Équations différentielles : énoncés

Exercices CCP

1) Résoudre l'équation différentielle $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$ sur chaque intervalle $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. Peut-on recoller certaines solutions ?

2) Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = 2x + 2y - 2t^2 + 4t - 2 \\ y' = -2x + 7y + 2t^2 + 7t - 8 \end{cases}$

3) Résoudre sur $]0, \pi[$ l'équation différentielle $y'' + y = \operatorname{cotan} x$.

4) Résoudre $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x^2}}$.

5) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $y" + 2y' + 2y = f$ possède au plus une solution bornée sur $\mathbb{R}$.

6) Résoudre $(1-x^2)y'' - 3xy' - y = \dfrac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}$ (on remarquera que $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$ est solution de l'équation sans second membre).

Exercices Mines-Centrale: équations différentielles scalaires d'ordre 1

7) Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes :

a) $xy' + 3y = x \sin x$ b) $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$ c) $x^2y' + y = x^2$ d) $x(x+2)y' + (x+1)y = 1$

8) Soient a et b éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} b(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, a(x) \geq \lambda > 0$.

a) Montrer que toute solution de l'équation (E) : $y' + ay = b$ a une limite nulle en $+\infty$.

b) Montrer que (E) a une unique solution de limite nulle en $-\infty$.

9) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que : $f'(x) + f(x) = l + \dfrac{m}{x} + \dfrac{\varepsilon(x)}{x}$ avec $\lim_{+\infty} \varepsilon(x) = 0$. Donner un développement asymptotique de f en $+\infty$.

10) En utilisant un changement de fonction de la forme $z = y^\beta$, montrer que l'on peut résoudre résoudre les équations de la forme $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (on cherchera les solution y à valeurs dans $]0, +\infty[$). Appliquer cette méthode aux équations $y' - y = xy^5$ et $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$.

11) On suppose que (φ_1, φ_2) sont deux solutions distinctes d'une équation différentielle (E) : $y' + a(x)y(x) = b(x)$, où a et b sont définies et continues sur un segment $I = [a, b]$. On suppose que l'on dispose d'un tracé des graphes $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ de φ_1 et φ_2. On fixe $x_0 \in [a, b]$ et $y_0 \in \mathbb{R}$; on note φ la solution de l'équation (E) vérifiant $\varphi(x_0) = y_0$ et $\mathcal{G}$ son graphe. Pour $x \in I$, comment peut-on construire géométriquement le point $M_x = (x, \varphi(x))$ à partir de G_1, G_2 et $M_0 = (x_0, y_0)$? Comment peut-on placer la tangente à $\mathcal{G}$ en M_{x_0}, à partir des tangentes à $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ en leurs points d'abscisse x_0 ?

12) Soient $T > 0$ et a et b deux fonctions continues et T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer les solutions T-périodiques de l'équation différentielle $x' = ax + b$.

Exercices Mines-Centrale: systèmes différentiels linéaires

13) Résoudre les systèmes différentiels linéaires :

a) $X' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$ b) $X' = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1/t \\ 0 \\ 2/t \end{pmatrix}$ c) $X" = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

d) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} X$ e) $X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} X$ f) $X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} X$

Exercices Mines-Centrale: équations différentielles scalaires d'ordre 2

14) Montrer que l'équation $xy'' + xy = 1$ possède, sur $I =]0, +\infty[$, une et une seule solution f_0 qui admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$.

15) Résoudre l'équation (E) : $(1 - \cos 4x)y" + 2y' \sin 4x - 8y = 0$, sachant qu'elle admet sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ deux solutions u et v vérifiant : $uv = 1$.

16) On considère l'équation différentielle $y" + by' + cy = 0$ où b et c sont deux applications définies et continues sur un intervalle I. Soit (φ_1, φ_2) une base de l'ensemble des solutions. Que peut-on dire du wronskien des applications φ_1 et φ_2 ? Démontrer que si a et b sont deux zéros consécutifs de y_1, la fonction y_2 s'annule une et une seule fois entre a et b.

17) Soit $f_1, f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f_2 \geq f_1$. Pour $i = 1, 2$, on suppose que y_i est une solution non nulle de l'équation différentielle $y'' + f_i y = 0$. Montrer que si a et b sont deux zéros consécutifs de y_1, y_2 s'annule sur $[a, b]$. On pourra étudier le wronskien de y_1 et y_2.

18) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f + f'' \geq 0$. Montrer que $f(x + \pi) + f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

19) Soient $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe deux applications $p, q : I \to \mathbb{R}$ continues telles que (φ_1, φ_2) soit une base de l'espace des solutions de l'équation différentielle $y'' + py' + qy = 0$. Montrer qu'alors le couple (p, q) est unique.

Application : trouver une équation différentielle linéaire homogène d'ordre d'ordre 2 dont les solutions sont les applications de la forme $x \longmapsto A \dfrac{\cos x^2}{x} + B \dfrac{\sin x^2}{x}$.

20) Soit $(a,b) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et (f,g) un système fondamental de solutions de l'équation $y''+ay'+by=0$. On suppose que f est paire et que g est impaire. Montrer que a est impaire et que b est paire.

21) (Mines) Soit g une application continue, monotone et bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les solutions de $y''+y=g$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

22) (Mines) Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation (E) : $y''-2y'+y=\dfrac{1}{\sqrt{\pi\, x}}$. Montrer que toute solution y possède un prolongement à $\mathbb{R}^+$ de classe C^1, noté $\widetilde{y}$. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la solution y telle que $\widetilde{y}(0)=0$ et $\widetilde{y}'(0)=1$.

23) Soient $a,b \in \mathcal{C}([u,v],\mathbb{R})$ et f une solution non nulle de l'équation différentielle $x''+a(t)x'+b(t)x=0$. Montrer que f admet un nombre fini de zéros.

24) Soient $\alpha>0$ et $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ avec f majorée sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \geq 0,\ f''(x)-\alpha^2 f(x) \geq 0$.

a) Donner l'expression de f si l'on suppose que f est solution de l'équation $y''-\alpha^2 y=0$.

b) Dans le cas général, montrer que f est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$.

c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq f(0)\, e^{-\alpha x}$.

25) a) Calculer la solution y_0 sur $]-\pi/2,\, \pi/2[$ du problème de Cauchy $\left(y''+y=\dfrac{2}{\cos^3 x},\ y(0)=y'(0)=0\right)$.

b) Soit f de classe C^2 sur $]-\pi/2,\, \pi/2[$ telle que $f(0)=f'(0)=0$ et $\forall x \in]-\pi/2,\, \pi/2[,\ f''(x)+f(x) \geq \dfrac{2}{\cos^3 x}$. Montrer que $f \geq y_0$.

26) (Mines 2017) Déterminer les solutions DSE_0 de l'équation $x^2y''-4xy'+(x^2-6)y=0$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

27) (Mines 2017) Soient $a,b :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ C^0 et 1-périodiques. Montrer qu'une solution de $y''+ay'+by=0$ qui s'annule en 0 et en 1 s'annule sur $\mathbb{Z}$.

28) (Mines 2019) Soient u une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, f une solution de l'équation différentielle $y''+(1+u)y=0$. Soit, pour $x \geq 0$, $g(x)=f(x)+\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Former une équation différentielle linéaire vérifiée par g.

b) Montrer qu'il existe $c \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq c + \displaystyle\int_0^x |u(t)f(t)|\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \geq 0$.

c) Montrer que f est bornée.

29) (Mines 2019) Soient u une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, f une solution de l'équation différentielle $y'' + (1+u)y = 0$. Soit, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Former une équation différentielle linéaire vérifiée par g.

b) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ |f(x)| \leq c + \int_0^x |u(t)f(t)|\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que f est bornée.

30) (Mines 2019) Soit q une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On note (E) l'équation différentielle $y''+qy = 0$.

a) Montrer que si φ est une solution bornée de (E), $\varphi'(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

b) Montrer que (E) possède une solution non bornée.

Exercices Mines-Centrale: équations différentielles non linéaires

31) Résoudre l'équation fonctionnelle : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x + \cos x$

32) Soit $m \in \mathbb{R}^*$. Montrer qu'il existe une et une seule $f\ :\ ]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(1) = 1$ et $f'(x) = m\,(f(x) + f(1/x))$ pour tout $x > 0$. Étudier succinctement f.

33) (Centrale 2016) a) Trouver les $f :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f'(x) = f(x) + f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Pour $\alpha \in]1,1[$, trouver les fonctions $f :\ \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ DSE en 0 telles que $f'(x) = f(x) + f(\alpha x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

34) Soit $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et non nulle vérifiant : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

a) Montrer que $f(0) = 1$ et que f est paire.

b) Trouver une équation différentielle vérifiée par f, et en déduire une expression de f.

c) Montrer que l'hypothèse « f de classe C^∞ » peut être remplacée par « f continue ».

Exercices X-ENS

35) (L) Soient $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$, $A, B \in H$, $\mathcal{C} = \big\{\gamma \in C^2([0,1], H),\ \gamma(0) = A \text{ et } \gamma(1) = B\big\}$ et $\mathcal{C}_0 = \big\{h \in C^2([0,1], \mathbb{R}),\ h(0) = h(1) = 0\big\}$. Pour tout $\gamma = (x, y) \in \mathcal{C}$, on pose $E(\gamma) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{y^2(t)}\,\mathrm{d}t$. On suppose que E atteint son minimum en $\gamma_0 = (x_0, y_0)$.

a) Soit $\psi :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $h \in \mathcal{C}_0$, $\displaystyle\int_0^1 \psi(t)h(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $\psi = 0$.

b) Trouver un système d'équations différentielles vérifié par x_0 et y_0. On pourra commencer par introduire, pour $h \in \mathcal{C}_0$ quelconque, l'arc paramétré $\gamma_s :\ t \longmapsto (x_0(t) + sh(t), y_0(t))$.

36) (L) Soit φ une solution non identiquement nulle de $y'' + e^x\, y = 0$.

a) Montrer que l'on peut ranger les zéros de φ sur $\mathbb{R}^+$ en une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ strictement croissante.

b) Montrer que $x_{n+1} - x_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et donner un équivalent de x_n.

37) (C) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $X' = AX$.

a) Montrer que X est à valeurs dans un sous-espace affine dirigé par l'image de A.

Dans la suite, A est antisymétrique.

b) Montrer que X est à valeur dans une sphère. Pour $n = 3$, la trajectoire de X est-elle égale à cette sphère ?

c) Formuler et établir un théorème de réduction des matrices antisymétriques et en déduire une description plus précise de la trajectoire de X.

38) Inégalité fondamentale

Soit $f :\ [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe une constante K telle que :

$$\forall t \in [a,b],\ \forall x_1, x_2 \in [c,d],\ |f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq K\,|x_1 - x_2|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et φ, ψ définies de $[a,b]$ dans $[c,d]$ avec :

- φ est solution de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$;
- ψ est C^0 et C^1_{pm} et $|\psi'(t) - f(t,\psi(t))| \leq \varepsilon$ en tout point t où ψ est dérivable ;

- $\varphi(a) = \psi(a)$.

On souhaite démontrer que pour $t \in [a, b]$, $|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \dfrac{\varepsilon}{K} \left(e^{K(t-a)} - 1\right)$.

a) On pose $u = \varphi - \psi$. Montrer que $|u'(t)| \leq K|u(t)| + \varepsilon$ en tout point de dérivabilité de ψ.

b) Soit $t_1 \in [a, b]$ tel que $u(t_1) > 0$. Montrer qu'il existe t_0 tel que $a \leq t_0 < t_1$, $u(t_0) = 0$ et $u > 0$ sur $]t_0, t_1]$. Soit v la solution au problème de Cauchy $\left(x' = Kx + \varepsilon,\ x(t_0) = 0\right)$. Montrer que $u \leq v$ sur $[t_0, t_1]$.

c) Conclure.

d) Adapter cette majoration en supposant maintenant que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ et :

- φ est C^0, C^1_{pm} et $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon_1$ en tout point t où φ est dérivable ;

- ψ est C^0, C^1_{pm} et $|\psi'(t) - f(t, \psi(t))| \leq \varepsilon_2$ en tout point t où ψ est dérivable ;

- $|\varphi(a) - \psi(a)| \leq \varepsilon_3$.

39) (X) On considère l'équation différentielle (E) : $xy'' + y' + xy = 0$.

a) Montrer que $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^\pi \cos(x \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les solutions de (E) qui sont développables en série entière en 0.

c) Soient S l'ensemble des solutions de (E) sur $I =]0, +\infty[$ et $g \in S$. Montrer que $(f_{|_I}, g)$ est une base de S si et seulement si g n'est pas bornée au voisinage de 0.

40) (X) On s'intéresse à l'équation différentielle (E) : $x^3y'^3 + xy^2y' - y^2 = 0$.

a) Tracer la courbe Γ d'équation $Y(X^2 + Y^2) - X^2 = 0$. Quel est son lien avec (E) ?

b) Résoudre (E).

Équations différentielles : corrigés

Exercices CCP

1) Soit I l'un des trois intervalles d'étude. La fonction $x \longmapsto \dfrac{-2}{x(x^2-1)}$ est continue sur I et admet pour primitives :

$$A(x) = \int \frac{-2}{x(x^2-1)}\,\mathrm{d}x = \int \left(-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \ln \frac{x^2}{|x^2-1|}.$$

La solution générale de l'équation homogène sur I est donc :

$$y:\ x \longmapsto K\frac{x^2}{x^2-1},\ K \in \mathbb{R}.$$

La méthode de variation de la constante nous dit que la solution générale de l'équation totale est de la forme $y:\ x \longmapsto K(x)\dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)}$ où K est une fonction dérivable sur I vérifiant :

$$\forall x \in I,\ x(x^2-1)K'(x)\frac{x^2}{x^2-1} = x^2,$$

soit K de la forme $x \longmapsto \ln|x| + K_0$.

La solution générale de l'équation est donc :

$$y:\ x \longmapsto (K + \ln|x|)\,\frac{x^2}{x^2-1}, K \in \mathbb{R}.$$

Raccordement des solutions :

- en $x = 1$: soient deux solutions φ_1 et φ_2 définies respectivement sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que :
$$\begin{cases} \forall x \in]0,1[,\ \varphi_1(x) = (K_1 + \ln x)\,\dfrac{x^2}{x^2-1} \\ \forall x \in]1,+\infty[,\ \varphi_2(x) = (K_2 + \ln x)\,\dfrac{x^2}{x^2-1} \end{cases}.$$
Pour raccorder ces deux solutions en 1, il faut que $K_1 = K_2 = 0$ (sinon, φ_1 ou φ_2 tend vers l'infini en 1). Pour ces choix de constantes, φ_1 et φ_2 se raccordent en une fonction de classe C^∞ sur $J =]0,+\infty[$, car $x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$ est C^∞ sur J et
$$\forall x \in]0,2[\backslash\{1\},\ x \longmapsto \frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^{n-1}}{n}$$
se prolonge en une fonction C^∞ (on a la somme d'une série entière de rayon 1). Il existe donc une et une seule solution de l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$, définie par :
$$y:\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 \ln x}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- en $x=0$: soient deux solutions φ_1 et φ_2 définies respectivement sur $]-1,0[$ et $]0,1[$, associées aux constantes K_1 et K_2. Les deux fonctions se raccordent par continuité en 0 en une fonction φ définie par :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \varphi(x) = \begin{cases} (K_1 + \ln x)\,\dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{si } x \in]-1,0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ (K_2 + \ln|x|)\,\dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

On a ensuite :

$$\forall x > 0,\ \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = (K_1 + \ln x)\,\frac{x}{x^2-1} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

$$\forall x < 0,\ \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = (K_2 + \ln|x|)\,\frac{x}{x^2-1} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$$

donc φ est dérivable en 0, avec $\varphi'(0)=0$. On en déduit que φ est solution de l'équation différentielle sur $]-1,1[$.

- $x=-1$: le problème est identique à celui étudié en -1 et la seule solution sur $]-\infty,0[$ est la fonction :

$$y:\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 \ln|x|}{x^2-1} & \text{si } x \neq -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Pour terminer, il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$:

$$y:\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 \ln|x|}{x^2-1} & \text{si } x \notin \{-1,0,1\} \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \{-1,1\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ se diagonalise facilement :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = PU$ avec $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} <$ et nous avons deux méthodes de résolutions :

a) On peut travailler directement sur l'équation avec second membre, qui devient :

$$\begin{cases} u' = 3u - t^2 + \frac{t}{6} + \frac{2}{3} \\ v' = 6v - 2t^2 - \frac{10}{3}\,t + \frac{14}{3} \end{cases}$$

car $P^{-1}\begin{pmatrix} -2t^2+4t-2 \\ 2t^2+7t-8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2t^2+4t-2 \\ 2t^2+7t-8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -6t^2+t+4 \\ -12t^2-20t+28 \end{pmatrix}$.

On obtient ensuite facilement les solutions de ces deux équations :

$$\begin{cases} u(t) = \dfrac{1}{3}\,t^2 + \dfrac{1}{6}\,t + \dfrac{1}{6} + K_1 e^{3t} \\ v(t) = \dfrac{1}{3}\,t^2 + \dfrac{2}{3}\,t - \dfrac{2}{3} + K_2 e^{6t} \end{cases}$$

et il ne reste qu'à revenir à (x,y) :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 4K_1e^{3t} - K_2e^{6t} \\ y(t) = 1 - t + 2K_1e^{3t} - 2K_2e^{6t} \end{cases}$$

b) On peut commencer par résoudre l'équation homogène $X' = XA$, qui devient $U' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ dont la solution est $u(t) = K_1e^{3t}$ et $v(t) = K_2e^{6t}$. La solution de $X' = AX$ est donc $x(t) = 4K_1e^{3t} - K_2e^{6t}$ et $y(t) = 2K_1e^{3t} - 2K_2e^{6t}$. Il reste ensuite à appliquer la méthode de variations des constantes : on pose $x(t) = 4K_1(t)e^{3t} - K_2(t)e^{6t}$ et $y(t) = 2K_1(t)e^{3t} - 2K_2(t)e^{6t}$ avec K_1 et K_2 dérivables et l'équation avec second membre devient :

$$\begin{cases} 4e^{3t}\,K_1'(t) - e^{6t}\,K_2'(t) = -2t^2 + 4t - 2 \\ 2e^{3t}\,K_1'(t) - 2e^{6t}\,K_2'(t) = 2t^2 + 7t - 8 \end{cases}$$

ce qui se résout en

$$K_1'(t) = (-t^2 + \frac{1}{6}\,t + \frac{2}{3})\,e^{-3t} \text{ et } K_2'(t) = (-2t^2 - \frac{10}{3}\,t + \frac{14}{3})\,e^{-6t}$$

et il reste à intégrer :

$$K_1(t) = \left(\frac{1}{3}\,t^2 + \frac{1}{6}\,t - \frac{1}{6}\right)\,e^{-3t} + CteetK_2(t) = \left(\frac{1}{3}\,t^2 + \frac{2}{3}\,t - \frac{2}{3}\right)\,e^{-6t} + Cte$$

pour retrouver le résultat :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 4K_1e^{3t} - K_2e^{6t} \\ y(t) = 1 - t + 2K_1e^{3t} - 2K_2e^{6t} \end{cases}$$

3) L'équation homogène a pour solution générale $y(x) = A\cos x + B\sin x$ et la méthode de variation des constantes nous amène au système :

$$\forall x \in]0,\pi[,\ \begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = \operatorname{cotan} x \end{cases}$$

ce qui donne $A'(x) = -\cos(x)$ et $B'(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$. Pour calculer B, on pose $u = \cos x$:

$$\begin{aligned} B(x) &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\int \frac{u^2}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \int \left(u + \frac{1}{2(u-1)} - \frac{1}{2(u+1)}\right)\,\mathrm{d}u \\ &= u + \frac{1}{2}\,\ln\,\frac{1-u}{1+u} = \cos x + \frac{1}{2}\,\ln\,\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \end{aligned}$$

ce qui donne la solution générale sur $]0,\pi[$:

$$\begin{aligned} y(x) &= -\sin x\cos x + \left(\cos x + \frac{1}{2}\,\ln\,\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)\sin x + A\cos x + B\sin x \\ &= \frac{\sin x}{2}\,\ln\,\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + A\cos x + B\sin x,\ \ A,B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4) L'équation homogène a pour solution générale $y(x) = (A + Bx)e^{-2x}$ et la méthode de variation des constantes nous amène au système :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (A'(x) + B'(x)x)e^{-2x} = 0 \\ (-2A'(x) + B(x)(1-2x))e^{-2x} = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

ce qui donne $A'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $B'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, puis $A(x) = -\sqrt{1+x^2} + Cte$ et $B(x) = \operatorname{Argsh} x + Cte$, ce qui donne la solution générale sur $]0, \pi[$:

$$y(x) = \left(-\sqrt{1+x^2} + x \operatorname{Argsh} x + A + Bx\right) e^{-2x}, \ A, B \in \mathbb{R}$$

Officiellement, les fonctions inverses des fonctions hyperboliques ne sont pas au programme. On peut toutefois intégrer B' en posant $x = \operatorname{sh} u$ (la fonction sh est de classe C^1 de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annule pas) :

$$B(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}} \operatorname{ch} u \,\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}u = u + Cte.$$

Si on ne veut pas introduire Argsh, on peut retrouver l'expression de u en fonction de x, puisque $e^{2u} - 2xe^u - 1 = 0$, ce qui donne $e^u = x + \sqrt{x^2+1}$ (l'autre racine est négative). On a donc $u = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, et la solution générale s'écrit :

$$y(x) = \left(-\sqrt{1+x^2} + x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + A + Bx\right) e^{-2x}, \ A, B \in \mathbb{R}$$

5) Supposons que φ_1 et φ_2 soient deux solutions bornées de l'équation. Alors $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ est une solution bornée de l'équation homogène $y'' + 2y' + 2y = 0$. Il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi : \ x \longmapsto (A\cos x + B\sin x)e^{-x}$, puisque le polynôme $r^2 + 2r + 2$ a pour racine $-1 + i$ et $-1 - i$. En écrivant $A = r\cos\theta$ et $B = r\sin\theta$, on a :

$$\varphi(x) = r\cos(x - \theta)e^{-x}$$

et avec $x_n = \theta - 2n\pi$, on a $\varphi(x_n) = re^{2n\pi - \theta}$: ce terme étant borné quand n tend vers $+\infty$, $r = 0$.

Nous avons ainsi démontré que $A = B = 0$, i.e. que $\varphi_1 = \varphi_2$.

6) Comme on a une solution de l'équation homogène qui ne s'annule pas sur I, on applique la méthode de la variation de la constante : on pose $y(x) = \dfrac{A(x)}{\sqrt{|1-x^2|}}$ avec A définie et deux fois dérivable sur I. L'équation devient :

$$\frac{(1-x^2)A''(x) - xA'(x)}{\sqrt{|1-x^2|}} = \frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}$$

soit $(1-x^2)A''(x) - xA'(x) = x$. L'équation $(1-x^2)y' - xy = x$ admet la constante -1 pour solution évidente et $K_1 \dfrac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$ pour solution de son équation homogène : on a donc

$$A'(x) = -1 + K_1 \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$$

- sur $]-1,1[$, on obtient directement $A(x) = -x + K_2 + K_1 \operatorname{Arcsin} x$.

- sur $]1,+\infty[$, on ne peut pas reconnaître la dérivée de $\operatorname{Argch} x$, puisque les fonctions inverses de sh et ch ne sont pas au programme. On peut par contre appliquer les méthodes usuelles de calcul de primitive, en posant $x = \operatorname{ch} t$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}}\,\mathrm{d}t = t + K_2$$

  Il reste à exprimer t en fonction de x (sans écrire $x = \operatorname{Argch} t$), ce qui se fait facilement en écrivant $\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = x$, qui donne $e^{2t} - 2xe^t + 1 = 0$, puis $e^t = x \pm \sqrt{x^2-1}$; les deux racines sont e^t et e^{-t}, donc $e^t = x + \sqrt{x^2-1}$ (c'est la plus grande des deux racines), ce qui donne :

$$A(x) = -x + K_2 + K_1 \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

- sur $]-\infty,-1[$, on obtient de la même façon (ou en utilisant la parité de $\sqrt{x^2-1}$) :

$$A(x) = -x + K_2 - K_1 \ln\left(-x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

La solution générale de l'équation est donc (on peut remplacer K_1 par $-K_1$ et $-x$ par $|x|$ quand $x < -1$:

- sur $]-\infty,-1[$ ou $]1,+\infty[$: $y(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + K_1 \dfrac{\ln\left(|x| + \sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}} + K_2 \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, K_1, K_2 \in \mathbb{R}$;
- sur $]-1,1[$: $y(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + K_1 \dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} + K_2 \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

On peut ensuite étudier les raccordements éventuels en 1 (-1 se traitera pas symétrie) : en 1^-, la solution tend vers l'infini sauf si $K_1 + K_2 \frac{\pi}{2} - 1 = 0$; dans ce cas particulier, on pose $x = 1 - u$ et on obtient :

$$y(x) = \frac{u + K_1(\operatorname{Arcsin}(1-u) - \pi/2)}{\sqrt{u}\sqrt{2-u}}.$$

On a besoin d'un développement asymptotique de Arcsin au voisinage de 1. Après calculs (il faut intégrer le développement de la dérivée), on obtient :

$$\operatorname{Arcsin}(1-u) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sqrt{u} + O(u^{3/2})$$

ce qui donne :

$$y(x) = \frac{-K_1\sqrt{2} + \sqrt{u} + O(u)}{\sqrt{2-u}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-K_1\sqrt{2} + \sqrt{u} + O(u))(1 - \frac{u}{4} + O(u)) = -K_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{u} + O(u)$$

donc $y(x)$ a une limite en 1^- mais son prolongement a une tangente verticale : y n'est donc pas prolongeable en une solution sur $]-1,1]$.

Au voisinage droit de 1, $y(x)$ tend vers l'infini si $K_2 \neq 1$. Pour $K_2 = 1$, un calcul laborieux, en posant $x = 1 + u$, donne :

$$y(x) = K_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{u} + O(u)$$

On peut donc prolonger y par continuité en 1^+, mais le prolongement aura une dérivée infinie en 1^+.

Exercices Mines-Centrale: équations différentielles scalaires d'ordre 1

7) a) On commence par résoudre l'équation sur $I =]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$. L'équation homogène a pour solution générale $y(x) = \dfrac{K}{x^3}$ et la méthode de variation de la constante donne $K'(x) = x^3 \sin(x)$. Cette fonction admet une primitive de la forme $A(x)\sin x + B(x)\cos x$ avec A et B de degré au plus 3 ; un calcul simple donne la solution générale : $\varphi_K(x) = \dfrac{(3x^2 - 6)\,\sin x + (-x^3 + 6x)\cos x + K}{x^3}$, $K \in \mathbb{R}$.

On peut étudier la possibilité de prolonger cette solution en 0 :

$$\frac{(3x^2 - 6)\,\sin x + (-x^3 + 6x)\cos x + K}{x^3} = \frac{K}{x^2} + \frac{1}{5}\,x^2 + o(x^2)$$

donc $K(x)$ a une limite finie (égale à 0) si et seulement si $K = 0$. La fonction φ_0 est donc prolongeable par continuité en 0 (en posant $\varphi_0(0) = 0$) et ce prolongement est de classe C^∞ (c'est la somme d'une série entière) et vérifie l'équation différentielle au point $x = 0$: c'est la seule solution définie sur $\mathbb{R}$.

b) Sur $I =]-\infty, -1[$ ou $]-1, 0[$ ou $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$, l'équation homogène a pour solution $y(x) = K\,\dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ et la méthode de variation de la constante conduit à l'équation $K'(x) = \dfrac{1}{x}$. La solution générale de l'équation est donc :

$$\varphi_K(x) = (\ln|x| + K)\,\frac{x^2}{x^2 - 1},\ \ K \in \mathbb{R}.$$

Étude des éventuels prolongements (comme φ_K est paire, on fait l'étude en 1 et en 0) :

- en 1 : on peut rapidement faire un DL à l'ordre 1 de φ_K au voisinage de 1 (calcul identique à droite et à gauche) :

$$\varphi_K(x) = \frac{1}{2}\,\frac{K}{x-1} + \frac{3}{4}K + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{8}K + \frac{1}{2}\right)(x-1) + o(x-1)$$

  donc φ_K a une limite finie en 1 si et seulement si $K = 0$ et en posant $\varphi_0(1) = \dfrac{1}{2}$, φ_0 est dérivable en 1 avec $y_0'(1) = \dfrac{1}{2}$.

- en 0^+ : pour tout K, $\varphi_K(x)$ et $\dfrac{\varphi_K(x)}{x}$ tendent vers 0 quand x tend vers 0^+. On peut donc poser $\varphi_K(0) = 0$ et φ_K a une dérivée à droite nulle en 0.

Il existe donc une unique solution sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$, $]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}$. Par contre, l'ensemble des solutions sur $]-1,1[$ est un espace affine de dimension 2, puisqu'on peut choisir deux constantes K différentes sur $]-1,0[$ et $]0,1[$ et recoller les deux fonctions pour obtenir une fonction D^1 sur $]-1,1[$ et vérifiant l'équation :

$$\forall K_1, K_2 \in \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} (\ln x + K_1)\,\dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ (\ln(-x) + K_2)\,\dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{si } x \in]-1,0[\end{cases}$$

c) La solution de l'équation homogène sur $]0,+\infty[$ est $y(x) = Ke^{1/x}$ et la méthode de variation de la constante donne $K'(x) = e^{-1/x}$. Comme $e^{-1/x}$ a une limite finie en 0^+, on peut définir

$$F :\ x \in\ [0,+\infty[\ \longmapsto \int_1^x e^{-1/t}\,\mathrm{d}t$$

et nous obtenons la solution générale de l'équation sur $]0,+\infty[$:

$$\forall x > 0,\ \varphi_K(x) = (F(x) + K)e^{1/x}.$$

F est dérivable sur $[0,+\infty[$ (car $t \longmapsto \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est continue) donc on a au voisinage de 0 :

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + o(x) = o(x).$$

Ainsi, $F(x)+K$ tend vers K quand x tend vers 0 et φ_K tend vers $\pm\infty$ en 0^+ si K est non nul. Pour étudier φ_0 au voisinage de 0, il faut étudier le comportement de F en 0 un peu plus finement. En posant $X = 1/x$ et $u = 1/t$, nous obtenons :

$$F(x) = \int_X^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Nous allons utiliser le résultat de cours :

Si f, g sont deux application continue sur $[a,+\infty[$ telles que $f(u) \sim_{+\infty} g(u)$ et $g \geq 0$, on a :

- si g est sommable sur $[a,+\infty[$, f l'est également et $\displaystyle\int_X^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u \underset{+\infty}{\sim} \int_X^{+\infty} g(u)\,\mathrm{d}u$;
- si g n'est pas sommable sur $[a,+\infty[$, f ne l'est pas non plus et $\displaystyle\int_a^X f(u)\,\mathrm{d}u \underset{+\infty}{\sim} \int_a^X g(u)\,\mathrm{d}u$.

Ici, $\dfrac{e^{-u}}{u^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-u}}{u^2} + 2\dfrac{e^{-u}}{u^3} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(-\dfrac{e^{-u}}{u^2}\right)$ et les fonctions sont sommables au voisinage de l'infini, donc :

$$F(X) \underset{+\infty}{\sim} \int_X^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(-\frac{e^{-u}}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \frac{e^{-X}}{X^2}.$$

On en déduit que $\varphi_0(x) \underset{0}{\sim} x^2$. φ_0 se prolonge donc en 0 en une fonction dérivable sur $[0,+\infty[$, et l'équation différentielle est vérifiée en 0. C'est la seule solution de l'équation sur $[0,+\infty[$.

Le début du calcul est identique sur $]-\infty,0[$, mais cette fois-ci, $e^{-1/x}$ n'est plus sommable au voisinage de 0^-. Nous posons donc $G(x) = \displaystyle\int_{-1} xe^{-1/t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x<0$ et la solution générale de l'équation sur $]-\infty,0[$ est :

$$\forall x<0,\ \psi_K(x) = (G(x)+K)e^{1/x}.$$

Nous avons une nouvelle fois besoin du théorème d'intégration des équivalents pour étudier G au voisinage de 0 ; en posant $X=-1/x$ et $u=-1/t$, nous avons cette fois :

$$G(x) = \int_1^X \frac{e^u}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

On a $\dfrac{e^u}{u^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^u}{u^2} - 2\dfrac{e^u}{u^3} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\dfrac{e^{-u}}{u^2}\right)$ et les fonctions sont sommables au voisinage de l'infini, donc :

$$G(X) \underset{+\infty}{\sim} \int_1^X \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{e^u}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \frac{e^X}{X^2} - e \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^X}{X^2}.$$

On en déduit que $\psi_K(x) \underset{0}{\sim} x^2$ et ψ_K possède un prolongement dérivable en 0, qui est solution de l'équation sur $]-\infty,0]$.

Ainsi, il existe une infinité de solution sur $\mathbb{R}$, obtenues en recollant une solution ψ_K et la solution φ_0. Le recollement est bien D^1 (et même C^1) car les deux fonctions et leurs dérivées sont nulles en 0 (respectivement à gauche et à droite).

d) La décomposition en éléments simples :

$$-\frac{x+1}{x(x+2)} = -\frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{2x}$$

donne la solution de l'équation homogène sur chaque intervalle $]-\infty,-2[$, $]-2,0[$, $]0,+\infty[$:

$$y(x) = \frac{K}{\sqrt{|(x+2)x|}},\ K\in\mathbb{R}.$$

La méthode de variation de la constante conduit à $K'(x) = \frac{\sqrt{|(x+2)x|}}{x(x+2)}$.

Sur $]0,+\infty[$, comme $x^2+2x=(x+1)^2-1$, on obtient :

$$K(x) = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-1}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Argch}(x+1)+Cte = \ln\left(x+1+\sqrt{x(x+2)}\right)+Cte$$

d'où la solution :

$$\varphi_K(x) = \frac{\ln\left(x+1+\sqrt{x(x+2)}\right)+K}{\sqrt{(x+2)x}},\ K\in\mathbb{R}.$$

Sur $]-2,0[$, $-x^2-2x = 1-(x+1)^2$ et

$$K(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Arcsin}(x+1)+Cte$$

d'où la solution :

$$\psi_K(x) = \frac{\operatorname{Arcsin}(x+1) + K}{\sqrt{-(x+2)x}},\ \ K \in \mathbb{R}.$$

Sur $]-\infty, -2[$, $x^2 + 2x = (-x-1)^2 + 1$ et

$$K(x) = \int \frac{1}{\sqrt{(-x-1)^2+1}}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{Argch}(-x-1) + Cte = -\ln\left(-x-1+\sqrt{x(x+2)}\right) + Cte$$

d'où la solution :

$$\xi_K(x) = \frac{-\ln\left(-x-1+\sqrt{x(x+2)}\right) + Cte}{\sqrt{(x+2)x}},\ \ K \in \mathbb{R}.$$

Problèmes de prolongement :

- en 0^+ : un calcul de DL donne

$$\varphi_K(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{K}{\sqrt{x}} + 1 - \frac{K\sqrt{2}}{8}\,\sqrt{x} - \frac{1}{3}\,\sqrt{x} + O(x^{3/2})$$

donc φ_K a une limite finie en 0^+ si et seulement si $K = 0$ et la fonction φ_0 a un prolongement de classe D^1 en 0, qui est solution de l'équation sur $[0, +\infty[$.

- en 0^- : ψ_K tend vers l'infini quand $K \neq -\pi/2$. Quand $K = -\pi/2$, nous avons besoin d'étudier le comportement de la fonction Arcsin au voisinage de 1^-, point en lequel la tangente est verticale. On va une nouvelle fois intégrer un développement au voisinage gauche de 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{-t(2+t)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\sqrt{-t} + \sqrt{2}8\,\sqrt{-t} + O((-t)^{3/2})$$

et par intégration entre 0 et x (avec $x \in]0, 2[$), nous obtenons le développement au voisinage de 0^- :

$$\operatorname{Arcsin}(1+x) - \frac{\pi}{2} = -\sqrt{2}\sqrt{-x} - \frac{\sqrt{2}}{12}\,(-x)^{3/2} + O((-x)^{5/2})$$

Ainsi, $\psi_{-\pi/2}(x) = \dfrac{-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{12}\,x + O(x^2)}{\sqrt{2+x}} = -1 + \dfrac{x}{3} + O(x^2)$, ce qui prouve que $\psi_{-\pi/2}$ admet une prolongement D^1 à $]-2, 0]$. Les prolongements en 0^+ et 0^- ne se raccordent pas par continuité, puisque $\varphi_0(0) = 1 \neq -1 = \psi_{-\pi/2}(0)$.

- en -2, l'étude se ramène directement à celle faite en 0 ; en effet, il y aune symétrie par rapport à la valeur -1. On peut la démontrer à partir des expressions des solutions, ou bien directement à partir de l'équation différentielle : si y est une solution de l'équation dur un intervalle I, alors $z :\ x \longmapsto y(-2-x)$ est également solution sur l'intervalle J symétrique de I par rapport à la valeur -1. En effet, pour $x \in J$, on a, en posant $u = -x-2 \in I$:

$$(2+x)xz'(x) + (x+1)z(x) = -(2+x)xy'(-2-x) + (x+1)y(-2-x) = (2+u)uy'(u) + (u+1)y(u) = 1.$$

Ainsi, ψ_K (resp. ξ_K) se prolonge en une fonction dérivable en $(-2)^+$ (resp. en $(-2)^-$) si et seulement si $K = \pi/2$ (resp. $K = 0$).

8) a) Notons $A(x) = \int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$, pour $x \in \mathbb{R}$. La méthode de variation de la constante donne la solution générale de l'équation sous la forme :

$$\varphi(x) = K(x)e^{-A(x)} \text{ avec } K' = be^A.$$

Comme $-a(x) \leq -\lambda$, on a :

$$\forall x \leq 0,\ A(x) = \int_x^0 -a(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_x^0 -\lambda\,\mathrm{d}t = \lambda x$$

On en déduit que be^A est sommable au voisinage de $-\infty$ (elle est négligeable devant $e^{\lambda x}$, qui est sommable au voisinage de $-\infty$). On peut donc intégrer et obtenir la solution générale de l'équation sous la forme :

$$\varphi_K :\ x \longmapsto e^{-A(x)} \int_{-\infty}^x b(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t + Ke^{-A(x)}.$$

Comme $a \leq \lambda$, on a $A(x) \geq \lambda x$ pour tout $x \geq 0$, donc $A(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$: on en déduit que $Ke^{-A(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Pour le premier terme, nous allons utiliser le théorème d'intégration des relations de prépondérance :

- $b(t)e^{A(t)}$ est négligeable devant $e^{A(t)}$ au voisinage de $+\infty$,
- $t \longmapsto e^{A(t)}$ est positive et non sommable au voisinage de $+\infty$, puisque $e^{A(t)} \geq e^{\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$,

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^x b(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t$ est négligeable devant $\displaystyle\int_{-\infty}^x e^{A(t)}\,\mathrm{d}t$ au voisinage de $+\infty$. On en déduit que

$$e^{-A(x)} \int_{-\infty}^x b(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t \ll_{+\infty} e^{-A(x)} \int_{-\infty}^x e^{A(t)}\,\mathrm{d}t$$

or $0 \leq e^{-A(x)} \displaystyle\int_{-\infty}^x e^{A(t)}\,\mathrm{d}t \leq \frac{e^{-A(x)}}{\lambda} \int_{-\infty}^x a(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$, puisque ae^A est la dérivée de e^A.

Nous avons donc $e^{-A(x)} \displaystyle\int_{-\infty}^x b(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t \ll_{+\infty} \frac{1}{\lambda}$, ce qui signifie que $e^{-A(x)} \displaystyle\int_{-\infty}^x b(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Toutes les solutions de l'équation tendent donc vers 0 en $+\infty$.

b) Si $K \neq 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^x b(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t + K$ tend vers $K \neq 0$ quand x tend vers $-\infty$, puis $\varphi_K(x)$ tend vers $+\infty$ si $K > 0$ et vers $-\infty$ si $K < 0$. Pour $K = 0$, on utilise encore le théorème d'intégration, mais dans le cas d'intégrales convergentes :

- $b(t)e^{A(t)}$ est négligeable devant $e^{A(t)}$ au voisinage de $-\infty$,

- $t \longmapsto e^{A(t)}$ est positive et sommable au voisinage de $-\infty$,

donc $\varphi_0(x)$ est négligeable devant $e^{-A(x)} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{A(t)}\,\mathrm{d}t$ au voisinage de $-\infty$. On conclut ensuite comme dans le premier cas :

$$0 \leq e^{-A(x)} \int_{-\infty}^{x} e^{A(t)}\,\mathrm{d}t \leq \frac{e^{-A(x)}}{\lambda} \int_{-\infty}^{x} a(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

donc $\varphi_0(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$. L'équation possède donc une unique fonction bornée au voisinage de $-\infty$ et cette solution φ_0 tend vers 0 en $-\infty$.

9) Soit $g: \ x \longmapsto f'(x) + f(x)$. f est donc solution de l'équation différentielle $y' + y = g$, dont la solution générale s'écrit :

$$\varphi_K(x) = e^{-x}\left(K + \int_0^x g(t)e^t\,\mathrm{d}t\right), \ K \in \mathbb{R}.$$

On va maintenant simplement intégrer le développement asymptotique de g. Le problème, c'est que l'on ne connaît pas de primitive de $\frac{e^t}{t}$, problème qui va être contourné en modifiant le développement de g. Plus précisément, on va chercher à écrire un développement asymptotique de la forme (on généralise à un développement à k termes) :

$$g(x)e^x = h_1(x) + h_2(x) + \cdots + h_k(x) + o(h_k(t))$$

avec $h_1(t) \gg h_2(t) \gg \cdots \gg h_k(t)$ au voisinage de $+\infty$, chaque h_i étant la dérivée d'une fonction usuelle H_i. Ici, en remarquant que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x}{x}\right) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$ est équivalent à $\dfrac{e^x}{x}$ au voisinage de $+\infty$, nous pouvons écrire :

$$g(x)e^x = \ell e^x + \frac{m}{x}e^x + o\left(\frac{e^x}{x}\right) = \underbrace{\ell e^x}_{=h_1(x)} + \underbrace{m\left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}\right)}_{=h_2(x)} + \underbrace{m\frac{e^x}{x^2} + o\left(\frac{e^x}{x}\right)}_{R(x)}.$$

On peut appliquer le théorème d'intégration : h_2 est positive, non sommable au voisinage de $+\infty$, et $R(x) = o(h_2(x))$ au voisinage de $+\infty$, donc $\int_0^x R(t)\,\mathrm{d}t$ est négligeable devant $\int_0^x h_2(t)\mathrm{d}t$ au voisinage de $+\infty$. Nous obtenons donc, en notant H_1 et H_2 les primitives de h_1 et h_2 qui s'annulent en 0 :

$$\int_0^x g(t)e^t\,\mathrm{d}t = \ell H_1(x) + mH_2(x) + o(H_2(x)) = \ell(e^x - 1) + m\left(\frac{e^x}{x} - e\right) + o\left(\frac{e^x}{x}\right)$$

ce qui donne le développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = \ell + \frac{m}{x} - e^{-x}(\ell + me + K) + o\left(\frac{1}{x}\right) = \ell + \frac{m}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On peut évidemment généraliser ce résultat avec $f(x)+f'(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\frac{\alpha_i}{x^i}+o\left(\frac{1}{x^N}\right)$, en utilisant les dérivées des fonctions $x\longmapsto \dfrac{e^x}{x^i}$.

10) En posant $z=y^\beta$, avec β non nul, on a $z'=\beta y^{\beta-1}y'$, et l'équation $y'+ay=by^\alpha$ est équivalente à :

$$z'+\beta z=\beta b z^{-\beta(\alpha+\beta-1)}$$

En choisissant $\beta=1-\alpha$ (qui est bien non nul), nous obtenons donc l'équation linéaire scalaire d'orde 1 :

$$z'+(1-\alpha)az=(1-\alpha)b.$$

Applications numériques :

a) $\alpha=5$ donc $\beta=-4$: on pose $z=y^{-4}$ et on obtient l'équation $z'+4z=-4x$, dont la solution générale est $z(x)=\frac{1}{4}-x+Ke^{-4x}$. La solution générale de l'équation initiale est donc :

$$\varphi_K(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{4}-x+Ke^{-4x}}},\ K\in\mathbb{R}$$

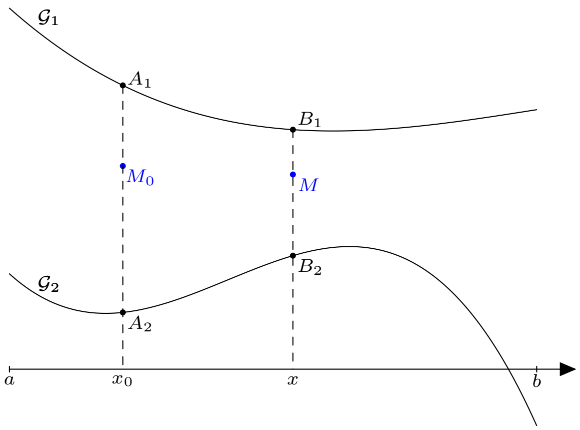
On remarque que contrairement aux cas des équations linéaires, la solution φ_K a un domaine de définition qui dépend de K.

b) On pose cette fois $z=1/y$ (β étant entier, on peut travailler indifféremment sur les domaines $y>0$ et $y<0$) et l'équation devient $z'-z=-\cos x+\sin x$, dont la solution est $z(x)=-\sin x+Ke^x$, ce qui donne la solution finale :

$$\varphi_K(x)=\frac{1}{-\sin x+Ke^x},\ K\in\mathbb{R}$$

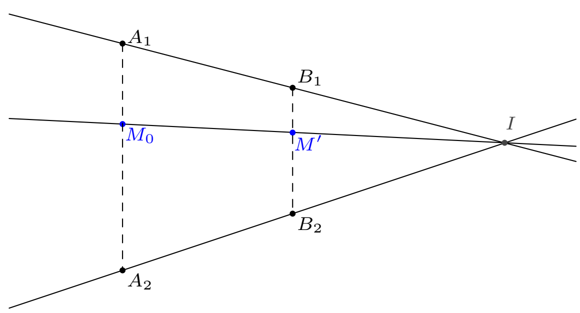
11) Comme l'ensemble des solutions de l'équation est un espace affine de dimension 1, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi=(1-\lambda)\varphi_1+\lambda\varphi_2$. On peut en effet dire que la "droite" passant par les deux "points" distincts φ_1 et φ_2 est l'ensemble des barycentres de φ_1 et φ_2 ; on peut aussi dire que $\varphi_2-\varphi_1$ est une base de l'espace des solutions de l'équation homogène et que φ_1 est une solution particulière de l'équation totale : on peut donc écrire φ sous la forme $\varphi_1+\lambda(\varphi_2-\varphi_1)$. On a en particulier :

$$\frac{\overline{A_1M_0}}{\overline{A_2M_0}}=\frac{\varphi(x_0)-\varphi_1(x_0)}{\varphi_2(x_0)-\varphi_1(x_0)}=\lambda=\frac{\varphi(x)-\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)-\varphi_1(x)}=\frac{\overline{B_1M}}{\overline{B_2M}}$$



Cette égalité traduit que les droites $D_1 = (A_1, B_1)$, $D = (M, M_0)$ et $D_2 = (A_2, B_2)$ sont soit parallèles, soit sécantes. Ce résultat de géométrie élémentaire demande peut-être une preuve précise.

- Si les droites (A_1, A_2) et (B_1, B_2) se coupent en le point I, on peut appliquer le théorème de Thalès (les droites (A_1, A_2) et (B_1, B_2) sont parallèles) :
$$\frac{\overline{IA_1}}{\overline{IB_1}} = \frac{\overline{IA_2}}{\overline{IB_2}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}}$$
Notons M' le point d'abscisse x de la droite (I, M_0).



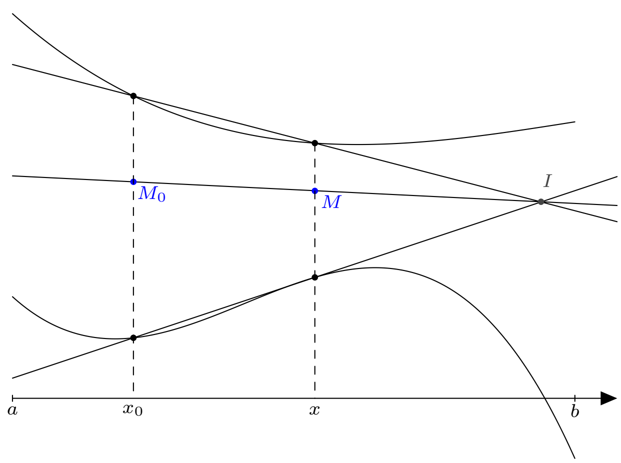
Il faut montrer que $M = M'$. Toujours avec le théorème de Thalès, nous avons
$$\frac{\overline{IA_1}}{\overline{IB_1}} = \frac{\overline{IM_0}}{\overline{IM'}} = \frac{\overline{A_1M_0}}{\overline{B_1M'}} \text{ et } \frac{\overline{IA_2}}{\overline{IB_2}} = \frac{\overline{IM_0}}{\overline{IM'}} = \frac{\overline{A_2M_0}}{\overline{B_2M'}}$$
On en déduit que $\dfrac{\overline{A_2M_0}}{\overline{B_2M'}} = \dfrac{\overline{A_1M_0}}{\overline{B_1M'}}$, puis $\dfrac{\overline{B_1M'}}{\overline{B_2M'}} = \dfrac{\overline{A_1M_0}}{\overline{A_2M_0}} = \dfrac{\overline{B_1M}}{\overline{B_2M}}$ et cette propriété traduit que $M = M'$.

- Si (A_1, B_1) et (A_2, B_2) sont parallèles, supposons que (M_0, M) n'est pas parallèle à ces deux droites ; elle intersecte alors la droite (A_1, B_1) en un point I et en reprenant la preuve précédente, on montre que $I \in (A_2, B_2)$, ce qui contredit que (A_1, B_1) et (A_2, B_2) sont parallèles.

On obtient donc M de la façon suivante :

- si D_1 et D_2 sont parallèles, on construit la parallèle D à ces droites passant par M_0 ;
- sinon, on construit l'intersection I de D_1 et D_2 puis $D = (M_0, I)$.

Le point M est alors l'intersection de D et de la droite verticale d'abscisse x.



Notons T_1, T_2 et T les tangentes à $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ et $\mathcal{G}$ respectivement en A_1, A_2 et M_0. Nous obtenons les équations :

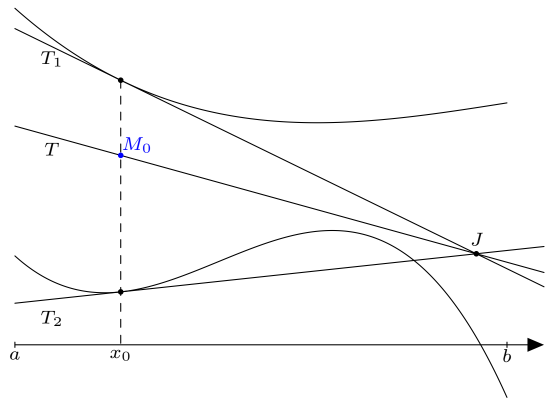
$$\begin{cases} T_1 : \ Y - \varphi_1'(x_0)(X - x_0) - \varphi_1(x_0) = 0 \\ T_2 : \ Y - \varphi_2'(x_0)(X - x_0) - \varphi_2(x_0) = 0 \\ T : \ Y - \varphi'(x_0)(X - x_0) - \varphi(x_0) = 0 \end{cases}$$

Comme $\varphi(x_0) = (1-\lambda)\varphi_1(x_0) + \lambda\varphi_2(x_0)$ et $\varphi'(x_0) = (1-\lambda)\varphi_1'(x_0) + \lambda\varphi_2'(x_0)$, l'équation de T est un barycentre (avec les masses $(1-\lambda)$ et λ) des équations de T_1 et T_2 :

$$T : \ (1-\lambda)\left(Y - \varphi_1'(x_0)(X - x_0) - \varphi_1(x_0)\right) + \lambda\left(Y - \varphi_2'(x_0)(X - x_0) - \varphi_2(x_0)\right) = 0.$$

On a donc deux cas :

- soit T_1 et T_2 sont parallèle : T est alors la parallèle à T_1 passant par M_0 ;
- soit T_1 et T_2 sont sécantes en un point J : le point J vérifie alors les équations de T_1 et de T_2, donc également celle de T par combinaison linéaire ; on en déduit que $J \in T$ et que $T = (M_0, J)$.



12) Notons $A:\ t \longmapsto \displaystyle\int_0^t a(s)\mathrm{d}s$. La solution générale de l'équation $x' = ax + b$ est :

$$\varphi_\lambda:\ t \longmapsto \lambda e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_0^t b(s)e^{-A(s)}\,\mathrm{d}s$$

(méthode de variation de la constante).

Le problème est de caractériser la périodicité de x et d'en déduire une CNS portant sur λ pour que φ_λ soit T-périodique.

Nous avons :

$$\varphi_\lambda \text{est } T \text{ périodique } \iff \varphi_\lambda(T) = \varphi_\lambda(0).$$

En effet, le sens directe est évident et si $\varphi_\lambda(T) = \varphi_\lambda(0)$ alors la fonction $\psi:\ t \longmapsto \varphi_\lambda(t+T)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi'(t) = \varphi_\lambda'(t+T) = a(t+T)\varphi_\lambda(t+T) + b(t+T) = a(t)\psi(t) + b(t)$$

et $\psi(0) = \varphi_\lambda(0)$: d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (il s'applique car a et b sont continues sur $\mathbb{R}$), $\psi = \varphi_\lambda$ et φ_λ est T-périodique.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda \text{est } T \text{ périodique} &\iff \varphi_\lambda(T) = \varphi_\lambda(0) \\
&\iff \lambda e^{A(T)} + e^{A(T)} \int_0^T b(s)e^{-A(s)}\,\mathrm{d}s = \lambda e^{A(0)} \\
&\iff \lambda\left(e^{A(0)-A(T)} - 1\right) = \int_0^T b(s)e^{-A(s)}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Ainsi, si $A(T) \neq A(0)$, i.e. si la valeur moyenne de a est non nulle, il existe une et une seule solution T-périodique, obtenue en choisissant :

$$\lambda = \left(e^{A(0)-A(T)} - 1\right)^{-1} \int_0^T b(s)e^{-A(s)}\,\mathrm{d}s\ .$$

Sinon, deux cas sont possibles :

si $\displaystyle\int_0^T b(s)e^{-A(s)}\,\mathrm{d}s = 0$, toutes les solutions de l'équation sont T-périodiques ;

sinon, aucune solution n'est T-périodique.

Ce n'est pas surprenant que l'on retrouve cette situation : si $\displaystyle\int_0^T a(s)\mathrm{d}s = 0$, toutes les solutions de l'équation homogènes sont T périodiques ; ainsi, soit il existe une solution T-périodique de l'équation totale et toutes les solutions le sont, soit aucune solution n'est T-périodique.

Exercices Mines-Centrale: systèmes différentiels linéaires

13) Dans chacun des cas, on change de base en réduisant la matrice A à une forme plus simple. Quand l'équation n'est pas homogène, on peut soit résoudre le système en effectuant le changement de base sur l'équation totale (mais cela nécessite de calculer l'inverse de la matrice de passage), soit résoudre le système homogène puis utiliser la méthode de variation des constantes pour résoudre l'équation totale. J'ai choisi la première méthode.

a) Le système s'écrit :

$$\begin{cases} x' = \cos\alpha\, x - \sin\alpha\, y \\ y' = \sin\alpha\, x + \cos\alpha\, y \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

donc nous pouvons commencer par résoudre le système

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ avec } R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

La solution générale de ce système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = e^{tR_\alpha} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

On a $P^{-1}R_\alpha P = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$. On a donc :

$$e^{tR_\alpha} = P \begin{pmatrix} e^{t(\cos\alpha + i\sin\alpha)} & 0 \\ 0 & e^{t(\cos\alpha - i\sin\alpha)} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{te^{i\alpha}} + e^{te^{-i\alpha}} & i(e^{te^{i\alpha}} - e^{te^{-i\alpha}}) \\ -i(e^{te^{i\alpha}} - e^{te^{-i\alpha}}) & e^{te^{i\alpha}} + e^{te^{-i\alpha}} \end{pmatrix}$$

d'où la solution :

$$\begin{cases} x(t) = K_1\left(e^{te^{i\alpha}} + e^{te^{-i\alpha}}\right) + iK_2\left(e^{te^{i\alpha}} - e^{te^{-i\alpha}}\right) \\ y(t) = -iK_1\left(e^{te^{i\alpha}} - e^{te^{-i\alpha}}\right) + K_2\left(e^{te^{i\alpha}} + e^{te^{-i\alpha}}\right) \end{cases}$$

Il reste à résoudre la dernière équation :

$$z' = z + x + y = z + (K_1+K_2)\left(e^{te^{i\alpha}} + e^{te^{-i\alpha}}\right) + i(K_2-K_1)\left(e^{te^{i\alpha}} - e^{te^{-i\alpha}}\right)$$

L'équation $z' = z + Ke^{\beta t}$, pour $\beta \neq 1$, a pour solution particulière $z(t) = \dfrac{K}{\beta-1}\,e^{\beta t}$. On en déduit la solution de l'équation (principe de superposition des solutions) pour $\alpha \neq 0 \bmod 2\pi$:

$$z(t) \quad = \quad K_3e^t + (K_1+K_2)\left(\frac{e^{te^{i\alpha}}}{e^{i\alpha}-1} + \frac{e^{te^{-i\alpha}}}{e^{-i\alpha}-1}\right) + i(K_2-K_1)\left(\frac{e^{te^{i\alpha}}}{e^{i\alpha}-1} - \frac{e^{te^{-i\alpha}}}{e^{-i\alpha}-1}\right)$$

Il reste pour vraiment terminer l'exercice à revenir au domaine réel :

$$\begin{aligned} \frac{e^{te^{i\alpha}}}{e^{i\alpha}-1} + \frac{e^{te^{-i\alpha}}}{e^{-i\alpha}-1} &= \frac{e^{te^{i\alpha}}(e^{-i\alpha}-1) + e^{te^{-i\alpha}}(e^{i\alpha}-1)}{(e^{i\alpha}-1)(e^{-i\alpha}-1)} \\ &= \frac{e^{t\cos\alpha}}{2-2\cos\alpha}\,2\,\mathrm{Re}(e^{it\sin\alpha}(e^{-i\alpha}-1)) \\ &= \frac{e^{t\cos\alpha}}{1-\cos\alpha}\,(\cos(t\sin\alpha-\alpha) - \cos(t\sin\alpha)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{te^{i\alpha}}}{e^{i\alpha}-1} - \frac{e^{te^{-i\alpha}}}{e^{-i\alpha}-1} &= \frac{e^{te^{i\alpha}}(e^{-i\alpha}-1) - e^{te^{-i\alpha}}(e^{i\alpha}-1)}{(e^{i\alpha}-1)(e^{-i\alpha}-1)} \\ &= \frac{e^{t\cos\alpha}}{2-2\cos\alpha}\,2i\,\mathrm{Im}(e^{it\sin\alpha}(e^{-i\alpha}-1)) \\ &= \frac{e^{t\cos\alpha}}{1-\cos\alpha}i\,(\sin(t\sin\alpha-\alpha) - \sin(t\sin\alpha)) \end{aligned}$$

ce qui donne (enfin) la solution générale de l'équation :

$$\begin{cases} x(t) = e^{t\cos\alpha}\,(2K_1\cos(t\sin\alpha) - 2K_2\sin(t\sin(\alpha)) \\ y(t) = e^{t\cos\alpha}\,(2K_1\sin(t\sin\alpha) + 2K_2\cos(t\sin(\alpha)) \\ z(t) = K_3e^t + \dfrac{e^{t\cos\alpha}}{1-\cos\alpha}\Big((K_1+K_2)\,(\cos(t\sin\alpha-\alpha) - \cos(t\sin\alpha)) + (K_1-K_2)\,(\sin(t\sin\alpha-\alpha) - \sin(t\sin\alpha))\Big) \end{cases}$$

b) On a ici $\chi_A = X(X-1)^2$ et A n'est pas diagonalisable. Nous pourrions calculer une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (une fois que l'on sait que les deux matrices sont semblables, le calcul est facile), mais nous resterons dans le cadre du programme en nous contentant de trigonaliser A :

- $e_1 = (1,0,2)$ et $e_2 = (-1,-2,1)$ sont vecteurs propres associés aux valeurs propres 0 et 1 ;

- on choisit $e_3 = (1,0,0)$ pour compléter (e_1, e_2) en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$;

- $Ae_3 = (6,8,2) = -3e_1 + 4e_2 + e_3$.

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, nous avons $P{-}1AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Delta$. En posant $Y = PX$, le système initial est équivalent au système $Y' = \Delta Y + P^{-1} \begin{pmatrix} 1/t \\ 0 \\ 2/t \end{pmatrix} = \Delta Y + \begin{pmatrix} 1/t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, qui s'écrit :

$$\begin{cases} y_1' = -3y_3 + \dfrac{1}{t} \\ y_2' = y_2 + 4y_3 \\ y_3' = y_3 \end{cases}$$

qui admet pour solution : $y_3(t) = K_3e^t$, $y_2(t) = (4K_3t + K_2)e^t$ et $y_1 = K1 - 3K_3e^t + \ln|t|$. Il reste à revenir à $X = PY$ pour obtenir la solution générale :

$$X(t) = \begin{pmatrix} \ln|t| + K_1 - (4K_3t + K_2)e^t \\ -(8K_3t + 2K_2)e^t \\ 2\ln|t| + 2K_1 + (4K_3t + K_2 - 6K_3)e^t \end{pmatrix}$$

c) On pourrait travailler sur un système d'ordre 1 en dimension 4, en posant $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais il faudrait réduire B et le calcul serait fastidieux. Il est plus simple de réduire directement la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

On a $P^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. En posant $X = PY$, le système devient

$$Y'' = P^{-1}X'' = P^{-1}\left(AX + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} Y + P^{-1} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

On a $P^{-1} = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui nous donne le système : -Ces deux équations indépendantes se résolvent facilement :

$$\begin{cases} y_1(t) = \dfrac{t}{6}\, e^t - \dfrac{1}{9}\, e^{2t} + K_1e^t + K_2e^{-t} \\ y_2(t) = \dfrac{t}{24} 6\, e^{2t} - \dfrac{1}{9}\, e^t + K_3e^{2t} + K_4e^{-2t} \end{cases}$$

et pour terminer :

$$X(t) = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{t}{6} - \dfrac{2}{9}\right) e^t + \left(\dfrac{t}{12} - \dfrac{1}{9}\right) e^{2t} + K_1e^t + K_2e^{-t} + 2K_3e^{-2t} + 2K_4e^{2t} \\ -\left(\dfrac{t}{3} + \dfrac{2}{9}\right) e^t + \left(\dfrac{t}{12} + \dfrac{2}{9}\right) e^{2t} - 2K_1e^t - 2K_2e^{-t} + 2K_3e^{-2t} + 2K_4e^{2t} \end{pmatrix},\ K_1, K_2, K_3, K_4 \in \mathbb{R}.$$

d) La matrice est diagonalisable :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La solution est donc :

$$X = P\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 + K_3e^{6t} \\ K_2 + 2K_3e^{6t} \\ K_1 + 2K_2 - K_3e^{6t} \end{pmatrix}.$$

e) Comme à la question b), la matrice n'est pas diagonalisable. On peut trouver P inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il suffit pour cela de trouver un base (e_1, e_2, e_3) vérifiant $Ae_1 = 0$, $Ae_2 = e_1$ et $Ae_3 = -e3$. On calcule e_3, vecteur propre pour la valeur propre -1 ; on peut ensuite calculer e_2 tel que $A^2e_2 = 0$ avec $Ae_2 \neq 0$, puis poser $e_1 = Ae_2$: il restera à vérifier que la famille est bien libre :

- $Ae_3 = -e3$ donne facilement (par exemple) $e_3 = (1, -1, -2)$;
- le vecteur $e_2 = (x, y, z)$ doit vérifier $2x - y + z = 0$; on peut choisir $e_2 = (0, 1, 1)$ et $e_1 = Ae_2 = (1, 2, 0)$;
- la famille (e_1, e_2, e_3) est libre : c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Nous avons ainsi $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. En posant $Y = PX$, nous obtenons le système élémentaire :

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 0 \\ y_3' = -y_3 \end{cases}$$

ce qui donne la solution :

$$X = P\begin{pmatrix} K_2t + K_1 \\ K_2 \\ K_3e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_2t + K_1 + K_3e^{-t} \\ 2K_2t + 2K_1 + K_2 - K_3e^{-t} \\ K_2 - 2K_3e^{-t} \end{pmatrix}$$

f) Cette fois-ci, A est diagonalisable (c'est une matrice circulante) mais elle a deux valeurs propres non réelles conjuguées. On va donc travailler sur $\mathbb{C}$:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \text{ et } j = e^{2i\pi/3}$$

En posant, $Y = PX$ on obtient comme dans les exemples précédents la solution générale complexe de l'équation :

$$X = P\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2e^{(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})t} \\ K_3e^{(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 + e^{-3t/2}\left((K_2 + K_3)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + i(K_2 - K_3)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ K_1 + e^{-3t/2}\left((K_2 + K_3)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\pi}{3}\right) + i(K_2 - K_3)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ K_1 + e^{-3t/2}\left((K_2 + K_3)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{2\pi}{3}\right) + i(K_2 - K_3)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{2\pi}{3}\right)\right) \end{pmatrix}, \ K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{C}$$

En choisissant K_1, $K_2 + K_3$ et $i(K_2 - K_3)$ comme nouveaux paramètres, nous pouvons écrire la solution générale réelle sous la forme :

$$X = P\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2e^{(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})t} \\ K_3e^{(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + e^{-3t/2}\left(\beta\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \gamma\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \alpha + e^{-3t/2}\left(\beta\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\pi}{3}\right) + \gamma\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ \alpha + e^{-3t/2}\left(\beta\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{2\pi}{3}\right) + \gamma\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{2\pi}{3}\right)\right) \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Exercices Mines-Centrale: équations différentielles scalaires d'ordre 2

14) L'équation homogène a pour solution générale $y(x) = A\cos x + B\sin x$ et la méthode de variation des constantes nous amène au système :

$$\forall x \in]0,\pi[, \quad \begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

ce qui donne $A'(x) = -\dfrac{\sin x}{x}$ et $B'(x) = \dfrac{\cos x}{x}$, et la solution générale de l'équation sur $]0,+\infty[$:

$$y_{A,B}(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t + A\cos x - B\sin x, A, B \in \mathbb{R}$$

puisque les deux intégrales considérées ont un sens. Quand x tend vers $+\infty$, le premier terme tend vers 0 et $A\cos x - B\sin x$ oscille entre $\pm\sqrt{A^2+B^2}$. La fonction $y_{0,0}$ est donc la seule solution qui a une limite finie en $+\infty$.

Comme $\dfrac{\sin t}{t}$ est sommable au voisinage de 0, $\cos x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ tend vers $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers 0^+. Par contre, $\dfrac{\cos t}{t}$ n'est pas sommable au voisinage de 0 mais nous pouvons appliquer le théorème d'intégration :

- $\dfrac{\cos t}{t} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$,
- $\dfrac{1}{t}$ est positive et non sommable au voisinage de 0,

On en déduit que $\displaystyle\int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ est équivalent à $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers 0^+. On peut ici se passer d'appliquer ce théorème et écrire directement :

$$\forall x \in]0,1], \quad \left|\int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right| = \int_x^1 \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

car la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t}$ est intégrable sur $]0,1]$ (elle est continue et tends vers 0 quand t tend vers 0). Comme $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0, on en déduit :

$$\int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t =_{0^+} O(1) = o(lnx)$$

On a donc :

$$\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \sin x \left(\underbrace{\int_0^1 \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t}_{\sim\, -\ln x} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t}_{=o(\ln x)} \right) \underset{0^+}{\sim} -x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

On en déduit que $y_{0,0}(x)$ tend vers $I = \dfrac{\pi}{2}$ quand x tend vers 0^+ et $y_{0,0}$ est la seule solution sur $]0,+\infty$ qui admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$.

Plus généralement, nous avons démontré que chaque solution $y_{A,B}$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}+A$ en 0^+ et "oscille" entre $-\sqrt{A^2+B^2}$ et $\sqrt{A^2+B^2}$ au voisinage de $+\infty$.

15) Commençons par remarquer que l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 2, car les application $a:\ x\longmapsto 1-\cos 4x$, $b:\ x\longmapsto 2\sin 4x$ et $c:\ x\longmapsto 8$ sont continue sur $]0,\pi/2[$, avec $a(x)\neq 0$ pour tout x.

On a $v=\dfrac{1}{u}$, donc $v'=-\dfrac{u'}{u^2}$ et $v''=\dfrac{-uu''+2(u')^2}{u^3}$. Nous obtenons donc les deux équations :

$$\begin{cases}(1-\cos 4x)u"+2u'\sin 4x-8u=0\\(1-\cos 4x)(-uu"+2(u')^2)-2\sin 4x\,uu'-8u^2=0\end{cases}$$

On obtient, en ajoutant u fois la première équation à la seconde :

$$\sin^2(2x)(u')^2-4u^2=0$$

Comme u ne s'annule pas et est continue, elle garde un signe constant : il existe $\varepsilon\in\{-1,1\}$ tel que

$$\sin(2x)u'=\varepsilon u.$$

On a $\dfrac{1}{\sin(2x)}=\dfrac{1}{2\sin x\cos x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\tan'(x)}{\tan x}$, donc la solution de l'équation est :

$$u(x)=K\,e^{\varepsilon\ln(\tan x)}=K\ (\tan x)^{\varepsilon}$$

On obtient donc $u(x)=K\tan x$ ou $u(x)=K\operatorname{cotan} x$: ces deux formes de solutions correspondent au fait que u et v jouent des rôles symétriques : si u est solution, $1/u$ est également solution.

Il reste à vérifier que ces solutions sont correctes ; un calcul montre que les fonctions $\varphi_1:\ x\longmapsto\tan x$ et $\varphi_2:\ x\longmapsto\operatorname{cotan} x$ sont solutions de l'équation sur l'intervalle $]0,\pi/2[$ et ces solutions sont indépendantes : elles forment donc une base de l'espace des solutions et la solution générale de l'équation est $y(x)=K_1\tan x+K_2\operatorname{cotan} x,\ \ K_1,K_2\in\mathbb{R}$.

16) Remarquons que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique car f est continue. L'espace des solutions de l'équation est bien un espace vectoriel de dimension 2.

On sait que le wronskien

$$\forall x\in I,\ \ W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x)&y_2(x)\\y_1'(x)&y_2'(x)\end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)$$

ne s'annule pas sur I : il garde donc un signe constant.

Comme y_1 ne s'annule pas sur $]a,b[$, elle y garde un signe constant. On peut supposer que $y_1>0$ sur $]a,b[$, quitte à remplacer y_1 par $-y_1$. On en déduit que $y_1'(a)\geq 0$ et $y_1'(b)\leq 0$, puis que $y_1'(a)>0$ et $y_1'(b)<0$ (si $y_1'(a)$ ou $y_1'(b)$ était nul, on aurait $W(a)$ ou $W(b)$ nul). Comme $-y_1'(a)y_2(a) = W(a)$ et $-y_1'(b)y_2(b) = W(b)$ sont de même signe, on en déduit que $y_2(a)$ et $y_2(b)$ sont non nuls et de signes opposés : le théorème des valeurs intermédiaires prouve que y_2 s'annule sur $[a, b]$. Si elle s'annulait deux fois, on pourrait choisir deux zéros consécutifs α et β de y_2, avec $a < \alpha < \beta < b$ et la preuve que nous venons de faire prouverait que y_1 s'annule, ce qui est contraire à l'hypothèse. y_2 s'annule donc une et une seule fois entre a et b.

17) On introduit le wronskien de y_1 et y_2 (même si ce ne sont pas les solutions de la même équation différentielle) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

W est dérivable et $W' = y_1y_2'' - y_1''y_2 = y_1y_2(f_1 - f_2)$.

Comme a et b sont des zéros consécutifs de y_1, elle garde un signe constant sur $]a, b[$. Quitte à travailler sur $-y_1$, nous pouvons supposer que $y_1 > 0$ sur $]a, b[$. On en déduit que $y_1'(a) > 0$ et $y_1'(b) < 0$ (les dérivées ne peuvent pas s'annuler car sinon, y_1 serait nulle d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz qui s'applique car f_1 est continue).

Supposons que y_2 ne s'annule pas sur $[a, b]$. Elle garde elle aussi un signe constant sur $[a, b]$: nous pouvons également supposer que $y_2 > 0$ sur $[a, b]$. Nous avons alors :

$$\forall x \in [a, b],\ W'(x) = y_1(x)y_2(x)(f_1(x) - f_2(x)) \leq 0$$

donc $W(a) \leq W(b)$, i.e. $-y_1'(a)y_2(a) \leq -y_1'(b)y_2(b)$, ce qui est absurde car $-y_1'(a)y_2(a) > 0$ et $-y_1'(b)y_2(b) < 0$.

L'hypothèse faite est donc absurde : y_2 s'annule sur $[a, b]$.

Ce résultat permet de donner des renseignements qualitatifs sur les zéros de certaines équations différentielles :

- si $\omega > 0$, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue avec $f \geq \omega^2$ et si φ est une solution de l'équation $y'' + fy = 0$, alors φ possède un zéro dans chaque intervalle de la forme $[a, a + \pi/\omega]$. En effet, il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $y_1(x) = \sin(\omega(t - a))$ et $\varphi_2 = \varphi$. En particulier, si φ est non nulle, elle a une infinité de zéros qui peuvent être rangés en une famille $(r_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ strictement croissante, avec $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $r_n \xrightarrow[n\to-\infty]{} -\infty$.

- si $\omega > 0$, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue avec $f \leq -\omega^2$ et si φ est une solution non nulle de l'équation $y'' + fy = 0$, alors φ s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$. En effet, dans le cas contraire, φ aurait deux zéros consécutifs et en appliquant le résultat à $y_1 = \varphi$ et $y_2 = \mathrm{ch}(\omega x)$, on aurait une absurdité.

18) Notons $g = f'' + f$. f est donc solution de l'équation $y'' + y = g$, dont la solution générale est (méthode de variation des constantes) :

$$y(x) = \left(\int_0^x -\sin t\, g(t)\,\mathrm{d}t\right)\cos x + \left(\int_0^x \cos t\, g(t)\,\mathrm{d}t\right)\sin x + A\cos x + B\sin x.$$

Il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x (\sin x \cos t - \sin t \cos t) g(t)\,\mathrm{d}t + A\cos x + B\sin x = \int_0^x \sin(x-t)\, g(t)\,\mathrm{d}t + A\cos x + B\sin x.$$

On en déduit, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x+\pi) + f(x) &= \int_0^{x+\pi} \sin(x+\pi-t)\, g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x \sin(x-t)\, g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{x+\pi} \sin(x-t)\, g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x \sin(x-t)\, g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_x^{x+\pi} \sin(x-t)\, g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \underbrace{\sin u\ g(u+x)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

donc $f(x+\pi) + f(x) \geq 0$.

19) Si p et q existent, on sait que le wronskien de φ_1 et φ_2 est non nul :

$$\forall x \in I,\ W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Supposons réciproquement que W ne s'annule pas. Nous cherchons p et q continues sur I telles que :

$$\forall x \in I,\ \begin{cases} p(x)\varphi_1'(x) + q(x)\varphi_1(x) = -\varphi_1''(x) \\ p(x)\varphi_2'(x) + q(x)\varphi_2(x) = -\varphi_2''(x) \end{cases}$$

À x fixé, ceci est un système de Cramer d'inconnue $(p(x), q(x))$, de déterminant $-W(x)$. On a donc nécessairement

$$\forall x \in I,\ p(x) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1''(x) & \varphi_1(x) \\ \varphi_2''(x) & \phi_2(x) \end{vmatrix}}{W(x)} \text{ et } q(x) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1'(x) & \varphi_1''(x) \\ \varphi_2'(x) & \phi_2''(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$$

Réciproquement, ces relations permettent de définir deux applications continues sur I et (φ_1, φ_2) est une base des solutions de l'équation $y'' + py' + qy = 0$, puisque φ_1 et φ_2 sont deux solutions dont le wronskien est non nul.

Avec les deux fonctions proposées, on obtient facilement $p(x) = \dfrac{1}{x}$ et $q(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2}$. L'équation :

$$x^2 y'' + xy' + (4x^4 - 1)y = 0$$

a donc pour solution (sur $I =]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$) $y : \ x \longmapsto A\,\dfrac{\cos x^2}{x} + B\,\dfrac{\sin x^2}{x}$.

20) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a(x)f'(x) + b(x)f(x) = -f''(x) \\ a(x)g'(x) + b(x)g(x) = -g''(x) \end{cases}$$

et le wronskien $W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$ ne s'annule jamais. On peut donc écrire :

$$a = \frac{f''g - fg''}{fg' - f'g} \text{ et } b = \frac{f'g'' - f''g'}{fg' - f'g}.$$

Les fonctions f, f'' et g' sont paires et les fonctions f', g et g'' sont impaires, donc a est impaire et b est paire.

21) On applique la méthode de variation des constantes : on pose $y(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x$ avec $A, B : \ \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables et $A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0$. On obtient le système

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin(x) = 0 \\ -\sin x A'(x) + \cos x B'(x) = g(x) \end{cases}$$

puis $A'(x) = -g(x)\,\sin x$ et $B'(x) = g(x)\,\cos x$. Les solutions s'écrivent donc :

$$\forall x \geq 0,\ y(x) = \Big(\underbrace{-\int_0^x g(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t}_{=u(x)} + A \Big) \cos x + \Big(\underbrace{\int_0^x g(t)\,\cos t\,\mathrm{d}t}_{=v(x)} + B \Big) \sin x \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Il suffit donc de montrer que u et v sont bornées sur $[0, +\infty[$ pour que toutes les solutions le soient.

g est monotone et bornée, donc g a une limite ℓ en $+\infty$. En notant $h = g - \ell$, on a :

$$\int_0^x g(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^x h(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t + \underbrace{\ell(1 - \cos x)}_{\text{bornée}}$$

Enfin, quitte à changer h en $-h$, on peut supposer que h est décroissante. Nous allons alors comparer $\displaystyle\int_0^x h(t)\,\sin t\,dt$ à la somme d'une série alternée, en séparant les intervalles sur lesquels sin garde un signe constant ; on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} h(t)\,|\sin t|\,\mathrm{d}t$$

et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{n\pi} h(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \alpha_k = S_n$$

Comme h est décroissante, α_k est décroisante :

$$\begin{aligned} \alpha_k - \alpha_{k+1} &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} h(t)\,|\sin t|\,\mathrm{d}t - \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} h(t)\,|\sin t|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi h(t + k\pi)\,\sin(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi h(t + (k+1)\pi)\sin(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \underbrace{\sin(t)\,(h(t + k\pi) - h(t + (k+1)\pi))}_{\geq 0}\,\mathrm{d}t \geq 0 \end{aligned}$$

et tend vers 0 :

$$0 \leq \alpha_k \leq \pi h(k\pi) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

On déduit du théorème spécial des séries alternées que la série de terme général $(-1)^k \alpha_k$ converge et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq S_n \leq \alpha_0.$$

On a ensuite :

$$\forall x \geq 0,\ 0 \leq \int_0^x h(t)\, \sin(t)\, \mathrm{d}t \leq \alpha_0$$

puisque $\displaystyle\int_0^x \sin t\, h(t)\, \mathrm{d}t$ est compris entre S_n et S_{n+1}, pour $n = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor$. Nous avons donc montré que $u(x)$ était bornée, et la preuve est identique avec $v(x)$ en posant :

$$S_n = \int_{\pi/2}^{\pi/2+n\pi} h(t)\, \cos t\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_{\pi/2+k\pi}^{\pi/2+(k+1)\pi} h(t)\, |\cos t|\, \mathrm{d}t.$$

22) L'équation homogène a pour solution générale : $y(x) = (ax+b)e^x$. La méthode de variation des constantes donne la solution générale de l'équation (E) sous la forme : $y(x) = a(x)xe^x + b(x)e^x$ avec a et b définies et dérivables sur $]0, +\infty[$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} a'(x)xe^x + b'(x)e^x = 0 \\ a'(x)(1+x)e^x + b'(x)e^x = \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}} \end{cases}$$

soit encore $a'(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}}$ et $b'(x) = -\dfrac{\sqrt{x}\, e^{-x}}{\sqrt{\pi}}$, relations qui s'intègrent en :

$$a(x) = \alpha - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\, \mathrm{d}t \text{ et } b(x) = \beta + \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\, e^{-t}}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{d}t$$

La solution générale de (E) est donc (les intégrales convergent bien au voisinage de $+\infty$)=

$$y(x) = \left(\alpha - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\, \mathrm{d}t \right) xe^x + \left(\beta + \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\, e^{-t}}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{d}t \right) e^x,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

La dérivée de $y(x)$ s'écrit :

$$y'(x) = a(x)(x+1)e^x + b(x)e^x = \left(\alpha - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\, \mathrm{d}t \right) (x+1)e^x + \left(\beta + \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\, e^{-t}}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{d}t \right) e^x.$$

Comme les fonctions $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$ et $t \longmapsto \dfrac{\sqrt{t}\, e^{-t}}{\sqrt{\pi}}$ sont sommables au voisinage de 0 (la première est un $O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ au voisinage de 0 et la seconde tend vers 0 en 0), $y'(x)$ a une limite en 0 :

$$y'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \alpha - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\, \mathrm{d}t + \beta + \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\, e^{-t}}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{d}t.$$

Ainsi, y est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et y' a une limite finie en 0^+ : le théorème de prolongement C^1 permet d'affirmer que y admet un prolongement $\tilde{y}$ de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.

On a :

$$\begin{cases} \tilde{y}(0) = \beta + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\,e^{-t}}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}t \\ \tilde{y}'(0) = \alpha - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{d}t + \beta + \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\,e^{-t}}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

donc les conditions imposées donnent

$$\beta = -\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\,e^{-t}}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}t \text{ et } \alpha = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Ainsi, $\alpha - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \neq 0$ et $\beta + \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\,e^{-t}}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \beta \neq 0$, donc

$$y(x) = \underbrace{\left(\alpha - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{d}t\right) xe^x}_{\sim_{+\infty}\, xe^x} + \underbrace{\left(\beta + \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\,e^{-t}}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}t\right) e^x}_{\sim_{+\infty}\, \beta e^x =_{+\infty} o(xe^x)} \underset{+\infty}{\sim} xe^x.$$

23) Soit f un solution de l'équation possédant une infinité de zéros dans $[u,v]$. Il existe alors une suite $(t_n)_{n\geq 0}$ de zéros deux à deux distincts de f. Comme la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est une suite du compact $[u,v]$, il existe une extractrice φ telle que $t_{\varphi(n)}$ converge vers $\alpha \in [u,v]$. Par continuité de f, on a $f(\alpha) = 0$. De plus, les t_n étant distincts deux à deux, on a $t_{\varphi(n)} \neq \alpha$ à partir d'un certain rang et

$$f'(\alpha) = \lim_{+\infty} \underbrace{\frac{f(t_{\varphi(n)}) - f(\alpha)}{t_{\varphi(n)-\alpha}}}_{=0} = 0$$

donc $f = 0$, grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz (les fonction a et b sont continues, donc la seule solution du problème de Cauchy $\big(y'' + ay' + by = 0,\ y(\alpha) = 0 \text{ et } y'(\alpha) = 0\big)$ est la fonction nulle).

Par contraposée, nous avons démontré qu'une solution non nulle de l'équation $y'' + ay' + b = 0$ possédait un nombre fini de zéros.

24) a) Supposons que $f'' - \alpha^2 f = 0$. Il existe alors A et B tels que $f :\ x \longmapsto Ae^{-\alpha x} + Be^{\alpha x}$. Comme f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, nous avons $B = 0$ et $A = f(0)$, ce qui donne $f(x) = f(0)e^{-\alpha x}$ pour tout $x \geq 0$.

b) Comme $f'' \geq \alpha^2 f \geq 0$, f' est croissante. S'il existe $a > 0$ tel que $f'(a) > 0$, on a pour tout $x \geq a$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t \geq f(a) + \int_a^x f'(a)\mathrm{d}t = f(a) + (x-a)f'(a) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

et f n'est pas majorée : on en déduit que f' est négative sur $\mathbb{R}^+$, i.e. que f est décroissante.

Comme f est minorée par 0, f a une limite $\ell \geq 0$ en $+\infty$. Si $\ell > 0$, $f''(x) \geq \alpha^2 \ell$ pour tout x et $f'(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ce qui est absurde car $f' \leq 0$. Nous avons donc prouvé que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

c) Notons $g: \ x \longmapsto f(x) - f(0)e^{-\alpha x}$. On a $g(0) = 0$ et $g'' - \alpha^2 g = f'' - \alpha^2 f \geq 0$. S'il existait x_0 tel que $g(x_0) > 0$, il existerait alors $a \in [0, x_0[$ tel que $g(a) = 0$ et $g > 0$ sur $]a, x_0]$. Si g ne s'annulait pas sur $]x_0, +\infty[$, g serait positive, puis convexe sur $I = [a, +\infty[$ (car $g'' \geq \alpha^2 g$). On aurait alors :

$$\forall x > x_0, \ g(x) \geq \frac{g(x_0) - g(a)}{x_0 - a}(x - x_0) + g(x_0) = \frac{g(x_0)}{x_0 - a}(x - x_0) + g(x_0)$$

puisque le point $(x_0, g(x_0))$ est au dessous de la corde qui relie les points $(a, g(a))$ et $(x, g(x))$. Ceci prouverait que $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$: c'est absurde.

Ainsi, g doit s'annuler sur $]x_0, +\infty[$ et il existe b tel que $a < x_0 < b$ avec $g(b) = 0$ et $g > 0$ sur $]a, b[$. Une nouvelle fois, g est convexe sur $[a, b]$, ce qui est absurde car $g(a) = g(b) = 0$ et $g(x_0) > 0$. Nous avons donc démontré que g était négative sur $[0, +\infty[$, c'est-à-dire que $f(x) \leq f(0)e^{-\alpha x}$ pour tout $x \geq 0$.

25) a) On applique la méthode de variation des constantes : on pose $y(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x$ avec A, B dérivables et on résout :

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = \dfrac{2}{\cos^3 x} \end{cases}$$

On obtient $A'(x) = -2\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ et $B'(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x}$, soit $A(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} + Cte$ et $B(x) = 2\tan x + Cte$. On a donc :

$$y_0(x) = -\frac{1}{\cos x} + 2\frac{\sin^2}{\cos x} + A_0 \cos x + B_0 \sin x = \frac{1}{\cos x} + (A_0 + 2)\cos x + B_0 \sin x$$

et les conditions initiales donnent $A_0 + 3 = 0$ et $B_0 = 0$, d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ y_0(x) = \frac{1}{\cos x} - \cos x.$$

b) On pose $\varphi = f - y_0$: on a donc $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ et $\varphi'' + \varphi \geq 0$. En posant $g = \varphi'' + \varphi$, φ est solution, sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$,de l'équation $y'' + y = \varphi$. On en déduit qu'il existe A et B tels que (méthode de variation des constantes) :

$$\forall x \in I, \ \varphi(x) = \left(\int_0^x - \sin t \, g(t) \, \mathrm{d}t\right)\cos x + \left(\int_0^x \cos t \, g(t) \, \mathrm{d}t\right)\sin x + A\cos x + B\sin x.$$

Les conditions initiales donnent ensuite $A = B = 0$, d'où :

$$\forall x \in I, \varphi(x) = \int_0^x (\sin x \cos t - \sin t \cos x) \, g(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^x \sin(x - t) \, g(t) \, \mathrm{d}t$$

- si $x \in [0, \pi/2[$ et $t \in [0, x]$, $0 \leq x - t \leq \pi/2$ donc $\sin(x-t)\, g(t) \geq 0$; par intégration entre deux bornes croissantes, on en déduit que $\varphi(x) \geq 0$.

- si $x \in]-\pi/2, 0]$ et $t \in [0, x]$, $-\pi/2 \leq x - t \leq 0$ donc $\sin(x-t)\, g(t) \leq 0$; par intégration entre deux bornes décroissantes, on en déduit encore que $\varphi(x) \geq 0$.

26) Supposons que $x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n t^n$, somme d'une série de rayon non nulle, est solution de l'équation au voisinage de 0. Par identification des DSE, on obtient :

$$-6\alpha_0 = 0,\ 10\alpha_1 = 0 \text{ et } \forall n \geq 2,\ (n^2 - 5n - 6)\alpha_n + \alpha_{n-2} = 0.$$

Comme $n^2 - 4n - 6 = (n+1)(n-6)$, nous n'obtenons pas de condition sur α_6 et les relations deviennent :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_5 = 0 \text{ et } \forall n \geq 7,\ \alpha_n = \frac{-\alpha_{n-2}}{n^2 - 5n - 6}.$$

Nous pouvons donc réécrire la somme sous la forme

$$x(t) = t^6 \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k t^{2k}$$

en posant $\beta_k = \alpha_{6+2k}$. Cette suite est définie par la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \beta_{k+1} = \alpha_{8+2k} = -\frac{\alpha_{6+2k}}{(9+2k)(2+2k)} = -\frac{\beta_k}{2(9+2k)(k+1)}.$$

(on peut aussi donner un expression de β_k à base de factorielles).

Nous pouvons passer à la synthèse. La relation précédente permet de définir, avec $\beta_0 = 1$, une série entière $\varphi(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k t^{6+2k}$ de rayon infini puisque la règle de d'Alembert s'applique pour t non nul :

$$\left| \frac{\beta_{k+1} t^{8+2k}}{\beta_k t^{6+2k}} \right| = \frac{t^2}{2(9+2k)(k+1)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 < 1.$$

La somme de cette série est, d'après les calculs faits dans l'analyse, solution de l'équation différentielle et les seules solutions DSE en 0 sont les $K\varphi$: l'ensemble des solutions DSE en 0 est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

27) Soit φ une solution, qui s'annule en 0 et en 1. Comme a et b sont 1-périodique, les fonctions $\psi :\ x \longmapsto \lambda\varphi(x+1)$ sont solutions de l'équation. L'idée est de choisir λ correctement pour pouvoir appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz : on a $\psi(0) = \lambda\varphi(1) = 0 = \varphi(0)$ et $\psi'(0) = \lambda\varphi'(1)$. Ainsi, il faudrait avoir $\lambda\varphi'(1) = \varphi'(0)$ pour pouvoir conclure. Nous pouvons donc distinguer deux cas :

- si $\varphi'(0) \neq 0$, on choisit $\lambda = \dfrac{\varphi'(1)}{\varphi'(0)}$ et on a $\psi = \varphi$, puisque les deux fonctions sont solutions du même problème de Cauchy (a et b sont continues, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique). On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda\varphi(x+1) = \varphi(x)$$

On montre alors par récurrence la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n :\ \varphi(n) = \varphi(-n) = 0.$$

$\mathcal{P}_0$ est vraie par hypothèe.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée. On a alors $\varphi(-n-1) = \lambda\varphi(-n) = 0$ et $\varphi(n+1) = \frac{1}{\lambda}\varphi(n) = 0$ (λ est non nul car sinon, on aurait $\varphi = 0$).

- sinon, $\varphi = 0$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (la seule solution de l'équation vérifiant $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ est l'application nulle).

Dans les deux cas, φ s'annule sur $\mathbb{Z}$.

28) a) On peut écrire :

$$\forall x \geq 0,\ g(x) = f(x) + \sin x \int_0^x u(t)f(t)\cos t\,\mathrm{d}t - \cos x \int_0^x u(t)f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

donc g est de classe C^1 et, pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= f'(x) + \cos x \int_0^x u(t)f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + u(x)f(x)\sin x\cos x\ + \sin x \int_0^x u(t)f(t)\sin t\,\mathrm{d}t - u(x)f(x)\cos x\sin x \\
&= f'(x) + \cos x \int_0^x u(t)f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + \sin x \int_0^x u(t)f(t)\sin t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

g' est également C^1 avec, toujours pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
g''(x) &= f''(x) - \sin x \int_0^x u(t)f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + u(x)f(x)\cos^2 x\ + \cos x \int_0^x u(t)f(t)\sin t\,\mathrm{d}t + u(x)f(x)\sin^2 x \\
&= f''(x) + f(x) - g(x) + u(x)f(x) \\
&= -g(x)
\end{aligned}$$

donc g est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

b) Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $g(x) = a\cos x + b\sin x$ pour tout $x \geq 0$. En particulier, g est bornée par $c = \sqrt{a^2+b^2}$ sur $[0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\forall x \geq 0,\ |f(x)| &= \left|g(x) - \int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq |g(x)| + \int_0^x |\sin(x-t)u(t)f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq c + \int_0^x |u(t)f(t)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

c) La dernière question est plus délicate et on peut penser à certains exercices dans lesquels on compare la solution d'un problème de Cauchy à une fonction vérifiant le même problème de Cauchy, mais dans lequel l'équation différentielle est remplacée par une inégalité. Ici, on peut poser :

$$\forall x \geq 0,\ \varphi(x) = c + \int_0^x |u(t)f(t)|\,\mathrm{d}t$$

La fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ avec

$$\forall x \geq 0,\ \varphi'(x) = |u(x)f(x)| \leq |u(x)|\varphi(x).$$

Il est donc naturel d'introduire la solution ψ du problème de Cauchy ($y' = |u(x)|y,\ y(0) = \varphi(0) = c$) et de démontrer que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ pour tout $x \geq 0$. Dans ce cas simple, on peut directement poser :

$$\forall x \geq 0,\ g(x) = \varphi(x)e^{-U(x)} \text{ avec } U(x) = \int_0^x |u(t)|\,\mathrm{d}t$$

ce qui correspond, à une constante près, à la fonction φ/ψ ; g est de classe C^1 et

$$\forall x \geq 0,\ g'(x) = \varphi'(x)e^{-U(x)} - |u(x)|\varphi(x)e^{-U(x)} = \left(\varphi'(x) - |u(x)|\varphi(x)\right)e^{-U(x)} \leq 0$$

La fonction g est donc décroissante et $\varphi(x)e^{-U(x)} = g(x) \leq g(0) = c$ pour tout $x \geq 0$. Ainsi, nous avons :

$$\forall x \geq 0,\ |f'(x)| \leq \varphi(x) \leq c\,e^{U(x)}$$

Comme u est sommable sur $\mathbb{R}^+$, U est majorée par $M = \displaystyle\int_0^{+\infty} |u(t)|\,\mathrm{d}t$ et f est bornée par $c\,e^M$.

29) a) En posant $h = uf$, f est solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + y = -h$. La solution générale de l'équation homogène $y'' + y = 0$ est $y = A\cos + B\sin$ et la méthode de variation des constantes donne la solution générale sous la forme $y(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x$ avec A, B de classe C^1 vérifiant :

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = -h(x) \end{cases}$$

On obtient $A'(x) = h(x)\sin x$ et $B'(x) = -h(x)\cos x$ et la solution générale de (E) s'écrit, avec $A, B \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \cos x \int_0^x h(t)\sin t \,\mathrm{d}t - \sin x \int_0^x h(t)\cos t \,\mathrm{d}t + A\cos t + B\sin t = \int_0^x h(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t + A\cos x + B\sin x.$$

Ainsi, les fonctions f et $x \longmapsto -\displaystyle\int_0^x u(t)f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$ sont deux solutions de (E) : leur différence g est donc solution de l'équation homogène $y'' + y = 0$.

b) Comme g est de la forme $A\cos + B\sin$, elle est bornée et on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ |f(x)| \leq |g(x)| + \left|\int_0^x u(t)f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \|g\|_\infty + \int_0^x |u(t)f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

c) Pour $x \in \mathbb{R}^+$, f est continue sur le segment $[0, x]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes sur ce segment : il existe $c_x \in [0, x]$ tel que $|f(c_x)| = \sup_{0 \leq t \leq x} |f(t)| = M_x$. On a alors :

$$M_x = |f(c_x)| \leq c + \int_0^{c_x} |u(t)f(t)|\,\mathrm{d}t \leq c + M_x \int_0^{c_x} |u(t)|\,\mathrm{d}t \leq c + M_x \underbrace{\int_0^{+\infty} |u(t)|\,\mathrm{d}t}_{=\alpha}.$$

Si on suppose que f n'est pas bornée, on a $M_x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$: si $\alpha < 1$, ceci conduit à une contradiction car on aurait $(1-\alpha)M_x \leq c$ avec $(1-\alpha)M_x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Nous allons donc améliorer le calcul précédent en nous ramenant à une intégrale strictement inférieure à 1 : il existe $x_0 > 0$ tel que $\alpha = \displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} |u(t)|\,\mathrm{d}t < 1$ et pour $x > x_0$, on a :

$$M_x = |f(c_x)| \leq c + \int_0^{c_x} |u(t)f(t)|\,\mathrm{d}t \leq c + \int_0^x |u(t)f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \underbrace{c + \int_0^{x_0} |u(t)f(t)|\,\mathrm{d}}_{=c'} + M_x \underbrace{\int_{x_0}^x |u(t)|\,\mathrm{d}t}_{\leq \alpha}$$

On en déduit que pour tout $x \geq 0$, $M_x \leq \dfrac{c'}{1-\alpha}$: f est bornée.

30) a) Soit M un majorant de $|\varphi|$. Comme $|q\varphi| \leq M|q|$ et que q est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, $q\varphi$ l'est également. On en déduit que $\varphi'(x) = \varphi'(0) - \displaystyle\int_0^x q(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$ a une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$. Si ℓ était non nul, $\varphi(x)$ tendrait vers $\pm\infty$ (selon le signe de ℓ) à l'infini. En effet, avec $\ell > 0$, il existerait $x_0 \geq 0$ tel que $\varphi'(x) \geq \frac{\ell}{2}$ pour $x \geq x_0$. On aurait par intégration :

$$\forall x \geq x_0,\ \varphi(x) \geq \varphi(x_0) + (x - x_0)\frac{\ell}{2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

On a donc nécessairement $\ell = 0$.

b) Soit (φ_1, φ_2) une base de l'espace des solutions de (E) (comme q est continue, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique). Notons $W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$ le wronskien de (φ_1, φ_2). W est de classe C^1 avec

$$W' = \varphi_1'\varphi_2' + \varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1'\varphi_2' - \varphi_1\varphi_2' = -q\varphi_1\varphi_2 + q\varphi_1\varphi_2 = 0$$

On en déduit que W est une constante non nulle (le wronskien ne s'annule jamais). Si φ_1 et φ_2 étaient bornées, φ_1' et φ_2' tendraient vers 0 en $+\infty$ et $W(x)$ tendrait également vers 0 : ce serait absurde. On en déduit que (E) admet au moins une solution non bornée

Exercices Mines-Centrale: équations différentielles non linéaires

31) On travaille ici dans l'espace $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cet espace est la somme directe des sous-espaces formés par les fonctions paires et impaires : pour $f \in E$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

et on a $f = g + h$ avec g, h de classe C^2 et respectivement paire et impaire. Supposons que $f \in E$ est solution de l'équation. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) + h''(x) + g(-x) + h(-x) = x + \cos x$$

ce qui s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) + g(x) + h''(x) - h(x) = x + \cos x$$

Comme $g'' + g$ est paire et $h'' - h$ est impaire, on peut identifier les parties paires et impaires : g et h sont respectivement solutions des équations différentielles $y'' + y = \cos x$ et $y'' - y = x$. La première équation a une solution particulière de la forme $\alpha x \cos x + \beta x \sin x$ et un calcul élémentaire donne $\alpha = 0$ et $\beta = 1/2$. La seconde équation a pour solution évidente $y = -x$. Il existe donc $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}x\sin x \text{ et } h(x) = -x + C\operatorname{ch} x + D\operatorname{sh} x$$

puis, la parité de g et l'imparité de h donne $B = C = 0$. Toute solution est donc de la forme :

$$f :\ x \longmapsto \alpha\cos x + \beta\operatorname{sh} x + \frac{1}{2}x\sin x - x,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

et ces fonctions sont bien solutions (vérification immédiate).

32) a) Supposons que f est une solution ; f' est alors dérivable avec :

$$\forall x > 0,\ f''(x) = m\left(f'(x) - \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)\right) = m\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) f'(x)$$

puisque $f'(1/x) = m(f(1/x) + f(x)) = f'(x)$ pour tout $x > 0$. On peut intégrer cette équation différentielle, ce qui donne (en utilisant que $f'(1) = 2m$) :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = 2me^{-2m} e^{m(x+1/x)}$$

puis :

$$\forall x > 0,\ f(x) = 1 + 2me^{-2m} \int_1^x e^{m(t+1/t)}\, \mathrm{d}t.$$

Nous avons ainsi prouvé l'unicité de la solution.

Réciproquement, soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par l'expression précédente. Nous avons, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
m(f(x) + f(1/x)) &= 2m + 2me^{-2m}\left(\int_1^x e^{m(t+1/t)}\, \mathrm{d}t + \int_1^{1/x} e^{m(t+1/t)}\, \mathrm{d}t\right) \\
&= 2m + 2me^{-2m}\left(\int_1^x e^{m(t+1/t)}\, \mathrm{d}t - \int_1^x e^{m(u+1/u)}\, \frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) \qquad \text{(en posant } u = 1/t\text{)} \\
&= 2m + 2m^2 e^{-2m} \int_1^x e^{m(t+1/t)} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t \\
&= 2m + 2me^{-2m}\left[e^{m(t+1/t)}\right]_1^x \\
&= 2me^{-2m}\, e^{m(x+1/x)} \\
&= f'(x)
\end{aligned}$$

donc f est solution du problème.

b) Premier cas : $m > 0$. $f' > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$; comme $f'(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ diverge vers $+\infty$ en $+\infty$. On a ensuite $f'(x) = 2me^{-2m} e^{m(x+1/x)} \sim_0 2me^{-2m} e^{m/x}$, qui est prépondérant au voisinage de 0 devant $1/x$: on en déduit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0^+.

Comme $f''(x)$ est du signe de $1 - \frac{1}{x^2}$, on peut également remarquer que f est strictement concave sur $]0, 1]$ et strictement convexe sur $[1, +\infty[$.

Second cas : $m < 0$. $f' < 0$ donc f est strictement décroissante ; comme $f'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+, f a un prolongement C^1 en 0. On a ensuite $f'(x) \sim_{+\infty} 2me^{-2m} e^{mx}$ qui est intégrable au voisinage $+\infty$, donc $f(x)$ a une limite finie en $+\infty$. Comme dans l'autre cas, f est strictement concave sur $]0, 1]$ et strictement convexe sur $[1, +\infty[$.

33) a) Analyse : soit f une solution. En décomposant f en $g+h$ avec g paire et h impaire, l'équation s'écrit : $g'+h'=2g$. Comme g, h' sont paires et g' impaire, on peut identifier et on a $g'=$ et $h'=2g$. Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $g=\alpha$ et $h: \ x \longmapsto 2\alpha x+\beta$. h étant impaire, on a nécessairement $\beta=0$, puis $f: \ x \longmapsto \alpha(2x+1)$.

Synthèse : réciproquement, toute application de la forme précédente est solution de l'équation fonctionnelle.

Les solutions sont donc les applications $f: \ x \longmapsto \alpha(2x+1)$ avec α réel quelconque.

b) Analyse : supposons que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon $R \neq 0$ dont la somme est solution de l'équation sur un voisinage $]-r, r[$ de 0. On a donc :

$$\forall x \in]-r, r[, \ \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n a_n x^n$$

ce qui donne (unicité du DSE) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_{n+1} = \frac{1+\alpha^n}{n+1} a_n.$$

soit encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \frac{(1+\alpha^{n-1})(1+\alpha^{n-2})\dots(1+\alpha)(1+\alpha^0)}{n!} \, a_0.$$

Synthèse : pour $\beta \in \mathbb{R}$, définissons $(a_n)_{n\geq 0}$ par

$$a_0 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \ a_{n+1} = \frac{1+\alpha^n}{n+1} a_n.$$

On peut appliquer la règle de d'Alembert pour $\beta \neq 0$ et $x \neq 0$:

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{|1+\alpha^n|}{n+1}|x| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est de rayon infini (et c'est évidemment le cas quand $\beta = 0$). On peut donc définir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et f est bien solution de l'équation, puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(1+\alpha^n)a_n x^n = f(x) + f(\alpha x).$$

Il y a peu de chance que l'on soit capable d'exprimer f à l'aide des fonctions usuelles et on se contentera de l'expression :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) &= \beta \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+\alpha^{n-1})(1+\alpha^{n-2})\dots(1+\alpha)(1+1)}{n!} \, x^n \\
&= \beta \left(1 + 2x + \frac{2(1+\alpha)}{2!}x^2 + \frac{2(1+\alpha)(1+2\alpha)}{3!}x^3 + \frac{2(1+\alpha)(1+2\alpha)(1+3\alpha)}{4!}x^4 + \cdots\right)
\end{aligned}$$

34) a) Avec $y = 0$, nous obtenons $2f(x) = 2f(0)f(x)$ pour tout x, et donc $f(0) = 1$ en choisissant x tel que $f(x) \neq 0$. On a ensuite, avec $x = 0$, $f(y) + f(-y) = 2f(y)$ pour tout y, donc f est paire.

b) En dérivant deux fois par rapport à x, on obtient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y)$$

En choisissant $x = 0$ et en utilisant la parité de f'' (f est paire, donc f' est impaire et f'' est paire), on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ 2f''(y) = 2f''(0)f(y).$$

Nous avons alors trois cas :

- si $f''(0) > 0$, on pose $\omega = \sqrt{f''(0)}$ et on obtient $f'' = \omega^2 f$; il existe A, B t.q. $f :\ x \longmapsto A\,\mathrm{ch}(\omega x) + B\,\mathrm{sh}(\omega x)$. Comme f est paire et $f(0) = 1$, on a $f :\ x \longmapsto \mathrm{ch}(\omega x)$.
- si $f''(0) = 0$, on a $f'' = 0$ donc f est affine ; comme f est paire et $f(0) = 1$, on a $f = 1$;
- si $f''(0) < 0$, on pose $\omega = \sqrt{-f''(0)}$ et on obtient comme dans le premier cas $f :\ x \longmapsto \cos(\omega x)$.

Réciproquement, ces fonctions sont solutions de l'équation fonctionnelle. Les fonctions solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme $x \longmapsto \cos(\omega x)$ et $x \longmapsto \mathrm{ch}(\omega x)$ pour $\omega \in \mathbb{R}$ (on retrouve la contante 1 quand $\omega = 0$).

c) Si on suppose seulement que f est continue, on montre que f est de classe C^∞ (C^2 suffirait). On introduit la primitive F de f qui s'annule en 0 (F est donc de classe C^1). En intégrant la relation par rapport à x, on a :

$$\forall a, y \in \mathbb{R},\ F(a+y) - F(y) + F(a-y) - F(-y) = \int_0^a (f(x+y) + f(x-y))\,\mathrm{d}x = 2f(y)\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2f(y)F(a).$$

Comme f est non nulle, F l'est également : on peut donc choisir a tel que $F(a) \neq 0$. On a donc :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = \frac{F(a+y) - F(y) + F(a-y) - F(-y)}{2F(a)}$$

Comme F est C^1, f est de classe C^1, puis F est de classe C^2, puis f est de classe C^2, et ainsi de suite : f est de classe C^∞ et on peut appliquer le b).

Exercices X-ENS

35) a) Par contraposé : si ψ est non nulle, il existe un segment $[a, b] \subset [0, 1]$ non réduit à un point sur lequel ψ ne s'annule ; ψ étant continue, elle est de signe constant sur $[a, b]$. On peut alors construire $h \in \mathcal{C}_0$ tel que $h = 0$ sur $[0, a] \cup [b, 0]$ et

$h > 0$ sur $]a, b[$. Pour cela, on considère la fonction

$$\alpha : \ u \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } |u| \geq 1 \\ (1-u^2)^3 & \text{si } |u| < 1 \end{cases}$$

qui est bien de classe C^2 (car 1 et -1 sont des racines triples du polynôme $(1-X^2)^3$) ; on pose ensuite $h(t) = \alpha\left(\frac{2t-b-a}{b-a}\right)$ pour tout $t \in [0,1]$.

On a bien $h \in \mathcal{C}_0$ et $\int_0^1 \psi(t)h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \psi(t)h(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$, puisqu'on intègre sur un intervalle non réduit à un point une fonction continue, de signe constant et non nulle.

b) Soit $h \in \mathcal{C}_0$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'arc $\gamma_s = (x_0 + s\,h, y_0)$ est élément de $\mathcal{C}$, donc $E(\gamma_s) \geq E(\gamma_0)$. On en déduit que l'application $s \longmapsto E(\gamma_s)$ atteint en 0 un minimum globale. Comme cette application est polynômiale :

$$E(\gamma_s) = \int_0^1 \frac{(x_0'(t) + s\,h'(t))^2 + y_0'^2(t)}{y_0^2(t)}\,\mathrm{d}t = E(t\gamma_0) + 2s\int_0^1 \frac{x_0'(t)h'(t)}{y_0^2(t)}\,\mathrm{d}t + s^2\int_0^1 \frac{(h'(t))^2 y_0'^2(t)}{y_0^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

son coefficient de degré 1 est nul (on peut aussi dire que $\gamma'(0) = 0$). Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{x_0'(t)h'(t)}{y_0^2(t)}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Pour utiliser le a), nous allons faire une I.P.P (cela explique aussi pourquoi les applications manipulées sont de classe C^2) :

$$\int_0^1 \frac{x_0'(t)h'(t)}{y_0^2(t)}\,\mathrm{d}t \left[\frac{x_0'(t)h(t)}{y_0^2(t)}\right]_0^1 - \frac{x_0''(t)y_0(t) - 2x_0'(t)y_0'(t)}{y_0^3(t)}\,h(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme $h(0) = h(1) = 0$, cela donne :

$$\forall h \in \mathcal{C},\ \int_0^1 \frac{x_0''(t)y_0(t) - 2x_0'(t)y_0'(t)}{y_0^3(t)}\,h(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

et donc $x_0''y_0 - 2x_0'y_0' = 0$ d'après le a).

Nous allons utiliser la même démarche avec l'arc $\gamma_s = (x_0, y_0 + s\,h)$. Le premier problème, c'est que γ_s n'est élément de $\mathcal{C}$ que pour s assez proche de 0 : comme y_0 est continue et strictement positive, elle est minorée et atteint son minimum m, qui est donc strictement positif. h étant aussi continue sur $[0,1]$, elle est bornée par un constante M. On a donc $y_0 - sh > 0$ sur $[0,1]$ à condition de choisir $|s| < \dfrac{m}{M}$, puisque $y_0(t) - s\,h(t) \geq m - |s\,M|$.

L'application $F :\ s \longmapsto E(\Gamma_s)$ est donc définie au voisinage $V = [-\eta, \eta]$ de 0 et atteint en 0 un minimum global. Toutes les hypothèses du théorème de Leibniz sont réunies :

- pour tout $s \in V$, $t \longmapsto \dfrac{x_0'^2(t) + (y_0'^2(t) + s\,h'(t))^2}{(y_0 + s\,h(t))^2}$ est continue et sommable sur $[0,1]$;

- pour tout $t \in [0,1]$, $s \longmapsto \dfrac{x_0'^2(t) + (y_0'^2(t) + s\,h'(t))^2}{(y_0 + s\,h(t))^2}$ est e classe C^1 sur V ;

- pour tout $s \in V$, $t \longmapsto \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{x_0'^2(t) + (y_0'^2(t) + s\,h'(t))^2}{(y_0 + s\,h(t))^2}\right)$ est continue sur $[0,1]$;

- Comme $V \times [0,1]$ est compact et que $(s,t) \longmapsto \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{x_0'^2(t) + (y_0'^2(t) + s\,h'(t))^2}{(y_0 + s\,h(t))^2}\right)$ est continue, elle est bornée par une constante K, ce qui donne l'hypothèse de domination :

$$\forall s \in V,\ \forall t \in [0,1],\ \left|\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{x_0'^2(t) + (y_0'^2(t) + s\,h'(t))^2}{(y_0 + s\,h(t))^2}\right)\right| \leq K \text{ avec } K \text{ continue et sommable sur } [0,1].$$

L'application est donc de classe C^1 sur V avec :

$$\forall s \in V,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(E(\Gamma_s)\right) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{x_0'^2(t) + (y_0'^2(t) + s\,h'(t))^2}{(y_0 + s\,h(t))^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Comme cette application atteint son minimum en 0, qui est un point intérieur à V, sa dérivée en 0 est nulle, soit, après quelques calculs :

$$\int_0^1 \left(\frac{y_0'(t)}{y_0^2(t)}\,h'(t) - \frac{x_0'^2(t) + y_0'^2(t)}{y_0^3(t)}\,h(t)\right)\mathrm{d}t = 0$$

Il faut ensuite, comme dans le premier calcul, remplacer h' par h en effectuant une I.P.P :

$$\int_0^1 \frac{y_0'(t)}{y_0^2(t)}\,h'(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{y_0'(t)}{y_0^2(t)}\,h(t)\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{y_0''(t)y_0(t) - 2y_0'^2(t)}{y_0^3(t)}\,h(t)\,\mathrm{d}t$$

et on obtient en regroupant les deux termes :

$$\forall h \in \mathcal{C}_0,\ \int_0^1 \frac{y_0''(t)y_0(t) + x_0'^2(t) - y_0'^2(t)}{y_0^3(t)}\,h(t)\,\mathrm{d}t$$

On a donc, en appliquant le a :

$$y_0''y_0 + x_0'^2 - y_0'^2 = 0.$$

(x_0, y_0) est donc solution du système différentiel d'ordre 2 avec conditions aux limites :

$$\begin{cases} x''y - 2x'y' = 0 \\ y''y + x'^2 - y'^2 = 0 \\ (x(0), y(0)) = A \\ (x(1), y(1)) = B \end{cases}$$

Remarque : la méthode employée ici est assez naturelle : l'application E est de classe C^1 et nous exprimons que sa différentielle est nulle là où le mimimum est atteint. Nous avons cependant deux problèmes :

- la partie $\mathcal{C}$ n'est pas ouverte : on résout le problème en remarquant que $\mathcal{C}$ est une partie ouverte de l'espace affine $\{\gamma \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}^2),\ \gamma(0) = 1 \text{ et } \gamma(1) = B\}$, qui admet en tout point γ pour espace tangent l'espace vectoriel :

$$\overrightarrow{\mathcal{C}} = \{\gamma :\ [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma \text{ est de classe } C^2 \text{ et } \gamma(0) = \gamma(1) = (0,0)\}$$

- l'espace de travail est de dimension infinie, donc il faudrait pour parler de différentiabilité choisir une norme et prolonger les définitions données en cours, en écrivant en $\gamma \in \mathcal{C}$ un DL de la forme :

$$\forall \delta \in \overrightarrow{\mathcal{C}} \text{avec } ||\delta|| \text{ assez petit}, E(\gamma + \delta) = E(\gamma) + \ell(h) + o(h)$$

  où ℓ est linéaire et continue.

  Nous avons contourné le problème en travaillant sur des dérivées le long de vecteurs simples : $\delta = (h,0)$ ou $\delta = (0,h)$.

36) Remarque générale : soit (E) : $y'' + by' + c = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2, avec a et b continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit φ une solution de non nulle E et $Z = \{x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) := 0\}$. Comme f est continue, Z est une partie fermée de $\mathbb{R}$ et Z ne possède pas de point d'accumulation, c'est-à-dire les seules suites convergentes d'éléments de A sont les suites stationnaires. En effet, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite non stationnaire de zéros de φ qui converge vers x, on a $\varphi(x) = \varphi'(x) = 0$ (la première égalité car φ est continue en x, et la seconde en calculant le taux d'accroissement de φ entre x_n et x (on peut supposer que x_n est distinct de x pour tout n, quitte à extraire une sous-suite de (x_n)) : ce taux d'accroissement est nul et tend vers $\varphi'(x)$ quand n tend vers l'infini). Nous avons alors 4 cas possibles :

- Z est borné : il est alors fini et f a un nombre fini de zéros ;
- Z est minoré mais pas majoré : on peut alors classer les zéros de f en une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ strictement croissante ;
- Z est majoré mais pas minoré : on peut alors classer les zéros de f en une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ strictement décroissante ;
- Z n'est ni majoré, ni minoré : on peut alors classer les zéros de f en une suite strictement $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexée par $\mathbb{Z}$.

a) Nous devons donc démontrer que nous sommes dans le deuxième ou le quatrième cas.

On pourrait utiliser le résultat classique :

> Soient I un intervalle et $f_1, f_2 :\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f_2 \geq f_1$. Pour $i = 1, 2$, on suppose que y_i est une solution non nulle de l'équation différentielle $y'' + f_i y = 0$. Montrer que si a et b sont deux zéros consécutifs de y_1, y_2 s'annule sur $[a,b]$.

On aurait, avec $I = [0, +\infty[$, $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = e^x$:

- $f_2 \geq f_1$ sur I ;
- φ est solution de $y'' + f_2 y$ sur I ;
- sin est solution de $y'' + f_1 y$ sur I ;

comme sin s'annule tous les $k\pi$, φ s'annule au moins une fois dans chaque intervalle $[k\pi,\ (k+1)\pi]$. On en déduit que φ a une infinité de zéros dans $[0, +\infty[$, que l'on peut ranger en une suite strictement croissante.

Nous allons donner une preuve directe. Nous devons montrer que Z n'est pas majoré, i.e. que pour tout $a \geq 0$, il existe $b \in Z$ tel que $a \leq b$. Soit donc $a \geq 0$. Si $\varphi(a) = 0$, on choisit $a = b$. Sinon, on peut, quitte à remplacer φ par $-\varphi$, supposer que $\varphi(a) > 0$. Procédons par l'absurde : supposons que φ ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$; elle est alors strictement positive sur $[a, +\infty[$ (car elle est continue) et $\varphi''(x) = -e^x\varphi(x) < 0$ pour tout $x \geq a$. On en déduit que φ est strictement concave et que φ' est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$. La dérivée de φ est positive sur $[a, +\infty[$, car s'il existait $b > a$ tel que $\varphi'(b) < 0$, on aurait (la tangente en b est au dessus de la courbe)

$$\forall x \geq b,\ \ \varphi(x) \leq \varphi(b) + \varphi'(b)(x - b)$$

et donc $\varphi(x)$ tendrait vers $-\infty$ en $+\infty$: absurde car $\varphi > 0$ sur $[a, +\infty[$.

On en déduit que φ est strictement croissante sur $[a, +\infty[$: elle a donc en $+\infty$ une limite $\ell \in [f(a), +\infty]$. Ainsi, $\varphi''(x) = -e^x\varphi(x)$ tend vers $-\infty$, puis $\varphi'(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$: c'est absurde.

On peut donc définir par récurrence la suite (x_n) : on sait que Z n'est pas majoré. On pose $Z_0 = Z \cap [0, +\infty[$: Z_0 est un fermé non vide et minoré, on note x_0 sa borne inférieure. Comme les zéros de f sont isolés, $Z_1 = Z_0 \setminus \{x_0\}$ est encore un fermé non vide minoré, on note x_1 son minimum et ainsi de suite. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite strictement croissante d'éléments de Z_0 : comme elle ne peut converger (Z n'a pas de point d'accumulation), elle tend vers $+\infty$ et $Z_0 = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

b) Pour cette question, il va falloir utiliser le résultat énoncé plus haut. Considérons donc deux zéros consécutifs x_n et x_{n+1} et fixons $a \in]x_n, x_{n+1}[$. Posons :

- $I = [a, +\infty[$;
- $f_2 :\ x \longmapsto e^x$;

- $f_1 : \ x \longmapsto e^{x_n}$.

On a bien $f_1 \leq f_2$ sur I et nous allons choisir une solution φ_1 de $y'' + f_1 y = 0$ qui s'annule en a :

$$\varphi_1(x) = \sin(\omega_n(x-a))$$

avec $\omega_n = \exp\left(\dfrac{x_n}{2}\right)$. Comme a et $a + \dfrac{\pi}{\omega_n}$ sont deux zéros consécutifs de φ_1, φ s'annule dans l'intervalle $\left[a, a + \dfrac{\pi}{\omega_n}\right]$; ceci impose $x_{n+1} \leq a + \dfrac{\pi}{\omega_n}$. Comme cette inégalité est vraie pour tout $a > 0$, cela donne :

$$x_{n+1} - x_n \leq \pi \exp\left(-\frac{x_n}{2}\right)$$

Comme x_n tend vers l'infini, $x_{n+1} - x_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Le même type de démonstration (en prenant $f_2 : \ x \longmapsto e^{x_{n+1}}$ et $f_1 : \ x \longmapsto e^{x}$) donne la majoration :

$$\pi \exp\left(-\frac{x_{n+1}}{2}\right) \leq x_{n+1} - x_n$$

Remarque : on peut se passer de l'utilisation du résultat général (avec f_1 et f_2) en ajoutant la question intermédiaire

> en utilisant les fonctions $\sin(\omega_n(x - x_n))$ et $\sin(\omega_{n+1}(x - x_n))$, montrer :
>
> $$\pi \exp\left(-\frac{x_{n+1}}{2}\right) \leq x_{n+1} - x_n \leq \pi \exp\left(-\frac{x_n}{2}\right)$$

Posons $a_n = \pi \exp\left(-\frac{x_n}{2}\right)$. Les inégalités précédentes s'écrivent :

$$a_{n+1} \leq 2 \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq a_n.$$

Comme a_n tend vers 0, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers 1, donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} a_{n+1}$. On peut ensuite prendre un équivalent du ln :

$$a_n \underset{+\infty}{\sim} 2 \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{+\infty}{\sim} 2\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = 2a_{n+1}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

ce qui donne

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Le théorème de Ceràro donne ensuite :

$$\frac{1}{a_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Nous obtenons donc $a_n = \frac{1}{2n}(1 + o(1))$, puis :

$$x_n = -2 \ln\left(\frac{1}{2n\pi}(1 + o(1))\right) = 2(\ln(2n\pi) + o(1)) = 2\ln n + 2\ln(2\pi) + o(1).$$

En particulier, x_n est équivalent à $2\ln n$.

37) a) Commençons par faire un changement de base : soit $(e_1,\dots,e_r)$ une base de $\mathrm{Ker}(A)$, complétée en une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et posons $Y=P^{-1}X$. Y est alors solution de l'équation différentielle $Y'=BY$ avec $B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} B_1 & B_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, où $B_1\in\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et $B_2\in\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$.

En notant y_i les composantes de Y, nous avons $y_i'(t)=0$ pour tout $i\in\{r+1,\dots,n\}$, donc il existe $(\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n-r}$ tel que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ Y(t)=y_1(t)e_1+\cdots+y(r)e_r+\alpha_{r+1}e_{r+1}+\cdots+\alpha_ne_n$$

Ceci traduit que $Y(t)$ appartient à l'espace affine passant par le point $A=\alpha_{r+1}e_{r+1}+\cdots+\alpha_ne_n$ et dirigé par $\mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_r)$, i.e. par $\mathrm{Im}A$.

b) Nous allons montrer que $||X||^2={}^tXX$ est constante :

$$(||X||^2)'={}^tX'X+{}^tXX'={}^t(AX)X+{}^tXAX={}^tX^tAX+{}^tXAX=0$$

donc la trajectoire est tracée sur une sphère centre en l'origine.

En dimension 3 (et plus généralement en dimension impaire), A n'est pas inversible car $\det(A)=\det({}^tA)=(-1)^n\det(A)$ donne $\det(A)=0$. D'après la question a), la trajectoire est donc tracée dans un sous-espace affine strict de $\mathbb{R}^n$: elle ne peut donc pas être égale à la sphère complète.

En dimension 3, A est soit de rang 2 et la trajectoire est un cercle, soit de rang 0 et la trajectoire est un point.

c) Nous allons montrer qu'il existe une matrice P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale par bloc :

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}
0 & \alpha_1 &&&&&&&&\\
-\alpha_1 & 0 &&&&&&&&\\
&& 0 & \alpha_2 &&&&&&\\
&& -\alpha_2 & 0 &&&&&&\\
&&&& \ddots &&&&&\\
&&&&& \ddots &&&&\\
&&&&&& 0 & \alpha_k &&\\
&&&&&& -\alpha_k & 0 &&\\
&&&&&&&& 0 &&\\
&&&&&&&&& \ddots &\\
&&&&&&&&&& 0
\end{pmatrix}$$

On peut déjà remarquer que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont orthogonaux, puisque pour $X=AY\in\mathrm{Im}(A)$ et $Z\in\mathrm{Ker}(A)$, on a :

$$<X\,|\,Y>={}^t(AY)Z=-{}^tYAZ=0.$$

Comme la somme des dimensions de $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ est égale à n, $\mathrm{Im}(A)$ est l'orthogonal de $\mathrm{Ker}(A)$.

On travaille ensuite sur la restriction f de A à $\mathrm{Im}(A)$. Remarquons que f n'a pas de valeur propre réelle, puisque pour X non nul tel que $AX = \lambda X$, on a

$$\lambda||X||^2 = {}^tXAX = -{}^t(AX)X = -\lambda||X||^2$$

et donc $\lambda = 0$: 0 st donc la seule valeur propre réelle de A, et ce n'est pas une valeur propre de f puisque $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

Comme $f^2 \in \mathcal{S}(\mathrm{Im}(A))$, f^2 a ses valeurs propres réelles. Si λ_1 est une de ses valeurs propres, on a nécessairement $\lambda_1 < 0$. On peut poser $\lambda = -\alpha_1^2$ avec $\alpha_1 > 0$. En choisissant un vecteur propre unitaire e_1 pour λ_1. On montre facilement que $f(e_1)$ est non nul (f est inversible) et orthogonal à e_1 (A est antisymétrique). On peut donc compléter e_1 en une b.o.n. du plan $P_1 = \mathrm{Vect}(e_1, f(e_1))$. Ce plan est stable par f et la matrice de $f_{|P_1}$ est antisymétrique : elle est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On montre alors facilement que $P_1^\perp$ est stable par f et on conclut par récurrence.

Dans une base orthonormale bien choisie, le système différentielle s'écrit donc :

$$\begin{cases} y_1' = \alpha_1 y_2 \text{ et } y_2' = -\alpha_1 y_1 \\ \quad\vdots \\ y_{2k-1}' = \alpha_k y_{2k} \text{ et } y_{2k}' = -\alpha_k y_{2k-1} \\ y_{2k+1}' = \cdots = y_n' = 0 \end{cases}$$

Le système $\big(y_1' = \alpha_1 y_2 \text{ et } y_2' = -\alpha_1 y_1\big)$ a pour solution $\big(y_1 = A\,\sin(\alpha_1 t + \varphi),\ y_2 = A\,\cos(\alpha_1 t + \varphi)\big)$; dans chaque plan P_i, la trajectoire d'une solution est un cercle. Il faut donc imaginer la trajectoire globale en décomposant $\mathbb{R}^n$ en une somme directe orthogonale $P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_k \oplus (\mathrm{Im}(A))^\perp$: dans chaque plan P_i, le point décrit un cercle centré en l'origine et sa position dans l'espace $(\mathrm{Im}(A))^\perp$ est constante.

38) a) Si $t \in [a, b]$ est un point où ψ est dérivable, on a :

$$|u'(t)| = |\varphi'(t) - \psi'(t)| = |f(t, \varphi(t) - f(t, \psi(t)) + f(t, \psi(t)) - \psi'(t)| \leq K|u(t)| + \varepsilon.$$

b) Comme $u(a) = 0$, l'ensemble $K = \{t \in [a, t_1],\ u(t) = 0\}$ est un compact non vide (il est borné et fermé car u est continue). Il admet donc un maximum t_1. On a alors :

- $u(t_0) = 0$ car $t_0 \in K$;

- $a \leq t_0 \leq t_1$ et $t_0 \neq t_1$ car $t_1 \notin K$, donc $a \leq t_0 < t_1$;

- $]t_0, t_1] \cap K = \emptyset$ donc u ne s'annule pas sur $]t_0, t_1]$: comme elle est continue, elle garde un signe constant, d'où $u > 0$ sur $]t_0, t_1]$ puisque $u(t_1) > 0$.

Posons $w = v - u$. Cette fonction est continue et de classe C^1 par morceaux sur $I = [t_0, t_1]$. En tout point de dérivabilité t de I, nous avons

$$w'(t) = v'(t) - u'(t) \geq Kv(t) + \varepsilon - Ku(t) - \varepsilon = Kw$$

puisque $u'(t) \leq K|u(t)] + \varepsilon = Ku(t) + \varepsilon$. La fonction $t \longmapsto w(t)e^{-Kt}$ est donc continue sur $[t_0, t_1]$, dérivable sauf en un nombre fini de points et sa dérivée est positive. La fonction est donc croissante et nulle en t_0 : elle est positive sur $[t_0, t_1]$.

c) Soit $t_1 \in [a, b]$.

- Si $u(t_1) = 0$, l'inégalité recherchée est vérifiée :

$$|\varphi(t_1) - \psi(t_1)| = 0 \leq \frac{\varepsilon}{K}\left(e^{K(t_1-a)} - 1\right).$$

- Si $u(t_1) > 0$, on applique ce qui précède. L'application v se calcule facilement :

$$\forall t \in [t_0, t_1],\ v(t) = \frac{\varepsilon}{K}\left(e^{K(t-t_0)} - 1\right).$$

  On a donc en particulier :

$$0 \leq u(t_1) \leq v(t_1) = \frac{\varepsilon}{K}\left(e^{K(t_1-t_0)} - 1\right) \leq \frac{\varepsilon}{K}\left(e^{K(t_1-a)} - 1\right)$$

  et donc

$$|\varphi(t_1) - \psi(t_1)| \leq \frac{\varepsilon}{K}\left(e^{K(t_1-a)} - 1\right).$$

- Si $u(t_1) < 0$, on adapte la preuve précédente (c'est plus sûr que de se contenter de dire “par symétrie”) : il existe $t_0 \in [a, t_1[$ tel que $u(t_0) = 0$ et $u < 0$ sur $]t_0, t_1]$. On utilise alors l'inégalité

$$\forall t \in [t_0, t_1],\ |u'(t)| \leq K|u(t)| + \varepsilon = -Ku(t) + \varepsilon$$

  pour écrire

$$\forall t \in [t_0, t_1],\ u'(t) \geq Ku(t) - \varepsilon$$

On introduit donc la solution v au problème de Cauchy $\left(x' = Kx - \varepsilon,\ x(t_0) = 0\right)$ et on montre comme au b) que $v \leq u$ sur $[t_0, t_1]$, ce qui nous donne en t_1 :

$$0 > u(t_1) \geq v(t_1) = \frac{\varepsilon}{K}\left(1 - e^{K(t_1 - t_0)}\right) \geq \frac{\varepsilon}{K}\left(1 - e^{K(t_1 - a)}\right)$$

ce qui donne une nouvelle fois

$$|\varphi(t_1) - \psi(t_1)| \leq \frac{\varepsilon}{K}\left(e^{K(t_1 - a)} - 1\right).$$

d) Nous allons adapter la preuve précédente. Nous avons maintenant, en tout point t où φ et ψ sont dérivables :

$$|u'(t)| \leq |\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| + |f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))| + |f(t, \psi(t)) - \psi'(t)| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + K|u(t)|.$$

Ainsi, ε est simplement remplacé par $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Nous avons par contre un petit problème pour définir t_0, dans la généralisation du b).

Si $t_1 \in [a, b]$ avec $u(t_1) > 0$, on distingue deux cas :

- si $u > 0$ sur $[a, t_1]$, on note v la solution au problème de Cauchy $\left(x' = Kx - \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ x(a) = u(a)\right)$. On a alors, avec $w = u - v$ comme au b) : $w' = v' - u' \geq Kw$ avec $w(a) = 0$, donc $w \geq 0$. Cela donne :

$$\forall t \in [a, t_1], 0 < u(t) \leq u(a)e^{k(t-a)} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{K}\left(e^{K(t-a)} - 1\right)$$

  et en particulier :

$$0 < \phi(t_1) - \psi(t_1) \leq \varepsilon_3 e^{k(t_1 - a)} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{K}\left(e^{K(t_1 - a)} - 1\right)$$

- sinon, on peut définir t_0 comme à la la question b) et on obtient :

$$0 < \phi(t_1) - \psi(t_1) \leq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{K}\left(-e^{K(t_1 - t_0)} - 1\right) \leq \varepsilon_3 e^{k(t_1 - a)} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{K}\left(e^{K(t_1 - a)} - 1\right)$$

Le cas $u(t_1)$ est trivial et le cas $u(t_1) < 0$ se traite de façon symétrique. Nous avons ainsi obtenu :

$$\forall t \in [a, b],\ |\phi(t_1) - \psi(t_1)| \leq \varepsilon_3 e^{k(t_1 - a)} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{K}\left(e^{K(t_1 - a)} - 1\right).$$

Remarques : cette majoration peut sembler très mauvaise, puisque l'on majore par un terme exponentiel par rapport à l'écart $t - a$, mais cette majoration est pourtant optimale (on trouve facilement des cas d'égalité, en choisissant l'équation la plus simple $x' = Kx$). Cela montre que les solutions explosent exponentiellement. Par exemple, avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ et $\varepsilon_3 > 0$, on compare deux solutions de la même équation mais avec des conditions initiales légèrement différentes : l'écart entre les deux solutions tend vers l'infini exponentiellement quand b tend vers l'infini.

Cette inégalité permet de mesurer l'erreur commise par une méthode numérique de type Euler. On construit en effet par ces méthodes des "solutions" ψ qui sont continues et de classes C^1 par morceaux (en fait des fonctions affines par morceaux) et on peut montrer, quand le pas est assez petit, qu'elles sont "presque solutions" de l'équation, i.e. qu'au lieu d'avoir $\psi'(t) = f(t, \psi(t))$, on a $\psi'(t) \simeq f(t, \psi(t))$, ce qui s'écrit mathématiquement $|\psi'(t) - f(t, \psi(t))| \leq \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ que l'on peut en général déterminer. L'inégalité fondamentale permet donc de comparer la solution φ de l'équation à la solution approchée ψ. La seule chose certaine, c'est qu'il faut éviter de faire ce type de calcul sur une durée longue.

Pour finir, il est possible d'obtenir le même genre d'inégalité mais en "remontant" le temps, i.e. en travaillant sur un intervalle $[c, a]$ avec $c < a$.

39) a) On peut appliquer le théorème de Leibniz : en posant $\varphi(x, \theta) = \cos(x \sin\theta)$, on a

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta \longmapsto \varphi(x, \theta)$ est continue et sommable sur $[0, \pi]$;
- $\forall \theta \in [0, \pi]$, $x \longmapsto \varphi(x, \theta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta \longmapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, \theta) = -\sin\theta \sin(x \sin\theta)$ est continue sur $[0, \pi]$;
- $\forall (x, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$, $|part\varphi x(x, \theta)| \leq 1$ et $\theta \longmapsto 1$ est continue et sommable sur $[0, \pi]$.

L'application f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\int_0^\pi \sin\theta \sin(x \sin\theta)\, \mathrm{d}\theta.$$

De la même façon, on montre que f est de classe C^2, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\int_0^\pi \sin^2\theta \cos(x \sin\theta)\, \mathrm{d}\theta.$$

On peut alors écrire, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
xf(x) + xf''(x) &= x \int_0^\pi (1 - \sin^2\theta) \cos(x \sin\theta)\, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^\pi x \cos\theta \cos(x \sin\theta) \cos\theta\, \mathrm{d}\theta \\
&= [\cos\theta \sin(x \sin\theta)]_0^\pi + \int_0^\pi \sin\theta \sin(x \sin\theta)\, \mathrm{d}\theta \qquad \text{par I.P.P} \\
&= -f'(x)
\end{aligned}$$

donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $xy'' + y' + xy = 0$.

b) On peut déjà remarquer que f est développable en série entière : pour x réel fixé, on a :

$$f(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^{2n}(\theta)}{(2n)!}\, x^{2n}$$

et la série converge normalement par rapport à θ sur $[0,\pi]$

$$\forall \theta \in [0,\pi],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|(-1)^n \frac{\sin^{2n}(\theta)}{(2n)!}\, x^{2n}\right| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ qui est un terme général de série convergente}$$

On peut donc échanger $\int_0^\pi$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$ (on intègre sur un intervalle borné) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}(\theta)}{(2n)!}\, \mathrm{d}\theta\right) x^{2n}$$

et f est DSE en 0, son développement étant valide sur tout $\mathbb{R}$.

Nous allons montrer qu'à une constante multiplicative près, c'est la seule série entière solution. On applique la méthode habituelle : on suppose que $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie et est solution de l'équation sur un voisinage de $]-r,r[$ de 0. Par unicité du DSE, on peut identifier :

$$a_1 = 0 \text{ et } \forall n \geq 1,\ (n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$$

Cela donne

$$a_1 = 0 \text{ et } \forall n \geq 0,\ a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2} a_n.$$

Ainsi $a_{2k+1} = 0$ et $a_{2k+2} = -\dfrac{1}{4(k+1)^2} a_{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit :

$$g(x) = a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}\, x^{2k}.$$

Réciproquement, cette relation définie une fonction g de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, qui est donc égale à f quand $a_0 = \pi$.

Nous avons donc en passant démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^\pi \frac{\sin^{2n}(\theta)}{(2n)!}\, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4^n n!}$$

ce qui donne la valeur des intégrales de Wallis d'indices pairs :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(\theta)\, \mathrm{d}\theta = \frac{(2n)!\, \pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

c) Soit $g \in S$. Si $(f_{|I}, g)$ n'est pas une base de l'espace des solutions (qui est un espace vectoriel de dimension 2 car les coefficients de l'équation sont des fonctions continues de x, et le coefficient de y'' ne s'annule pas sur I), il existe α

tel $g = \alpha_{|I}$ et g est bornée au voisinage de 0 (f est continue en 0). Supposons réciproquement que g soit une solution indépendante de f. Au voisinage de 0, f ne s'annule pas : on peut donc poser $z = \dfrac{g}{f}$, qui est définie et de classe C^2 sur un intervalle $]0, r[$, avec z non constante. On a alors :

$$\forall x \in]0, r[,\ xz''(x)f(x) + z'(x)(2xf'(x) + f(x)) = 0.$$

Il existe donc une constante non nulle K (car z' est non nulle) telle que :

$$\forall x \in]0, r[,\ z'(x) = Ke^{A(x)}$$

avec $A(x) = \displaystyle\int_x^{r/2} \frac{2tf'(t) + f(t)}{tf(t)}\,\mathrm{d}t$. En utilisant le développement $f(t) = \pi - \dfrac{\pi}{4}t^2 + o(t^2)$ au voisinage de 0, on obtient :

$$\frac{2tf'(t) + f(t)}{tf(t)} = \frac{1}{t} - t + o(t) = \frac{1}{t} + h(t) \text{ avec } h \text{ continue sur } [0, +\infty[$$

ce qui donne :

$$A(x) = \int_x^{r/2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{r/2} h(t)\,\mathrm{d}t = -\ln x + R(x) \text{ avec } R \text{ continue sur } [0, r[$$

et enfin :

$$z'(x) = Ke^{-\ln x + R(x)} = \frac{K}{x}\,e^{R(x)} \underset{0}{\sim} \frac{Ke^{R(0)}}{x}.$$

Par comparaison des fonctions positives, on en déduit que z' est de signe constant au voisinage de 0 et n'est pas sommable au voisinage de 0 : on a donc

$$z(x) = z(r/2) - \int_x^{r/2} z'(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to 0^+]{} \begin{cases} -\infty & \text{si } K > 0 \\ +\infty & \text{si } K < 0 \end{cases}$$

et $g = zf$ n'est pas bornée au voisinage de 0, puisque $f(x)$ tend vers π en 0. On peut même affirmer que $g(x) \sim_0 L \ln x$ où L est une constante non nulle.

40) a) Nous pouvons paramétrer la courbe $\Gamma :\ Y(X^2 + Y^2) - X^2 = 0$ en coordonnées polaire : en posant $X = r\cos\theta$ et $Y = r\sin\theta$, l'équation s'écrit :

$$r^2(r\sin\theta - \cos^2\theta) = 0$$

soit $r = 0$ ou $r = \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$. La valeur $r = 0$ est également obtenue avec la seconde formule, pour $\theta = \pi/2$. La courbe cherchée est donc paramétrée par :

$$\begin{cases} X = \dfrac{\cos^3\theta}{\sin\theta} \\ Y = \cos^2\theta \end{cases}$$

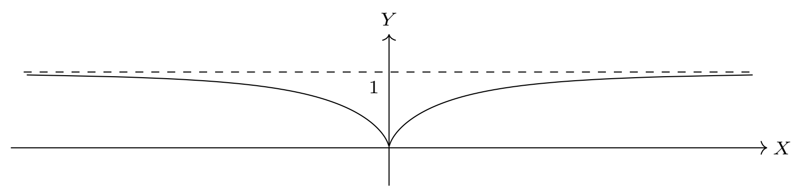
ce que l'on peut simplifier en posant $t = \tan\theta$:

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{t(1+t^2)} \\ Y = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}^*$. Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe $(0Y)$ ($X(-t) = X(t)$ et $Y(-t) = -Y(t)$) et les variations de X et Y sont évidentes. Quand t tend vers $\pm\infty$, le point (X, Y) tend vers l'origine qu'il atteint avec une tangente verticale :

$$\frac{Y}{X} = t \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} \pm\infty.$$

Quand t tend vers 0^+, X tend vers $+\infty$ et Y tend vers 1^- : la droite d'équation $Y = 1$ est donc asymptote. On obtient le tracé :



b) L'équation différentielle s'écrit $Y(X^2+Y^2) = X^2$ en posant $X = y$ et $Y = xy'$. Nous allons chercher les courbes $y = \varphi(x)$ avec φ solution de l'équation différentielle sous la forme paramétrée : $(x = x(t),\ y = y(t))$, t étant le paramètre du point (X, Y) sur la courbe Γ. Il faudra que les applications x et y soient dérivables, que $t \longmapsto x(t)$ soit un difféomorphisme (i.e. que x' ne s'annule pas) et qu'en inversant la relation $x = x(t) \mapsto t = t(x)$, l'application $\varphi(x) = y(t(x))$ soit solution de l'équation différentielle. Si toutes ses propriétés sont vérifiées, nous aurons :

$$\begin{cases} x\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1}{t(1+t^2)} \end{cases}$$

Comme $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$, on obtient :

$$-x\frac{1+3t^2}{t^2(1+t^2)}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+t^2}$$

soit $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = -\dfrac{1+3t^2}{t^2(1+t^2)}\mathrm{d}t$. En intégrant, on obtient :

$$\ln|x| = \frac{1}{t} - 2\ \mathrm{Arctan}\,t + K$$

d'où la paramétrisation :

$$\begin{cases} x = \pm e^K \exp\left(\dfrac{1}{t} - 2\,\mathrm{Arctan}\,t\right) = A\exp\left(\dfrac{1}{t} - 2\,\mathrm{Arctan}\,t\right) \\ y = \dfrac{1}{t(1+t^2)} \end{cases}$$

avec $A \in \mathbb{R}^*$.

Réciproquement, si A est un réel non nul, l'application $\alpha : \ t \longmapsto A \exp\left(\frac{1}{t} - 2\operatorname{Arctan} t\right)$ réalise un difféomorphisme de I sur J avec $I =]-\infty, 0[$ ou $I =]0, +\infty[$ et $J =]0, \infty[$ ou $J =]-\infty, 0[$ (selon le signe de A et le choix de I). Si on pose :

$$\forall x \in J, \ \varphi(x) = \frac{1}{\alpha^{-1}(x)(1 + \alpha^{-1}(x)^2)}$$

alors φ est solution de l'équation différentielle.

L'idéal aurait été d'exprimer t en fonction de x à l'aide des fonctions usuelles, mais cela n'est sans doute pas possible. On se contente donc de décrire les trajectoires des solutions de l'équation sous forme paramétrique :

$$\varphi_A : \begin{cases} x = A \exp\left(\dfrac{1}{t} - 2\operatorname{Arctan} t\right) \\ y = \dfrac{1}{t(1+t^2)} \end{cases}$$

L'étude de ces courbes n'est pas très difficile à faire car x et y sont des fonctions monotones de t.