphi(X, X)$ devient :
$$\varphi(X) = \frac{1}{2}\,(x_1')^2 - \frac{1}{2}\,(x_2')^2 - 2\,(x_3')^2$$
et la matrice de φ est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Il ne semble cependant pas raisonnable d'essayer de généraliser ce calcul en dimension n. Quand $n = 2m$, on a :

$(x_1 + x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{2m-1} + x_{2m})^2 - (x_{2m} - x_1)^2 = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + \cdots + 2x_{2m-1}x_{2m} + 2x_{2m}x_1 = \varphi(X, X).$

Malheureusement, la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & & & & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est inversible que pour m impair. Dans ce cas, son inverse est la matrice de passage de la base canonique à une nouvelle base $\mathcal{B}$. En notant y_i les coordonnées dans $\mathcal{B}$, nous avons :

$$\varphi(X,X) = y_1^2 - y_2^2 + \dots + \dots + y_{2m-1}^2 - y_{2m}^2$$

donc $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B})$ est diagonale.

Il reste à calculer $P = Q^{-1}$ pour obtenir l'expression de $\mathcal{B}$. Cela peut se faire en inversant le système $Y = QX$: en notant $m = 2q+1$, nous avons :

$$y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + y_5 - \dots - y_{n-4} - y_{n-3} + y_{n-2} + y_{n-1} - y_n = 2x_1$$
$$y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 + \dots + y_{n-3} + y_{n-2} - y_{n-1} - y_n + y_1 = 2x_2$$

et par symétrie, pour tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$:

$$y_{2i+1} - y_{2i+2} - y_{2i+3} + y_{2i+4} + y_{2i+5} - \dots - y_{2i+n-4} - y_{2i+n-3} + y_{2i+n-2} + y_{2i+n-1} - y_{2i+n} = 2x_{2i+1}$$
$$y_{2i+2} + y_{2i+3} + y_{2i+4} - y_{2i+5} - y_{2i+6} + \dots + y_{2i+n-3} + y_{2i+n-2} - y_{2i+n-1} - y_{2i+n} + y_{2i+n+1} = 2x_{2i+2}$$

en notant $y_{n+k} = y_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Ainsi, la matrice P est construite de la manière suivante : sur une colonne d'indice impair j, on place $1/2$ en position (j,j) puis on remplit la ligne de en descendant (en revenant au début de la colonne une fois arrivé à la dernière ligne) en écrivant avec deux $1/2$, puis deux $-1/2$, et ainsi de suite jusqu'à arriver à la case $(j-1,j)$. Sur une ligne d'indice pair j, le processus est identique : on place $1/2$ en position (j,j), puis $-1/2$ en position $(j+1,j)$, puis complète en plaçant alternativement deux $1/2$ et deux $-1/2$, jusqu'à être arrivé à la position $(j-1,j)$. Quand $n = 10$, cela donne :

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quand m est pair, φ est de rang $n-2$ et on cherche à écrire $\varphi(X,X)$ comme somme ou différence de $n-2$ carrés de coordonnées indépendantes. Par exemple, quand $n = 4$, on obtient :

$$\varphi(X,X) = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x_1 - x_2 + x_3 - x_4\right)^2$$

et on peut choisir (les deux dernières lignes assurent simplement à Q d'être inversible) :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne la matrice de passage :

$$P = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour les autres valeurs de n (i.e. n multiple de 4 et n impair), je n'ai pas vu de méthode astucieuse. Nous allons donc traiter le cas général en utilisant le théorème spectral ; la matrice de φ dans la base canonique s'écrit :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et en diagonalisant S dans une base orthonormale $\mathcal{B}$, nous aurons une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}SP = D$ soit diagonale. On aura donc :

$$\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}) = P^{\top} SP = P^{-1}SP = D$$

donc φ sera réduite dans la base $\mathcal{B}$. On peut aussi se contenter de construire une base orthogonale $\mathcal{B}$ qui diagonalise S, cette base sera également orthogonale pour φ (mais les valeurs obtenus sur la diagonale de $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B})$ ne seront plus les valeurs propres de S).

La matrice S se diagonalise facilement en remarquant que $S = J + J^{-1}$ avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de J est $X^n - 1$, donc J a n valeurs propres complexes d'ordre 1, égales aux n racines n-ièmes de l'unité. Pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ et $e_k = \left(\omega_k^{i-1}\right)_{1 \le i \le n}$ est un vecteur propre pour J associé à ω_k. La famille $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ est donc une base qui diagonalise J. On obtient ensuite $J^{-1}e_k = \omega_k^{-1} e_k = \overline{\omega_k}\, e_k$, puis $Se_k = (\omega_k + \overline{\omega_k})e_k = 2\cos(2k\pi/n)\, e_k$.

Les valeurs propres de S sont donc les valeurs $\lambda_k = 2\cos(2k\pi/n)$, pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, comptées avec leurs multiplicités. On va ensuite distinguer suivant la parité de n :

- si $n = 2m$, S admet $m+1$ valeurs propres distinctes :

  $$\lambda_0 = 2,\ \lambda_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right),\ \lambda_2 = 2\cos\left(2\,\frac{\pi}{m}\right),\ \dots, \lambda_{m-1} = \cos\left((m-1)\,\frac{\pi}{m}\right),\ \lambda_m = 0$$

  Les valeurs propres λ_0 et λ_m sont simples, associées aux vecteurs propres $(1, 1, \dots, 1)$ et $(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$, et les autres sont doubles, l'espace propre complexe associé à λ_k étant engendré par les vecteurs e_k et e_{n-k}. Il faut maintenant revenir à $\mathbb{R}^n$: l'espace propre sur $\mathbb{R}^n$ est l'intersection de l'espace propre complexe avec $\mathbb{R}^n$. On peut écrire $e_k = \varepsilon_k + i\varepsilon'_k$ en posant

  $$\begin{cases} \varepsilon_k = Re(e_k) = \left(1, \cos\left(\dfrac{k\pi}{m}\right), \cos\left(\dfrac{2k\pi}{m}\right),\ \dots, \cos\left(\dfrac{(n-1)k\pi}{m}\right)\right) \\[2ex] \varepsilon'_k = Im(e_k) = \left(0, \sin\left(\dfrac{k\pi}{m}\right), \sin\left(\dfrac{2k\pi}{m}\right),\ \dots, \sin\left(\dfrac{(n-1)k\pi}{m}\right)\right) \end{cases}$$

et on montre facilement que $S\varepsilon_k = \lambda_k\varepsilon_k$ et $S\varepsilon'_k = \lambda_k\varepsilon'_k$. Ces deux vecteurs étant indépendants, ils forment une base de l'espace propre réel associé à la valeur propre λ_k.

Comme les espaces propres de S sont deux à deux orthogonaux, on obtient une base orthogonale $(\delta_i)_{0\le i\le 2m-1}$ de vecteurs propres de S en choisissant une base orthogonale de chaque espace propre. On obtient ainsi, en appliquant la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser les familles $(\varepsilon_k, \varepsilon'_k)$:

$$
\begin{aligned}
\delta_0 &= e_0 = (1, 1, \ldots, 1)\\
\delta_1 &= \varepsilon_1 = \left(1, \cos\left(\frac{\pi}{m}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right),\ \ldots, \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{m}\right)\right)\\
\delta_2 &= \varepsilon'_1 - \frac{<\varepsilon_1\,|\,ep'_1>}{<\varepsilon_1\,|\,ep'_1>}\,\varepsilon_1\\
&\vdots\\
\delta_{2k-1} &= \varepsilon_k = \left(1, \cos\left(\frac{k\pi}{m}\right), \cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right),\ \ldots, \cos\left(\frac{(n-1)k\pi}{m}\right)\right)\\
\delta_{2k} &= \varepsilon'_k - \frac{<\varepsilon_k\,|\,\varepsilon'_k>}{<\varepsilon_k\,|\,\varepsilon'_k>}\,\varepsilon_k\\
&\vdots\\
\delta_{2m-3} &= \varepsilon_{m-1} = \left(1, \cos\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right), \cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{m}\right),\ \ldots, \cos\left(\frac{(n-1)(m-1)\pi}{m}\right)\right)\\
\delta_{2m-2} &= \varepsilon'_{m-1} - \frac{<\varepsilon_{m-1}\,|\,\varepsilon'_{m-1}>}{<\varepsilon_{m-1}\,|\,\varepsilon'_{m-1}>}\,\varepsilon_{m-1}\\
\delta_{2m-1} &= e_m = (1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1)
\end{aligned}
$$

- si $n = 2m+1$, S admet $m+1$ valeurs propres distinctes :

$$\lambda_0 = 2,\ \lambda_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right),\ \lambda_2 = 2\cos\left(2\frac{2\pi}{2m+1}\right),\ \ldots, \lambda_m = 2\cos\left(m\frac{2\pi}{2m+1}\right)$$

et on obtient comme dans le premier cas la base orthogonale $(\delta_i)_{0\le i\le 2m}$:

$$
\begin{aligned}
\delta_0 &= e_0 = (1, 1, \ldots, 1)\\
\delta_1 &= \varepsilon_1 = \left(1, \cos\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right), \cos\left(2\frac{2\pi}{2m+1}\right),\ \ldots, \cos\left((n-1)\frac{2\pi}{2m+1}\right)\right)\\
\delta_2 &= \varepsilon'_1 - \frac{<\varepsilon_1\,|\,\varepsilon'_1>}{<\varepsilon_1\,|\,\varepsilon'_1>}\,\varepsilon_1\\
&\vdots\\
\delta_{2k-1} &= \varepsilon_k = \left(1, \cos\left(k\frac{2\pi}{2m+1}\right), \cos\left(2k\frac{2\pi}{2m+1}\right),\ \ldots, \cos\left((n-1)k\frac{2\pi}{2m+1}\right)\right)\\
\delta_{2k} &= \varepsilon'_k - \frac{<\varepsilon_k\,|\,\varepsilon'_k>}{<\varepsilon_k\,|\,\varepsilon'_k>}\,\varepsilon_k\\
&\vdots\\
\delta_{2m-1} &= \varepsilon_m = \left(1, \cos\left(m\frac{2\pi}{2m+1}\right), \cos\left(2m\frac{2\pi}{2m+1}\right),\ \ldots, \cos\left((n-1)m\frac{2\pi}{2m+1}\right)\right)\\
\delta_{2m} &= \varepsilon'_m - \frac{<\varepsilon_m\,|\,\varepsilon'_m>}{<\varepsilon_m\,|\,\varepsilon'_m>}\,\varepsilon_m
\end{aligned}
$$

14) a) On a, pour $u = (x, y, z)$:

$$\varphi(u, u) = x^2 + 2xy + 2xz + 4yz + z^2 = (x+y+z)^2 - y^2 + 2yz = (x+y+z)^2 - (y-z)^2 + z^2$$

Le plan P_0 d'équation $y = z$ convient : si $u = (x, y, y)$ est un élément de P_0, on a $\varphi(u, u) = (x+2y)^2 + y^2 \geq 0$ et $\varphi(u, u) = 0$ si et seulement si $x = y = 0$, soit si et seulement si $u = 0$.

b) Comme la restriction de φ à P est un produit scalaire, on peut fixer une base orthonormale (e_1, e_2) de P pour ce produit scalaire. En choisissant un vecteur $e_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus P$, nous obtenons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dans laquelle la matrice de φ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

On peut alors appliquer la procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt : en posant $e'_3 = e_3 - \varphi(e_3, e_1)e_1 - \varphi(e_3, e_2)e_2$, la famille $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e'_3)$ est une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ dans la quelle la matrice T de φ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Comme il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $T = {}^tPSP$, on a $\alpha = \det(T) = \det(S)\left(\det(P)\right)^2 < 0$, puisque $\det(S) = -1 < 0$. On peut donc poser $v = \dfrac{e'_3}{\sqrt{-\alpha}}$, et on a :

- $\varphi(v, v) = \dfrac{\varphi(e'_3, e'_3)}{-\alpha} = -1$;
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \varphi(x\,e_1 + y\,e_2 + z\,v, v) = 0 \Longleftrightarrow -z = 0 \Longleftrightarrow x\,e_1 + y\,e_2 + z\,v \in P$

c) Soit v tel que $\varphi(v, v) = -1 < 0$. L'application $u \longmapsto \varphi(u, v)$ est une forme linéaire non nulle (l'image de v est -1), donc son noyau P est un plan. Il reste à démontrer que la restriction de φ à P est définie positive. Supposons que cela ne soit pas le cas. Il existe alors un vecteur non nul $u \in P$ tel que $\varphi(u, u) \leq 0$. On en déduit que la restriction de φ à $P' = \mathrm{Vect}\,(u, v)$ est négative :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \varphi(xu + yv, xu + yv) = x^2\varphi(u) + 2xy\underbrace{\varphi(u, v)}_{=0} + y^2\varphi(v, v) = -x^2 + y^2\varphi(v, v) \leq 0.$$

Ceci est alors absurde, car $P_0 \cap P'$ n'est par réduit à $\{0\}$ (c'est une intersection de deux plans) : en choisissant w non nul dans $P_0 \cap P'$, on a $\varphi(w, w) > 0$ (car φ induit un produit scalaire sur P_0) et $\varphi(w, w) \leq 0$ (car φ est négative sur P').

15) Sens direct : si φ est un produit scalaire, la matrice $S_k = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$ est la matrice dans la base $(e_1, \ldots, e_k)$ de la restriction de φ à $E_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. C'est donc une matrice symétrique définie positive : son déterminant est strictement positif (par exemple parce qu'elle elle est congruente à la matrice identité).

Prouvons le sens inverse par récurrence sur n. Une méthode naturelle consiste à démontrer que les hypothèses $\Delta_k > 0$ permettent d'appliquer à la base (e_i) la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Si $n = 1$, $S = (s_{1,1})$ avec $\Delta_1 = s_{1,1} > 0$, $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\sqrt{\Delta_1}}$ est une base orthonormale de E : φ est un produit scalaire.

Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat démontré en dimension n. La restriction de φ à $E_{n-1} = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est alors un produit scalaire : il existe une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ de E_{n-1} qui est orthonormale pour φ. On peut alors poser :

$$\varepsilon'_n = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(e_n, \varepsilon_i)\,\varepsilon_i$$

et la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon'_n)$ est une base orthogonale pour φ. En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, nous avons :

$$P^\top SP = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \varphi(\varepsilon'_n, \varepsilon'_n) \end{pmatrix}$$

donc $\varphi(\varepsilon'_n, \varepsilon'_n) = \det(P^\top SP) = \det^2(P)\,\Delta_n > 0$. On peut donc poser $\varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon'_n}{\sqrt{\varphi(\varepsilon'_n, \varepsilon'_n)}}$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormale de E pour φ : φ est un produit scalaire.

On peut préciser le résultat démontré : on a construit une matrice P triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que $P^\top SP = I_n$ et on montre facilement (toujours par récurrence) que P a pour diagonale $\left(\sqrt{\dfrac{1}{\Delta_1}}, \sqrt{\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}}, \ldots, \sqrt{\dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}\right)$.

On utilise plus souvent ce résultat sous la forme :

Décomposition de Cholesky : si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice triangulaire supérieure à diagonale strictement positive Q (Q est l'inverse de P) telle que $S = {}^tQQ$ et Q a pour diagonale $\left(\sqrt{\Delta_1}, \sqrt{\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}}, \dots, \sqrt{\dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}\right)$.

16) a) Comme F est non vide, $m = \inf_{y \in F} \|y\|$ est bien défini et il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de F telle que $\|y_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe n_ε tel que $m^2 \leq \|y_n\|^2 \leq m^2 + \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. On a alors, pour $p, q \geq n_\varepsilon$ (identité du parallélogramme) :

$$\|y_p - y_q\|^2 = 2(\|y_p\|^2 + \|y_q\|^2) - \|y_p + y_q\|^2 = 2(\|y_p\|^2 + \|y_q\|^2) - 4\left\|\frac{y_p + y_q}{2}\right\|^2 \leq 2(m^2 + \varepsilon) - 4m^2 = 2\varepsilon$$

car $\dfrac{y_p + y_q}{2} \in F$ (F est convexe). On en déduit donc que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un élément $x \in F$ (car F est fermé) et $\|x\| = m$ par continuité de la norme.

Si x et x' sont deux éléments de F tels que $\|x\| = \|x'\| = m$, on a toujours grâce à l'identité du parallélogramme :

$$\|x - x'\|^2 = 4m^2 - 4\left\|\frac{x + x'}{2}\right\|^2 \leq 0$$

donc $x = x'$.

b) Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la partie $F - x$, qui est fermée, non vide et convexe : il existe un unique élément $y \in F$ tel que $\|y - x\| = \inf_{z\in F} \|z - x\| = d(x, F)$. Pour tout $z \in F$, on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ d^2(x, y + \alpha z) \geq d^2(x, y)$$

ce qui s'écrit :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ 2\alpha < x - y \,|\, z > + \alpha^2 \|z\|^2 \geq 0$$

On en déduit que $< x - y \,|\, z > = 0$ (c'est évident si z est nul et sinon, on a un trinôme de signe constant qui admet 0 pour racine : 0 est nécessairement racine double). Nous avons donc démontré que $x - y \in F^\perp$, ce qui prouve que $x \in F \oplus F^\perp$ pour tout $x \in E$: F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

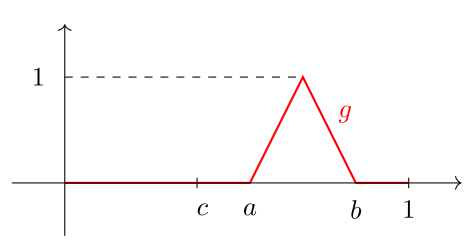
17) α est linéaire non nulle ($\alpha(1) = c \neq 0$) donc H est un hyperplan de E. On a ensuite :

$$\forall f \in E,\ |\alpha(f)| = \left|\int_0^c f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_0^c f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^c 1^2\,\mathrm{d}t} \leq ||f||_2\sqrt{c}$$

donc α est continue. On en déduit que H est fermé, comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue α.

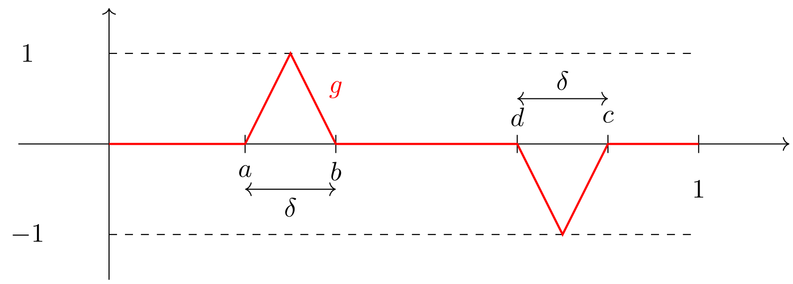
Montrons que si f est non nulle, f n'est pas dans $H^\perp$.

1er cas : soit $f \in E$ telle que f est non nulle sur $[c, 1]$. Il existe donc a, b tels que $c \leq a < b \leq 1$ tel que f soit strictement positive ou strictement négative sur $[a, b]$. La fonction g définie par le graphique :



est un élément de H et $< f \,|\, g > = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$ (on intègre sur un intervalle non réduit à un point une fonction non nulle de signe constant).

2ème cas : soit $f \in E$ non nulle mais nulle sur $[c, 1]$. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe $x_0 \in [0, c[$ tel que $f(x_0) > 0$. En fixant $M \in]0, f(x_0)[$, il existe alors a et b tels que $0 \leq a < b$ et $f(x) \geq M > 0$ pour tout $x \in [a, b]$ (on a $b < c$ car $f(c) = 0$). Par continuité, il existe alors $d \in]b, c[$ tel que $f(x) \leq \frac{M}{2}$ pour tout $x \in [d, c]$. Quitte à restreindre l'intervalle $[a, b]$ ou l'intervalle $[d, c]$, on peut supposer que $b - a = c - d = \delta$. On peut cette fois considérer la fonction g :



On a bien $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t + \int_d^c g(t)\mathrm{d}t = 0$ donc $g \in H$ et :

$$< f \,|\, g >= \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \neq 0 + \int_d^c f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geq M \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t + \frac{M}{2} \int_d^c g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{M(b-a)}{4} > 0$$

car sur $[a, b]$, $g \geq 0$ et $f \geq M$ alors que sur $[c, d]$, $g \leq 0$ et $f \leq M/2$.

Dans les deux cas, nous avons défini $g \in H$ tel que $< f \,|\, g > \neq 0$: l'orthogonal de H est donc réduit à $\{0\}$.

Remarque : si F est un sous-espace vectoriel non fermé d'un espace préhilbertien, on a $F \bigoplus F^\perp \neq E$, puisque $F \bigoplus F^\perp \subsetneq \overline{F} \bigoplus F^\perp$. Cet exercice donne un exemple de sous-espace F fermé pour lequel $F \bigoplus F^\perp$ n'est toujours pas égal à E. Ce résultat fait aussi référence au théorème de projection dans un espace de Hilbert : si E est un espace préhilbertien complet et si F est un sous-espace fermé de E, alors $F \bigoplus F^\perp = E$. Dans notre exemple, l'espace E n'est pas complet.

18) a) (i) On a :

$$\varphi(2x, y) = \frac{1}{4}\left(\|2x + y\|^2 - \|2x - y\|^2\right)$$

or $\|2x+y\|^2 = \|x+(x+y)\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|x+y\|^2 - \|y\|^2$ et $\|2x-y\|^2 = \|x+(x-y)\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|x-y\|^2 - \|y\|^2$, donc

$$\varphi(2x, y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = 2\varphi(x, y).$$

(ii) En utilisant (i), on a :

$$\varphi(x, y) + \varphi(x', y) = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x'+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x'-y}{2}\right\|^2$$

or

$$\begin{cases} 2\left(\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\dfrac{x'+y}{2}\right\|^2\right) = \left\|\dfrac{x+x'+2y}{2}\right\|^2 + \left\|\dfrac{x-x'}{2}\right\|^2 \\[2ex] 2\left(\left\|\dfrac{x-y}{2}\right\|^2 + \left\|\dfrac{x'-y}{2}\right\|^2\right) = \left\|\dfrac{x+x'-2y}{2}\right\|^2 + \left\|\dfrac{x-x'}{2}\right\|^2 \end{cases}$$

et donc, en sommant ces deux égalités :

$$\varphi(x, y) + \varphi(x', y) = \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+x'+2y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x+x'-2y}{2}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\,\varphi(x+x', 2y) = \varphi(x+x', y)$$

(comme φ est symétrique, on a également $\varphi(x, 2y) = 2\varphi(x, y)$ pour tout $(x, y) \in E$).

(iii) Soit $x, y \in E$. On montre facilement par récurrence sur n la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(nx, y) = n\varphi(x, y).$$

Toujours pour $n \in \mathbb{N}$, on a $0 = \varphi(0, y) = \varphi(nx + (-nx)) = \varphi(nx, y) + \varphi(-nx, y)$, donc $\varphi(-nx, y) = -\varphi(nx, y) = -n\varphi(x, y)$. On passe ensuite aux rationnels : pour $r = p/q \in \mathbb{Q}$ (avec p, q entiers), on a $q\varphi(rx, y) = \varphi(px, y) = p\varphi(x, y)$ et donc :

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ \varphi(rx, y) = r\varphi(x, y).$$

On conclut par un argument de densité : l'application $\lambda \longmapsto \varphi(\lambda x, y) - \lambda\varphi(x, y)$ est continue (car le produit sur $\mathbb{R}$, le produit externe et la norme sont continues) et est nulle sur $\mathbb{Q}$, donc elle est nulle sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) : ceci achève de montrer que φ est linéaire par rapport àa sa première variable.

φ étant clairement symétrique, c'est une forme bilinéaire symétrique sur E. On a ensuite :

$$\forall x \in E \setminus \{0\},\ \varphi(x, x) = \|x\|^2 > 0$$

donc φ est un produit scalaire et la norme qui lui est associée est égale à $\|\ \|$.

b) Il faut commencer par rappeler ce que l'on appelle "ellipse". Nous utiliserons la définition :

Une partie $\mathcal{E}$ d'un plan affine $\mathcal{P}$ est une ellipse si il existe un repère de $\mathcal{P}$ dans lequel l'équation de $\mathcal{E}$ est de la forme $x^2 + y^2 = 1$.

Notons S la sphère unité de E.

Ainsi, si $\|\ \|$ est une norme euclidienne, associé au produit scalaire $\langle\ |\ \rangle$, et si P est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2, on peut fixer une base orthonormale (e_1, e_2) de P et l'équation de $S \cap P$ dans le repère $(0, (e_1, e_2))$ est bien $x^2 + y^2 = 1$.

Réciproquement, supposons que $S \cap P$ est une ellipse pour tout plan P de E. Pour montrer que $\|\ \|$ est une norme euclidienne, il suffit de démontrer qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme. Soient donc $u, v \in E$. Fixons un plan P contenant u et v (si E est de dimension 1, il n'y a rien à démontrer puisque toute norme sur un espace de dimension 1 est euclidienne). Il existe un repère $(A, (e_1, e_2))$ de P (on voit le plan vectoriel P comme un plan affine) dans lequel l'équation de $\mathcal{E} = S \cap P$ est $x^2 + y^2 = 1$. Comme le "point" A est le centre de symétrie de $\mathcal{E}$, on a nécessairement $A = 0$ (le centre de la sphère est le vecteur nul). Munissons P du produit scalaire $\langle\ |\ \rangle$ pour lequel (e_1, e_2) est une base orthonormale ; en notant $\|\ \|_P$ la norme associée à ce produit scalaire, nous avons pour tout $xe_1 + ye_2 \in P \setminus \{0\}$:

$$\frac{xe_1 + ye_2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \in \mathcal{E}$$

(d'après l'équation de $\mathcal{E}$), et donc

$$1 = \left\| \frac{xe_1 + ye_2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\| = \frac{\|xe_1 + ye_2\|}{\|xe_1 + ye_2\|_P}$$

On en déduit que $\|\ \|_P$ est la restriction à P de la norme de E ; comme $\|\ \|_P$ est une norme euclidienne, elle vérifie l'égalité du parallégramme, et donc :

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = \|u + v\|_P^2 + \|u - v\|_P^2 = 2(\|u\|_P^2 + \|v\|_P^2) = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Ainsi, $\|\ \|$ est une norme euclidienne, puisqu'elle vérifie l'égalité du parallélogramme.

19) En notant $I = \{-1, 1\}^p$, nous avons :

$$\forall \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) \in I,\ \left\| \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i u_i \right\|^2 \leq C^2$$

soit

$$\forall \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \in I,\ \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le p} \varepsilon_i \varepsilon_j \ < u_i \,|\, u_j > \le C^2$$

En sommant ces 2^p inégalités, nous obtenons :

$$2^p \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2 + 2 \sum_{\varepsilon \in I} \left(\sum_{1\le i<j\le p} \varepsilon_i \varepsilon_j \ < u_i \,|\, u_j > \right) \le 2^p C^2$$

mais

$$\sum_{\varepsilon \in I} \left(\sum_{1\le i<j\le p} \varepsilon_i \varepsilon_j \ < u_i \,|\, u_j > \right) = \sum_{1\le i<j\le p} < u_i \,|\, u_j > \left(\sum_{\varepsilon \in I} \varepsilon_i \varepsilon_j \right) = 0$$

car pour $1 \le i < j \le p$, on a :

$$\sum_{\varepsilon \in I} \varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_{\substack{\varepsilon_k \in \{-1,1\} \\ k \notin \{i,j\}}} \left(\underbrace{\sum_{\varepsilon_i \in \{-1,1\}} \sum_{\varepsilon_j \in \{-1,1\}} \varepsilon_i \varepsilon_j}_{=0} \right) = 0.$$

20) Soient x et y deux éléments de ℓ_2. Nous avons (inégalité de Cauchy-Schwarz) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} |x(k)y(k)| \le \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x(n)^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{n} y(n)^2} \le \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} x(n)^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} y(n)^2} < +\infty$$

donc la série de terme général $x(n)y(n)$ est absolument convergente. On en déduit que

$$(x(n) + y(n))^2 = x(n)^2 + 2x(n)y(n) + y(n)^2$$

est également un terme général de série convergente : $x + y \in \ell_2$.

La suite nulle est élément de ℓ_2 et la stabilité par produit externe est évidente : ℓ_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Nous avons démontré que, pour $x, y \in \ell_2$, la série $\sum_{n\ge 0} x(n)y(n)$ était convergente : l'application φ est donc définie. Elle est trivialement symétrique et bilinéaire ; on a enfin :

$$\forall x \in \ell_2 \setminus \{0\},\ \varphi(x,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)^2 > 0$$

donc φ est un produit scalaire sur ℓ_2.

b) Soit $(x_k)_{k\ge 0}$ une suite de Cauchy de ℓ_2, c'est-à-dire une suite vérifiant :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, p, q \ge k_\varepsilon,\ \|x_p - x_q\|_2 \le \varepsilon \qquad (1)$$

Pour $\varepsilon > 0$, fixons un k_ε comme ci-dessus. Pour $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\forall p, q \ge k_\varepsilon,\ |x_p(n) - x_q(n)| \le \|x_p - x_q\|_2 \le \varepsilon$$

donc la suite $(x_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$: elle converge (voir en fin d'exercice la preuve de ce résultat). Notons $x(n)$ sa limite ; n étant quelconque, nous avons ainsi défini une suite $x \in \mathbb{R}^N$ et $(x_p)_{p\ge 0}$ converge simplement vers x (i.e. que $x_p(n) \xrightarrow[p\to+\infty]{} x(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Nous allons maintenant montrer que $x \in \ell_2$ et que x_p converge vers x au sens de $\|\ \|_2$. Pour $\varepsilon > 0$, reprenons le k_ε donné par (1). Nous avons :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \ge k_\varepsilon,\ \sum_{n=0}^{N} (x_p(n) - x_q(n))^2 \le \|x_p - x_q\|_2^2 \le \varepsilon^2$$

donc, en fixant N et p et en faisant tendre q vers l'infini :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall p \geq k_\varepsilon,\ \sum_{n=0}^{N}(x_p(n)-x(n))^2 \leq \varepsilon^2.$$

Ceci prouve que pour $p \geq k_\varepsilon$, la suite $x_p - x$ est élément de ℓ_2 et que $\|x_p - x\|_2 \leq \varepsilon$. On en déduit que $x \in \ell_2$ et que $\|x_p - x\|_2 \leq \varepsilon$ pour tout $p \geq k_\varepsilon$: cela traduit que x_p converge vers x dans l'espace ℓ_2.

Preuve de la complétude de $\mathbb{R}$: soit $(a_k)_{k\in\mathbb{R}}$ une suite de Cauchy de réels. La suite (a_k) est alors bornée : avec $\varepsilon = 1$, il existe un rang k_1 tel que :

$$\forall p, q \geq k_1,\ |a_p - a_q| \leq 1.$$

En particulier :

$$\forall p \geq k_1,\ |a_p| \leq |a_p - a_{k_1}| + |a_{k_1}| \leq 1 + |a_{k_1}|$$

donc la suite (a_k) est bornée, puisque qu'elle est bornée à partir du rang k_1.

Elle possède ensuite une valeur d'adhérence λ (théorème de Bolzano-Weïerstrass). Pour $\varepsilon > 0$, on peut fixer k_ε tel que :

$$\forall p, q \geq k_\varepsilon,\ |a_p - a_q| \leq \varepsilon.$$

Par définition d'une valeur d'adhérence, il existe alors $q \geq k_\varepsilon$ tel que $|a_q - \lambda| \leq \varepsilon$. On en déduit :

$$\forall p \geq k_\varepsilon,\ |a_p - \lambda| \leq |a_p - a_q| + |a_q - \lambda| \leq 2\varepsilon$$

Nous avons donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon,\ \forall p \geq k_\varepsilon,\ |a_p - \lambda| \leq 2\varepsilon$$

donc $(a_p)_{p\geq 0}$ converge vers λ.

Exercices Mines-Centrale: espaces euclidiens

21) a) Soit $(\varepsilon_i)_{k+1\leq i\leq n}$ une base orthonormale de $V^\perp$. Le projeté orthogonal de e_i sur $V^\perp$ est le vecteur :

$$p_{V^\perp}(e_i) = \sum_{j=k+1}^{n} \langle\, e_i \,|\, \varepsilon_j \,\rangle\ \varepsilon_j$$

et sa norme est la distance de e_i à V. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} d^2(e_i, V) &= \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{j=k+1}^{n} \langle\, e_i \,|\, \varepsilon_j \,\rangle\ \varepsilon_j \right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} |\,\langle\, e_i \,|\, \varepsilon_j \,\rangle\,|^2 \quad \text{car } (\varepsilon_j)_{k+1\leq j\leq n} \text{ est une famille orthonormale} \\
&= \sum_{j=k+1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |\,\langle\, e_i \,|\, \varepsilon_j \,\rangle\,|^2 \\
&= \sum_{j=k+1}^{n} \|\varepsilon_j\|^2 \quad \text{car } (e_i)_{1\leq i\leq n} \text{ est une famille orthonormale} \\
&= n-k
\end{aligned}$$

b) On en déduit que $n - k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d^2(e_i, V) \leq n\, a^2(V)$, avec égalité si et seulement si $d(e_i, V) = a(V)$ pour tout i. Autrement-dit, si $a(V) \geq \sqrt{\dfrac{n-k}{n}}$ avec égalité si et seulement si les e_i sont équidistants de V.

c) Supposons que V est stable par π. Comme π est une isométrie, on en déduit :

- $\pi(V) = V$ car $\pi(V) \subset V$ et $\pi(V)$ a même dimension (finie) que V ;
- pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $d(e_i, V) = d(\pi(e_i), \pi(V)) = d(e_{i-1}, V)$.

On en déduit que les e_i sont équidistants de V, avec $a(V) = d(e_1, V) = \cdots = d(e_n, V)$, puis le a) donne :

$$a(V) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d^2(e_i, V) \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{n-k}{n}}.$$

d) Nous devons montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, il existe un sous-espace V stable par π de dimension k. Nous allons pour cela montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de π est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de taille 1 ou 2 : si $n = 2p$ est pair, il y aura deux blocs de taille 1 et $p-1$ blocs de taille 2 ; si $n = 2p+1$, il y aura un bloc de taille 1 et p blocs de taille 2. On peut par exemple remarquer que le polynôme minimal de π est $X^n - 1$; c'est donc aussi son polynôme caractéristique et π a n valeurs propres complexes simples (ce sont les n racines n-ièmes de l'unité.

Si $n = 2p$, 1 et -1 sont les valeurs propres réelles et π a $2p-2$ valeurs propres complexes non réelles deux à deux conjuguées :

$$\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_{p-1}, \overline{\lambda_{p-1}}$$

En fixant un vecteur propre (complexe) Z_i pour λ_i, les vecteurs réels $\mathrm{Re}(Z_i)$ et $\mathrm{Im}(Z_i)$ engendrent un plan F_i de $\mathbb{R}^n$ stable par π. On en déduit la décomposition :

$$\mathbb{R}^n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_{p-1} \oplus F_p \oplus F_{p+1}$$

où $F_1, \dots, F_{p-1}$ sont des plans stables par π, $F_p = \mathrm{Ker}(\pi - Id)$ et $F_{p+1} = \mathrm{Ker}(\pi + Id)$ sont des droites stables par π. Pour k compris entre 0 et n, on peut donc définir un espace F de dimension k comme somme directe de certains des P_i : nous aurons ainsi un sous-espace de dimension k stable par π (une somme de s.e.v. stables par π est stable par π).

Si $n = 2p+1$, 1 est la seule valeur propre réelle et on construit de la même façon une somme directe :

$$\mathbb{R}^n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p \oplus F_{p+1}$$

où $F_1, \dots, F_p$ sont des plans stables par π et $F_{p+1} = \mathrm{Ker}(\pi - Id)$ est une droite stable par π : on conclut comme dans le premier cas.

22) a) $\|AX - B\|$ est la distance de AX à B et AX décrit l'image de A quand X décrit $\mathbb{R}^q$; cette distance sera donc minimale quand AX sera égal au projeté orthogonal de B sur les sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(A)$. En notant $C = AX_0$ ce projeté, nous avons donc démontré que $\mathcal{S}$ est non vide et que $\mathcal{S} = X_0 + \mathrm{Ker}(A)$.

b) Nous avons, pour $X \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
X \in \mathcal{S} &\iff AX = p_{\mathrm{Im}(A)}(B) \\
&\iff \begin{cases} AX \in \mathrm{Im}(A) \\ \\ B - AX \in (\mathrm{Im}(A))^{\perp} \end{cases} \\
&\iff \forall Y \in \mathbb{R}^d, (B - AX) \perp AY \\
&\iff \forall Y \in \mathbb{R}^d,\ Y^{\top} A^{\top} (B - AX) = 0 \\
&\iff A^{\top}(B - AX) = 0
\end{aligned}$$

car le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à $\mathbb{R}^d$. Nous avons donc :

$$X \in \mathcal{S} \iff A^{\top} AX = A^{\top} B.$$

c) On a ici $A' = A^\top A = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ et $B' = A^\top B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$: la seule solution au sens des moindres carrés est $X_0 = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}$.

23) a) Les applications $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$ (de $\mathbb{R} \times E$ dans E), $x \longmapsto \|x\|^2$ (de $E \setminus \{0\}$ dans $]0, +\infty[$) et $\alpha \longmapsto 1/\alpha$ (de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$) sont de classe C^1, donc $\mathcal{I}$ est de classe C^1 comme composition d'applications de classe C^1. Pour $x \in E \setminus \{0\}$ et u assez proche de 0, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(x+u) &= \frac{x+u}{\|x+u\|^2} = \frac{x+u}{\|x\|^2 + 2 < u \,|\, x > + \|u\|^2} = \frac{1}{\|x\|^2}\left(1 + 2\,\frac{< u \,|\, x >}{\|x\|^2} + \frac{\|u\|^2}{\|x\|^2}\right)^{-1}(x+u) \\
&= \frac{1}{\|x\|^2}\left(1 - 2\,\frac{< u \,|\, x >}{\|x\|^2} + o(u)\right)(x+u) \\
&= \mathcal{I}(x) - 2\,\frac{< u \,|\, x >}{\|x\|^4} x + \frac{u}{\|x\|^2} + o(u)
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{d}\,\mathcal{I}(x)(u) = -2\,\dfrac{< u \,|\, x >}{\|x\|^4} x + \dfrac{u}{\|x\|^2}$.

Pour $x \in E \setminus \{0\}$, $\mathcal{I}(\mathcal{I}(x)) = \dfrac{i(x)}{\|\mathcal{I}(x)\|^2} = \dfrac{\dfrac{x}{\|x\|^2}}{\left\|\dfrac{x}{\|x\|^2}\right\|^2} = x$ donc $\mathcal{I}$ est involutive.

Pour $x, y \in E \setminus \{0\}$:

$$\begin{cases}
\|\mathcal{I}(x) - \mathcal{I}(y)\|^2 = \|\mathcal{I}(x)\|^2 + 2 < \mathcal{I}(x) \,|\, \mathcal{I}(y) > + \|\mathcal{I}(y)\|^2 = \dfrac{1}{\|x\|^2} - 2\,\dfrac{< x \,|\, y >}{\|x\|^2\|y\|^2} + \dfrac{1}{\|y\|^2} \\[2ex]
\dfrac{\|x-y\|^2}{\|x\|^2\,\|y\|^2} = \dfrac{\|x\|^2 - 2 < x \,|\, y > + \|y\|^2}{\|x\|^2\,\|y\|^2} = \dfrac{1}{\|y\|^2} - 2\dfrac{< x \,|\, y >}{\|x\|^2\|y\|^2} + \dfrac{1}{\|x\|^2}
\end{cases}$$

donc $\|\mathcal{I}(x) - \mathcal{I}(y)\| = \dfrac{\|x-y\|}{\|x\|\,\|y\|}$.

b) Par composition, δ_1 et δ_2 sont de classe C^1 avec $\delta_1'(t) =< \mathrm{d}i(\gamma_1(t)) \,|\, (\gamma_1'(t)) >$ et $\delta_2'(t) =< \mathrm{d}i(\gamma_2(t)) \,|\, (\gamma_2'(t)) >$. Pour montrer que ces arcs sont réguliers, il suffit de montrer que pour tout $x \neq 0$, $\mathrm{d}\,\mathcal{I}(x)$ est injective (on aura donc $\mathrm{d}\,\mathcal{I}(\gamma_j(t)).(\gamma_j'(t)) \neq 0$ puisque $\gamma_j'(t) \neq 0$ pour $j = 1$ ou 2). Nous avons :

$$\mathrm{d}\,\mathcal{I}(x)(u) = 0 \Longleftrightarrow \|x\|^2 u = 2 < u \,|\, x > x \Longleftrightarrow \big(\exists \alpha \in \mathbb{R},\ u = \alpha x \text{ et } \|x\|^2 \alpha x = 2\alpha \|x\|^2\, x\big) \Longleftrightarrow u = 0$$

Le noyau de l'endomorphisme $\mathrm{d}\,\mathcal{I}(x)$ est donc bien réduit à $\{0\}$.

Notons $x = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $u = \gamma_1'(0)$ et $v = \gamma_2'(0)$. Nous devons démontrer :

$$\cos\big(\widehat{\delta_1'(0), \delta_2'(0)}\big) = \frac{< \mathrm{d}\,\mathcal{I}(x)(u) \,|\, \mathrm{d}\,\mathcal{I}(x)(v) >}{\|\mathrm{d}\,\mathcal{I}(x)(u)\|\,\|\mathrm{d}\,\mathcal{I}(x)(v)\|} = \frac{< u \,|\, v >}{\|u\|\,\|v\|} = \cos\big(\widehat{\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)}\big)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\,\mathcal{I}(x)(u).\mathrm{d}\,\mathcal{I}(x)(v) = \left(-2\,\frac{< u \,|\, x >}{\|x\|^4}\, x + \frac{u}{\|x\|^2}\right).\left(-2\,\frac{< v \,|\, x >}{\|x\|^4}\, x + \frac{v}{\|x\|^2}\right) \\
&= \frac{4}{\|x\|^8} < u \,|\, x >< v \,|\, x > \|x\|^2 - \frac{2}{\|x\|^6} < u \,|\, x >< x \,|\, v > - \frac{2}{\|x\|^6} < v \,|\, x >< u \,|\, v > + \frac{1}{\|x\|^4} < u \,|\, v > \\
&= \frac{< u \,|\, v >}{\|x\|^4}
\end{aligned}$$

et on obtient de la même manière $\|\mathrm{d}\,\mathcal{I}(x)(u)\|^2 = \dfrac{\|u\|^2}{\|x\|^4}$ et $\|\mathrm{d}\,\mathcal{I}(x)(v)\|^2 = \dfrac{\|v\|^2}{\|x\|^4}$, ce qui donne bien l'égalité demandée.

c) • Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine ne passant pas par 0. Il existe un vecteur u non nul tel que $\mathcal{H} = \{x \in E,\ x.u = 1\}$. En effet, la direction H de $\mathcal{H}$ est un hyperplan vectoriel et en choisissant un vecteur e unitaire orthogonal à H, $\mathcal{H}$ a une équation de la forme $x.e = \alpha$ où α est un scalaire non nul (car $\mathcal{H}$ ne passe pas par 0) : le vecteur $u = \dfrac{e}{\alpha}$ convient. Comme $\mathcal{I}$ est involutive, nous pouvons écrire, pour $y \neq 0$:

$$y \in \mathcal{I}(\mathcal{H}) \iff i(y) \in \mathcal{H} \iff < \mathcal{I}(y) \,|\, u >= 1 \iff < y \,|\, u >= \|y\|^2 \iff \|y - u/2\|^2 = \|u\|^2/4.$$

On reconnaît ici l'équation de la sphère de centre $u/2$ et de rayon $\|u\|/2$ (cette sphère passe par l'origine). L'image de $\mathcal{H}$ est donc cette sphère privée du point 0.

• D'après le calcul précédent ($\mathcal{I}$ est involutive), une sphère de centre $v \neq 0$ passant par 0 a pour image par $\mathcal{I}$ l'hyperplan affine (ne passant par par 0) d'équation $< x \,|\, v >= \dfrac{1}{2}$.

• Soit S une sphère de centre u et de rayon R ne passant pas par 0 (on a donc $\|u\| \neq R$). On peut encore écrire, pour $y \in E \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{I}(S) &\iff \mathcal{I}(y) \in S \\ &\iff \|\mathcal{I}(y) - u\|^2 = R^2 \\ &\iff 1 - 2 < y \,|\, u > + \|y\|^2(\|u\|^2 - R^2) = 0 \\ &\iff \left\| y - \frac{u}{\|u\|^2 - R^2} \right| Vert^2 = \frac{\|u\|^2 + R^2}{(\|u\|^2 - R^2)^2} \end{aligned}$$

et on reconnaît l'équation de la sphère de centre $v = \dfrac{u}{\|u\|^2 - R^2}$ et de rayon $r = \dfrac{\sqrt{\|u\|^2 + R^2}}{|\|u\|^2 - R^2|}$

24) a) Nous avons :

$$\begin{aligned} z \in H &\iff ||x - y||^2 = ||f(x) - y||^2 \\ &\iff ||x||^2 - 2x.y + ||y||^2 = ||f(x)||^2 - 2f(x).y + ||y||^2 \\ &\iff x.y = f(x).y \ (f \text{ conserve la norme}) \\ &\iff (x - f(x)).y = 0 \\ &\iff z \in (x - f(x))^\perp \end{aligned}$$

Comme $x - f(x)$ est un vecteur non nul, H est bien un hyperplan vectoriel.

Si $a \in F_f$, alors $a.x = f(a).f(x) = a.f(x)$, donc $a \in H$, puis $(r \circ f)(a) = r(a) = a$: $F_f \subset F_{r \circ f}$.

Enfin, $x \in F_{r \circ f} \setminus F_f$. En effet, $x = \dfrac{x + f(x)}{2} + \dfrac{x - f(x)}{2}$ avec :

- $\dfrac{x - f(x)}{2} \in \mathrm{Vect}(x - f(x)) = H^\perp$;
- $\dfrac{x + f(x)}{2} \in (x - f(x))^\perp = H$ car $(x + f(x)).(x - f(x)) = ||x||^2 - ||f(x)||^2 = 0$.

On en déduit que $r(x) = \dfrac{x + f(x)}{2} - \dfrac{x - f(x)}{2} = f(x)$, ou encore $r(f(x)) = x$ puisque $f^2 = Id$.

b) Nous allons montrer par récurrence sur k le résultat suivant : si $f \in O(E)$ a un espace de point de dimension $n - k$, f est le produit d'au plus k réflexions.

- si $k = 0$, $F_f = E$ et $f = Id$ est le produit de 0 réflexion ;
- soit $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et supposons le résultat démontré jusqu'au rang k ; si f a un espace de points fixes de dimension $n - (k+1)$, nous pouvons appliquer le a : il existe un réflexion r telle que $F_{r \circ f}$ soit de dimension au moins $n - k$. Par hypothèse de récurrence, il existe $j \leq k$ et des réflexions $r_1, r_2, \ldots, r_j$ telles que $r \circ f = r_j \circ \cdots \circ r_1$, ce qui s'écrit $f = r \circ r_j \circ \cdots \circ r_1$: f est produit d'au plus $k + 1$ réflexions.

c) Soit $f \in O(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est égale à

$$M = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R_{\theta_k} \end{pmatrix}$$

Notons $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $S_\theta = JR_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Si $A_1, \dots, A_m$ sont des matrices carrées, nous noterons $diag(A_1, A_2, \dots, A_m)$ la matrices diagonales par blocs dont les A_i sont les blocs diagonaux. Nous avons alors :

$$M = \left(\prod_{j=1}^{q} diag(I_{p+j-1}, -1, I_{n-p-j}) \right) \times \left(\prod_{j=1}^{k} diag(I_{p+q+2j-2}, J, I_{n-p-q-2j}) \times diag(I_{p+q+2j-2}, S_{\theta_j}, I_{n-p-q-2j}) \right)$$

Ainsi, M est le produit de $q + 2k$ matrices de réflexions : f est donc la composée de $n - p$ réflexions.

25) Dans une base orthonormale bien choisie, f a pour matrice :

$$M = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R_{\theta_k} \end{pmatrix}.$$

Comme $\det M = 1$, q est pair. Nous pouvons donc écrire, en notant $\operatorname{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)$ la matrice diagonale par blocs dont les A_i sont les blocs diagonaux :

$$M = \left(\prod_{j=1}^{q/2} \operatorname{diag}(I_{p+2j-2}, -I_2, I_{n-p-2j}) \right) \times \left(\prod_{j=1}^{k} \underbrace{\operatorname{diag}(I_{p+q+2j-2}, R_{\theta_j}, I_{n-p-q-2j})}_{=M_j} \right)$$

Notons $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $S_\theta = JR_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$: ces matrices sont des matrices de $O_2^-(\mathbb{R})$, i.e. des matrices de réflexions. Nous avons alors pour $j \in \{1, \dots, k\}$:

$$M_j = \begin{cases} \operatorname{diag}(I_{p+q+2j-3}, -1, J, I_{n-p-q-2j}) \times \operatorname{diag}(I_{p+q+2j-3}, -1, S_\theta, I_{n-p-q-2j}) & \text{si } j \geq 2 \\ \operatorname{diag}(I_{p+q+2j-2}, J, -1, I_{n-p-q-2j-1}) \times \operatorname{diag}(I_{p+q+2j-2}, S_\theta, -1, I_{n-p-q-2j-1}) & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

Ainsi, M est produit de matrices de demi-tours et f est la composée de $q/2 + 2k$ demi-tours. Ce nombre n'est pas optimal : il est ainsi possible d'utiliser les -1 du bloc $-I_q$ à la place des -1 introduits artificiellement ci-dessus. Par exemple, avec $q = 2$ et $k = 1$:

$$M = \operatorname{diag}(I_p, -1, 1, J) \times \operatorname{diag}(I_{p+1}, -1, S_{\theta_1})$$

Exercices Mines-Centrale: matrices et endomorphismes symétriques

26) a) En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, nous avons $\lambda_i > 0$ pour tout i (car A est définie positive) et

$$(\det(A))^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\lambda_1 \dots \lambda_n} \leq \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(A)$$

par concavité de la fonction logarithme.

La matrice $B = (\gamma_i \gamma_j a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ s'écrit ${}^tPAP$ où P est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Comme P est inversible, A et B sont congruentes : comme A est définie positive, B l'est également (A et B sont les matrices de la même forme bilinéaire symétrique dans des bases différentes). On peut donc écrire, en appliquant l'inégalité précédente à B :

$$\left(\gamma_1^2 \dots \gamma_n^2 \det(\mathrm{A})\right)^{\frac{1}{n}} = (\det(B))^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 a_{i,i}.$$

On peut alors choisir $\forall i,\ \gamma_i = \dfrac{1}{\sqrt{a_{i,i}}}$ (les $a_{i,i}$ sont strictement positifs car A est définie positive) et on obtient :

$$\left(\frac{\det(\mathrm{A})}{a_{1,1} \dots a_{n,n}}\right)^{\frac{1}{n}} \le 1$$

soit $\det(\mathrm{A}) \le a_{1,1} \dots a_{n,n}$.

b) φ_A est un produit scalaire et φ_B une forme bilinéaire symétrique : il existe donc une base de $\mathbb{R}^n$ orthonormale pour φ_A et orthogonale pour φ_B. En notant P la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base, nous avons donc :

$$P^\top AP = I_n \text{ et } {}^tPBP = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Nous avons donc :

$$(\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}} = (\det(P))^{-\frac{2}{n}} \left(1 + (\mu_1 \dots \mu_n)^{\frac{1}{n}}\right)$$
$$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} = (\det(P))^{-\frac{2}{n}} \left((1+\mu_1)\dots(1+\mu_n)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Comme B est définie positive, les μ_i sont strictement positifs : on pose, pour tout i, $\lambda_i = \ln(\mu_i)$; la majoration demandée s'écrit donc, en simplifiant par $(\det(P))^{-\frac{2}{n}}$ et en composant par le ln :

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right) = \ln\left(1 + e^{\frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + e^{\lambda_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$$

Cette inégalité est vérifiée car la fonction f est convexe : elle est de classe C^2 et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0.$$

Comme f est strictement convexe, on a égalité si et seulement si les λ_i sont tous égaux, ce qui se traduit par l'existence d'un $\mu > 0$ tel que $B = \mu A$.

c) A est symétrique et inversible, donc A^{-1} est définie et symétrique. Comme ses valeurs propres sont les inverses de celles de A, elles sont également strictement positives : A^{-1} est symétrique définie positive et φ est un produit scalaire. On a ensuite :

- $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(X, f(Y)) = X^\top A^{-1}ABY = X^\top BAA^{-1}Y = (ABX)^\top A^{-1}Y = \varphi(f(X), Y)$;
- $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \varphi(X, f(X)) = X^\top A^{-1}ABX = X^\top BX > 0$

Par le théorème spectral, f (donc AB) est diagonalisable et ses valeurs valeurs propres sont strictement positives : on en déduit que $(\det AB)^{\frac{1}{n}} \le \dfrac{1}{n}\mathrm{tr}AB$ comme au a).

27) Comme u est symétrique défini positif, il existe une base orthonormale $(e_i)_{1 \le i \le n}$ et une famille $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout i. Pour $x = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i \in E$, on a :

$$\varphi(x) = (u(x)\cdot x)(u^{-1}(x)\cdot x) = \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}x_i^2\right).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

$$\varphi(x) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{\lambda_i}\, x_i\right)\left(\frac{1}{\lambda_i}\, x_i\right)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2$$

Ainsi, pour x de norme 1, $\varphi(x) \geq 1$. Comme $x = e_1$ donne un cas d'égalité, le minimum cherché est égal à 1.

28) a) Par définition, on a :

$$\forall S, T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ A \leq B \Longleftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n,\ X^\top AX \leq X^\top BX.$$

La relation $\leq$ est ainsi clairement réflexive et transitive. Supposons maintenant que $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifient $A \leq B$ et $B \leq A$. La matrice $A - B$ est donc symétrique positive et négative : cela prouve que ses valeurs propres sont toutes nulles (elles sont à la fois positive et négative), donc $A - B$ est nulle (elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont nulle). On a donc $A = B$.

b) Soit $(A_k)_{k\geq 0}$ une suite croissante et majorée de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe donc $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $S_k \leq T$ pour tout k. On a donc :

$$\begin{cases} \forall X \in \mathbb{R}^n,\ \forall k \in \mathbb{N},\ X^\top XA_kX \leq X^\top XA_{k+1}X \\ \\ \forall X \in \mathbb{R}^n,\ \forall k \in \mathbb{N},\ X^\top A_kX \leq X^\top TX \end{cases}$$

Ainsi, à X fixé, la suite réelle $(X^\top A_kX)_{k\geq 0}$ est croissante et majorée : elle admet donc une limite $\ell(X)$. On peut alors écrire, en notant $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rcl} \forall i, j \in [\![1, n]\!],\ A_k[i, j] & = & E_i{}^\top A_kE_j \\ & = & \dfrac{1}{4}\left((E_i + E_j)^\top A_k(E_i + E_j) - (E_i - E_j)^\top A_k(E_i - E_j)\right) \\ & \xrightarrow[k\to+\infty]{} & \dfrac{1}{4}\left(\ell(E_i + E_j) - \ell(E_i - E_j)\right). \end{array}$$

Ceci traduit que la suite $(A_k)_{k\geq 0}$ est convergente (et sa limite est dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé).

c) D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \Delta$ avec $\lambda_i > 0$ pour tout i. En posant $X = PU$ et $V = PY$, on a

$$J_{A,Y}(X) = U^\top \Delta U + 2V^\top U = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^2 + 2u_iv_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(u_i + \frac{v_i}{\lambda_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^2}{\lambda_i}.$$

$J_{A,Y}(X)$ est donc minorée par $-\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^2}{\lambda_i}$, valeur atteinte quand $u_i = -\frac{v_i}{\lambda_i}$ pour tout i. Ainsi, $J_{A,Y}$ est minorée et son minimum est atteint quand $U = -\Delta^{-1}V$, i.e. quand $X = -A^{-1}Y$. On a donc :

$$\min_{X\in\mathbb{R}^n} J_{A,Y}(X) = J_{A,Y}(-A^{-1}Y) = -{}^tYA^{-1}Y.$$

Si $A, B \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$ vérifient $A \leq B$, on a, pour $Y \in \mathbb{R}^n$ quelconque :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ J_{A,Y}(X) = X^\top AX + 2Y^\top X \leq X^\top BX + 2Y^\top X = J_{B,Y}(X).$$

On en déduit donc :

$$-Y^\top A^{-1}Y = \min_{X\in\mathbb{R}^n} J_{A,Y}(X) \leq \min_{X\in\mathbb{R}^n} J_{B,Y}(X) = -Y^\top B^{-1}Y$$

ce qui prouve que $A^{-1} \geq B^{-1}$: l'application $A \longmapsto A^{-1}$ est décroissante sur $\mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$.

29) a) D'après le théorème spectral, il existe $Q = (q_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = Q^\top \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)Q$. On en déduit :

$$\forall i, j,\ a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k q_{k,i} q_{k,j}$$

Ainsi, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k q_{k,i}^2$ où les coefficients $q_{k,i}^2$ sont positifs et de somme égale à 1 (la matrice Q est orthogonale : ses vecteurs colonnes sont unitaires). On en déduit que les $a_{i,i}$ appartiennent à I et la convexité de f permet d'écrire :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(a_{i,i}) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k q_{k,i}^2\right) \leq \sum_{k=1}^{n} q_{k,i}^2 f(\lambda_k).$$

On en déduit :

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_{i,i}) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} q_{k,i}^2 f(\lambda_k)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} q_{k,i}^2\right) f(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)$$

car les lignes de Q sont également de norme 1.

Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, les λ_i sont strictement positifs : on peut appliquer le a) avec $I =]0, +\infty[$ et $f = -\ln$: cela donne

$$-\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \ln a_{i,i} \leq -\sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i = -\ln\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right) = -\ln(\det A)$$

d'où le résultat demandé, par croissance de la fonction exponentielle.

Si $A \in S_n^{+}(\mathbb{R}) \setminus S_n^{++}(\mathbb{R})$, A a une valeur propre nulle, donc $\det A = 0$; comme $a_{i,i} = E_i^\top A E_i \geq 0$ (en notant E_i le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$), le résultat demandé est encore vérifié.

30) a) La somme des dimensions de $\{x_1, \ldots, x_k\}^\perp$ et $\mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k+1})$ est $n - k + k + 1$, qui est strictement supérieur à n, donc ces deux espaces ne sont pas en somme directe : il contient donc un vecteur unitaire y. Comme y s'écrit $\sum_{i=1}^{p+1} y_i \varepsilon_i$, on a ensuite :

$$\langle\, f(y) \,|\, y \,\rangle = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i y_i^2 \leq \lambda_{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} y_i^2 = \lambda_{k+1} \|y\| = \lambda_{k+1}.$$

b) Nous allons montrer cette propriété par récurrence décroissante sur k.

Pour $k = n$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E et $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle\, f(e_i) \,|\, e_i \,\rangle$ est la trace de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$: on en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle\, f(e_i) \,|\, e_i \,\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et supposons le résultat démontré au rang $k+1$. Si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une famille orthonormale de E, il existe d'après la question précédente un vecteur $y \in \{e_1, \ldots, e_k\}^\perp$ unitaire tel que $\langle\, f(y) \,|\, y \,\rangle \leq \lambda_{k+1}$. La famille $(e_1, \ldots, e_k, y)$ est alors orthonormale et on peut lui appliquer l'hypothèse au rang $k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle\, f(e_i) \,|\, e_i \,\rangle + \langle\, f(y) \,|\, y \,\rangle \geq \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i$$

ce qui donne, en utilisant que $-\langle\, f(y) \,|\, y \,\rangle \geq -\lambda_{k+1}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle\, f(e_i) \,|\, e_i \,\rangle \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$$

La propriété est ainsi démontrée au rang k.

c) On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique, on note $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ la base canonique et on définit $f : X \longmapsto MX$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormale et M symétrique, $f \in \mathcal{S}(E)$. En appliquant le résultat du b), on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 & \leq & \langle f(\varepsilon_1) \,|\, \varepsilon_1 \rangle = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \leq & \langle f(\varepsilon_1) \,|\, \varepsilon_1 \rangle + \langle f(\varepsilon_4) \,|\, \varepsilon_4 \rangle = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \leq & \langle f(\varepsilon_1) \,|\, \varepsilon_1 \rangle + \langle f(\varepsilon_4) \,|\, \varepsilon_4 \rangle + \langle f(\varepsilon_2) \,|\, \varepsilon_2 \rangle = 4 \end{array}$$

31) a) Par le théorème spectral, il existe une base orthonormale $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E et une suite $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels positifs tels que $g(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout i. Nous pouvons classer les λ_i par ordre croissant :

$$0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_p < \lambda_{p+1} \leq \cdots \leq \lambda_n \text{ avec } p = n - \mathrm{rg}(g).$$

Pour $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, nous avons donc :

$$< x, g(x) >= 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i x_i^2 = 0 \Longleftrightarrow x_{p+1} = \cdots = x_n = 0 \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) = \mathrm{Ker}\, g.$$

b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f \circ g) \cap \mathrm{Im}(f \circ g)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = f \circ g(y)$. Nous avons donc $f \circ g \circ f \circ g(y) = 0$ et nous voulons montrer que $x = f \circ g(y) = 0$. Cela se fait en deux temps :

- $< g \circ f \circ g(y), g \circ f \circ g \circ f(y) >= 0$, donc $g \circ f \circ g(y) = 0$ en appliquant a) au vecteur $g \circ f \circ g(y) = 0$;
- $< f \circ g(y), g \circ f \circ g(y) >= 0$, donc $f \circ g(y) = 0$, en appliquant a) en remplaçant g par f et x par $f \circ g(y) = 0$.

Les deux espaces $\mathrm{Ker}(f \circ g)$ et $\mathrm{Im}(f \circ g)$ sont donc supplémentaires, puisqu'ils sont en somme directe et que la somme de leurs dimensions est égale à la dimension de E (formule du rang).

c) L'espace F est clairement stable par f et $f \circ g$, donc f_1 et h sont des endomorphismes de F. D'autre part, f_1 est bijective, puisque $\mathrm{Ker}(f_1) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. L'application φ est bilinéaire et symétriQue :

$$\forall x, y \in F,\ \varphi(x, y) =< f^{-1}(x), y >=< f^{-1}(x), f \circ f^{-1}(y) >=< x, f^{-1}(y) >=< f^{-1}(y), x >= \varphi(y, x).$$

On peut ensuite choisir une base orthonormale $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq r}$ de F formée de vecteurs propres de f : $\forall i,\ f(e_i) = \mu_i e_i$ avec $\mu_i > 0$. Nous avons alors, pour $x = \sum_{i=1}^{r} x_i e_i$ non nul :

$$\varphi(x, x) =< \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i} x_i e_i, \sum_{i=1}^{r} x_i e_i >= \sum_{i=1}^{r} \frac{x_i^2}{\mu_i} > 0$$

donc φ est un produit scalaire.

L'application h est un endomorphisme symétrique pour φ, puisque pour $x, y \in F$:

$$\varphi(h(x), y) =< f_1^{-1}(f \circ g(x)), y >=< g(x), y >=< x, g(y) >=< f(f_1^{-1}(x)), g(y) >=< f_1^{-1}(x), f \circ g(y) >= \varphi(x, h(y))$$

On en déduit que h est diagonalisable. Comme $\mathrm{Im}(g \circ f)$ est un sous-espace de F stable par h, la restriction de h à ce sous-espace est également diagonalisable. On en déduit que la restriction de $f \circ g$ à $\mathrm{Im}(g \circ f)$ est diagonalisable. Comme sa restriction à $\mathrm{Ker}(g \circ f)$ est également diagonalisable (cette restriction est nulle), ceci prouve que $f \circ g$ est diagonalisable, puisque ses restrictions à deux supplémentaires stables le sont.

32) Si $X \in \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A)$, $AX = 0$ et il existe $Y \in \mathbb{R}^n$ tel que $X = AY$. On a alors :

$$\|X\|^2 = X^\top X = (AY)^\top X = Y^\top A^\top X = -Y^\top AX = 0$$

donc $X = 0$: les deux espaces sont en somme directe, donc supplémentaires grâce à la formule du rang.

D'autre part, ces deux espaces sont orthogonaux : pour $X \in \mathrm{Ker}(A)$ et $Y = AZ \in \mathrm{Im}(A)$, on a :

$$X^\top Y = X^\top AZ = -X^\top A^\top Z = -(AX)^\top Z = 0.$$

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases orthonormales de $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$ donne : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec B inversible (A et B ont même rang r et $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$). Comme P est orthogonale, $P^{-1}AP \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, puis $B \in \mathcal{A}_r(\mathbb{R})$. On en déduit :

$$\det(B) = \det(B^\top) = \det(-B) = (-1)^r \det(B)$$

donc r est pair, puisque $\det(B)$ est non nul.

33) a) $(i) \Longrightarrow (ii)$: Soit $f \in \mathcal{A}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}(f\mathcal{B})$. On a :

$$\forall i,j,\ a_{i,j} = \langle\, e_i \,|\, f(e_j)\,\rangle = -\langle\, f(e_i) \,|\, e_j\,\rangle = -a_{j,i}$$

donc A est antisymétrique.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ est évident.

$(iii) \Longrightarrow (i)$: soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E telle que $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}(f\mathcal{B}) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Pour $x, y \in E$ dont les colonnes de coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont notées X et Y :

$$\langle\, f(x) \,|\, y\,\rangle = (AX)^\top Y = X^\top A^\top Y = -X^\top AY = -\langle\, x \,|\, f(y)\,\rangle$$

donc f est antisymétrique.

b) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale. On sait que $\phi :\ f \longmapsto \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})l$ est un isomorphisme d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $\phi^{-1}(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \oplus \phi^{-1}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{L}(E)$, soit $\mathcal{A}(E) \oplus \mathcal{S}(E) = \mathcal{L}(E)$.

c) On peut écrire d'une unique façon $f = a + s$ avec $a \in \mathcal{A}(E)$ et $s \in \mathcal{S}(E)$. On a alors $f^* = -a + s$, donc :

$$\forall x, y \in E, \langle\, f(x) \,|\, y\,\rangle = \langle\, a(x) \,|\, y\,\rangle + \langle\, s(x) \,|\, y\,\rangle = -\langle\, x \,|\, a(y)\,\rangle + \langle\, x \,|\, s(y)\,\rangle = \langle\, x \,|\, f^*(y)\,\rangle.$$

On a ensuite :

- si $x \in \mathrm{Ker}(f^*)$ et $y = f(z) \in \mathrm{Im}(f)$, $\langle\, x \,|\, y\,\rangle = \langle\, x \,|\, f(z)\,\rangle = \langle\, f^*(x) \,|\, z\,\rangle = 0$; on a donc $\mathrm{Ker}(f^*) \subset (\mathrm{Im}(f))^\perp$;
- si $x \in (\mathrm{Im}(f))^\perp$, on a :
$$\forall y \in E,\ \langle\, y \,|\, f^*(x)\,\rangle = \langle\, x \,|\, f(y)\,\rangle = 0$$
donc $f^*(x) = 0$, puisqu'il est orthogonal à tous les éléments de E, d'où $\mathrm{Ker}(f^*) = (\mathrm{Im}(f))^\perp$;
- si $x = f^*(y) \in \mathrm{Im}(f^*)$, on a :
$$\forall z \in \mathrm{Ker}(f),\ \langle\, z \,|\, x\,\rangle = \langle\, z \,|\, f^*(y)\,\rangle = \langle\, f(z) \,|\, y\,\rangle = 0$$
donc $x \in (\mathrm{Ker}(f))^\perp$ et $\mathrm{Im}(f^*) \subset (\mathrm{Ker}(f))^\perp$;
- cette inclusion est une égalité car les deux sous-espaces ont même dimension (finie) :
$$\dim\left((\mathrm{Ker}(f))^\perp\right) = n - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = n - \dim\left((\mathrm{Im}(f))^\perp\right) = n - \dim(\mathrm{Ker}(f^*)) = \dim(\mathrm{Im}(f^*))$$

On a par ailleurs vu passer : $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f^*)) = \mathrm{rg}(f^*)$. Cela donne une méthode vectorielle de démonstration de la propriété $\mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(A)$, quand A est carrée.

d) • Soit $x \in F^\perp$ et $y \in F$. On a :

$$\langle\, f(x) \,|\, y\,\rangle = -\langle\, x \,|\, f(y)\,\rangle = 0 \text{ car } x \in F^\perp \text{ et } f(y) \in F.$$

$F^\perp$ est donc stable par f dès que F est stable par f. On peut aussi dire que si $\mathcal{B}_1$ est une base orthonormale de F, complétée par $\mathcal{B}_2$ en $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ base orthonormale de E, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ car F est stable par f ; comme cette matrice est antisymétrique, $B = 0$ et $F^\perp = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_2)$ est stable par f.

• Soit λ une valeur propre (réelle) de f et x un vecteur propre associé. On a

$$\lambda\|x\|^2 = \langle\, f(x)\,|\,x\,\rangle = -\,\langle\, x\,|\,f(x)\,\rangle = -\lambda\|x\|^2$$

donc $\lambda = 0$ car $x \neq 0$. La droite engendrée pas x est alors stable par f.

• Supposons que f n'ait pas de valeur propre (réelle). Comme $f^2 \in \mathcal{S}(E)$, f^2 possède au moins une valeur propre λ, associée à un vecteur propre x. Les vecteurs x et $f(x)$ sont indépendants (x est non nul et f n'a pas de vecteur propre) : soit P le plan qu'ils engendrent. On a $f(x) \in P$ et $f(f(x)) = \lambda x \in P$, donc P est stable par f.

On peut maintenant montrer le résultat de réduction par récurrence (forte) sur la dimension de E :

- Si $f \in \mathcal{A}(E)$ avec E de dimension 1, on fixe e_1 vecteur unitaire de E et $\mathrm{Mat}(f,(e_1)) = (0)$ est de la forme voulue.
- Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat démontré en dimension $<$ à n. Soit $f \in \mathcal{A}(E)$. On a donc deux cas :
  1) Si f possède un vecteur propre e (choisi unitaire), $F = \mathrm{Vect}(e)$ est stable par f, donc $G = F^\perp$ l'est également. L'endomorphisme $g = f_{|\,G}$ est alors antisymétrique, puisque :

  $$\forall x, y \in G,\ \langle\, g(x)\,|\,y\,\rangle = \langle\, f(x)\,|\,y\,\rangle = -\,\langle\, x\,|\,f(y)\,\rangle = \langle\, x\,|\,g(y)\,\rangle\,.$$

  Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ de F telle la matrice de g dans $\mathcal{B}'$ soit de la "bonne" forme. La matrice de f dans la base orthonormale $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e)$ a alors la forme souhaitée.

  2) Sinon, f possède un plan stable P et $G = P^\perp$ est également stable par f. Comme ci-dessus, on choisit une bonne base $\mathcal{B}' = (e_3, \ldots, e_n)$ de G (comme 0 n'est pas valeur propre de f, la matrice de $f_{|G}$ sera une diagonale de matrices antisymétriques non nulles de taille 2) ; si (e_1, e_2) est une base orthonormale de P, la matrice de $f_{|P}$ est antisymétrique de taille 2, sans valeur propre réelle : elle est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$. La matrice de f dans la base orthonormale $(e_1, e_2, e_3, \ldots e_n)$ a la forme souhaitée.

Exercices X-ENS

34) a) Soient $x \in M(\varphi)$ et $y \in F(\varphi)$. On a $\varphi(y- = y$ et il existe $z \in E$ tel que $x = \varphi(z) - z$, d'où :

$$< x\,|\,y > = < \varphi(z) - z\,|\,y > = < \varphi(z)\,|\,\varphi(y) > - < z\,|\,y > = 0$$

car $\varphi \in O(E)$. On en déduit que $M(\varphi) \subset F(\varphi)^\perp$; d'après la formule du rang, on a :

$$\dim\left(M(\varphi)\right) = n - \dim\left(F\right)(\varphi) = \dim\left(F(\varphi)^\perp\right)$$

donc $M(\varphi) = F(\varphi)^\perp$: les deux espaces sont donc supplémentaires et orthogonaux.

b) Montrons le résultat par récurrence sur k.

- Si $k = 0$, nous avons $M(Id) = \{0\} = \mathrm{Vect}\,(\emptyset)$ donc la propriété est vérifiée au rang $k = 0$.
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et supposons que la propriété est vérifiée au rang k ; fixons $(u_1, \ldots, u_{k+1})$ une famille libre de E. Nous avons :

  $$\psi = s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_{k+1}} = s_{u_1} \circ \varphi$$

  avec $\varphi = s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_{k+1}}$. Par hypothèse de récurrence, $M(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(u_2, \ldots, u_{k+1})$. On a alors :

  $$x \in F(\psi) \Longleftrightarrow \psi(x) = x \Longleftrightarrow \varphi(x) - 2\,\frac{< \varphi(x)\,|\,u_1 >}{\|u_1\|^2}\,u_1 = x \Longleftrightarrow \varphi(x) - x = 2\,\frac{< \varphi(x)\,|\,u_1 >}{\|u_1\|^2}\,u_1.$$

Comme $\varphi(x) - x \in M(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(u_2, \dots, u_{k+1})$, qui est en somme directe avec $\mathbb{R}u_1$, on obtient :

$$\begin{aligned} x \in F(\psi) &\iff \varphi(x) - x = 0 \text{ et } < \varphi(x) \,|\, u_1 > =, 0 \\ &\iff \varphi(x) = x \text{ et } < x \,|\, u_1 > = 0 \\ &\iff x \in F(\varphi) \text{ et } x \perp u_1 \\ &\iff x \in M(\varphi)^{\perp} \text{ et } x \perp u_1 \\ &\iff x \in (\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, \dots, u_{k+1}))^{\perp} \end{aligned}$$

ce qui donne $M(\psi) = F(\psi)^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, \dots, u_{k+1})$ et la propriété est démontrée au rang $k+1$.

c) Notons $\varphi = s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_k}$ et $\psi = s_{v_1} \circ \cdots \circ s_{v_k}$. Nous avons $M(\psi) = M(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_k)$, qui est de dimension k. Nous avons $\{v_1, \dots, v_k\}^{\perp} = F(s_{v_1}) \cap \cdots \cap F(s_{v_k}) \subset F(\psi)$, ce qui donne :

$$n - \mathrm{rg}(v_1, \dots, v_k) = \dim\left(\{v_1, \dots, v_k\}^{\perp}\right) \leq \dim\left(F(\psi)\right) = n - \dim\left(M(\psi)\right) = n - k$$

soit $k \leq \mathrm{rg}(v_1, \dots, v_k)$: $\mathcal{F}_2$ est une famille libre.

35) a) Pour F sous-espace de E non réduit à $\{0\}$, notons :

$$\begin{cases} m_F(f) = \displaystyle\min_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle}{\|x\|^2} \\[2ex] M_F(f) = \displaystyle\max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle}{\|x\|^2} \end{cases}$$

Avec $F_q = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_q)$, on a :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{q} x_i e_i \in F_q,\ \langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i(f) x_i^2 \geq \lambda_q(f) \sum_{i=1}^{q} x_i^2 = \lambda_q \|x\|^2$$

avec égalité pour $x = e_q$. On en déduit que $m_{F_q}(f) = \lambda_q(f)$.

Il faut maintenant montrer que si $F \in \mathcal{V}_q(E)$, $m_F \leq \lambda_q(f)$. F est de dimension q et $\mathrm{Vect}(e_q, \dots, e_n)$ est de dimension $n-q+1$, avec $q+(n-q+1) > n$, donc ces deux espaces ont un vecteur x non nul en commun. On a alors, avec $x = \displaystyle\sum_{i=q}^{n} x_i e_i$:

$$m_F(f) \leq \frac{\langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i=q}^{n} \lambda_i(f) x_i^2}{\|x\|^2} \leq \lambda_q(f) \frac{\sum_{i=q}^{n} x_i^2}{\|x\|^2} = \lambda_q(f).$$

La quantité $m_F(f)$ est donc, pour $F \in \mathcal{V}_q(E)$, maximale quand $F = F_q$, ce qui prouve que $m_q(f)$ est bien défini et que $m_q(f) = \lambda_q(f)$.

En posant $G_q = \mathrm{Vect}(e_{n-q+1}, \dots, e_n)$, on a de la même façon :

$$\forall x = \sum_{i=n-q+1}^{n} x_i e_i \in G_q,\ \langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle = \sum_{i=n-q+1}^{n} \lambda_i(f) x_i^2 \geq \lambda_{n-q+1}(f) \sum_{i=n-q+1}^{n} x_i^2 = \lambda_{n-q+1}(f) \|x\|^2$$

avec égalité pour $x = e_{n-q+1}$. On en déduit $M_{G_q}(f) = \lambda_{n-q+1}(f)$.

Si maintenant $F \in \mathcal{V}_q$, F contient un vecteur non nul de la forme $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-q+1} x_i e_i$ et on peut écrire :

$$M_F(f) \geq \frac{\langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-q+1} \lambda_i(f) x_i^2}{\|x\|^2} \geq \lambda_{n-q+1}(f) \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-q+1} x_i^2}{\|x\|^2} = \lambda_{n-q+1}(f).$$

Ceci prouve que $M_q(f)$ est bien défini et que $M_q(f) = \lambda_{n-q+1}(f)$.

b) Soit $q \in \{1, \dots, n-1\}$. Pour $F \in \mathcal{V}_q(H)$, on a, en remarquant que $p \in \mathcal{S}(E)$:

$$\forall x \in F,\ \langle\, g(x) \,|\, x \,\rangle = \langle\, p(f(x)) \,|\, x \,\rangle = \langle\, f(x) \,|\, p(x) \,\rangle = \langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle\,.$$

On en déduit que $m_F(g) = m_F(f) \leq m_q(f)$ et $M_F(g) = M_F(f) \geq M_q(f)$. Ces inégalités étant vraies pour tout $F \in \mathcal{V}_q(H)$, on en déduit :

$$\lambda_q(g) = m_q(g) \leq m_q(f) = \lambda_q(f) \text{ et } \lambda_{n-1-q+1}(g) = M_q(g) \geq M_q(f) = \lambda_{n-q+1}(f)$$

ce qui donne bien

$$\lambda_1(f) \geq \lambda_1(g) \geq \lambda_2(f) \geq \lambda_2(g) \geq \cdots \geq \lambda_{n-1}(g) \geq \lambda_n(f)$$

c) L'espace $\mathcal{S}(E)$ est muni de la restriction de la norme $\|\ \|$ de $\mathcal{L}(E)$:

$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

Soit $q \in\ \{1, 2, \dots, n\}$. Soient $F \in \mathcal{V}_q(E)$ et $G \in \mathcal{V}_{n-q+1}(E)$ tels que

$$\lambda_q(f) = m_q(f) = m_F(f) \text{ et } \lambda_q(g) = M_{n-q+1}(g) = M_G(g).$$

Comme $q + (n-q+1) > n$, $F \cap G$ contient un vecteur non nul x et on peut écrire :

$$m_F(f) \leq \frac{\langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle}{\|x\|^2} \text{ et } M_G(f) \geq \langle\, g(x) \,|\, x \,\rangle \|x\|^2$$

d'où :

$$\lambda_q(f) - \lambda_q(g) = m_F(f) - M_G(g) \leq \frac{\langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle}{\|x\|^2} - \frac{\langle\, g(x) \,|\, x \,\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle\, (f-g)(x) \,|\, x \,\rangle}{\|x\|^2} \leq \frac{\|(f-g)(x)\|\, \|x\|}{\|x\|^2} \leq \|f - g\|.$$

d'où le résultat demandé par symétrie.

Nous avons ainsi démontré que l'application qui à $f \in \mathcal{S}(E)$ associe la $(\lambda_1(f), \dots, \lambda_n(f))$ est lipschitzienne (et donc continue).

36) a) Soit $\mathcal{B}_0$ une base orthonormale pour φ et $S = \mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{B}_0)$. comme $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale P telle que $\Delta = P^{-1}SP$ soit diagonale. En notant $\mathcal{B}$ la base de E définie $P = P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}}$, nous avons :

$$\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}) = P^\top I_n P = P^{-1}P = I_n \text{ et } \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}) = P^\top SP = P^{-1}SP = \Delta$$

ce qui signifie que $\mathcal{B}$ est orthonormale pour φ et orthogonale pour ψ.

b) D'après le a), il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormale pour φ telle que $\Delta = \mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mu_1 I_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_k I_{n_k} \end{pmatrix}$, où les μ_i sont des réels strictement positifs deux à deux distincts.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$. Nous avons :

$$f \in O(\varphi) \cap O(\psi) \Longleftrightarrow M \in O(n) \text{ et } M^\top \Delta\, M = \Delta \Longleftrightarrow M^{-1} = M^\top \text{ et } M\,\Delta = \Delta\, M.$$

Comme les μ_i sont deux à deux distincts, les matrices qui commutent avec Δ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}$ avec $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{R})$. On obtient donc :

$$f \in O(\varphi) \cap O(\psi) \iff \exists (A_1, \dots, A_k) \in O(n_1) \times \cdots \times O(n_k),\ M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}.$$

Comme l'application $f \longmapsto \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ est un isomorphisme de groupe de $GL(E)$ sur $GL_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $O(\varphi) \cap O(\psi)$ est isomorphe au groupe $O(n_1) \times \cdots \times O(n_k)$.

37) a) Notons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme qui à X associe ABX. L'idée consiste à démontrer que f est symétrique défini positif quand on munit $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire bien choisi. Le théorème spectral assurera que f (et donc AB) est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Nous cherchons donc une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n,\ (ABX)^\top SY = X^\top S(ABY)$$

soit $BAS = SAB$. On peut alors penser à choisir $S = A^{-1}$: comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, les valeurs propres de A sont strictement positives donc A est inversible et A^{-1} est symétrique à valeurs propres strictement positives (les vp de A^{-1} sont les inverses de celles de A), donc $A^1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

La preuve est maintenant élémentaire : on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire $< X \mid Y >= {}^tXA^{-1}Y$ et f est un endomorphisme symétrique pour ce produit scalaire. On a ensuite, pour tout X non nul :

$$< X \mid f(X) >= X^\top A^{-1}ABX = X^\top BX > 0$$

car $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc f est défini positif.

b) D'après le a, BC est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $\Delta = P^{-1}BCP$ est diagonale à diagonale strictement positive. On a ensuite $ABC = AP\Delta P^{-1}$. Comme ABC est symétrique, pour montrer qu'elle est définie positive, on peut penser à travailler sur une matrice congruente à ABC ; nous avons :

$$P^\top (ABC)P = P^\top AP\Delta$$

Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $P^\top AP$ (matrice congruente à A) est également dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$; d'après le a, $P^\top AP\Delta$ est diagonalisable à valeurs propres strictement positives (car $\Delta \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$). La matrice $P^\top (ABC)P$ est donc symétrique (car ABC l'est) à valeurs propres strictement positives : on a $P^\top (ABC)P \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, puis $ABC \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.