Calcul différentiel : énoncés

Exercices CCP

1) Étudier les extremums de l'application $f:\ M \longmapsto AM^2+BM^2+CM^2$, où A,B,C sont trois points distincts d'un plan euclidien P.

2) Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $x\mapsto x\wedge f(x)$. Montrer que F est différentiable et calculer sa différentielle.

3) Soit $f:\ (x,y)\longmapsto f(x,y)$ une fonction de classe C^2 définie sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles secondes de l'application $g:\ (u,v)\longmapsto f(u^2v^2,u^3+v^3)$ en fonction de celles de f.

4) Montrer que le produit scalaire et le produit vectoriel sont différentiables sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ et calculer leurs différentielles.

5) Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes, en utilisant les changements indiqués :

a) $2\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$

b) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{x}$

c) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^3+y^3}$

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(x^2-y^2)^{-1/2}$

e) $2xy\dfrac{\partial f}{\partial x}+(1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ — $x=\dfrac{u^2+v^2}{2}$ et $y=\dfrac{u}{v}$

f) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ — $x=u$, $y=uv$ et $x>0$

g) $2(y^2-x)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x-y^2$ — $x=u^2+v^2$, $y=u+v$ et $2x>y^2$

h) $a\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2b\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ avec $b^2-a\geq 0$ — $u=x+\alpha y$, $v=x+\beta y$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

i) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial f}{\partial y}-f=0$ — $u=x+y$, $v=x-y$ et $g=f\mathrm{e}^y$

j) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ — $x=u/v$, $y=uv$ avec $x,y>0$

6) Utiliser une approximation linéaire pour calculer une valeur approchée de $f(0.01,-0.02)$, avec

$$f:\ (x,y)\longmapsto(1+x+y^2)\sin(x+y)-\frac{1}{x^2+y^2+1}.$$

7) Montrer que l'application $f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(0,0)=0$ et $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pour $(x,y)\neq(0,0)$ est continue et admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$. Est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

8) On définit f par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\begin{cases}x\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} & \text{si } y\neq 0,\\ 0 & \text{si } y=0.\end{cases}$$

Montrer que f possède en $(0,0)$ une dérivée le long de tout vecteur. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

9) Montrer que l'application $F:\ (x,y)\longmapsto \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } x=y=0 \end{cases}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

10) Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^1 des $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ \forall t>0,\ f(tx)=t^\lambda f(x)$;

(ii) $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}, \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\lambda f(x)$.

Exercices Mines-Centrale: différentiabilité et dérivées partielles

11) Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ de classe C^k $(k\geq 1)$ et considérons l'application

$$F:\quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si } x\neq y, \\[2ex] f'(x) & \text{si } x=y. \end{cases}$$

Montrer que F est continue. Donner un exemple de fonction f de classe D^1 pour laquelle F n'est pas continue.

On suppose que $k\geq 2$: montrer que F est de classe C^1. Plus généralement, montrer que F est de classe C^{k-1} sur $\mathbb{R}^2$ (on pourra mettre F sous forme intégrale).

12) Soit $f: M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto\det(M)$. Montrer que f est de classe C^∞, puis calculer $\mathrm{d}f(M)$ successivement pour $M=I_n$, M inversible et M quelconque.

13) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f(x,0)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f(x,y)=y\,g(x,y)$ pour tout couple (x,y) de réels. Que peut-on dire si la condition $f(x,0)=0$ est remplacée par $f(x,3x^2)=0$?

14) Pour $a\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$, on note $B(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r (pour la norme euclidienne).

a) Soit $f:U\to\mathbb{C}$ de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On suppose que f est *harmonique* sur U, i.e. que $\Delta f=0$. Montrer que f a la propriété de valeur moyenne :

$$\forall a=(x,y)\in U, \forall r>0 \text{ t.q. } \overline{B(a,r)}\subset U,\ f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+r\cos t, y+r\sin t)\,\mathrm{d}t.$$

b) On suppose que f est définie et continue sur la boule unité fermée $\overline{B(0,1)}$ et que f est de classe C^2 et harmonique sur $B(0,1)$. Montrer que $|f|$ atteint son maximum sur le cercle unité.

15) Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R>0$ et soit f sa somme, définie sur $U=\{z\in\mathbb{C},\ |z|<R\}$. On notera f' la somme de la série dérivée, également définie sur U.

a) Montrer que f est de classe C^1 et donner une relation entre $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. En déduire que si f ne prend que des valeurs réelles, f est constante.

b) Montrer que pour tout $z \in U$, $\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ tend vers $f'(z)$ quand le complexe h tend vers 0.

16) Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $(0,0) \longmapsto 0$.

a) Montrer que F est de classe C^1.

b) Montrer que F admet des dérivées croisées $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ en $(0,0)$. Que peut-on en déduire ?

17) L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne canonique.

a) Soit $f :\ U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que f atteint un maximum local en $a \in U$. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, l'application $t \longmapsto f(a+th)$ est de classe C^2 sur un voisinage de 0 et que sa dérivée seconde en 0 est négative. En déduire que la matrice $H_f(a) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ est négative, i.e. que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^\top H_f(a)\, X \leq 0$. Qu'en déduit-on pour le laplacien de f en a ?

b) Soit U un ouvert non vide borné de $\mathbb{R}^n$ et $f :\ \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- f est continue sur $\overline{U}$;
- f est de classe C^2 sur U ;
- $\Delta f = 0$ sur U.

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_p :\ x \longmapsto f(x) + \dfrac{1}{p}\,||x||^2$ ne peut atteindre son maximum dans U. En déduire que $\sup\limits_{\overline{U}} f = \sup\limits_{\mathrm{Fr}(U)} f(x)$.

18) (Mines 18) Déterminer le domaine de définition D de $f(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^{2n}+y^{2n})$ et montrer que f est de classe C^1 sur D.

19) Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2, avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$. On convient de noter $x_1, \ldots, x_n$ les variables de f.

a) Soit $a = (a_i)_{1\leq i\leq n} \in U$ et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$. Pour $h = (h_i)_{1\leq i\leq n}$ tel que $\|h\| < r$, montrer que

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire que f admet en tout point un développement limité à l'ordre 2, que l'on explicitera en fonction des dérivées partielles de f.

20) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y \sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est de classe C^1.

21) Soit $f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\Delta f = 0$. On définit $g :\ (r,\theta) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Montrer que $r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial g}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}=0$ et en déduire que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = f(0,0)$ pour tout $r\in\mathbb{R}$.

22) Soit $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\dfrac{f(x)}{\|x\|}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini, c'est-à-dire :

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists B>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \|x\|\geq B \Longrightarrow \frac{f(x)}{\|x\|}\geq A.$$

a) Montrer qu'il existe x_0 tel que $\nabla f(x_0)=0$.

b) Montrer que $x\longmapsto \nabla f(x)$ est surjective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercices Mines-Centrale: équations aux dérivées partielles

23) Pour $S=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ matrice symétrique réelle non nulle, soit l'équation :

$$(E_S):\ a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

où l'inconnue $f:\ \mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2.

Pour $P=\begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{R})$, considérons le changement de variable :

$$\begin{cases} X=\alpha x+\beta y\\ Y=\gamma x+\delta y\end{cases}$$

Montrer que f est solution de (E_S) si et seulement si la fonction g définie par $g(X,Y)=f(x,y)$ est solution de (E_T) où $T=PSP^\top$.

En déduire que l'équation (E_S) se ramène à l'une des équations suivantes :

$$(1)\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial Y^2}=0 \qquad (2)\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}=0 \qquad (3)\frac{\partial^2 g}{\partial X\partial Y}=0$$

24) Soit $k\in\mathbb{R}$. Déterminer les fonctions continues $u\ :\ \mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que l'application $F\ :\ (x,y,z)\longmapsto u\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ vérifie :

$$\begin{cases} F(0,0,0)=1\\ \Delta F(x,y,z)=k\,F(x,y,z) \quad \text{pour tout } (x,y,z) \text{ non nul.}\end{cases}$$

25) Montrer que toute solution de l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

26) On note U l'ensemble des (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x>0$. Pour $f\ :\ U\to\mathbb{R}$ fonction de classe $C^{+\infty}$, on pose :

$$G(f)(x,y)=x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

a) Soit a un réel, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{+\infty}$ non nulle. Montrer que f est un vecteur propre de G pour la valeur propre a si et seulement si f vérifie, pour tous $(x, y) \in U$, $t > 0$:

$$f(tx, ty) = t^a f(x, y).$$

b) Montrer que tout réel a est valeur propre de G et décrire les vecteurs propres associés.

c) Résoudre dans $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ l'équation :

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x^2 + y^2 = 0.$$

Indication : utiliser $G \circ G$.

Exercices Mines-Centrale: recherche d'extremums

27) Soit P un plan affine euclidien et A, B, C trois points non alignés de P. On note f l'application $M \mapsto AM + BM + CM$.

a) Montrer que f atteint sa borne inférieure en un point M_0.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathcal{O} = P \setminus \{A, B, C\}$ et calculer le gradient de f en un point M de $\mathcal{O}$. Montrer que, selon la position des points A, B, C, deux cas sont possibles :

- il n'existe aucun point en lequel la différentielle de f est nulle.
- il existe un unique point en lequel la différentielle de f est nulle.

Dans les deux cas, quel est le minimum de f et en quel(s) point(s) est-il atteint ?

28) Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe C^1. On suppose :

- que γ est de classe C^1 et $||\gamma'(s)|| = 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$;
- qu'il existe $L > 0$ tel que $\gamma(s_1) = \gamma(s_2)$ si et seulement si $s_1 - s_2 \in L\mathbb{Z}$;
- que la partie bornée délimitée par le support de γ est convexe.

On note $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ le support de γ.

a) En quels points l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (s_0, s_1, s_2) & \longmapsto & \gamma(s_0)\gamma(s_1) + \gamma(s_1)\gamma(s_2) + \gamma(s_2)\gamma(s_0) \end{array}$ est-elle différentiable ? Quelles sont les dérivées partielles de f en de tels points ?

b) Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}^3$ et qu'elle atteint sa borne supérieure M en un point (s_0, s_1, s_2) tel que $0 \leq s_0 < s_1 < s_2 \leq L$.

c) Quelle propriété possède la trajectoire $\gamma(s_0), \gamma(s_1), \gamma(s_2), \gamma(s_0)$ relativement à Γ ?

29) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $a \in U$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout vecteur $h = (h_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, on note $H_a(h) = \displaystyle\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$.

a) On suppose que $\gamma : \begin{array}{ccc}]-r, r[& \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array}$ est un arc paramétré de classe C^2 tel que $\gamma(0) = a$. Donner la forme du DL de $f \circ \gamma$ en 0 à l'ordre 2.

b) On suppose que f atteint en a un minimum local. Montrer que la fonction H est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

c) On suppose ici que $n = 2$ et on note $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)$. On suppose que a est un point critique de f tel que $rt - s^2 < 0$. Montrer que f n'atteint pas d'extremum local en a.

30) Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, S sa sphère unité, U un ouvert contenant S et $f : U \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On suppose que la restriction de f à S admet un extremum local en x_0. Que peut-on dire de $\nabla f(x_0)$? En déduire une démonstration du théorème spectral en appliquant, pour $u \in \mathcal{S}(E)$, le résultat précédent à l'application $f : x \longmapsto \langle u(x) \,|\, x \rangle$.

Exercices X-ENS

31) (X) a) Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + 4yz + 2xy,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4zx + x^2 + z,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4xy + y.$$

b) Que se passe-t-il si on remplace la dernière condition par $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$?

c) Soient u, v, w dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur (u, v, w) le système $\dfrac{\partial f}{\partial x} = u$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = v$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = w$ possède-t-il une solution ?

d) Le résultat du c) subsiste-t-il si l'on remplace $\mathbb{R}^3$ par un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^3$?

32) Soit $f :\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ de classe C^1, strictement convexe et telle que $\dfrac{f(x)}{\|x\|}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini. On note $(x \,|\, y)$ le produit scalaire canonique de deux vecteurs x, y de $\mathbb{R}^k$.

a) Montrer que pour tous x, y éléments distincts de $\mathbb{R}^k$, $(\nabla f(y) - \nabla f(x) \,|\, y - x) > 0$.

b) Montrer que $x \longmapsto \nabla f(x)$ est bijective de $\mathbb{R}^k$ sur lui-même, puis que sa réciproque est continue ($\nabla(f)$ est ainsi un *homéomorphisme* de $\mathbb{R}^k$ sur lui-même).

33) (L) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On suppose que l'application ∇f est injective et que $\dfrac{f(x)}{\|x\|}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini.

a) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ distincts, $f(y) > f(x) + (\nabla f(x) \,|\, y - x)$. En déduire que f est strictement convexe.

b) Montrer que ∇f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

Calcul différentiel : corrigés

Exercices CCP

1) Comme $f(M)$ tend vers l'infini quand M tend vers l'infini, f atteint un minimum global en un point M_0. Comme f est de classe C^1, le point M_0 est un point critique de f. On a d'autre part :

$$\mathrm{d}f(M_0): \ \overrightarrow{u} \longmapsto 2\left(\overrightarrow{AM_0} + \overrightarrow{BM_0} + \overrightarrow{CM_0}\right) \cdot \overrightarrow{u}.$$

Donc $\overrightarrow{AM_0} + \overrightarrow{BM_0} + \overrightarrow{CM_0} = \overrightarrow{0}$ et M_0 est l'isobarycentre des points A, B et C.

Comme M_0 est le seul point critique, f n'a pas d'autre extremum (même local).

2) On obtient très facilement le DL :

$$F(x+h) = (x+h) \wedge f(x+h) = x \wedge f(x) + h \wedge f(x) + x \wedge f(h) + h \wedge f(h) = F(x) + \varphi(h) + o(h)$$

en posant $\varphi: \ h \longmapsto h \wedge f(x) + x \wedge f(h)$ (φ est bien linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$), puisque $||h \wedge f(h)|| \leq ||h|| \times ||f(h)|| = o(h)$ car $f(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ (f est linéaire donc continue, puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie).

F est donc différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et $\forall x, h \in \mathbb{R}^3, \ \mathrm{d}F(x) \cdot h = h \wedge f(x) + x \wedge f(h)$.

3) Il suffit d'appliquer la règle de la chaîne :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 2\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(u^2v^2, u^3+v^3)\, uv^2 + 3\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(u^2v^2, u^3+v^3)\, u^2 \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 2\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(u^2v^2, u^3+v^3)\, u^2v + 3\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(u^2v^2, u^3+v^3)\, v^2 \end{cases}$$

On a ensuite :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = 4\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2v^2, u^3+v^3)\, u^2v^4 + 12\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u^2v^2, u^3+v^3)\, u^3v^2 + 9\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2v^2, u^3+v^3)\, u^4 \\ \qquad + 2\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(u^2v^2, u^3+v^3)\, v^2 + 6\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(u^2v^2, u^3+v^3)\, u \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 4\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2v^2, u^3+v^3)\, u^3v^3 + 6\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u^2v^2, u^3+v^3)\, uv(v^3+u^3) \\ \qquad + 9\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2v^2, u^3+v^3)\, u^2v^2 + 4\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(u^2v^2, u^3+v^3)\, uv \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = 4\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2v^2, u^3+v^3)\, u^4v^2 + 12\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u^2v^2, u^3+v^3)\, u^2v^3 + 9\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2v^2, u^3+v^3)\, v^4 \\ \qquad + 2\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(u^2v^2, u^3+v^3)\, u^2 + 6\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(u^2v^2, u^3+v^3)\, v \end{cases}$$

4) La bilinéarité donne directement les DL (pour $x, y, h, k \in R^3$) :

$$< x+h \,|\, y+k > = < x \,|\, y > + \underbrace{< x \,|\, k > + < h \,|\, y >}_{=\varphi(h,k)} + \underbrace{< h \,|\, k >}_{=o(h,k)}$$

$$(x+h) \wedge (y+k) = x \wedge y + \underbrace{x \wedge k + h \wedge y}_{=\psi(h,k)} + \underbrace{h \wedge k}_{=o(h,k)}.$$

où les applications linéaires φ et ψ sont les différentielles de nos deux applications en (x, y).

5) a) En posant $x = 2u$ et $y = -u + v$ (par exemple), et $g(u,v) = f(x,y) = f(2u, -u+v)$, on a :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^2, \ 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \forall\, u, v \in \mathbb{R}, \ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0.$$

Les fonctions g solutions de cette équation s'écrivent :

$$g: \ (u,v) \longmapsto \varphi(v) \text{ avec } \varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

La solution générale de l'équation est donc :

$$f: \ (x,y) \longmapsto \varphi\left(\frac{1}{2}x+y\right)$$

où φ est une fonction quelconque de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) On travaille ici soit sur l'ouvert $U_+ =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, soit sur l'ouvert $U_- =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Le membre de gauche de l'équation nous fait penser à travailler en coordonnées polaires : on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r > 0$ et $\theta \in I$, où $I =]-\pi/2, \pi/2[$ ou $]\pi/2, 3\pi/2[$ selon que l'on est sur U_+ ou sur U_-. En posant $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, l'équation devient :

$$\forall\,(r,\theta) \in]0,+\infty[\times I,\ r\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \tan\theta.$$

Cette équation se résout en :

$$g: \ (r,\theta) \longmapsto \ln(r)\,\tan\theta + \varphi(\theta) \text{ avec } \varphi \in C^1(I,\mathbb{R}).$$

Comme $\theta \longmapsto \tan\theta$ est un difféomorphisme de I sur $\mathbb{R}$, on peut aussi écrire la solution sous la forme :

$$g: \ (r,\theta) \longmapsto \ln(r)\,\tan\theta + \psi(\tan\theta) \text{ avec } \psi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

En revenant à f, nous obtenons la solution générale de l'équation :

$$f: \ (x,y) \longmapsto \frac{y\,\ln(x^2+y^2)}{2x} + \psi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ avec } \psi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

c) On utilise encore les coordonnés polaires (sans trop se poser de question sur le domaine de travail). L'équation s'écrit cette fois :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \sqrt{r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)},$$

ce qui s'intègre en :

$$g: \ (r,\theta) \longmapsto \frac{2}{3}\,r^{3/2}\,\sqrt{\cos^3\theta+\sin^3\theta} + \varphi(\theta) \text{ avec } \varphi \text{ de classe } C^1.$$

Si on se limite au domaine $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \leq 0\}$, on peut noter $\operatorname{Arg}(x,y)$ l'argument principal de (x,y) (i.e. l'unique $\theta \in]-\pi,\pi[$ tel que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$. L'application Arg est alors de classe C^1 et la solution générale de l'équation sur U s'écrit :

$$f: \ (x,y) \longmapsto \frac{2}{3}\,\sqrt{x^3+y^3} + \psi(\operatorname{Arg}(x,y)) \text{ avec } \psi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

e) On utilise le changement proposé, mais il faut commencer par déterminer deux ouverts U et V tels que l'application $(u,v) \longmapsto \left(\dfrac{u^2+v^2}{2}, \dfrac{u}{v}\right)$ soit bijective de U sur V (on devrait même parler de difféomorphisme, mais cette notion n'est plus au programme). On peut choisir $U = \mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et $V =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, l'image réciproque de $(x,y) \in V$ par φ étant $(u,v) = \left(y\sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}, \sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}\right)$. On pose ensuite $g(u,v) = f\left(y\sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}, \sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}\right)$: g est de classe C^1 sur U et l'équation devient :

$$\forall\,(u,v) \in U,\ \frac{u^2+v^2}{u}\,\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0$$

qui s'intègre en $g(u,v) = \varphi(v)$ avec φ de classe C^1.

La solution de l'équation initiale sur V est alors :

$$f: \ (x,y) \longmapsto \psi\left(\frac{x}{1+y^2}\right) \text{ avec } \psi \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$$

(les fonctions de la forme $\varphi\left(\sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}\right)$ avec $\varphi \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ sont exactement les fonctions de la forme $\psi\left(\dfrac{x}{1+y^2}\right)$ avec $\psi \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$, la correspondance bijective entre φ et ψ s'écrivant :

$$\forall t>0,\ \varphi(t)=\psi(\sqrt{2t}) \text{ ou } \forall s>0,\ \psi(s)=\varphi(s^2/2).$$

f) L'application $\varphi :\ (u,v)\longmapsto(u,uv)$ est une bijection de $U=]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur lui-même, d'inverse $\varphi^{-1} :\ (x,y)\longmapsto (x,y/x)$. Comme φ et φ^{-1} sont de classe C^2, on peut faire le changement de fonction inconnue $g=f\circ\varphi$: l'inconnue f de classe C^2 de U dans $\mathbb{R}$ devenant l'inconnue g de classe C^2, toujours de U dans R. On a, en appliquant la règle de la chaîne :

$$\forall\,(u,v)\in U,\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,uv)+2v\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u,uv)+v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,uv)$$

donc l'équation à résoudre est équivalente à :

$$\forall\,(u,v)\in U,\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)=0$$

dont la solution générale est :

$$\forall\,(u,v)\in U,\ g(u,v)=\varphi(v)u+\psi(v) \text{ avec } \varphi,\psi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Les solutions de l'équation initiale sont donc les fonctions de la formes :

$$f :\ (x,y)\longmapsto=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\,x+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

où φ et ψ sont deux applications quelconques de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

g) Notons U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ d'équation $(2x>y)$. Pour $(x,y)\in U$, nous avons :

$$(x=u^2+v^2,\ y=u+v)\Longleftrightarrow\left(\frac{y^2-x}{2}=uv,\ y=u+v\right).$$

La résolution de ce système est donc équivalente à la résolution de l'équation $X^2-yX+\dfrac{y^2-x}{2}$. Comme le discriminant de ce trinôme est strictement positif (il vaut $2x-y^2$), il a deux racines distinctes $\dfrac{y\pm\sqrt{2x-y^2}}{2}$. En notant V l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ d'équation $(u<v)$, l'application $\varphi : (u,v)\longmapsto(u^2+v^2,uv)$ est une bijection de V sur U, d'inverse :

$$\varphi^{-1} :\ (x,y)\longmapsto\left(\frac{y-\sqrt{2x-y^2}}{2},\frac{y+\sqrt{2x-y^2}}{2}\right).$$

Comme φ et φ^{-1} sont de classe C^2, on peut poser $g=f\circ\varphi$ et on a :

$$\forall\,(u,v)\in V,\ \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)=4uv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2+v^2,uv)+2(u+v)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u^2+v^2,uv)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2+v^2,uv)$$

et l'équation devient :

$$\forall\,(u,v)\in V,\ \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)=-2uv \qquad (E)$$

La solution générale de cette équation est :

$$g :\ (u,v)\longmapsto-\frac{u^2v^2}{2}+\varphi(u)+\psi(v) \text{ avec } \varphi,\psi\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

d'où la solution générale cherchée :

$$f :\ (x,y)\longmapsto-\frac{(y^2-x)^2}{8}+\varphi\left(y-\sqrt{2x-y^2}\right)+\psi\left(y+\sqrt{2x-y^2}\right),$$

en modifiant légèrement les fonctions φ et ψ pour supprimer les facteurs 1/2.

La résolution de l'équation (E) n'est en fait pas si évidente que cela, et nous allons prendre le temps de la détailler. Supposons que $g\in\mathcal{C}^2(V,\mathbb{R})$ soit une solution de (E).

- Soit $(u,v) \in V$. L'application $t \longmapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(t,v)$ est définie et continue sur $]-\infty, v[$, nous pouvons donc l'intégrer sur le segment $[v-1,u]$, ce qui donne :

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(v-1,v) = \int_{v-1}^{u} -2tv \,\mathrm{d}t = -u^2 v + (v-1)^2 v.$$

  Nous obtenons donc :

$$\forall\,(u,v) \in V,\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = -u^2 v + \frac{\partial g}{\partial v}(v-1,v) + (v-1)^2 v.$$

  Notons a l'application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ qui à v associe $\dfrac{\partial g}{\partial v}(v-1,v) + (v-1)^2 v$ et soit ψ une primitive de a : ψ est une application de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

- Pour $(u,v) \in V$, nous pouvons maintenant intégrer l'application $t \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,t)$ sur le segment $[u+1,v]$, ce qui donne :

$$g(u,v) - g(u,u+1) = \int_{u+1}^{v} (-u^2 t + a(t))\,\mathrm{d}t = -\frac{u^2 v^2}{2} + \frac{u^2(u+1)^2}{2} + \psi(v) - \psi(u+1).$$

  En notant φ l'application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ qui à u associe $\dfrac{u^2(u+1)^2}{2} - \psi(u+1)$, nous obtenons bien l'expression annoncée pour g.

  Réciproquement, si $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'application $g:\ (u,v) \longmapsto -\frac{u^2v^2}{2} + \varphi(u) + \psi(v)$ est trivialement de classe C^2 et solution de l'équation (E) sur V.

h) Nous devons imposer $\alpha \neq \beta$ pour que $\varphi:\ (x,y) \longmapsto (x+\alpha y, x+\beta y)$ soit un changement de coordonnées. Le changement de fonction inconnue $g = f \circ \varphi^{-1}$ nous donne la nouvelle équation :

$$(a+2b\alpha+\alpha^2)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2(a+b(\alpha+\beta)+\alpha\beta)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (a+2b\beta+\beta^2)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} v = 0 \qquad (E).$$

Nous devons choisir α et β de sorte à simplifier cette équation, en annulant certains coefficients de cette équation. Deux cas vont donc devoir être distingués :

- si $b^2 - a > 0$, le trinôme $a + 2bX + X^2$ a deux racines réelles distinctes, que nous choisissons pour valeurs de α et β. L'équation (E) s'écrit alors $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ en simplifiant par $2(a+b(\alpha+\beta)+\alpha\beta) = 4(a-b^2) \neq 0$. La solution de l'équation est donc, en remplaçant α et β par leurs valeurs :

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R},\ f(x,y) = \varphi\left(x + (-b+\sqrt{b^2-a})\,y\right) + \psi\left(x + (-b-\sqrt{b^2-a})\,y\right) \text{ avec } \varphi,\psi \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

- si $b^2 - a = 0$, nous choisissons β égal à la racine (double) du trinôme, i.e. $\beta = -b$ et α quelconque distinct de β. (E) s'écrit alors $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$, puisque $2(a+b(\alpha+\beta)+\alpha\beta) = 2(a-b^2) = 0$ et $a + 2b\alpha + \alpha^2 \neq 0$ (β est la seule racine du trinôme). La solution de l'équation est donc :

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R},\ f(x,y) = \varphi(x-by)(x+\alpha y) + \psi(x-by) \text{ avec } \varphi,\psi \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

i) L'équation s'écrit :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 4e^{-y}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+y, x-y) = 0$$

ce qui donne :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (\varphi(x+y) + \psi(x-y))\ e^{-y} \text{ avec } \varphi,\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

j) Ce dernier calcul est le plus méchant, car l'équation vérifiée par la nouvelle fonction g n'est pas triviale et on ne peut pas se contenter de calculer, comme souvent, les dérivées partielles secondes de g. Nous devons donc écrire $f(x,y) = g(\sqrt{xy}, \sqrt{x/y})$ et remplacer dans l'équation de f, ce qui donne :

$$\forall\, x, y > 0,\ -y\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(\sqrt{xy}, \sqrt{x/y}) + \sqrt{y/x}\,\frac{\partial g}{\partial v}(\sqrt{xy}, \sqrt{y/x}) = 0.$$

L'équation est donc équivalente à :

$$\forall\, u, v > 0,\ \frac{\partial}{\partial v}\left(-u\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + g(u,v)\right) = 0.$$

Si g est solution de cette équation, on peut poser :

$$\forall\, u > 0,\ \varphi_1(u) = -\frac{\partial g}{\partial u}(u,1) + g(u,1)$$

et $\varphi_1 \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ avec :

$$\forall\, u, v > 0,\ -u\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + g(u,v) = \varphi_1(u).$$

À v fixé, nous devons résoudre l'équation différentielle $-xy' + y = \varphi_1(x)$ avec y de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, dont la solution générale est $y(x) = (K + \varphi(x))x$ avec $K \in \mathbb{R}$ et φ une primitive de l'application $x \longmapsto -\frac{\varphi_1(x)}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$. Comme $u \longmapsto g(u,v)$ est solution de l'équation différentielle, il existe une fonction $\psi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\, u > 0,\ g(u,v) = (\psi(v) + \varphi(u))u$$

et les applications φ et ψ sont de classe C^2 sur $[0,+\infty[$, puisque l'on a :

$$\forall\, v > 0,\ \psi(v) = g(1,v) - \varphi(1) \text{ et } \varphi(u) = \frac{g(u,1)}{u} - \psi(1).$$

Ainsi, toute solution de (E) est de la forme $(u,v) \longmapsto (\psi(v)+\varphi(u))u$ avec $\varphi, \psi \in C^2(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et, réciproquement, les fonctions de cette forme sont solutions de (E). La solution générale de l'équation initiale est donc :

$$\forall\, x, y > 0,\ f(x,y) = \sqrt{xy}\left(\psi\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right) + \varphi\left(\sqrt{xy}\right)\right) \text{ avec } \varphi, \psi \in C^2(]0,+\infty[,\mathbb{R}).$$

Maintenant que la solution a été trouvée, on voit que la méthode la plus simple aurait été de poser :

$$\forall\, u, v > 0,\ h(u,v) = \frac{1}{u} f\left(\frac{u}{v}, uv\right)$$

puisque qu'on a alors :

$$\forall\, u, v > 0,\ \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(u,v) = -\frac{1}{u^3}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u}{v}, uv\right) + v\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{u}{v}, uv\right)$$

et l'équation devint $\dfrac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} = 0$.

6) On a $f(0.01,-0.02) \simeq f(0,0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \times 0.01 - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \times 0.02 = -1 + 0.01 - 0.02 = -1.01 = a$.

On peut vérifier que $f(0.01,-0.02) = -1.009604082 \pm 10^{-9}$.

7) Nous avons $|f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$, donc f est continue en $(0,0)$. Comme elle est de classe continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, comme composée de fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

D'autre part, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, comme composée de fonctions de classe C^1, avec :

$$\forall (x,y) \neq (0,0),\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

On montre ensuite facilement que f est dérivable partiellement par rapport à x en $(0,0)$:

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

f admet donc une dérivée partielle par rapport à x sur tout $\mathbb{R}^2$, avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette dérivée n'est pas continue en $(0,0)$, puisqu'en posant $x=0$ et $y=t$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = \frac{t^6}{|t|^3} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

f n'est donc pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

8) Si $u=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, on a, avec $a=(0,0)$ et $t\neq 0$:

$$\frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \begin{cases} \alpha\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}} & \text{si } \beta \neq 0\,; \\ 0 & \text{si } \beta = 0. \end{cases}$$

f admet donc en a des dérivées le long de tout vecteur, avec :

$$\forall u=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ f'_u(a) = \begin{cases} \alpha\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}} & \text{si } \beta \neq 0 \\ 0 & \text{si } \beta = 0 \end{cases}$$

On en déduit que f n'est pas différentiable en a, car l'application $\varphi :\ u \longmapsto f'_u(a)$ n'est pas linéaire (on peut remarquer que les dérivées partielles de f en a sont nulle (on prend $u=(1,0)$ et $u=(0,1)$) alors que φ n'est pas nulle).

9) Nous allons montrer que F est dérivable par rapport à x et que $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Comme $F(x,y) = -F(y,x)$, F sera également dérivable par rapport à y avec $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ continu : f sera de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

En $(x,y)\neq(0,0)$, F est dérivable par rapport à x et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. En $(0,0)$, on a :

$$\frac{F(h,0)-F(0,0)}{h} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

donc F est également dérivable par rapport à x en $(0,0)$, avec $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0)=0$.

$\dfrac{\partial F}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (comme composée de fonctions continues) et, en munissant $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne canonique :

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,x)\right| = 6\,||(x,y)|| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$$

donc $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et F est de classe C^1.

10) Supposons que (i) est vérifiée. En dérivant la relation par rapport à t, nous obtenons :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \forall t > 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \lambda t^{\lambda-1} f(x)$$

ce qui donne la propriété (ii) quand $t = 1$.

Supposons que (ii) est vérifiée. Alors la fonction $\varphi :\ t \longmapsto f(tx) - t^{\lambda} f(x)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall t > 0,\ \varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) - \lambda t^{\lambda-1} f(x).$$

En multipliant par t, nous obtenons :

$$\forall t > 0,\ t\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} t x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) - \lambda t^{\lambda} f(x) = \lambda f(tx) - \lambda t^{\lambda} f(x) = \lambda \varphi(t)$$

φ est donc de la forme $t \longmapsto K t^{\lambda}$ et $K = 0$ car $\varphi(1) = 0$: la propriété (i) est donc démontrée.

Exercices Mines-Centrale: différentiabilité et dérivées partielles

11) F est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, en notant Δ la diagonale d'équation $(x = y)$, comme composée d'applications continues. Si $a \in \mathbb{R}$, il existe, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, un réel $c \in [x, y]$ tel que $F(x, y) = f'(c)$ (T.A.F. si $x \neq y$ et $c = x$ si $x = y$). On a donc :

$$F(x, y) = f'(c) \xrightarrow[(x,y)\to(a,a)]{} f'(a) = F(a, a)$$

car f' est continue : F est continue en (a, a).

Si f est D^1 sans être C^1, F n'est pas continue, puisque $x \longmapsto F(x, x)$ n'est pas continue. On peut donc choisir $f :\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais dont la dérivée n'est pas continue en 0.

L'astuce consiste à écrire, pour $x \neq y$:

$$F(x, y) = \frac{1}{y - x} \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'((1 - s)x + sy)\,\mathrm{d}s$$

et cette égalité est encore valable quand $x = y$; nous obtenons ainsi une expression plus régulière de F :

$$\forall x, y \in, \mathbb{R},\ F(x, y) = \int_0^1 f'((1 - s)x + sy)\,\mathrm{d}s.$$

Appliquons le théorème de Leibniz. Pour y fixé et $a > 0$, quand (s, x) décrit $[0, 1] \times [-a, a]$, $(1 - s)x + sy$ décrit un segment I : notons $M = \max_{t \in I} |f''(t)|$. Nous avons :

- $\forall x \in [-a, a],\ s \longmapsto f'((1 - s)x + sy)$ est continue et sommable sur $[0, 1]$;
- $\forall s \in [0, 1],\ x \longmapsto f'((1 - s)x + sy)$ est de classe C^1 sur $[-a, a]$;
- $\forall s \in [0, 1],\ \forall x \in [-a, a],\ \left| \dfrac{\partial}{\partial x} \left(f'((1 - s)x + sy) \right) \right| = |(1 - s) f''((1 - s)x + sy)| \leq M$ et M est sommable sur $[0, 1]$.

L'application $x \longmapsto F(x,y)$ est donc de classe C^1 sur chaque $[-a,a]$, donc sur $\mathbb{R}$ (en particulier, F admet une dérivée partielle par rapport à x en tout point) avec :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 (1-s) f''((1-s)x+sy)\,\mathrm{d}s.$$

Il reste à montrer que cette dérivée partielle est continue par rapport à (x,y) (le théorème de Leibniz prouve seulement qu'elle est continue, à y fixé, par rapport à x). C'est une conséquence du théorème de continuité des fonctions définies par une intégrale : pour $a > 0$, nous avons

- $\forall (x,y) \in [-a,a]^2,\ s \longmapsto (1-s)f''((1-s)x+sy)$ est continue sur $[0,1]$;
- $\forall s \in [0,1],\ (x,y) \longmapsto (1-s)f''((1-s)x+sy)$ est continue sur $[-a,a]^2$;
- $\forall s \in [0,1],\ \forall (x,y) \in [-a,a],^2\ \ |(1-s)f''((1-s)x+sy)| \leq M$ et M est sommable sur $[0,1]$, avec $M = \max\limits_{-a \leq t \leq a} |f''(t)|$

donc $\frac{\partial F}{\partial x}$ est continue sur chaque $[-a,a]^2$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

Par symétrie, F est dérivable par rapport à y et $\frac{\partial F}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$: F est de classe C^1.

Si f est de classe C^{k+1}, on montre que F est de classe C^k par récurrence sur k (preuve identique), en montrant que pour $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i+j=k$, on a :

$$\frac{\partial^{i+j} F}{\partial x^i \partial y^j}(x,y) = \int_0^1 (1-s)^i s^j f^{(i+j+1)}((1-s)x+sy)\,\mathrm{d}s.$$

12) f est de classe C^∞ car elle est polynomiale en les coefficients de la matrice M (on peut aussi dite que f est la composée de fonctions C^∞ : chaque $M \longmapsto m_{i,j}$, la somme et le produit de $\mathbb{R}^2$).

Calculons les dérivées partielles de f en I_n : pour $i, j \in, \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\frac{\det(I_n + tE_{i,j}) - \det(I_n)}{t} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial m_{i,j}}(I_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$. On en déduit :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}f(M)\cdot H = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial f}{\partial m_{i,j}}(I_n) h_{i,j} = \sum_{i=1}^n h_{i,i} = \mathrm{Tr}(H).$$

Si M est inversible, on peut écrire :

$$f(M+H) = \det(M)\det(I_n + M^{-1}H) = \det(M)\,\big(1 + \mathrm{Tr}(M^{-1}H) + o(H)\big) = f(M) + \det(M)\,\mathrm{Tr}(M^{-1}H) + o(H).$$

On peut simplifier cette expression : $\det(M)\,\mathrm{Tr}(M^{-1}H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(M)H)$, ce qui donne :

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}f(M) :\ H \longmapsto \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(M)H).$$

Enfin, comme f est de classe C^1 et que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cette expression est encore valable pour M quelconque.

Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une suite (M_k) de matrices inversibles qui converge vers M.

Première preuve (avec des normes d'applications linéaires) : comme $\mathrm{d}f$ est continue, $\mathrm{d}f(M_k)$ tend vers $\mathrm{d}f(M)$. Cela entraine en particulier que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}f(M_k) \cdot H$ tend vers $\mathrm{d}f(M) \cdot H$, car :

$$\|\mathrm{d}f(M_k) \cdot H - \mathrm{d}f(M_k) \cdot H\| = \| (\mathrm{d}f(M_k) - \mathrm{d}f(M)) \cdot H\| \leq \|\mathrm{d}f(M_k) - \mathrm{d}f(M)\| \times \|H\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

On a donc :

$$\mathrm{d}f(M) \cdot H = \lim_{+\infty} \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(M_k)H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(M)H)$$

par continuité des applications $A \longmapsto \mathrm{Tr}(A)$, $A \longmapsto \mathrm{Com}(A)$, $A \longmapsto {}^tA$ et $(A, B) \longmapsto AB$.

Seconde preuve : par continuité des dérivées partielles, on a :

$$\mathrm{d}f(M_k) \cdot H = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial f}{\partial m_{i,j}}(M_k) h_{i,j} \xrightarrow[= \to \mathrm{d}]{} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial f}{\partial m_{i,j}}(M) h_{i,j} f(M_k) \cdot H$$

et on conclut de la même façon.

13) Il ne faut surtout pas poser $g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) & \text{si } y = 0 \end{cases}$ car nous aurions beaucoup de mal à atteindre le caractère C^∞ de g. L'astuce consiste à transformer l'écriture de $f(x, y)$ pour faire apparaître naturellement le facteur $1/y$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y \neq 0$, on a :

$$f(x, y) = f(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) \, \mathrm{d}t = y \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, sy) \, \mathrm{d}s$$

et cette égalité est encore valable quand $y = 0$. On définit donc :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ g(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, sy) \, \mathrm{d}s$$

et on montre par récurrence que g est de classe C^k pour tout k. On utilise pour cela les résultats :

- si $\varphi : (s, x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \varphi(s, x, y)$ est continue, $\Phi : \ (x, y) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(s, x, y) \, \mathrm{d}s$ est continue ;
- si $\varphi : (s, x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \varphi(s, x, y)$ est de classe C^1, $\Phi : \ (x, y) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(s, x, y) \, \mathrm{d}s$ est de classe C^1 et on peut dériver partiellement sous le signe intégral.

Pour le premier résultat, on fixe $a > 0$ et Φ est continue sur $[-a, a]^2$ par application du théorème de continuité des fonctions définies par une intégrale (sur le compact $[0, 1] \times [-a, a]^2$, on majore $|\varphi(s, x, y)|$ par une constante, qui est sommable sur $[0, 1]$). Φ est donc continue sur tout $[-a, a]^2$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

Pour le second résultat, on commence par dériver partiellement par rapport à x grâce au théorème de Leibniz ; pour $y \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, on a :

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $s \longmapsto \varphi(s, x, y)$ est continue et sommable sur $[0, 1]$;

b) $\forall s \in [0, 1]$, $x \longmapsto \varphi(s, x, y)$ est de classe C^1 sur $[-a, a]$, de dérivée $x \longmapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(s, x, y)$;

c) $\forall x \in [-a, a]$, $s \longmapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(s, x, y)$ est continue sur $[0, 1]$ et dominée par une constante ($[0, 1] \times [-a, a] \times \{y\}$ est compact), qui est sommable sur $[0, 1]$.

On en déduit que pour tout y, $x \longmapsto \Phi(x, y)$ est dérivable sur tout $[-a, a]$, donc sur $\mathbb{R}$, i.e. que Φ est partiellement dérivable par rapport à x, avec :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, x, y) \, \mathrm{d}s.$$

Le premier point prouve ensuite que cette dérivée partielle est continue sur $\mathbb{R}^2$. Par symétrie, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$ est également définie et continue sur $\mathbb{R}^2$ avec

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(s,x,y)\,\mathrm{d}s$$

et Φ est de classe C^1.

On en déduit ensuite facilement par récurrence que g est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et que l'on peut dériver g sous le signe intégral :

$$\forall i, j \in \mathbb{N},\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ \frac{\partial^{i+j} g}{\partial x^i \partial y^j}(x,y) = \int_0^1 s^j \frac{\partial^{i+j+1} f}{\partial x^i \partial y^{j+1}}(x, sy)\,\mathrm{d}s.$$

Si maintenant f vérifie $f(x, 3x^2) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(u,v) = f(u, 3u^2 + v)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. F est de classe C^∞ et $F(u,0) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. La question précédente prouve qu'il existe G de classe C^∞ telle que $F(u,v) = vG(u,v)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = F(x, y - 3x^2) = (y - 3x^2)G(x, y - 3x^2).$$

L'application $g :\ (x,y) \longmapsto G(x, y - 3x^2)$ est de classe C^∞ et vérifie $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x,y) = (y - 3x^2)g(x,y)$.

14) a) Soit $r > 0$ tel que $\overline{B(a,r)} \subset U$. On définit

$$\varphi :\ s \in [0,r] \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + s\cos t, y + s\sin t)\,\mathrm{d}t.$$

Le théorème de dérivation sous le signe intégral s'applique facilement : φ est de classe C^2 sur $[0,r]$ et pour $s \in [0,r]$ (en utilisant que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$) :

$$\begin{aligned}
\varphi'(s) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\cos t\,\frac{\partial f}{\partial x}(x + s\cos t, y + s\sin t) + \sin t\,\frac{\partial f}{\partial y}(x + s\cos t, y + s\sin t)\right)\mathrm{d}t \\
\varphi''(s) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left((\cos^2 t - \sin^2 t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x + s\cos t, y + s\sin t) + 2\sin t\cos t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x + s\cos t, y + s\sin t)\right)dt
\end{aligned}$$

On peut avoir l'idée de faire des I.P.P. pour transformer φ' :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos t\,\frac{\partial f}{\partial x}(x + s\cos t, y + s\sin t)\,\mathrm{d}t &= \left[\sin t\,\frac{\partial f}{\partial x}(x + s\cos t, y + s\sin t)\right]_0^{2\pi} \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \sin t\,\left(-s\sin t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x + s\cos t, y + s\sin t) + s\cos t\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x + s\cos t y + s\sin t)\right)\mathrm{d}t \\
&= s\int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x + s\cos t, y + s\sin t) - \sin t\cos t\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x + s\cos t y + s\sin t)\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin t\,\frac{\partial f}{\partial y}(x + s\cos t, y + s\sin t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\cos t\,\frac{\partial f}{\partial y}(x + s\cos t, y + s\sin t)\right]_0^{2\pi} \\
&\quad - \int_0^{2\pi} -\cos t\,\left(-s\sin t\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x + s\cos t, y + s\sin t) + s\cos t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x + s\cos t y + s\sin t)\right)\mathrm{d}t \\
&= s\int_0^{2\pi} \left(-\sin t\cos t\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x + s\cos t, y + s\sin t) - \cos^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x + s\cos t y + s\sin t)\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

de qui donne :

$$\forall s \in [0, r],\ \varphi'(s) = -s\varphi''(s)$$

Sur $]0, r]$, cela donne l'existence d'un constante K telle que $\varphi'(s) = \dfrac{K}{s}$. comme φ' est continue sur $[0, r]$, $K = 0$ et φ est constante : on a en particulier

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + r\cos t, y + r\sin t)\,\mathrm{d}t = \varphi(r) = \varphi(0) = f(x, y).$$

b) Comme $|f|$ est continue sur le compact $\overline{B(0,1)}$, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe donc $a \in \overline{B(0,1)}$ tel que $|f(a)| = \sup\limits_{x\in\overline{B(0,1)}} |f(x)| = M$. Si $a = (x, y) \in B(0, 1)$, on a d'après la question précédente :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + r\cos t, y + r\sin t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout $r \in [0, 1 - \|a\|\,[$. Comme $r \longmapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x+r\cos t, y+r\sin t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[0, 1 - \|a\|\,]$, cette égalité est également valable quand $r = 1 - \|a\| = r_0$. Nous avons alors, pour $r \in [0, r_0]$:

$$|f(a)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + r\cos t, y + r\sin t)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x + r\cos t, y + r\sin t)|\,\mathrm{d}t \le M = |f(a)|.$$

On en déduit que la fonction $t \longmapsto M - |f(x+r\cos t, y+r\sin t)|$, qui est continue et positive, a une intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$: elle est donc nulle. La fonction $|f|$ est donc constante sur $\overline{B(a, r_0)}$: ce disque contient un point qui appartient au cercle unité et M est donc atteint en un point du cercle.

15) a) Soit $y \in]-R, R[$. On peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\sum$ à la série

$$\sum_{n\ge 0} a_n(x + iy)^n$$

sur l'intervalle $I = \left]-\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2}\right[$:

- pour tout n, $u_n :\ x \longmapsto a_n(x + iy)^n$ est de classe C^1 sur I ;
- $\sum\limits_{n\ge 0} u_n(x)$ converge simplement sur I ;
- pour tout $[-a, a] \subset I$, la série $\sum\limits_{n\ge 0} u_n'(x)$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-a, a]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-a, a],\ |u_n'(x)| \le n|a_n|\left(\sqrt{a^2 + y^2}\right)^{n-1} = \alpha_n$$

  et α_n est un terme général de série convergente, car $\sqrt{a^2 + y^2} < R$ et R est le rayon de convergence de la série dérivée $\sum\limits_{n\ge 0}(n + 1)a_{n+1}z^n$.

Nous avons donc montré que f était dérivable par rapport à x sur U, avec :

$$\forall z \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n + 1)a_{n+1}z^n = f'(z)$$

On montre de même que f est dérivable par rapport à y sur U, avec :

$$\forall z \in U,\ \frac{\partial f}{\partial y}(z) = i\sum_{n=0}^{+\infty}(n + 1)a_{n+1}z^n = if'(z).$$

Comme ces deux dérivées partielles sont continues sur U (ce sont les sommes de séries entières de rayon R), f est de classe C^1.

Si f est à valeurs réelles, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont également à valeurs réelles et $\dfrac{\partial f}{\partial x} = i\dfrac{\partial f}{\partial y}$ donne $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$; comme U est un ouvert convexe, f est constante.

b) On peut écrire le développement limité de f en z, avec $h = h_1 + ih_2$:

$$f(z+h) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial x}(z)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(z)h_2 + o(h) = f(z) + f'(z)h + o(h)$$

On en déduit donc :

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) + \frac{o(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(z).$$

16) a) Nous allons montrer que F est dérivable par rapport à x et que $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Comme $F(x,y) = -F(y,x)$, F sera également dérivable par rapport à y avec $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ continu : f sera de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

En $(x,y) \neq (0,0)$, F est dérivable par rapport à x et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. En $(0,0)$, on a :

$$\frac{F(h,0) - F(0,0)}{h} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

donc F est également dérivable par rapport à x en $(0,0)$, avec $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0$.

$\dfrac{\partial F}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (comme composée de fonctions continues) et, en munissant $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne canonique :

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,x)\right| = 6\,||(x,y)|| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$$

donc $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et F est de classe C^1.

b) On a :

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)}{y} = \frac{-y-0}{y} = -1 \xrightarrow[y\to 0]{} -1$$

donc $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0)$

17) a) Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$. Il existe ensuite $\eta > 0$ tel que $\|\eta h\| < r$: la fonction $g :\ t \longmapsto f(a+th)$ est alors définie sur $]-\eta,\eta[$ et de classe C^2, comme composée de deux applications de classe C^2.

Comme g atteint un maximum local en 0, on a $g'(0) = 0$ et le DL $g(t) - g(0) = \frac{t^2}{2}\,g'(0) + o(t^2)$ prouve que $g''(0) \leq 0$ (sinon, $g(t) - g(0)$ serait équivalent à $\frac{t^2}{2}\,g(0)$ quand t tend vers 0, quantité strictement positive pour t non nul).

La règle de la chaîne (appliquée deux fois) donne $0 \geq g"(0) = \sum_{1\leq i,j\leq 1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_ih_j = {}^t h\, H_f(a)\, h$; nous avons donc prouvé que la matrice (symétrique) $H_f(a)$ est négative.

En particulier, les termes diagonaux de $H_f(a)$ sont négatifs, donc $\Delta f(a) = \mathrm{Tr}(H_f(a)) \leq 0$.

b) Si f_p atteignait son maximum en un point a de U, on aurait $\Delta f_p(a) \leq 0$, ce qui serait absurde car

$$\Delta f_p(a) = \Delta f(a) + \frac{2n}{p} = \frac{2n}{p} > 0.$$

On en déduit qu'il existe $a_p \in \overline{U} \setminus U = \mathrm{Fr}(U)$ tel que $\forall x \in \overline{U},\ f_p(a_p) \geq f_p(x)$.

Comme U est borné, Fr(U) est un fermé borné, donc un compact de $\mathbb{R}^n$. La suite (a_p) possède une valeur d'adhérence $a \in$ Fr(U), limite d'une sous-suite $(a_{\varphi(p)})_{p\geq 0}$. On a alors :

$$\forall x \in \overline{U},\ \forall p \in \mathbb{N},\ f(a_{\varphi(p)}) + \frac{1}{\varphi(p)} \|a_{\varphi(p)}\|^2 = f_{\varphi(p)}(a_{\varphi(p)}) \geq f_{\varphi(p)}(x) = f(x) + \frac{1}{\varphi(p)} \|x\|^2$$

ce qui prouve, en faisant tendre p vers l'infini, que f atteint en a son maximum sur $\overline{U}$.

18) Si $|x| \geq 1$ ou $|y| \geq 1$, $\ln(1 + x^{2n} + y^{2n})$ tend vers $+\infty$ und n tend vers $+\infty$: la série diverge grossièrement. Sinon, $0 \leq \ln(1 + x^{2n} + y^{2n}) \leq x^{2n} + y^{2n}$ et la série converge, par théorème de comparaison des séries à termes positifs (les séries géométriques $\sum\limits_{n\geq 0}(x^2)^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0}(y^2)^n$ convergent).

Pour $y \in]-1,1[$, on peut appliquer le théorème de dérivation à la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} \underbrace{\ln(1 + x^{2n} + y^{2n})}_{=u_n(x)}$:

- chaque u_n est de classe C^1 sur $I =]-1,1[$;
- $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur I ;
- pour $a \in [0,1[$, $\sum_{n\geq 0} u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-a,a]$:

$$\forall x \in [-a,a],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n'(x)| = \left|\frac{2nx^{2n-1}}{1 + x^{2n} + y^{2n}}\right| \leq 2na^{2n-1}$$

  et $\sum_{n\geq 0} 2na^{2n-1}$ converge.

On en déduit que f est dérivable par rapport à x en tout point de $U =]-1,1[^2$, avec :

$$\forall (x,y) \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\sum_{n=}^{+\infty} \frac{nx^{2n-1}}{1 + x^{2n} + y^{2n}}.$$

Pour $a \in [0,1[$, cette dérivée partielle est continue sur $A = [-a,a] \times]-1,1[$, puisque chaque $(x,y) \longmapsto \dfrac{nx^{2n-1}}{1 + x^{2n} + y^{2n}}$ est continue et qu'il y a convergence normale sur A :

$$\forall (x,y) \in A,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{nx^{2n-1}}{1 + x^{2n} + y^{2n}}\right| \leq 2na^{2n-1}$$

On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur chaque $[-a,a] \times]-1,1[$, donc sur U.

Par symétrie, f est dérivable par rapport à y sur U et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur U : f est donc de classe C^1 sur U.

19) On peut obtenir un DL_2 en intégrant un DL_1. Fixons $a \in U$ et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$ Pour $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $||h|| < r$, considérons l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(a+th) \end{array}$. Comme φ est de classe C^1, on peut écrire :

$$f(a+h) = f(a) + \int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+th)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a+th)\,h_2\right)\mathrm{d}t.$$

Comme f est de classe C^2, ses dérivées partielles sont de classe C^1 et elles admettent des DL à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a)+\int_0^1 \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)th_1+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a)th_2+||th||\varepsilon_1(th)\right)x\right. \\ &\qquad \left. +\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)th_1+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)th_2+||th||\varepsilon_2(th)\right)y\right)\,\mathrm{d}t \\ &= f(a)+x\frac{\partial f}{\partial x}(a)+y\frac{\partial f}{\partial y}(a)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_2^2\right) \\ &\qquad +\underbrace{\int_0^1 \left(th_1^2\varepsilon_1(th)+th_2^2\varepsilon_2(th)\right)\,\mathrm{d}t}_{=R(h)} \end{aligned}$$

Il reste à montrer que le reste $R(h)$ est bien négligeable devant $||h||^2$ quand h tend vers 0 ; pour $\varepsilon>0$, il existe $\eta\in]0,r[$ tel que :

$$\forall h\in\mathbb{R}^2,\ ||h||<\eta\Longrightarrow ||\varepsilon_1(h)||\leq\varepsilon \text{ et } ||\varepsilon_2(h)||\leq\varepsilon.$$

On en déduit que pour h tel que $||h||\leq\eta$, on a :

$$||R(h)||\leq\int_0^1\left(th_1^2\underbrace{||\varepsilon_1(th)||}_{\leq\varepsilon}+th_2^2\underbrace{||\varepsilon_1(th)||}_{\leq\varepsilon}\right)\mathrm{d}\,t\leq\frac{||h||^2}{2}\,\varepsilon$$

ce qui traduit que $R(h)=o(||h||^2)$.

Cette preuve se généralise facilement à la dimension n ; si f est de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, f admet en tout point a un DL à l'ordre 2 :

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i+\frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_ih_j+o(||h||^2)$$

On reconnaît dans cette expression la forme quadratique associée à la matrice $H_f(a)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ ($H_f(a)$ est la *hessienne* de f en a). Quand f est à valeurs dans R, on peut écrire le DL sous la forme :

$$f(a+h)=f(a)+\nabla f(a)\cdot h+\frac{1}{2}\,{}^t hH_f(a)h+o(||h||^2).$$

On peut utiliser ce résultat pour démontrer que :

- si f atteint en a un minimum local, $\nabla f(a)=0$ et $H_f(a)\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$;
- si f atteint en a un maximum local, $\nabla f(a)=0$ et $H_f(a)\in\mathcal{S}_n^-(\mathbb{R})$;
- si $\nabla f(a)=0$ et $H_f(a)\in\mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$, f atteint en a un minimum local strict ;
- si $\nabla f(a)=0$ et $H_f(a)\in\mathcal{S}_n^{+-}(\mathbb{R})$, f atteint en a un maximum local strict.

CP : en dimension 2, en notant $H_f(a)=\begin{pmatrix} r & s\\ s & t\end{pmatrix}$ en un point critique a, on a :

- si $rt-s^2>0$, f atteint en a un extremum local strict (un maximum si $a<0$ et un minimum si $a>0$) ;
- si $rt-s^2<0$, f n'atteint pas d'extremum local en a (on parle de *point col*) ;
- si $rt-s^2=0$, le DL à l'ordre 2 ne permet pas de conclure.

20) f est de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, comme composée d'applications de classe C^1, avec :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{(y^2 - x^2)\sin y - (yx^2 + y^3)\cos x + 2xy \sin x}{(x^2+y^2))^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{(x^2 - y^2)\sin x + (xy^2 + x^3)\cos x + 2xy \sin y}{(x^2+y^2))^2} \end{cases}$$

Nous allons montrer que f est également dérivable partiellement par rapport en x en $(0,0)$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. Le calcul étant symétrique pour l'étude de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, nous aurons démontré que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Tout d'abord, $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ est définie et vaut 0. Il reste à démontrer :

$$\frac{(y^2 - x^2)\sin y - (yx^2 + y^3)\cos x + 2xy \sin x}{(x^2+y^2))^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Nous allons utiliser un développement limité des fonctions sin et cos au voisinage de 0 et poser $r = \sqrt{x^2+y^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{(y^2 - x^2)(y + O(y^3)) - (yx^2 + y^3)(1 + O(x^2)) + 2xy(x + O(x^3))}{(x^2+y^2))^2} \\ &= \frac{(y^2 - x^2)O(y^3) + (yx^2 + y^3)O(x^2) + 2xyO(x^3)}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Il faut se méfier des notation de Landau [1] quand on manipule une variable vectorielle : ici, les O représentent des fonctions d'une seule variable réelle. Par exemple, $O(x^3)$ peut aussi s'écrire $x^3\varphi_1(x)$ avec φ_1 fonction bornée au voisinage de 0. On en déduit qu'il existe $a > 0$ et $M_1, M_2, M_3 \geq 0$ telles que :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in [-a,a]^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &\leq \frac{(y^2 + x^2)|y|^3 M_1 + (|y|x^2 + |y|^3)x^2 M_2 + 2yx^4 M_3}{(x^2+y^2)^2} \\ &\leq r\,(M_1 + M_2 + 2M_3) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \end{aligned}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont donc définies et continues sur $\mathbb{R}^2$: f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

21) Par composition, g est de classe C^2 et la règle de la chaîne donne, pour tous $r, \theta \in \mathbb{R}$ (en notant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$) :

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r\left(\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

puis :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right)(r,\theta) = r\left(\cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

De même, toujours pour tous $r, \theta \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}y(x,y)$$

puis

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

1. On pourrait avoir envie d'écrire ici $x = O(r)$, $y = O(r)$ puis $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{O(r^5)}{r^4} = O(r) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ mais il faut s'attendre à avoir des questions sur l'utilisation de ce $O(r)$ avec r qui est une fonction de la variable vectorielle (x,y).

ce qui donne bien, avec la condition $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, la relation demandée.

Posons $\varphi:\ r \longmapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Comme f est de classe C^1, on peut appliquer le théorème de Leibniz, en fixant un intervalle $I = [-a, a]$ de $\mathbb{R}$:

- pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \longmapsto g(r,\theta)$ est de classe C^1 sur I ;
- pour tout $r \in I$, $\theta \longmapsto g(r,\theta)$ est continue et évidemment intégrable sur $[0, 2\pi]$;
- pour tous $r \in I$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, on a :

  $$\left|\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\right| = \left|r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right| \leq a\left(\sup_{x^2+y^2\leq a^2}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| + \sup_{x^2+y^2\leq a^2}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\right) = M$$

  et la fonction $\theta \longmapsto M$ est continue et intégrable sur $[0, 2\pi]$.

φ est donc de classe C^1 sur chaque $[-a, a]$, donc sur $\mathbb{R}$, et $\forall r \in \mathbb{R},\ \varphi'(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$. On peut ensuite appliquer, de la même façon, le théorème de Leibniz pour démontrer que $\psi:\ r \longmapsto r\varphi'(r)$ est de classe C^1, avec :

$$\forall r \in \mathbb{R},\ \psi'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\right)\mathrm{d}\theta.$$

En utilisant la relation démontrée, nous obtenons :

$$\forall r \in \mathbb{R},\ r\psi'(r) = -\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\left[\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)\right]_0^{2\pi} = 0$$

car $\theta \longmapsto g(r,\theta)$ est 2π-périodique, ainsi que sa dérivée.

On en déduit que ψ' est nulle sur $\mathbb{R}^*$, donc ψ est constante sur $\mathbb{R}$, soit $r\varphi'(r) = \psi(r) = \psi(0) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. Ainsi, φ' est nulle sur $\mathbb{R}^*$, donc φ est constante sur $\mathbb{R}$, ce qui donne :

$$\forall r \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\,\varphi(r) = \frac{1}{2\pi}\,\varphi(0) = f(0,0).$$

22)

a) Comme $f(x)$ tend $+\infty$ quand x tend vers l'infini, il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \geq r \Longrightarrow f(x) \geq f(0).$$

En notant K la boule fermée de centre 0 et de rayon r, f est continue sur le compact non vide K, donc elle y est minoré et y atteint sa borne inférieure : il existe $a \in K$ tel que :

$$\forall x \in K,\ f(x) \geq f(a).$$

On a alors, pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, $f(x) \geq f(0) \geq f(a)$ car $0 \in K$. Ainsi, f atteint en a un minimum global et a est un point critique de f : $\nabla f(a) = 0$.

b) Soit $u \in \mathbb{R}^n$. L'idée consiste à définir une fonction auxiliaire g telle que $\nabla g(x) = \nabla f(x) - u$, et d'appliquer la question a) à g. On pose donc :

$$g:\ x \longmapsto f(x) - \langle u, x\rangle$$

On a :

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $g(x+h) = f(x+h) - \langle u, x+h\rangle = f(x) + \langle\nabla f(x), h\rangle + o(h) - \langle u, x\rangle - \langle u, h\rangle = g(x) + \langle\nabla f(x) - u, h\rangle + o(h)$

donc g est de classe C^1 avec $\nabla g(x) = \nabla f(x) - u$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

On a d'autre part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\frac{g(x)}{\|x\|} \geq \frac{f(x)}{\|x\|} - \frac{|\langle u, x\rangle|}{\|x\|} \geq \frac{f(x)}{\|x\|} - \|u\| \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty.$$

On peut donc appliquer à g la question a : il existe x tel que $\nabla g(x) = u$, i.e. tel que $\nabla f(x) = u$: ∇f est surjective.

Exercices Mines-Centrale: équations aux dérivées partielles

23) On a $f(x,y) = g(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial X^2}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) + 2\alpha\gamma \dfrac{\partial^2 g}{\partial X \partial Y}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) + \gamma^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial Y^2}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \alpha\beta \dfrac{\partial^2 g}{\partial X^2}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) + (\alpha\delta + \beta\gamma) \dfrac{\partial^2 g}{\partial X \partial Y}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) + \gamma\delta \dfrac{\partial^2 g}{\partial Y^2}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \beta^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial X^2}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) + 2\beta\delta \dfrac{\partial^2 g}{\partial X \partial Y}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) + \delta^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial Y^2}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) \end{cases}$$

On en déduit que f est solution de (E_S) si et seulement si g est solution de E_T, avec :

$$T = \begin{pmatrix} a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 & a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\beta\delta \\ a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\beta\delta & a\gamma^2 + 2b\gamma\delta + c\delta^2 \end{pmatrix}$$

et un calcul élémentaire montre que $T = PS^tP$.

Comme S est symétrique réelle, elle est congruente à une matrice de la forme :

$$T_1 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ T_2 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut le voir soit en appliquant la méthode de réduction de Gauss, soit en diagonalisant S dans une base orthonormale : il existe une matrice $Q \in O_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^tQSQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$; si λ (resp. μ) est non nul, on peut le remplacer par ± 1 en divisant le premier vecteur (resp. le second vecteur) de la nouvelle base par $\sqrt{|\lambda|}$ (resp. par $\sqrt{|\mu|}$).

Quand $T = T_1$ ou $T = T_2$, l'équation (E_S) se ramène à (1) ou (2). La matrice T_3 est congruente à $T_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (T_4 admet 1 et -1 pour valeurs propres), donc le dernier cas nous ramène à l'équation (3).

Application numérique avec $S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On applique la méthode de réduction de Gauss :

$${}^tXAX = x^2 + 6xy + 5y^2 = (x+3y)^2 - 4y^2 = (x+5y)(x+y)$$

On fait donc le changement de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 5y \\ x + y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=Q} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et on a ${}^tQ^{-1}SQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. En choisissant $P = {}^tQ^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, i.e. en posant $X = \frac{1}{4}(-x+y)$ et $Y = \frac{1}{4}(5x - y)$, l'équation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ devient $\dfrac{\partial^2 g}{\partial X \partial Y} = 0$, en posant $g(X,Y) = f(x,y)$. Ainsi, la solution générale de de l'équation (E_S) est :

$$f(x,y) = g(X,Y) = \varphi(X) + \psi(Y) = \varphi_1(-x+y) + \psi_1(5x - y)$$

avec $\varphi_1, \psi_1 :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ applications quelconques de classe C^2.

24) Pour $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, u'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ puis :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\, u''\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, u'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

Par symétrie, on obtient :

$$\Delta F(x,y,z) = u''\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, u'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$$

F vérifie les conditions imposées si et seulement si $u(0) = 1$ et $\forall r > 0,\ u''(r) + \dfrac{2}{r}\, u'(r) = ku(r)$. Pour résoudre l'équation différentielle, on remarque que $ru''(r) + 2u'(r) - kru(r) = v''(r) - kv(r)$, en posant $v(r) = ru(r)$. On obtient donc les solutions :

- si $k > 0$, on pose $\omega = \sqrt{k}$ et la solution générale de l'équation sur $]0, +\infty[$ est $u(r) = \dfrac{1}{r}\ (A\,\mathrm{sh}(\omega r) + B\,\mathrm{ch}(\omega r))$, soit $u(r) = \dfrac{\mathrm{sh}(\sqrt{k}\,r)}{\sqrt{k}\,r}$, pour avoir u continue en 0 et $u(0) = 1$;
- si $k < 0$, on obtient comme ci-dessus $u(r) = \dfrac{\sin(\sqrt{-k}\,r)}{\sqrt{-k}\,r}$;
- si $k = 0$, $u(r) = 1$.

Remarque : si on ne pense pas à poser $v(r) = ru(r)$, on peut aussi chercher les solution de l'équation différentielle sous forme de série entière et reconnaître les solutions $A\,\dfrac{\mathrm{sh}(\omega r)}{r}$ ou $A\,\dfrac{\sin(\omega r)}{r}$, puis deviner que $\dfrac{\mathrm{ch}(\omega r)}{r}$ ou $\dfrac{\cos(\omega r)}{r}$ sont également solution et ainsi retrouver toutes les solutions sur $]0, +\infty[$ (qui forment un espace vectoriel de dimension 2).

25) Soit f une solution de l'équation aux dérivée partielle. Nous allons travailler en coordonnées polaires, en définissant $g :\ (r, \theta) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Par composition, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall r, \theta \in \mathbb{R},\ r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sin r^2.$$

On en déduit donc, pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé :

$$\forall r > 0,\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\sin r^2}{r}.$$

On peut donc écrire :

$$\forall r \geq 1,\ g(r,\theta) = g(1,\theta) + \int_1^r \frac{\sin t^2}{t}\,\mathrm{d}t = f(\cos\theta, \sin\theta) + \frac{1}{2}\int_1^{r^2} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Comme $\alpha \longrightarrow \displaystyle\int_1^{\alpha} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ est continue sur $[1, +\infty[$ et a une limite (finie) en $+\infty$, cette fonction est bornée. D'autre part, f est continue, donc bornée sur le cercle unité : il existe ainsi $M \geq 0$ tel que

$$\forall r \geq 1,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ |g(r,\theta)| \leq M.$$

Ceci prouve que f est bornée sur $\{(x,y),\ x^2+y^2 \geq 1\}$, donc sur $\mathbb{R}^2$ puisque f est continue donc bornée sur le compact $\{(x,y),\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

26) a) Pour $(x,y) \in U$ et $t > 0$, notons $\varphi_{x,y}(t) = f(tx,ty) - t^a f(x,y)$. φ est de classe C^1 et $\forall t > 0,\ t\varphi'(t) = tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) - at^a f(x,y)$.

Supposons que f est un vecteur propre associé à a : $G(f) = af$. On a donc :

$$\forall t > 0,\ t\varphi'(t) = G(f)(tx,ty) - at^a f(x,y) = a\left(f(tx,ty) - t^a f(x,y)\right) = a\varphi(x).$$

φ est donc solution sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ du problème de Cauchy $\big(y' = ay,\ y(1) = 0\big)$. Comme $t \longmapsto t$ est continue et ne s'annule pas sur I et que $t \longmapsto a$ est continue sur I, ce problème possède comme unique solution la fonction nulle (théorème de Cauchy-Lipschitz pour une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1) : on en déduit que φ est nulle, d'où la condition demandée.

Réciproquement, supposons que $f(tx,ty) = t^a f(x,y)$ pour tous $x, y \in U$ et $t > 0$. À (x,y) fixé, on obtient en dérivant par rapport à t :

$$\forall t > 0,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = at^{a-1}f(x,y)$$

ce qui donne $G(f) = af$ en prenant $t = 1$.

b) Si $G(f) = af$, nous avons :

$$\forall r > 0,\ \forall \theta \in]-\pi/2, \pi/2[,\ f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^a\, f(\cos\theta, \sin\theta).$$

Il existe donc une fonction $\phi:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{a/2}\ \phi(y/x)$$

(il suffit de poser $\phi:\ u \longmapsto f(\cos(\mathrm{Arctan}(u)), \sin(\mathrm{Arctan}\, u)))$.

Réciproquement, les fonctions de cette forme vérifie la relation $f(tx,ty) = t^a f(x,y)$. La valeur a est donc valeur propre de G, associée à l'espace propre :

$$\mathrm{Ker}\,(G - Id) = \left\{ f : (x,y) \longmapsto \left(x^2+y^2\right)^{a/2}\ \phi(y/x),\ \phi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \right\}.$$

c) L'équation étudiée est linéaire et $f_0 :\ (x,y) \longmapsto \dfrac{x^2+y^2}{2}$ est une solution évidente. La solution générale de l'équation sera donc $\mathcal{S} = f_0 + \mathcal{S}_0$ où $\mathcal{S}_0$ est la solution de l'équation homogène :

$$(E_0) :\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Nous avons (sans écrire le point (x,y) en lequel les fonctions sont appliquée pour alléger l'écriture) :

$$\begin{aligned} G \circ G(f)(x,y) &= x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= x\left(\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + y\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

(E_0) s'écrit donc $G \circ G(f) - G(f) = 0$. $\mathcal{S}_0$ est donc le noyau de $G^2 - G$: comme les polynôme $X - 1$ et X sont premiers entre eux, le lemme des noyaux donne :

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Ker}\,(G - Id) \oplus \mathrm{Ker}\,(G)\,.$$

On en déduit que les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme :

$$f :\ (x,y) \longmapsto -\frac{x^2+y^2}{2} + \sqrt{x^2+y^2}\,\phi\,(y/x) + \psi(y/x)$$

avec $\phi, \psi : \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞.

Exercices Mines-Centrale: recherche d'extremums

27) a) Comme $f(M) \geq AM$, $f(M)$ tend vers $+\infty$ quand M tend vers l'infini. On en déduit que f est minorée et qu'elle atteint sa borne inférieure. Pour être plus précis, on pose $R = f(A) \geq 0$ et la fonction f est continue sur $\overline{D(A,R)}$, disque fermé de centre A et de rayon R, qui est un compact : f est donc bornée sur ce disque et atteint ses borne : il existe $M_0 \in \overline{D(A,R)}$ tel que $f(M_0) \leq f(M)$ pour tout $M \in \overline{D(A,R)}$. Mais pour $M \in P \setminus \overline{D(A,R)}$, on a $f(M) \geq AM \geq R = f(A) \geq f(M_0)$ car $A \in \overline{D(A,R)}$: f atteint donc en M_0 sa borne inférieure.

b) Sur $U = P \setminus \{A,B,C\}$, f est de classe C^∞ comme composée de fonctions de classe C^∞ (la fonction $\sqrt{}$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$). On peut calculer le gradient de f en faisant un développement limité :

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\overrightarrow{AM}+h)\cdot(\overrightarrow{AM}+h)} &= \sqrt{AM^2 + 2\overrightarrow{AM}\cdot h + ||h||^2} \\
&= AM\sqrt{1 + 2\frac{\overrightarrow{AM}}{AM^2}\cdot h + o(h)} \\
&= AM\left(1 + \frac{\overrightarrow{AM}}{AM^2}\cdot h + o(h)\right) \\
&= AM + \frac{\overrightarrow{AM}}{AM}\cdot h + o(h)
\end{aligned}$$

et donc

$$f(M+h) = f(M) + \left(\frac{\overrightarrow{AM}}{AM} + \frac{\overrightarrow{BM}}{BM} + \frac{\overrightarrow{CM}}{CM}\right)\cdot h + o(h)$$

ce qui donne :

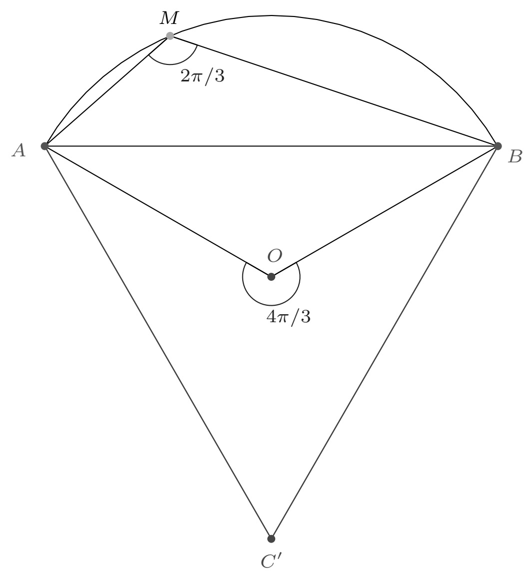
$$\nabla f(M) = \frac{\overrightarrow{AM}}{AM} + \frac{\overrightarrow{BM}}{BM} + \frac{\overrightarrow{CM}}{CM}.$$

Les vecteurs $u = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}$, $v = \dfrac{\overrightarrow{BM}}{BM}$ et $w = \dfrac{\overrightarrow{CM}}{CM}$ étant unitaire, on montre facilement que $u+v+w=0$ si et seulement si ces trois vecteurs font deux à deux des angles égaux à $2\pi/3$. En effet, en choisissant un repère orthonomal (u,u'), il existe θ et φ tels que $v = (\cos\theta)u + (\sin\theta)u'$ et $w = (\cos\varphi)u + (\sin\varphi)u'$ et la condition s'écrit :

$$\begin{cases} \cos\theta + \cos\varphi + 1 = 0 \\ \sin\theta + \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

ce qui impose $\theta \equiv -\varphi \mod 2\pi$ et $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$.

En supposant que le plan P est orienté et que (A,B,C) est direct, un point $M \in P\setminus\{A,B,C\}$ est un point critique de f si et seulement si les angles $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})$ sont égaux à $2\pi/3$. La condition $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = 2\pi/3$ traduit que M appartient à un arc de cercle délimité par A et B et de centre O, où O est le point de la médiatrice de $[A,B]$ tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = -2\pi/3$ (et donc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}) = -\pi/6$). Cet arc de cercle est contenu dans le cercle circonscrit au triangle équilatéral (A,B,C') (le points C' étant du côté opposé à C) :

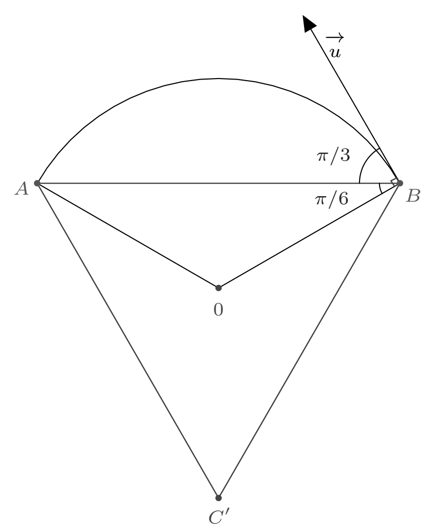


Les points critiques de f sont donc les points situés à l'intersections des trois arcs de cercles, (AB), (BC) et (CA). En effet, si (AB) et (BC) se coupent en un point M distincts de B, M sera également sur l'arc (CA), puisqu'on aura :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{2\pi}{3}$$

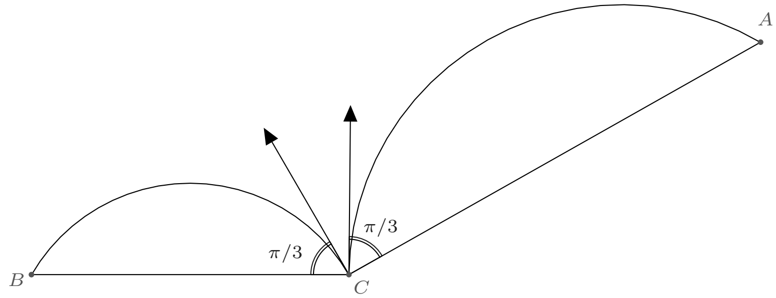
et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = 2\pi$.

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ tangent à l'arc de cercle (AB) en B fait un angle $-2\pi/3$ avec $\overrightarrow{AB}$:



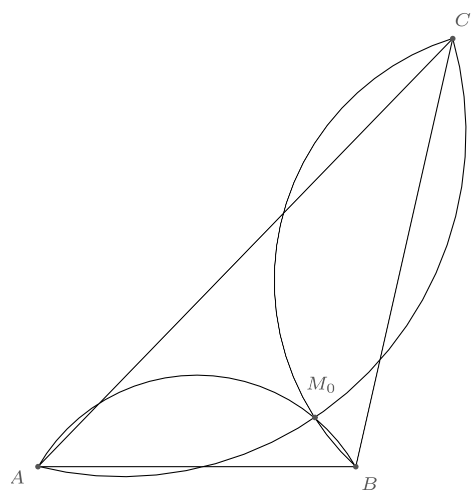
Pour que les arcs (AB) et (BC) se coupent en un point distinct de B, il faut et il suffit que l'angle $\widehat{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ soit strictement inférieur à $2\pi/3$. Nous avons donc deux cas :

1er cas : si l'un des angles du triangle, par exemple $\widehat{B}$ est supérieur ou égal à $2\pi/3$, f n'a pas de point critique :



Elle atteint donc son minimum en l'un des points A, B ou C. Comme $BC \leq AC$ et $BA \leq AC$, on a $f(B) \leq f(A)$ et $f(B) \leq f(C)$, donc f atteint son minimum en B.

Second cas : si les trois angles du triangle sont strictement inférieurs à $2\pi/3$, les trois arcs de cercles se coupent en un unique point M_0, qui est le seul point critique de f, comme sur le schéma ci-dessous :



Il reste à montrer que f est bien minimale en M_0 ; si M est un point quelconque de P, on a en notant $u = \dfrac{\overrightarrow{AM_0}}{AM_0}$, $v = \dfrac{\overrightarrow{BM_0}}{BM_0}$ et $w = \dfrac{\overrightarrow{CM_0}}{CM_0}$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$u \cdot \overrightarrow{MA} \leq MA,\ v \cdot \overrightarrow{MB} \leq MB \text{ et } w \cdot \overrightarrow{MC} \leq MC.$$

En appliquant la relation de Chasles et en sommant, nous obtenons :

$$\underbrace{(u+v+w)}_{=0} \cdot \overrightarrow{MM_0} + \underbrace{u \cdot \overrightarrow{M_0A} + v \cdot \overrightarrow{M_0B} + w \cdot \overrightarrow{M_0C}}_{=f(M_0)} \leq f(M)$$

soit $f(M_0) \leq f(M)$.

28) a) Pour un point A fixé, étudions la différentiablité de $\varphi : \ s \longmapsto A\gamma(s)$. Cette application est dérivable en tout point s tel que $A \neq \gamma(s)$, avec $\varphi'(s) = \dfrac{\overrightarrow{A\gamma(s)} \cdot \gamma'(s)}{A\gamma(s)} = \cos(\overrightarrow{A\gamma(s)}, \gamma'(s))$ (car $\gamma'(s)$ est unitaire).

L'application f est donc différentiable en tout (s_0, s_1, s_2) tel que les points $\gamma(s_0)$, $\gamma(s_1)$ et $\gamma(s_2)$ soient deux à deux distincts, avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial s_0}(s_0, s_1, s_2) = \cos(\overrightarrow{\gamma(s_1)\gamma(s_0)}, \gamma'(s_0)) + \cos(\overrightarrow{\gamma(s_2)\gamma(s_0)}, \gamma'(s_0)) \\ \frac{\partial f}{\partial s_1}(s_0, s_1, s_2) = \cos(\overrightarrow{\gamma(s_0)\gamma(s_1)}, \gamma'(s_1)) + \cos(\overrightarrow{\gamma(s_2)\gamma(s_1)}, \gamma'(s_1)) \\ \frac{\partial f}{\partial s_2}(s_0, s_1, s_2) = \cos(\overrightarrow{\gamma(s_0)\gamma(s_2)}, \gamma'(s_2)) + \cos(\overrightarrow{\gamma(s_1)\gamma(s_2)}, \gamma'(s_2)) \end{cases}$$

b) L'application $g : \Gamma^3 \to \mathbb{R}$ qui à (A, B, C) associe $AB + BC + CA$ est continue. Comme Γ est un compact de $\mathbb{R}^2$, g est bornée et atteint son maximum M en un triplet (A_0, B_0, C_0). Si $B_0 = C_0$, on remplace C_0 par un point C_0' distinct de A_0 et de B_0. Nous avons ainsi, par inégalité triangulaire :

$$A_0B_0 + A_0B_0 = M \geq g(A_0, B_0, C_0') = A_0B_0 + A_0C_0' + B_0C_0' \geq A_0B_0 + A_0B_0$$

donc le maximum de g est également atteint en (A_0, B_0, C_0'). Par symétrie, ceci permet de supposer que les trois points A_0, B_0, C_0 sont deux à deux distincts. Quitte à réordonner ces points, on peut alors choisir s_0, s_1, s_2 tels que $A_0 = \gamma(s_0)$, $B_0 = \gamma(s_1)$ et $C_0 = \gamma(s_2)$, avec $0 \leq s_0 < s_1 < s_2 < L$: f est bien majorée et atteint sa borne supérieure en (s_0, s_1, s_2).

c) Comme f atteint son maximum en un point où elle est différentiable, sa différentielle en (s_0, s_1, s_2) est nulle. Les formules du a) montrent que la trajectoire associée est une trajectoire de billard, puisque les "rebonds" sur Γ se font en respectant les lois de la réflexion de Descartes.

29) a) f et γ sont de classe C^2, donc $\delta : t \longmapsto= f \circ \gamma(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ l'est également. On a :

$$\forall t \in]-r, r[, \; \delta'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))x_i'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

puis, en dérivant une seconde fois :

$$\forall t \in]-r, r[, \; \delta'(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))x_i''(t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} x_i(\gamma(t))x_j'(t)x_i'(t) \right) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma''(t) + H_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

On peut donc écrire :

$$\delta(t) = \delta(0) + t\delta'(0) + \frac{t^2}{2}\,\delta''(0) + o(t^2) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot \gamma'(0) + \mathrm{d}f(a) \cdot \gamma''(0) + H_a(\gamma'(0))\,\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

b) Si f atteint en a un minimum, on a $\mathrm{d}f(a) = 0$ et le DL devient :

$$f(\gamma(t)) = f(a) + H_a(\gamma'(0))\,\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Pour $u \in \mathbb{R}^n$ quelconque, on pose $\gamma(t) = a + tu$; γ est définie et de classe C^2 sur un voisinage $]-r, r[$ de 0, avec $\gamma'(0) = u$. L'application $\delta = f \circ \gamma$ est donc de classe C^2 au voisinage de 0 et atteint en 0 un minimum local. Comme $\delta(t) - \delta(0) = H_a(u)\,\frac{t^2}{2} + o(t^2)$ est positif au voisinage de 0, on a $H_a(u) \geq 0$ et H_a est positive sur $\mathbb{R}^n$. L'application H_a est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire $(h, k) \longmapsto \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j$. Nous avons donc démontré que cette forme bilinéaire est positive quand f atteint en a un minimum local. La matrice de cette forme est la matrice hessienne de f :

si $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ atteint en a un minimum local, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n^+(\mathbb{R})$.

En considérant $-f$, on montre :

si $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ atteint en a un maximum local, $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n^-(\mathbb{R})$.

Remarque : on aurait pu se passer du DL et remarquer que δ, qui est de classe C^2 sur $]-r, r[$ et qui atteint en 0 un minimum local, vérifie $\delta'(0) = 0$ et $\delta''(0) \geq 0$.

c) La hessienne de f en a est $S = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$. Comme $\det(S) = rt - s^2 < 0$, S n'est ni positive, ni négative. En effet, si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ de S, ${}^tXSX = \lambda ||X||^2$ est du signe de λ ; comme S a une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, il existe X_1 et X_2 tels que ${}^tX_1SX_1 > 0$ et ${}^tX_2SX_2 < 0$. Ainsi, f n'atteint pas d'extremum local en a.

30) Nous allons montrer que $\nabla f(x_0)$ est colinéaire au vecteur (unitaire) x_0. Cela traduit que le gradient de f en x_0 est orthogonal à la surface S au point x_0, ce qui revient à démontrer que $\nabla f(x_0)$ est orthogonal à tout vecteur unitaire u orthogonal à x_0. Soit donc u un tel vecteur. L'intersection de S et du plan engendré par x_0 et u est un cercle, que l'on peut paramétrer par $t \longmapsto (\cos t)\, x_0 + (\sin t)\, u$. En posant $\varphi : \ t \in \mathbb{R} \ \longmapsto f((\cos t)\, x_0 + (\sin t)\, u)$, nous avons :

- φ est de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = \langle\, \nabla f((\cos t)\, x_0 + (\sin t)\, u) \mid -(\sin t)\, x_0 + (\cos t)\, u \,\rangle$;
- φ atteint en $t = 0$ un extremum local.

On en déduit que $\varphi'(0) = 0$, ce qui donne $\langle\, \nabla f(x_0) \mid u \,\rangle = 0$.

Application : montrons par récurrence sur la dimension de E que tout $u \in \mathcal{S}(E)$ est diagonalisable dans une base orthonormale.

Si E est de dimension 1, le résultat est évident. Supposons que E est de dimension $n \geq 2$ et que le résultat ait été démontré en dimension $n - 1$. Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $f : \ x \longmapsto \langle\, u(x) \mid x \,\rangle$. f est de classe C^1 sur $U = E$ et on a :

$$\forall x, h \in E,\ f(x+h) = \langle\, u(x) \mid x \,\rangle + \langle\, u(x) \mid h \,\rangle + \underbrace{\langle\, x \mid u(h) \,\rangle}_{= \langle\, u(x) \mid h \,\rangle} + \underbrace{\langle\, h \mid u(h) \,\rangle}_{= O(\|h\|^2)} = f(x) + \langle\, 2u(x) \mid h \,\rangle + o(h).$$

Cela donne donc $\forall x \in E,\ \nabla f(x) = 2u(x)$.

Comme S est compact, $f_{|S}$ est bornée et atteint en un point $e_1 \in S$ un maximum global. On en déduit que $2u(e_1)$ est colinéaire à e_1, i.e. que e_1 est un vecteur propre (unitaire) de u. L'hyperplan $H = e_A^{\perp}$ est stable par u et $v = u_{|H} \in \mathcal{S}(H)$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(e_i)_{2 \leq i \leq n}$ de H qui diagonalise v : la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est alors une base orthonormale qui diagonalise u .

Exercices X-ENS

31) a) Soit f une solution. En posant $g : \ (y, z) \longmapsto f(0, y, z)$, on définit une application de classe C^1 vérifiant :

$$f(x, y, z) = g(y, z) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(t, y, z)\, \mathrm{d}t = g(y, z) + \int_0^x (3t^2 + 4yz + 2ty)\, \mathrm{d}t = g(y, z) + x^3 + 4xyz + x^2 y.$$

En remplaçant f par cette expression dans la seconde équation, on obtient :

$$\forall y, z \in \mathbb{R},\ \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = z$$

On en déduit qu'il existe une fonction $h : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $g(y, z) = yz + h(z)$ pour tous $y, z \in \mathbb{R}$. En remplaçant enfin dans la dernière équation, on obtient $h'(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$, ce qui prouve l'existence d'une constante K telle que :

$$f(x, y, z) = x^3 + 4xyz + x^2 y + yz + K.$$

Réciproquement, ces fonctions vérifient les relations étudiées.

b) En reprenant la preuve précédente, la dernière étape de fonctionne plus, puisque l'on obtient la condition absurde :

$$\forall y, z \in \mathbb{R},\ 4xy + y + h'(z) = 0.$$

On peut aussi remarquer que le problème n'a pas de solution car si f était une solution, elle serait de classe C^2 et devrait vérifier le théorème de Schwarz :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, 4y = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} zx(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} xz(x, y, z) = 0.$$

c) Si le système possède une solution f, f est de classe C^2 et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} z = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} y$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} z$, soit :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Supposons réciproquement que (u, v, w) vérifie ces conditions. Si f est solution, on a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= f(0, y, z) + \int_0^x u(t, y, z)\, \mathrm{d}t \\
&= f(0, 0, z) + \int_0^y v(0, t, z)\, \mathrm{d}t + \int_0^x u(t, y, z)\, \mathrm{d}t \\
&= f(0, 0, 0) + \int_0^z w(0, 0, t)\, \mathrm{d}t + \int_0^y v(0, t, z)\, \mathrm{d}t + \int_0^x u(t, y, z)\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Réciproquement, définissons f par :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ f(x, y, z) = \int_0^z w(0, 0, t)\, \mathrm{d}t + \int_0^y v(0, t, z)\, \mathrm{d}t + \int_0^x u(t, y, z)\, \mathrm{d}t.$$

En appliquant le théorème de Leibniz (dérivation sous le signe intégral), on montre facilement que f est de classe C^1, avec :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = u(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(t, y, z)\, \mathrm{d}t + v(0, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial z}(t, y, z)\, \mathrm{d}t + \int_0^y \frac{\partial v}{\partial z}(0, t, z) + w(0, 0, z) \end{cases}$$

Comme $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$, on obtient, toujours pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \int_0^x \frac{\partial v}{\partial x}(t, y, z)\, \mathrm{d}t + v(0, y, z) = [v(t, y, z)]_0^x + v(0, y, z) = v(x, y, z).$$

De même :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \int_0^x \frac{\partial w}{\partial x}(t, y, z)\, \mathrm{d}t + \int_0^y \frac{\partial w}{\partial y}(0, t, z) + w(0, 0, z) \\
&= w(w, y, z) - w(0, y, z) + w(0, y, z) - w(0, 0, z) + w(0, 0, z) \\
&= w(x, y, z)
\end{aligned}$$

donc f est solution du problème.

d) La dernière question est délicate. On peut se limiter à travailler en dimension 2 (ce sera un cas particulier du problème en dimension 3, en choisissant u et v ne dépendant que de (x, y) et $w = 0$) : pour U ouvert de

$\mathbb{R}^2$ et u, v de classe C^1 sur U vérifiant $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$, existe-t-il f de classe C^2 sur U telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = u$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = v$? La réponse est négative quand U n'est pas un "bon ouvert", c'est-à-dire quand U est un ouvert qui possède un trou. On choisit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on considère l'application f qui, à $(x,y) \in U$, associe un argument. Le problème est justement qu'il n'existe pas une telle fonction qui soit continue sur U. Par contre, sur l'ouvert $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \leq 0\}$, on peut définir f_0 qui à $(x,y) \in V$ associe l'unique argument de (x,y) strictement compris entre $-\pi$ et π. Cette application est de classe $C^{+\infty}$ puisqu'elle a des expressions sur chaque ouvert $V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$, $V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$ et $V_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y < 0\}$, qui recouvrent V :

$$\forall (x,y) \in V,\ f_0(x,y) = \begin{cases} \text{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \text{Arccos}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y > 0 \\ -\text{Arccos}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Un calcul élémentaire donne :

$$\forall (x,y) \in V,\ \begin{cases} \dfrac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial f_0}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Définissons maintenant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \begin{cases} u(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ v(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

u et v sont de classe C^1 sur U et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$, mais il n'existe pas f de classe C^1 sur U telle que $\mathrm{d}f = u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y$. En effet, si une telle application f existait, elle serait égale sur V à $f_0 + K$ avec K constante (car $f - f_0$ est de classe C^1 et de différentielle nulle sur V, ouvert connexe par arcs). On aurait alors :

$$\forall \theta \in]-\pi, \pi[,\ f(\cos(\theta), \sin(\theta)) = f_0(\cos(\theta), \sin(\theta)) + K = \theta + K$$

et en faisant tendre θ vers $-\pi^-$ ou π^+, nous obtenons par continuité de f en $(-1,0)$:

$$f(-1,0) = \lim_{h \to -\pi^+} f(\cos\theta, \sin\theta) = -\pi + K \neq \pi + K = \lim_{h \to \pi^-} f(\cos\theta, \sin\theta) = f(-1,0)$$

ce qui est absurde.

32) a) L'application $\varphi :\ t \longmapsto f(x + t(y-x))$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $\varphi' :\ t \longmapsto (\nabla(f)(x + t(y-x)) \,|\, y - x)$. Montrons que φ est strictement convexe. Soient $u, v \in \mathbb{R}$ distincts et $s \in]0,1[$. On a, en posant $a = x + u(y-x)$ et $b = x + v(y-x)$:

$$\varphi(su + (1-s)v) = f(x + (su + (1-s)v)(y-x)) = f(sa + (1-s)b) < sf(a) + (1-s)f(b) = s\varphi(u) + (1-s)\varphi(v)$$

car $b - a = (v-u)(y-x) \neq 0$ et $s \in]0,1[$.

On en déduit que φ' est strictement croissante, d'où :

$$(\nabla(f)(x) \,|\, y-x) = \varphi'(0) < \varphi'(1) = (\nabla(f)(y) \,|\, y-x)$$

ce qui donne l'inégalité demandée.

b) L'inégalité précédente prouve que $\nabla(f)$ est injective, puisque $\nabla(f)(x) - \nabla(f)(y) \neq 0$ pour $x \neq y$.

Montrons pour commencer que le vecteur nul est dans l'image de $\nabla(f)$. Comme $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini, f atteint un minimum global en un point $x_0 \in \mathbb{R}^k$: il existe en effet $R > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^k,\ ||x|| > R \Longrightarrow f(x) \geq f(0)$$

Comme $K = \overline{B(0,R)}$ est un compact et que f est continue, la restriction de f à K atteint un minimum en un point x_0, qui est ainsi le minimum de f sur $\mathbb{R}^k$. Enfin, f étant de classe C^1, x_0 est un point critique de f et $\nabla(f)(x_0) = 0$.

Il est ensuite facile de généraliser cette preuve en utilisant une fonction auxiliaire : pour tout $u \in \mathbb{R}^k$, considérons la fonction $g_u : \ x \longmapsto f(x) - (u \,|\, x)$; g_u est de classe C^1 (avec $\nabla(g_u)(x) = \nabla(f)(x) - u$ pour tout $x \in \mathbb{R}^k$) et $g_u(x)$ tend toujours vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini (car x est négligeable devant $f(x)$ au voisinage de l'infini). Il existe donc x_u tel que g_u atteint son minimum global en x_u et ce point est un point critique de g_u, donc $\nabla(g_u)(x_u) = 0$, soit $\nabla f(x_u) = u$ et $\nabla(f)$ est surjective.

Montrons que $(\nabla f)^{-1}$ est continue. Cela revient à démontrer que l'image directe d'un fermé de $\mathbb{R}^k$ par $\nabla(f)$ est un fermé (caractérisation de la continuité par l'image réciproque des fermés). Si F est un fermé bornée de $\mathbb{R}^k$, F est un compact ($\mathbb{R}^k$ est un espace vectoriel normé de dimension finie) et $\nabla(f)$ est continue, donc $\nabla(f)(F)$ est un compact, donc un fermé de $\mathbb{R}^k$. Si F est un fermé non bornée, le problème va se résoudre en remarquant que $||\nabla f(x)||$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini. La preuve est cependant plus naturelle si l'on caractérise séquentiellement la continuité de $(\nabla f)^{-1}$.

- Pour $x, y \in \mathbb{R}^k$, l'application $\varphi : \ t \longmapsto f((1-t)x + ty)$ est convexe et dérivable, donc :
$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \ \varphi'(s)(t-s) + \varphi(s) \leq \varphi(t),$$
soit, avec $s = 0$ et $t = 1$:
$$(\nabla f(x) \,|\, y - x) + f(x) = \varphi'(1) + \varphi(0) \leq \varphi(1) = f(y)$$
En choisissant $y = 0$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R}^k, \ f(x) - f(0) \leq (\nabla f(x) \,|\, x) \leq ||\nabla f(x)|| \times ||x||$$
et donc $||\nabla f(x)||$ tend vers $+\infty$ quand $||x||$ tend vers l'infini, puisque $\dfrac{f(x) - f(0)}{||x||}$ tend vers $+\infty$.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^k$ qui converge vers $u \in \mathbb{R}^k$; pour tout n, notons $x_n = (\nabla f)^{-1}(u_n)$ et $x = (\nabla f)^{-1}(u)$. Comme $\nabla f(x_n)$ converge vers u, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (sinon, elle aurait une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ telle que $||x_{\varphi(n)}||$ diverge vers $+\infty$ et $||\nabla f(x_{\varphi(n)})||$ divergerait vers $+\infty$ au lieu de tendre vers $||u||$). Comme $\mathbb{R}^k$ est de dimension finie, il suffit de montrer que x est la seule valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour montrer que x_n converge vers x. Soit donc y une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, associée à l'extractrice φ. On a $u_{\varphi(n)} = (\nabla f)(x_{\varphi(n)})$ converge vers $(\nabla f)(y)$, donc $u = (\nabla f)(y)$ et $y = x$. Nous avons donc démontré que $(\nabla f)^{-1}(u_n)$ converge vers $(\nabla f)^{-1}(u)$, ce qui prouve que $(\nabla f)^{-1}$ est continue.

33) a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et considérons l'application :
$$g_x : \ y \longmapsto f(y) - (\nabla f(x) \,|\, y - x).$$
Comme $g_x(y) \geq f(y) - ||\nabla f(x)|| \, ||y - x||$ et $f(y)$ est prépondérant devant $||y||$, donc devant $||y - x||$, quand $||y||$ tend vers l'infini, $g_x(y)$ tend vers $+\infty$ quand y tend vers l'infini. Comme g_x est continue sur $\mathbb{R}^n$, elle atteint un minimum global en un point $y^* \in \mathbb{R}^n$. D'autre part, g_x est de classe C^1 avec $\nabla g_x(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. y^* étant un point critique de g_x, on a $\nabla g_x(y^*) = 0$, i.e. $\nabla f(x^*) = \nabla f(x) = 0$. Ainsi, par injectivité, $x = x^*$. Ainsi, x est le seul point en lequel g_x atteint son minimum. On en déduit :
$$\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\}, \ g_x(y) > g_x(x)$$
ie :
$$\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\}, \ f(y) > f(x) + (\nabla f(x) \,|\, y - x) \qquad (1)$$

f est strictement convexe si :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \text{avec } x \neq y, \ \forall t \in]0,1[, \ f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y).$$
Montrons que cela est équivalent à :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \text{avec } x \neq y, \ \varphi_{x,y} : \ t \longmapsto f((1-t)x + ty) \text{ est strictement convexe.}$$

- Supposons que f est strictement convexe et fixons $x, y \in \mathbb{R}^n$ distincts, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ distincts et $s \in]0,1[$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{x,y}((1-s)t_1 + st_2) & = & f\big([1-(1-s)t_1 - st_2]x + [(1-s)t_1 + st_2]y\big) \\ & = & f\big([(1-s)(1-t_1) + s(1-t_2)]x + [(1-s)t_1 + st_2]y\big) \\ & = & f\big((1-s)[(1-t_1)x + t_1 y] + s[(1-t_2)x + t_2 y]\big) \\ & < & (1-s)\underbrace{f((1-t_1)x + t_1 y)}_{=\varphi_{x,y}(t_1)} + s\underbrace{f((1-t_2)x + t_2 y)}_{\varphi_{x,y}(t_2)} \end{array}$$

  car f est strictement convexe ($(1-t_1)x + t_1 y$ et $(1-t_2)x + t_2 y$ sont distincts car leur différence vaut $(t_1 - t_2)(x-y)$) : $\varphi_{x,y}$ est strictement convexe pour tous $x \neq y$.

- Supposons que $\varphi_{x,y}$ est strictement convexe pour tous $x \neq y$. On choisit $t_1 = 0$ et $t_2 = 1$, et on a :

$$\forall s \in]0,1[,\ \varphi_{x,y}((1-s)t_1 + st_2) < (1-s)\varphi_{x,y}(t_1) + s\varphi_{x,y}(t_2)$$

  soit

$$\forall s \in]0,1[,\ f((1-s)x + sy) < (1-s)f(x) + sf(y)$$

  et f est strictement convexe.

Fixons donc x, y distincts et montrons que $\varphi_{x,y}$ est strictement convexe. Comme cette application est dérivable, cela revient à démontrer qu'en tout point $t \in \mathbb{R}$, la courbe représentative de $\varphi_{x,y}$ est au dessus de sa tangente au point d'abscisse t, avec contact uniquement au point de tangence. Autrement dit, nous devons démontrer que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ distincts, on a $\varphi_{x,y}(s) > \varphi_{x,y}(t) + \varphi'_{x,y}(t)(s-t)$, avec $\varphi'_{x,y}(t) = (\nabla f((1-t)x + ty) \,|\, y - x)$. En posant $x_1 = (1-t)x + ty$ et $y_1 = (1-s)x + sy$, nous avons $y_1 - x_1 = (s-t)(y-x) \neq 0$ et on peut appliquer (1) :

$$\varphi_{x,y}(s) = f(y_1) > f(x_1) + (\nabla f(x_1) \,|\, y_1 - x_1) = \varphi_{x,y}(t) + (\nabla f((1-t)x + ty) \,|\, (s-t)(y-x)) = \varphi_{x,y}(t) + \varphi'_{x,y}(t)(s-t)$$

b) La surjectivité de ∇f se prouve avec la même idée : si $u \in \mathbb{R}^n$, l'application $g_u : \ x \longmapsto f(x) - (u \,|\, x)$ est de classe C^1 et tend vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini, donc elle atteint son minimum en un point x^* qui est un point critique de g_u : on a $\nabla g(x^*) = 0$, soit $\nabla f(x^*) = u$.

Montrons grâce à la caractérisation séquentielle que l'application $(\nabla f)^{-1}$ est continue.

- Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a par convexité de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) - f(0) \leq (\nabla f(x) \,|\, x) \leq ||\nabla f(x)|| \times ||x||$$

  et donc $||\nabla f(x)||$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini, puisque $\dfrac{f(x) - f(0)}{||x||}$ tend vers $+\infty$.

- Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers $u \in \mathbb{R}^n$; pour tout k, notons $x_k = (\nabla f)^{-1}(u_k)$ et $x = (\nabla f)^{-1}(u)$. Comme $\nabla f(x_k)$ converge vers u, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée (sinon, elle aurait une sous-suite $\big(x_{\varphi(k)}\big)$ telle que $||x_{\varphi(k)}||$ diverge vers $+\infty$ et $||\nabla f(x_{\varphi(k)})||$ divergerait vers $+\infty$ au lieu de tendre vers $||u||$). Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, il suffit de montrer que x est la seule valeur d'adhérence de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour montrer que x_k converge vers x. Soit donc y une valeur d'adhérence de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, associée à l'extractrice φ. On a $u_{\varphi(k)} = (\nabla f)(x_{\varphi(k)})$ converge vers $(\nabla f)(y)$, donc $u = (\nabla f)(y)$ et $y = x$. Nous avons donc démontré que $(\nabla f)^{-1}(u_k)$ converge vers $(\nabla f)^{-1}(u)$, ce qui prouve que $(\nabla f)^{-1}$ est continue.