

## ADS-M-6

### **Théorème de Perron-Frobenius**

#### **Travail demandé :**

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le(s) texte(s) joint(s) à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

#### **Remarques générales :**

1. Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligences ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs...) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.

2. Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.

3. Vous pouvez annoter les documents qui vous sont fournis. Vos annotations ne seront pas regardées par l'examineur.

# Théorème de Perron-Frobenius

- Sections :*
1. Rappels sur les normes matricielles et le rayon spectral
  2. Matrices positives
  3. Matrices strictement positives et théorème de Perron-Frobenius
  4. Matrices de permutation
  5. Matrices irréductibles

On désigne par  $\mathbb{K}$  le corps des réels ou des complexes.

Si  $n, m$  sont deux entiers naturels non nuls, on désigne par  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  l'espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et  $m$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Pour  $n = m$ , on note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  pour  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ .

Un vecteur de  $\mathbb{K}^n$  est identifié à un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

Pour  $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  dans  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  et  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq m}$  dans  $\mathbb{K}^m$ , on note  $(Ax)_i$  la composante numéro  $i$  du vecteur  $Ax$ .

Pour toute matrice  $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  dans  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ , on note

$$|A| = ((|a_{i,j}|))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}.$$

Pour toute matrice  $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et pour  $1 \leq p < q \leq n$ , on note  $A_{p,q} = ((a_{i,j}))_{p \leq i,j \leq q}$  une sous-matrice principale de  $A$ .

## 1. Rappels sur les normes matricielles et le rayon spectral

On rappelle les résultats suivants (voir [2]).

Pour toute norme  $x \mapsto \|x\|$  sur  $\mathbb{K}^n$ , l'application :

$$A \mapsto \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

définit une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

La norme matricielle induite par  $\|\cdot\|_\infty$  est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

La norme matricielle induite par  $\|\cdot\|_1$  est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| = \|{}^t A\|_\infty.$$

Si  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients complexes, alors son rayon spectral est le réel :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|,$$

où  $\text{Sp}(A)$  désigne l'ensemble des valeurs propres complexes de  $A$ .

Pour toute norme matricielle induite par une norme vectorielle, on a :

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Quelle que soit la norme choisie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a :

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \right). \quad (1.1)$$

L'application  $\rho$  est continue de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{R}$  (voir [2], théorème 4.15).

## 2. Matrices positives

**Définition 2.1** Une matrice  $A$  dans  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  est dite positive [resp. strictement positive] et on note  $A \geq 0$  [resp.  $A > 0$ ], si tous ses coefficients sont positifs ou nuls [resp. strictement positifs].

Si  $A, B$  sont deux matrices dans  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  la notation  $A \geq B$  [resp.  $A > B$ , ou  $A \leq B$ , ou  $A < B$ ] signifie que la matrice  $A - B$  est positive [resp.  $A - B$  est strictement positive, ou  $B - A$  est positive ou  $B - A$  est strictement positive].

**Remarque 2.1** En considérant la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on voit que les conditions  $A \geq 0$  et  $A \neq 0$  n'entraînent pas  $A > 0$ .

**Lemme 2.1** Si  $z_1, \dots, z_n$  sont des nombres complexes tels que :

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{i=1}^n |z_k|, \quad (1.2)$$

alors il existe un réel  $\theta$  tels que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad z_k = |z_k| e^{i\theta}.$$

**Démonstration.** Si tous les  $z_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) sont nuls, alors le résultat est trivial avec n'importe quel réel  $\theta$ .

On suppose donc qu'il existe au moins un vecteur  $z_k$  non nul et on note  $I$  l'ensemble des indices  $k$  compris entre 1 et  $n$  tels que  $z_k \neq 0$ . Pour tout  $k \in I$ , chaque  $z_k$  peut s'écrire  $z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$  avec  $\rho_k = |z_k| > 0$  et  $\theta_k \in ]-\pi, \pi]$  et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_{k \in I} z_k \right|^2 = \sum_{k \in I} |z_k|^2 + \sum_{j \neq k} \rho_j \rho_k \cos(\theta_j - \theta_k), \\ \left( \sum_{k \in I} |z_k| \right)^2 = \sum_{k \in I} |z_k|^2 + \sum_{j \neq k} \rho_j \rho_k \end{array} \right.$$

et l'égalité (1.2) équivaut à :

$$\sum_{j, k \in I, j \neq k} \rho_j \rho_k (1 - \cos(\theta_j - \theta_k)) = 0.$$

Tous les termes de cette somme étant positifs ou nuls avec  $\rho_j \rho_k > 0$ , on en déduit que  $\cos(\theta_j - \theta_k) = 1$  pour  $j \neq k$  dans  $I$ , avec  $-\pi < \theta_j - \theta_k \leq \pi$ , ce qui équivaut à  $\theta_j = \theta_k$ . En notant  $\theta$  cette valeur commune on peut prendre  $\theta_k = \theta$  pour les indices  $k$  tels que  $\rho_k = 0$  et on a alors  $z_k = \rho_k e^{i\theta} = |z_k| e^{i\theta}$  pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$ . ■

Avec le résultat qui suit on résume quelques propriétés élémentaires des matrices positives.

### Théorème 2.1

- (i) Pour toute matrice  $A$  dans  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ , la matrice  $|A|$  est positive et  $|A| = 0$  si et seulement si  $A = 0$ .
- (ii) Pour toute matrice  $A$  dans  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  et tout scalaire  $\lambda$ , on a  $|\lambda A| = |\lambda| |A|$ .
- (iii) Pour toutes matrices  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ , on a  $|A + B| \leq |A| + |B|$ .
- (iv) Pour toutes matrices  $A$  dans  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{K})$ , on a  $|AB| \leq |A| |B|$ .
- (v) Si  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  est positive et  $B \in \mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{R})$  strictement positive, alors  $AB = 0$  entraîne  $A = 0$ .
- (vi) Si  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  est strictement positive et  $x \in \mathbb{R}^m$  est positif non nul, alors  $Ax$  est strictement positif.
- (vii) Si  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  et  $A', B'$  dans  $\mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{R})$  sont telles que  $0 \leq A \leq B$  et  $0 \leq A' \leq B'$ , alors  $0 \leq AA' \leq BB'$ .
- (viii) Si  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont telles que  $|A| \leq B$ , alors  $|A^k| \leq |A|^k \leq B^k$  pour tout entier naturel  $k$ .
- (ix) Si  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  strictement positive et  $B \in \mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{K})$  sont telles que  $|AB| = A|B|$ , alors il existe des réels  $\theta_1, \dots, \theta_r$  tels que  $B = |B| \Delta$ , où  $\Delta$  est la matrice diagonale de termes diagonaux  $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_r}$ .
- (x) Si  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  est telle qu'il existe un vecteur  $x$  strictement positif dans  $\mathbb{R}^m$  tel que  $Ax = |A|x$ , alors  $A = |A|$ .

**Démonstration.** Les points (i) et (ii) sont évidents.

Le point (iii) se déduit des inégalités  $|a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}|$  pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m$ .

Les inégalités :

$$\left| \sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^m |a_{i,k}| |b_{k,j}|$$

pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq r$ , où  $\left| \sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j} \right|$  est coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $|AB|$  et  $\sum_{k=1}^m |a_{i,k}| |b_{k,j}|$  celui de  $|A| |B|$ , signifient que  $|AB| \leq |A| |B|$ .

L'égalité  $AB = 0$  équivaut à :

$$\sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j} = 0$$

pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq r$ , et pour  $A, B$  positives cela équivaut à  $a_{i,k} b_{k,j} = 0$  pour tout  $k$  compris entre 1 et  $m$ , équivalent à  $a_{i,k} = 0$  si de plus  $B$  est strictement positive, c'est-à-dire que  $A = 0$ .

Si  $x$  est un vecteur positif non nul alors il existe un entier  $k$  compris entre 1 et  $m$  tel que  $x_k > 0$  et pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ , on a :

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j \geq a_{i,k} x_k > 0$$

si la matrice  $A$  est strictement positive. On a donc  $Ax > 0$  si  $0 < A$ ,  $0 \leq x$  et  $x \neq 0$ .

Si les matrices  $A$  et  $A'$  sont positives alors la matrice  $AA'$  est également positive et en écrivant que :

$$BB' - AA' = B(B' - A') + (B - A)A',$$

on déduit que si  $A \leq B$ ,  $A' \leq B'$ , avec  $A', B$  positives, alors  $AA' \leq BB'$ .

L'assertion (viii) se montre facilement par récurrence avec (iv) et (vii).

L'égalité  $|AB| = A|B|$  avec  $A$  strictement positive équivaut à :

$$\left| \sum_{k=1}^m a_{pk} b_{kq} \right| = \sum_{k=1}^m a_{pk} |b_{kq}|$$

pour tout  $p$  compris entre 1 et  $n$  et  $q$  compris entre 1 et  $r$ . Pour  $p, q$  fixés, la suite  $(z_k)_{1 \leq k \leq m}$  de nombres complexes définie par  $z_k = a_{pk} b_{kq}$  est donc telle que  $\left| \sum_{k=1}^m z_k \right| = \sum_{k=1}^m |z_k|$ , ce qui équivaut à l'existence d'un réel  $\theta_{pq}$  tel que  $z_k = e^{i\theta_{pq}} |z_k|$  pour tout  $k$  compris entre 1 et  $m$  (lemme 1.1). On a donc :

$$a_{pk} b_{kq} = e^{i\theta_{pq}} |a_{pk} b_{kq}| = a_{pk} e^{i\theta_{pq}} |b_{kq}|$$

ce qui avec  $a_{pk} > 0$  équivaut à :

$$b_{kq} = e^{i\theta_{pq}} |b_{kq}|.$$

En fixant  $p$  et en notant  $\theta_q$  pour  $\theta_{pq}$ , cela s'écrit  $B = |B| \Delta$ , où  $\Delta$  est la matrice diagonale de termes diagonaux  $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_r}$ .

Soient  $A = ((a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $x \in \mathbb{R}^m$  tels que  $Ax = |A|x$ . On a alors pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$  :

$$\sum_{j=1}^m (|a_{i,j}| - a_{i,j}) x_j = 0$$

et si de plus  $x$  est strictement positif, cela équivaut à :

$$|a_{i,j}| = \Re(a_{i,j}), \quad \Im(a_{i,j}) = 0,$$

c'est-à-dire à  $A = |A|$ . ■

Du point (viii) du lemme précédent, on déduit le résultat suivant.

**Théorème 2.2** *Si  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sont telles que  $|B| \leq A$ , alors :*

$$\rho(B) \leq \rho(|B|) \leq \rho(A).$$

**Démonstration.** Pour  $|B| \leq A$ , on a  $|B^k| \leq |B|^k \leq A^k$  pour tout  $k \geq 1$  et en conséquence :

$$\|B^k\|_\infty \leq \left\| |B|^k \right\|_\infty \leq \|A^k\|_\infty,$$

soit avec la croissance de  $t \mapsto t^{\frac{1}{k}}$  sur  $\mathbb{R}^+$  :

$$\forall k \geq 1, \quad \|B^k\|_\infty^{\frac{1}{k}} \leq \left\| |B|^k \right\|_\infty^{\frac{1}{k}} \leq \|A^k\|_\infty^{\frac{1}{k}}.$$

Il suffit alors de faire tendre  $k$  vers l'infini en utilisant l'égalité (1.1). ■

**Corollaire 2.1** *Si  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont telles que  $0 \leq A \leq B$ , alors :*

$$\rho(A) \leq \rho(B).$$

**Corollaire 2.2** Si  $A$  est une matrice réelle positive d'ordre  $n$ , alors pour toute sous-matrice principale  $A_{p,q} = ((a_{ij}))_{p \leq i, j \leq q}$  de  $A$ , on a  $\rho(A_{p,q}) \leq \rho(A)$ .  
En particulier, on a :

$$\max_{1 \leq i \leq n} a_{ii} \leq \rho(A).$$

**Démonstration.** On a :

$$0 \leq B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{p,q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leq A$$

et donc  $\rho(B) = \rho(A_{p,q}) \leq \rho(A)$ . ■

**Remarque 2.2** Les inégalités  $a_{ii} \leq \rho(A)$  ne sont pas nécessairement vérifiées si la matrice  $A$  n'est pas positive. Par exemple toute matrice  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$  semblable à  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  a un rayon spectral nul et une telle matrice s'écrit, en notant  $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice inversible :

$$A = P^{-1}JP = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} dc & d^2 \\ -c^2 & -dc \end{pmatrix}.$$

En prenant  $dc > 0$ , on a  $a_{11} > \rho(A) = 0$ .

**Corollaire 2.3** Si  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont telles que  $0 \leq A < B$ , alors :

$$\rho(A) < \rho(B).$$

**Démonstration.** Si  $\rho(A) = 0$ , alors  $\rho(B) \geq \max_{1 \leq i \leq n} b_{ii} > 0$  du fait que  $B$  est strictement positive.

Pour tous  $i, j$  compris entre 1 et  $n$ , on a  $0 \leq \frac{a_{ij}}{b_{ij}} < 1$ , on peut donc trouver un réel  $\lambda > 0$  tel que  $\frac{a_{ij}}{b_{ij}} < \lambda < 1$ , soit  $\frac{1}{\lambda}a_{ij} < b_{ij}$ . On a donc  $0 \leq \frac{1}{\lambda}A < B$  et  $\rho\left(\frac{1}{\lambda}A\right) \leq \rho(B)$  ce qui entraîne pour  $\rho(A) > 0$  :

$$\rho(A) < \frac{1}{\lambda}\rho(A) = \rho\left(\frac{1}{\lambda}A\right) \leq \rho(B),$$

et donc  $\rho(A) < \rho(B)$ . ■

**Théorème 2.3** Soit  $A$  une matrice positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que la somme des termes de chaque ligne [resp. colonne] est constante égale à  $\alpha$ . Le réel  $\alpha$  est alors une valeur propre de  $A$  et :

$$\rho(A) = \alpha = \|A\|_{\infty} \quad [resp. \rho(A) = \alpha = \|A\|_1]$$

**Démonstration.** Les égalités  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = \alpha$  pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$  reviennent à dire

que le vecteur  $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  est vecteur propre de la matrice  $A$  associé à la valeur propre  $\alpha$ . La matrice  $A$  et le réel  $\alpha$  étant positifs, on a alors :

$$\alpha \leq \rho(A) \leq \|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} = \alpha,$$

soit  $\alpha = \rho(A) = \|A\|_\infty$ .

En raisonnant avec la transposée de la matrice  $A$  et en utilisant le fait qu'une matrice et sa transposée ont mêmes valeurs propres, on obtient le deuxième résultat en considérant que  $\|{}^t A\|_\infty = \|A\|_1$ . ■

**Corollaire 2.4** *Pour toute matrice positive  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a :*

$$\inf_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \leq \rho(A) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \right),$$

$$\inf_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \right) \leq \rho(A) \leq \sup_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \right).$$

**Démonstration.** Pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ , on note  $\alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$  et :

$$\alpha = \inf_{1 \leq i \leq n} (\alpha_i), \quad \beta = \sup_{1 \leq i \leq n} (\alpha_i).$$

On montre tout d'abord qu'on peut construire une matrice  $B = ((b_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $0 \leq B \leq A$  et :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{j=1}^n b_{ij} = \alpha.$$

Si  $\alpha = 0$ , en prenant  $B = 0$ , on a bien  $0 \leq B \leq A$  et  $\sum_{j=1}^n b_{ij} = 0 = \alpha$  pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ .

Si  $\alpha = \inf_{1 \leq i \leq n} (\alpha_i) > 0$ , alors tous les  $\alpha_i$  sont strictement positifs et en posant :

$$b_{ij} = \frac{\alpha}{\alpha_i} a_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

on a  $0 \leq b_{ij} \leq a_{ij}$  pour tous  $i, j$  compris entre 1 et  $n$ , soit  $0 \leq B \leq A$  et pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$  :

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} = \frac{\alpha}{\alpha_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} = \alpha.$$

On en déduit alors que

$$\alpha = \rho(B) \leq \rho(A) \leq \|A\|_\infty = \beta.$$

En raisonnant avec  ${}^t A$ , considérant que  $\rho({}^t A) = \rho(A)$  et  $\|{}^t A\|_\infty = \|A\|_1$ , on obtient le deuxième encadrement. ■

**Corollaire 2.5** *Si  $A$  est une matrice positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle  $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$  [resp.  $\sum_{i=1}^n a_{ij} > 0$ ] pour tout  $i$  [resp.  $j$ ] compris entre 1 et  $n$ , alors  $\rho(A) > 0$ .*

*En particulier une matrice strictement positive a son rayon spectral strictement positif.*

**Remarque 2.3** *Si  $\rho(A) = 0$ , alors toutes les valeurs propres de  $A$  sont nulles et la trace de  $A$  qui est la somme des valeurs propres est également nulle. Pour  $A$  strictement positive, on a donc  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} > 0$  et  $\rho(A) > 0$ .*

**Corollaire 2.6** Si  $A$  est une matrice positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^k$  soit strictement positive pour un entier  $k \geq 1$ , alors  $\rho(A) > 0$ .

**Démonstration.** Du théorème de trigonalisation des matrices complexes, on déduit que  $\rho(A^k) = (\rho(A))^k$ , puis  $A^k > 0$  donne  $\rho(A^k) > 0$  et  $\rho(A) > 0$ .

■

**Théorème 1.4** Pour toute matrice positive  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et tout vecteur  $x$  strictement positif dans  $\mathbb{R}^n$ , on a :

$$\inf_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

**Démonstration.** On note :

$$r(A, x) = \inf_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}, \quad s(A, x) = \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i},$$

On désigne par  $D_x$  la matrice diagonale de termes diagonaux  $x_1, \dots, x_n$  et on utilise le corollaire 1.4 avec la matrice positive  $D_x^{-1}AD_x$ . La multiplication à droite par  $D_x$  a pour effet de multiplier chaque colonne  $j$  de la matrice  $A$  par  $x_j$  et la multiplication à gauche par  $D_x^{-1}$  a pour effet de diviser chaque ligne  $i$  de la matrice  $A$  par  $x_i$ , de sorte que :

$$D_x^{-1}AD_x = \left( \frac{x_j}{x_i} a_{ij} \right),$$

ce qui entraîne :

$$r(A, x) = \inf_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{x_i} a_{ij} \leq \rho(D_x^{-1}AD_x) = \rho(A) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{x_i} a_{ij} = s(A, x).$$

■

**Remarque 2.4** On a aussi :

$$\inf_{1 \leq j \leq n} x_j \sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{x_i} \leq \rho(A) \leq \sup_{1 \leq j \leq n} x_j \sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{x_i}.$$

**Corollaire 2.7** Soit  $A$  une matrice positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Si il existe un vecteur  $x$  strictement positif et deux constantes réelles positives ou nulles  $\alpha, \beta$  telles que  $\alpha x \leq Ax \leq \beta x$  [resp.  $\alpha x < Ax < \beta x$ ], alors  $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$  [Resp.  $\alpha < \rho(A) < \beta$ ].

**Démonstration.** L'inégalité  $\alpha x \leq Ax \leq \beta x$  équivaut à  $\alpha x_i \leq (Ax)_i \leq \beta x_i$  pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ , ce qui entraîne :

$$\alpha \leq \inf_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \beta.$$

On procède de même pour les inégalités strictes.

■



**Corollaire 2.8** Soit  $A$  une matrice positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Si la matrice  $A$  admet un vecteur propre strictement positif, alors la valeur propre associée est  $\rho(A)$  et :

$$\begin{aligned}\rho(A) &= \sup_{x>0} \inf_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \\ &= \inf_{x>0} \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}.\end{aligned}$$

**Démonstration.** On note, pour tout vecteur  $x$  strictement positif :

$$r(A, x) = \inf_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}, \quad s(A, x) = \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i},$$

et on a  $r(A, x) \leq \rho(A) \leq s(A, x)$  (théorème 1.4), ce qui entraîne l'existence de  $\sup_{x>0} \inf_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}$

et  $\inf_{x>0} \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}$ .

Si, de plus  $x$  est un vecteur propre strictement positif de  $A$ , alors la valeur propre  $\alpha$  associée est réelle positive et avec :

$$\alpha = \inf_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \alpha,$$

on déduit que  $\alpha = \rho(A) = \sup_{x>0} \inf_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \inf_{x>0} \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}$ . ■

### 3. Matrices strictement positives et théorème de Perron-Frobenius

**Lemme 3.1** Soit  $A$  une matrice strictement positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Si  $x$  est un vecteur propre non nul de  $A$  associé à une valeur propre  $\lambda$  telle que  $|\lambda| = \rho(A)$ , alors  $\rho(A)$  est valeur propre de  $A$  avec  $|x|$  comme vecteur propre associé. Le vecteur  $|x|$  est strictement positif et il existe un réel  $\theta$  tel que  $x = e^{i\theta}|x|$ .

**Démonstration.** On a  $\rho(A) > 0$  du fait que  $A > 0$ .

De  $Ax = \lambda x$  avec  $|\lambda| = \rho(A)$ , on déduit que :

$$\rho(A)|x| = |\lambda x| = |Ax| \leq |A||x| = A|x|, \tag{1.3}$$

ce qui entraîne que le vecteur  $y = A|x| - \rho(A)|x|$  est positif. Si ce vecteur est non nul, alors  $Ay > 0$  (point (vi) du théorème 1.1), ce qui signifie en notant  $z = A|x|$  que  $\rho(A)z < Az$  avec  $z > 0$  (le vecteur  $x$  est non nul) qui entraîne  $\rho(A) < \rho(A)$  (corollaire 1.7), soit une impossibilité. On a donc  $y = 0$ , c'est-à-dire  $A|x| = \rho(A)|x|$ , ce qui signifie que  $\rho(A)$  est valeur propre de  $A$  avec  $|x|$  comme vecteur propre associé. De plus avec  $|x| = \frac{1}{\rho(A)}A|x|$ , on déduit que  $|x| > 0$ .

Enfin de (1.3), on déduit que  $A|x| = |Ax|$  et donc qu'il existe un réel  $\theta$  tel que  $x = e^{i\theta}|x|$  (point (ix) du théorème 1.1 avec  $B = x$ ). ■

**Théorème 3.1 (Perron-Frobenius I)** Si  $A$  est une matrice strictement positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors  $\rho(A)$  est l'unique valeur propre de  $A$  de module maximum et l'espace propre associé est une droite vectorielle engendrée par un vecteur strictement positif.

**Démonstration.** Dans la démonstration du lemme précédent on a vu que si  $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $A$  telle que  $|\lambda| = \rho(A)$  et si  $x$  est un vecteur propre non nul associé, alors  $x = e^{i\theta} |x|$  avec  $A|x| = \rho(A)|x|$ . Le rayon spectral  $\rho(A)$  est donc valeur propre de  $A$ . De plus, avec :

$$\lambda x = Ax = A(e^{i\theta} |x|) = e^{i\theta} A|x| = e^{i\theta} \rho(A) |x| = \rho(A) x,$$

on déduit que  $\lambda x = \rho(A) x$  avec  $x \neq 0$ , et  $\lambda = \rho(A)$ . Donc  $\rho(A)$  est l'unique valeur propre de  $A$  de module maximal.

En notant  $E_{\rho(A)}$  l'espace propre associé à la valeur propre  $\rho(A)$ , tout vecteur non nul  $x$  dans  $E_{\rho(A)}$  est tel que  $|x| > 0$  et aucune des composantes de  $x$  n'est nulle. S'il existe deux vecteurs  $x, y$  linéairement indépendants dans  $E_{\rho(A)}$ , alors le vecteur  $z = x_1 y - y_1 x$  est non nul dans  $E_{\rho(A)}$  avec  $z_1 = 0$ , ce qui est impossible. On a donc  $\dim(E_{\rho(A)}) = 1$ . ■

**Corollaire 3.1** *Si  $A$  est une matrice strictement positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors il existe une unique vecteur propre associé à la valeur propre  $\rho(A)$  dans le compact  $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \|x\|_1 = 1\}$ .*

**Démonstration.** On a vu que  $E_{\rho(A)} = \mathbb{R}x$  avec  $x > 0$ . Le vecteur  $v = \frac{1}{\|x\|_1} x$  est alors l'unique élément de  $F \cap E_{\rho(A)}$ . ■

Le vecteur  $x \in F \cap E_{\rho(A)}$  est appelé, le vecteur de Perron de la matrice strictement positive  $A$ .

En utilisant la densité de l'ensemble des matrices strictement positives dans l'ensemble des matrices positives, on déduit le résultat suivant.

**Corollaire 3.2** *Si  $A$  est une matrice positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors  $\rho(A)$  est valeur propre de  $A$  et il existe un vecteur propre associé non nul positif.*

**Démonstration.** Pour tout entier naturel non nul  $k$ , on pose :

$$A_k = \left( \left( a_{ij} + \frac{1}{k} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

et on désigne par  $x_k$  le vecteur de Perron de la matrice strictement positive  $A_k$ . On a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = A$  et avec la continuité du rayon spectral, on déduit que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(A_k) = \rho(A)$ . D'autre part, la suite  $(x_k)_{k \geq 1}$  étant dans le compact  $F$ , on peut en extraire une sous suite  $(x_{\varphi(k)})_{k \geq 1}$  convergente vers un vecteur  $x \geq 0$  et on a :

$$Ax = \lim_{k \rightarrow +\infty} A_{\varphi(k)} x_{\varphi(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(A_{\varphi(k)}) x_{\varphi(k)} = \rho(A) x,$$

c'est-à-dire que  $x$  est un vecteur propre non nul (puisque  $\|x\|_1 = 1$ ) positif de  $A$  associé à la valeur propre  $\rho(A)$ . ■

**Corollaire 3.3** *Si  $A$  est une matrice positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors :*

$$\rho(I_n + A) = 1 + \rho(A).$$

**Démonstration.** Pour toute matrice  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a :

$$\text{Sp}(I_n + A) = \{1 + \lambda \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\}$$

et donc  $\rho(I_n + A) \leq 1 + \rho(A)$ .

Si de plus  $A$  est positive, alors  $\rho(A)$  est valeur propre de  $A$ , donc  $1 + \rho(A)$  est valeur propre de  $I_n + A$  et  $1 + \rho(A) \leq \rho(I_n + A)$ , d'où l'égalité. ■

Le théorème de Perron-Frobenius associé au théorème de Gerschgorin et Hadamard (voir [2], théorème 2.35), nous permet d'obtenir le résultat suivant de localisation des valeurs propres d'une matrice.

Pour tout nombre complexe  $a$  et tout réel positif  $r$ , on note :

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$$

le disque fermé de centre  $a$  et de rayon  $r$ .

**Corollaire 3.4** Soient  $A$  une matrice complexe dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $B$  une matrice positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $|A| \leq B$ . Toutes les valeurs propres de  $A$  sont dans la réunion des disques de centre  $a_{ii}$  et de rayon  $\rho(B) - b_{ii}$ , soit :

$$\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D(a_{ii}, \rho(B) - b_{ii}).$$

**Démonstration.** Supposons dans un premier temps que la matrice  $B$  soit strictement positive.

Si  $x$  est le vecteur de Perron de  $B$ , alors pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$ , on a :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| x_j \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} x_j = (\rho(B) - b_{ii}) x_i,$$

soit :

$$\frac{1}{x_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| x_j \leq \rho(B) - b_{ii}.$$

D'autre part, le théorème de Gerschgorin-Hadamard nous dit que si  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de la matrice  $C$ , alors il existe un indice  $i$  compris entre 1 et  $n$  tel que  $|\lambda - c_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |c_{ij}|$ .

La matrice  $A$  ayant les mêmes valeurs propres que la matrice  $C_x = D_x^{-1} A D_x$ , où  $D_x$  est la matrice diagonale de termes diagonaux  $x_1, \dots, x_n$  (c'est-à-dire que  $C_x = \begin{pmatrix} x_j & \\ & x_i a_{ij} \end{pmatrix}$ ), on déduit que pour toute valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  de  $A$ , il existe un indice  $i$  tel que :

$$|\lambda - a_{ii}| = |\lambda - c_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |c_{ij}| = \frac{1}{x_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| x_j \leq \rho(B) - b_{ii},$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Si la matrice  $B$  est positive, non strictement positive, on désigne pour tout réel  $\varepsilon > 0$  par  $B_\varepsilon$  la matrice  $B_\varepsilon = ((b_{ij} + \varepsilon))$  et on a  $B_\varepsilon > A$ , donc :

$$\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D(a_{ii}, \rho(B_\varepsilon) - b_{ii} - \varepsilon).$$

Avec la continuité du rayon spectral, on en déduit alors le résultat. ■

Du théorème de Perron-Frobenius on déduit également le résultat suivant.

**Corollaire 3.5** *Une matrice strictement positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ne peut avoir deux vecteurs propres positifs linéairement indépendants.*

**Démonstration.** Soit  $y$  un vecteur propre positif non nul associé à une valeur propre  $\lambda$  de  $A$ .

On a  $Ay > 0$  et il existe un indice  $i$  compris entre 1 et  $n$  tel que  $(Ay)_i = \lambda y_i$  avec  $y_i > 0$ , ce qui entraîne que  $\lambda > 0$  et  $y = \frac{1}{\lambda} Ay > 0$ .

Du corollaire 1.8, on déduit que nécessairement  $\lambda = \rho(A)$  et le théorème de Perron-Frobenius nous permet alors de conclure. ■

**Lemme 3.2** *Soit  $A$  une matrice strictement positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Si  $x$  est un vecteur propre strictement positif de  $A$  associé à la valeur propre  $\rho(A)$ , alors il existe alors un unique vecteur  $y$  strictement positif qui est vecteur propre de  ${}^tA$  associé à la valeur propre  $\rho({}^tA) = \rho(A)$  tel que  ${}^tyx = 1$ .*

**Démonstration.** La matrice  ${}^tA$  est strictement positive avec  $\rho({}^tA) = \rho(A)$ , l'espace propre associé à la valeur propre  $\rho(A)$  de  ${}^tA$  est donc une droite vectorielle dirigée par un vecteur  $z > 0$ . En posant  $y = \frac{1}{{}^tzx}z$ , on a  $y > 0$ ,  ${}^tAy = \rho(A)y$  et  ${}^tyx = 1$ .

Réciproquement, si  ${}^tAy = \rho(A)y$  avec  $y > 0$ ,  ${}^tyx = 1$ , alors  $y = \alpha z$  avec  $\alpha = \frac{1}{{}^tzx}$ , ce qui prouve l'unicité du vecteur  $y$ . ■

Avec les notations et hypothèses du lemme précédent, on désigne par  $L$  la matrice d'ordre  $n$  définie par :

$$L = x {}^ty = ((x_i y_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

On désigne par  $E_{\rho(A)}$  l'espace propre associé à la valeur propre  $\rho(A)$  de  $A$  (matrice strictement positive) et par  $E'_{\rho(A)}$  l'espace propre associé à la valeur propre  $\rho({}^tA) = \rho(A)$  de  ${}^tA$ .

Avec le lemme qui suit, on résume quelques propriétés de cette matrice  $L$ .

**Lemme 3.3** (i) *La matrice  $L$  est indépendante du choix du vecteur*

*$x$ .* (ii) *La matrice  $L$  est strictement positive de rang 1.*

(iii)  *$Lx = x$ ,  ${}^tLy = y$ .*

(iv) *Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on a :*

$$L^k = L, \quad A^k L = L A^k = \rho(A)^k L, \quad \left( \frac{1}{\rho(A)} A - L \right)^k = \left( \frac{1}{\rho(A)} A \right)^k - L.$$

(v)  *$L$  est la matrice de la projection sur la droite vectorielle  $E_{\rho(A)}$  parallèlement à l'hyperplan :*

$$H = \{z \in \mathbb{C}^n \mid {}^tyz = 0\}.$$

**Démonstration.** (i) On a  $E_{\rho(A)} = \mathbb{C}x$ ,  $E'_{\rho(A)} = \mathbb{C}y$ , avec  $x > 0$ ,  $y > 0$  et  ${}^tyx = 1$ .

Si  $(x', y')$  est un autre couple de vecteurs vérifiant ces propriétés, alors  $x' = \alpha x$ ,  $y' = \beta y$ , avec  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $1 = {}^ty'x' = \alpha\beta {}^tyx = \alpha\beta$  et :

$$x' {}^ty' = \alpha\beta x {}^ty = x {}^ty = L.$$

(ii) Les vecteurs  $x$  et  $y$  étant strictement positifs, il en est de même de la matrice  $L$ . De plus, pour  $j$  compris entre 1 et  $n$ , la colonne numéro  $j$  de  $L$  est  $y_j x > 0$ , il en résulte que  $L$  est de rang 1 avec  $\text{Im}(L) = \mathbb{C}x = E_{\rho(A)}$ .

(iii) Avec l'associativité du produit matriciel, on peut écrire :

$$\begin{aligned} Lx &= x ({}^t y x) = ({}^t y x) x = x \\ {}^t L y &= y ({}^t x y) = ({}^t x y) y = {}^t ({}^t y x) y = y. \end{aligned}$$

(iv) On a  $L^2 = x ({}^t y x) {}^t y = ({}^t y x) (x {}^t y) = L$  et par récurrence  $L^k = L$  pour tout  $k \geq 1$ . De  $Ax = \rho(A)x$ , on déduit que  $A^k x = \rho(A)^k x$  pour tout  $k \geq 1$  et :

$$A^k L = A^k x {}^t y = \rho(A)^k x {}^t y = \rho(A)^k L.$$

De même avec  ${}^t A y = \rho(A)y$ , on obtient :

$$L A^k = x {}^t y A^k = x {}^t \left( ({}^t A)^k y \right) = x {}^t \left( \rho(A)^k y \right) = \rho(A)^k L.$$

La dernière relation peut se montrer par récurrence sur  $k \geq 1$ . Le résultat est évident pour  $k = 1$  et en le supposant acquis pour  $k \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\rho(A)} A - L \right)^{k+1} &= \left( \frac{1}{\rho(A)} A - L \right) \left( \left( \frac{1}{\rho(A)} A \right)^k - L \right) \\ &= \left( \frac{1}{\rho(A)} A \right)^{k+1} - \frac{1}{\rho(A)^k} L A^k - \frac{1}{\rho(A)} A L + L^2 \\ &= \left( \frac{1}{\rho(A)} A \right)^{k+1} - \frac{1}{\rho(A)^k} \rho(A)^k L - \frac{1}{\rho(A)} \rho(A) L + L \\ &= \left( \frac{1}{\rho(A)} A \right)^{k+1} - L. \end{aligned}$$

(v) On a  $L^2 = L$ ,  $\text{Im}(L) = E_{\rho(A)}$  et le noyau de  $L$  est donné par :

$$\text{Ker}(L) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid x {}^t y z = 0\} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid ({}^t y z) x = 0\} = H,$$

c'est-à-dire que  $L$  est la projection sur  $E_{\rho(A)}$  parallèlement à  $H$ . ■

**Théorème 3.2** Avec les notations et hypothèses du lemme 1.3, on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\rho(A)} A \right)^k = L = x {}^t y.$$

**Démonstration.** Avec  $\left( \frac{1}{\rho(A)} A \right)^k - L = \left( \frac{1}{\rho(A)} A - L \right)^k$  pour  $k \geq 1$ , il suffit de montrer que la matrice  $\frac{1}{\rho(A)} A - L$  a un rayon spectral strictement inférieur à 1, ce qui revient à dire que  $\rho(A - \rho(A)L) < \rho(A)$ .

Si  $\lambda$  est une valeur propre non nulle de  $B = A - \rho(A)L$  et  $z$  est un vecteur propre non nul associé, alors  $(A - \rho(A)L)z = \lambda z$  et avec  $L(A - \rho(A)L) = 0$ , on déduit que  $\lambda Lz = 0$  et  $Lz = 0$  pour  $\lambda \neq 0$ , ce qui entraîne :

$$\lambda z = Az - \rho(A)Lz = Az,$$

c'est-à-dire que  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  avec  $z$  pour vecteur propre associé. On a donc montré que toute valeur propre  $\lambda$  non nulle de  $B$  est aussi valeur propre de  $A$  et donc  $|\lambda| \leq \rho(A)$ .

Si  $\lambda$  est une valeur propre non nulle de  $B$  telle que  $|\lambda| = \rho(A)$ , alors  $\lambda = \rho(A)$  (Perron-Frobénius) et tout vecteur propre associé  $z$  est aussi vecteur propre de  $A$ , on a donc  $z = \alpha x$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  pour  $z \neq 0$ , ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} \rho(A) z &= (A - \rho(A) L) z = (A - \rho(A) L) \alpha x \\ &= \alpha Ax - \alpha \rho(A) Lx = \alpha \rho(A) x - \alpha \rho(A) x = 0 \end{aligned}$$

en contradiction avec  $\rho(A) > 0$  et  $z \neq 0$ .

On a donc  $|\lambda| < \rho(A)$  pour toute valeur propre de  $B$  et  $\rho(B) < \rho(A)$ . D'où le résultat. ■

**Remarque 3.1** Avec ce résultat, on retrouve le fait que la matrice  $L$  ne dépend que de la matrice strictement positive  $A$  et pas du choix de  $x$ .

On est maintenant en mesure de préciser le théorème de Perron-Frobénius.

**Théorème 3.3 (Perron-Frobénius II)** Si  $A$  est une matrice strictement positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors  $\rho(A)$  est l'unique valeur propre de  $A$  de module maximum et cette valeur propre est simple (l'espace propre associé est donc une droite vectorielle).

**Démonstration.** On sait déjà que  $\rho(A)$  est l'unique valeur propre de  $A$  de module maximum. Notons  $p$  sa multiplicité algébrique.

Le théorème de trigonalisation sur  $\mathbb{C}$  nous dit qu'il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $T = P^{-1}AP$  soit triangulaire supérieure de diagonale :

$$(\rho(A), \dots, \rho(A), \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n)$$

avec  $|\lambda_i| < \rho(A)$  pour  $i$  compris entre  $p+1$  et  $n$  (si  $p < n$ ). En écrivant, pour tout entier naturel non nul  $k$ , que :

$$\left(\frac{1}{\rho(A)}T\right)^k = P^{-1} \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^k P$$

et en utilisant la continuité du produit matriciel, on déduit du théorème précédent que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\rho(A)}T\right)^k = P^{-1}LP = L',$$

avec  $L'$  triangulaire supérieure de diagonale  $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ .

On a donc  $\text{rang}(L') \geq p$  et avec  $\text{rang}(L') = \text{rang}(L) = 1$ , on déduit que nécessairement  $p = 1$ . ■

Si la matrice  $A$  est positive, on a vu que  $\rho(A)$  est valeur propre de  $A$ , mais cette valeur propre n'est pas nécessairement simple (prendre par exemple la matrice identité). Mais s'il existe un entier naturel  $r$  tel que  $A^r$  soit strictement positive, alors  $\rho(A)$  est valeur propre simple de  $A$ .

**Corollaire 3.6** Si  $A$  est une matrice positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et s'il existe un entier naturel  $r$  tel que  $A^r$  soit strictement positive, alors  $\rho(A)$  est valeur propre simple de  $A$  (l'espace propre associé est donc une droite vectorielle).

**Démonstration.** On sait déjà que  $\rho(A)$  est valeur propre de  $A$  (corollaire 1.10). Notons  $p$  sa multiplicité algébrique.

Le théorème de trigonalisation sur  $\mathbb{C}$  nous dit qu'il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $T = P^{-1}AP$  soit triangulaire supérieure de diagonale :

$$(\rho(A), \dots, \rho(A), \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n)$$

avec  $|\lambda_i| \leq \rho(A)$  pour tout entier  $i$  compris entre  $p+1$  et  $n$  (si  $p < n$ ). La matrice  $T^p = P^{-1}A^pP$  est alors triangulaire supérieure de diagonale :

$$(\rho(A)^p, \dots, \rho(A)^p, \lambda_{p+1}^p, \dots, \lambda_n^p)$$

et  $\rho(A)^p = \rho(A^p)$  est alors valeur propre de  $A^p$  de multiplicité supérieure ou égale à  $p$ . Mais  $A^p$  étant strictement positive cette multiplicité vaut 1, on a donc  $p = 1$ . ■

Une matrice vérifiant les hypothèses du corollaire est un cas particulier de matrice positive irréductible.

## 4. Matrices de permutation

Si  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on désigne par  $\mathfrak{S}_n$  le groupe des permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  et par  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

Pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers naturels, on note  $\delta_{i,j}$  le symbole de Kronecker ( $\delta_{ii} = 1$  et  $\delta_{i,j} = 0$  pour  $i \neq j$ ).

**Définition 4.1** Si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on appelle matrice de permutation associée à  $\sigma$ , la matrice de passage  $P_\sigma$  de la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  à la base  $\mathcal{B}_\sigma = \{e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}\}$

On a donc, si  $P_\sigma$  est une matrice de permutation,  $P_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$  pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $n$ , ce qui revient à dire que :

$$P_\sigma = ((\delta_{i,\sigma(j)}))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

En particulier, on a  $P_{I_d} = I_n$ .

Une telle matrice de permutation étant la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  à une base orthonormée est unitaire et donc  $P_\sigma^{-1} = {}^t P_\sigma$ .

De plus il est facile de vérifier que pour toutes permutations  $\sigma, \tau$  dans  $\mathfrak{S}_n$ , on a  $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma \circ \tau}$  (il suffit d'écrire que pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ , on a  $P_\sigma P_\tau e_i = P_\sigma e_{\tau(i)} = e_{\sigma \circ \tau(i)} = P_{\sigma \circ \tau} e_i$ ). On en déduit alors que  $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$ .

Pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et tout vecteur  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ , on a :

$$P_\sigma^{-1} x = \sum_{j=1}^n x_j e_{\sigma^{-1}(j)} = \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)} e_i$$

en faisant le changement d'indice  $i = \sigma^{-1}(j)$ .

C'est-à-dire que  $P_\sigma^{-1} x = (x_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}$  se déduit de  $x$  en faisant agir la permutation  $\sigma$  sur les composantes de  $x$ .

On en déduit alors que pour toute matrice  $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

$$P_\sigma^{-1} A = ((a_{\sigma(i),j}))_{1 \leq i, j \leq n}$$

se déduit de  $A$  en faisant agir la permutation  $\sigma$  sur les lignes de  $A$ .

La multiplication à droite d'une matrice  $A$  par une matrice de permutation  $P_\sigma$  va faire agir la permutation  $\sigma$  sur les colonnes de  $A$ . En effet, pour tout  $j$  compris entre 1 et  $n$ , on a :

$$A P_\sigma e_j = A e_{\sigma(j)} = \sum_{i=1}^n a_{i,\sigma(j)} e_i$$

et donc  $AP_\sigma = ((a_{i,\sigma(j)}))_{1 \leq i,j \leq n}$ .

On a donc pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et toute matrice  $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

$$P_\sigma^{-1}AP_\sigma = ((a_{\sigma(i),\sigma(j)}))_{1 \leq i,j \leq n},$$

c'est-à-dire que  $P_\sigma^{-1}AP_\sigma$  se déduit de  $A$  en faisant agir la permutation  $\sigma$  sur les lignes et les colonnes de  $A$ .

**Remarque 4.1** Une matrice de permutation étant unitaire dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ . Mais sur  $\mathbb{R}$  ce résultat n'est plus valable. En effet si  $\sigma$  est un cycle d'ordre 3, alors  $P_\sigma$  a pour polynôme minimale  $X^3 - 1$  qui n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$  et cette matrice n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

## 5. Matrices irréductibles

**Définition 5.1** Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite réductible s'il existe une matrice de permutation  $P_\sigma$  telle que :

$$P_\sigma^{-1}AP_\sigma = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

où  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  avec  $1 \leq p \leq n - 1$ .

Une matrice non réductible est dite irréductible.

**Exemple 5.1** Une matrice ayant tous ses coefficients non nuls est irréductible.

**Exemple 5.2** Une matrice ayant une ligne (ou une colonne) nulle est réductible. En effet si la ligne numéro  $i$  est nulle en transposant la ligne 1 avec la ligne  $i$  et la colonne 1 avec la colonne  $i$ , on obtient une matrice avec la première ligne nulle.

**Exemple 5.3** Une matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  est irréductible si et seulement si  $bc \neq 0$ .

En effet  $\mathfrak{S}_2 = \{\tau_{12}, I_d\}$  et  $P_{I_d}^{-1}AP_{I_d} = A$  ou  $P_{\tau_{12}}^{-1}AP_{\tau_{12}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  est de la forme (1.4) si et seulement si  $b = 0$  ou  $c = 0$ .

Une condition suffisante d'irréductibilité est donnée par le résultat suivant.

**Lemme 5.1** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . S'il existe un entier naturel  $p$  tel que  $A^p$  ait tous ses coefficients non nuls, alors  $A$  est irréductible.

**Démonstration.** Si  $A$  est réductible, il existe alors une matrice de permutation  $P_\sigma$  telle que  $P_\sigma^{-1}AP_\sigma$  soit de la forme  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$  et pour tout entier  $p \geq 1$  on a  $P_\sigma^{-1}A^pP_\sigma = \begin{pmatrix} B^p & 0 \\ C_p & D^p \end{pmatrix}$ , ce qui signifie que la matrice  $A^p$  est également réductible, elle a donc au moins un coefficient nul. ■

**Exemple 5.4** La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est irréductible puisque  $A^2 > 0$ .



Cette condition n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Une définition équivalente de la notion de matrice réductible est donnée par le résultat suivant.

**Théorème 5.1** *Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est réductible si et seulement si il existe une partition non triviale  $(I, J)$  de  $\{1, \dots, n\}$  telle que  $a_{ij} = 0$  pour tout  $(i, j) \in I \times J$ .*

**Démonstration.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  réductible. Il existe une permutation  $\sigma$  telle que  $a_{\sigma(i), \sigma(j)} = 0$  pour  $1 \leq i \leq p$  et  $p+1 \leq j \leq n$ , où  $p$  est un entier compris entre 1 et  $n-1$ . En posant  $I = \{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\}$ ,  $J = \{\sigma(p+1), \dots, \sigma(n)\}$ , on définit une partition non triviale de  $\{1, \dots, n\}$  telle que  $a_{ij} = 0$  pour tout  $(i, j) \in I \times J$ .

Réciproquement supposons qu'il existe une partition non triviale  $(I, J)$  de  $\{1, \dots, n\}$  telle que  $a_{ij} = 0$  pour tout  $(i, j) \in I \times J$ . En notant  $p$  le cardinal de  $I$ , on a  $1 \leq p \leq n-1$  et il existe  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que  $I = \{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\}$ ,  $J = \{\sigma(p+1), \dots, \sigma(n)\}$ , ce qui donne :

$$P_\sigma^{-1}AP_\sigma = ((a_{\sigma(i), \sigma(j)}))_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que  $A$  est réductible. ■

De ce théorème, on peut déduire qu'une matrice est irréductible si et seulement si sa transposée l'est.

Une autre définition équivalente de la notion de matrice réductible est donnée par le résultat suivant.

**Théorème 5.2** *Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est réductible si et seulement si il existe une partie non triviale  $J$  de  $\{1, \dots, n\}$  telle que le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ ,  $V_J = \text{Vect}\{e_j \mid j \in J\}$ , soit stable par  $A$ .*

**Démonstration.** Dire que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est réductible équivaut à dire qu'il existe une partition non triviale  $(I, J)$  de  $\{1, \dots, n\}$  telle que  $a_{ij} = 0$  pour tout  $(i, j) \in I \times J$ , ce qui revient à dire que pour tout  $j \in J$  on a :

$$Ae_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i = \sum_{i \in J} a_{ij}e_i \in V_J,$$

encore équivalent à dire que  $V_J$  est stable par  $A$ . ■

Les propriétés élémentaires suivantes nous seront utiles.

**Lemme 5.2** *Si  $A$  est réductible, alors  $|A|$  et  $I_n + A$  sont réductibles.*

**Démonstration.** Cela résulte de  $P_\sigma^{-1}AP_\sigma = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$  entraîne :

$$\begin{cases} P_\sigma^{-1}|A|P_\sigma = \begin{pmatrix} |B| & 0 \\ |C| & |D| \end{pmatrix}, \\ P_\sigma^{-1}(I_n + A)P_\sigma = \begin{pmatrix} I_p + B & 0 \\ C & I_{n-p} + D \end{pmatrix}. \end{cases}$$

puisque l'action de  $P_\sigma$  est seulement de permuter des lignes et des colonnes. ■

On a vu que si  $A$  est une matrice strictement positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors  $\rho(A)$  est l'unique valeur propre de  $A$  de module maximum, que cette valeur propre est simple, que l'espace propre

associé est une droite vectorielle engendrée par un vecteur strictement positif et qu'une telle matrice ne peut avoir deux vecteurs propres positifs linéairement indépendants.

Ces résultats ne s'étendent pas au cas des matrices positives. Mais pour les matrices positives qui sont de plus irréductibles, on a des résultats analogues.

**Lemme 5.3** *Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  positive et irréductible. Si  $y \in \mathbb{R}^n$  un vecteur positif non nul, alors soit  $y$  est strictement positif et il en est de même du vecteur  $z = (I_n + A)y$ , soit  $y$  a au moins une composante nulle et le nombre de coordonnées nulles de  $z$  est strictement inférieur au nombre de coordonnées nulles de  $y$ . Dans tous les cas, le vecteur  $(I_n + A)^{n-1}y$  est strictement positif.*

**Démonstration.** Les composantes du vecteur  $z = (I_n + A)y$  sont données par :

$$z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j + y_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Si la matrice  $A$  et le vecteur  $y$  sont positifs, on a alors  $z_i \geq y_i \geq 0$  et  $z$  est positif.

Avec  $z \geq y$ , on déduit que  $z$  est strictement positif si  $y$  l'est.

En supposant que  $y$  a au moins une composante nulle, de  $0 \leq y_i \leq z_i$ , on déduit que  $z_i = 0$  entraîne  $y_i = 0$ . Le nombre de coordonnées nulles du vecteur  $z$  est donc inférieur ou égal à celui de  $y$ .

Supposons que  $z$  et  $y$  ont le même nombre de composantes nulles. En notant  $J_y$  l'ensemble des indices compris entre 1 et  $n$  tels que  $y_i = 0$ , on a  $z_i > 0$  pour  $i \notin J_y$  et en conséquence  $z_i = y_i = 0$  pour tout  $i \in J_y$ , avec  $z_i = \sum_{j \notin J_y} a_{ij}y_j$  et  $y_j > 0$  pour  $j \notin J_y$ . On a donc en tenant compte du fait que les coefficients  $a_{ij}$  sont positifs ou nuls,  $a_{ij} = 0$  pour  $i \in J_y$  et  $j \notin J_y$  avec  $J_y$  de cardinal compris entre 1 et  $n - 1$  ( $y$  a au moins une composante nulle et n'est pas le vecteur nul) ce qui revient à dire que la matrice  $A$  est réductible. En conclusion le nombre de composantes nulles de  $z$  est strictement inférieur à celui de  $y$ , si la matrice positive  $A$  est irréductible.

Si le vecteur  $y$  est positif non nul, il a alors au moins une coordonnée strictement positive et ce qui précède nous dit que le vecteur  $(I_n + A)y$  a au moins deux coordonnées strictement positives. Par récurrence on déduit alors que le vecteur  $(I_n + A)^{n-1}y$  a au moins  $n$  coordonnées strictement positives, ce qui revient à dire qu'il est strictement positif. ■

**Théorème 5.2** *Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  positive. Cette matrice est irréductible si et seulement si la matrice  $(I_n + A)^{n-1}$  est strictement positive.*

**Démonstration.** Du lemme 1.7, on déduit que si  $A$  est une matrice positive irréductible, alors pour tout  $j$  compris entre 1 et  $n$  le vecteur  $(I_n + A)^{n-1}e_j$  est strictement positif, ce qui équivaut à dire que la matrice  $(I_n + A)^{n-1}$  est strictement positive.

Réciproquement si la matrice  $(I_n + A)^{n-1}$  est strictement positive, alors elle est irréductible ainsi que  $A$  (lemme 1.6). ■

**Remarque 5.1** *On peut en fait montrer que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est irréductible si et seulement si  $(I_n + |A|)^{n-1}$  est strictement positive (voir [1], théorème 6.2.23).*

**Théorème 5.3 (Perron-Frobenius III)** *Si  $A$  est positive et irréductible dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors  $\rho(A)$  est strictement positif, c'est une valeur propre simple de  $A$  et l'espace propre associé est une droite vectorielle engendrée par un vecteur strictement positif.*

**Démonstration.** La matrice  $A$  étant irréductible n'a pas de ligne nulle, on a donc puisqu'elle est positive  $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$  pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ , ce qui entraîne  $\rho(A) > 0$  (corollaire 1.5).

Avec le théorème de trigonalisation sur  $\mathbb{C}$  on voit que si  $\rho(A)$  est valeur propre de multiplicité supérieure ou égale à 2 alors il en est de même de  $1 + \rho(A)$  comme valeur propre de  $I_n + A$ . Mais  $I_n + A$  positive et  $(I_n + A)^{n-1}$  strictement positive entraîne  $\rho(I_n + A) = 1 + \rho(A)$  (corollaire 1.11) est valeur propre simple de  $I_n + A$  (corollaire 1.14). En conséquence  $\rho(A)$  est valeur propre simple de  $A$ .

L'espace propre associé est donc de dimension 1 et on sait qu'il peut être engendré par un vecteur positif  $x$  (corollaire 1.10). De  $Ax = \rho(A)x$ , on déduit que  $(I_n + A)^{n-1}x = (1 + \rho(A))^{n-1}x$  et avec  $(I_n + A)^{n-1}x > 0$  (théorème 1.1, point (vi)),  $(1 + \rho(A))^{n-1} > 0$ , on déduit que  $x > 0$ .

■