3.1

Travail demandé :

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le texte joint à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

Remarques générales :

1. Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligences ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs...) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.

2. Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.

3. Vous pouvez annoter les documents qui vous sont fournis. Vos annotations ne seront pas regardées par l'examinateur.

Interpolation polynomiale

3.1 Introduction

Le problème (général) de l'interpolation consiste à déterminer une courbe passant par des points donnés dans le plan et issus par exemple de mesures expérimentales. Dans ce chapitre, la courbe cherchée est le graphe d'une fonction et plus exactement d'un polynôme. Comme nous allons le voir, le degré de ce polynôme est déterminé par le nombre de points. Donnons-nous $(n+1)$ points deux à deux distincts $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ et $(n+1)$ valeurs réelles $y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_n$. On cherche alors un polynôme tel que son graphe passe par les points $(x_i,\ y_i)$ pour $i = 0, \ldots, n$. Plus précisement, le problème de l'interpolation polynomiale consiste à trouver un polynôme de degré au plus égale à n, qui prend la valeur y_i au point x_i (voir la figure 3.1 suivante). Si on note $\mathbb{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, le problème

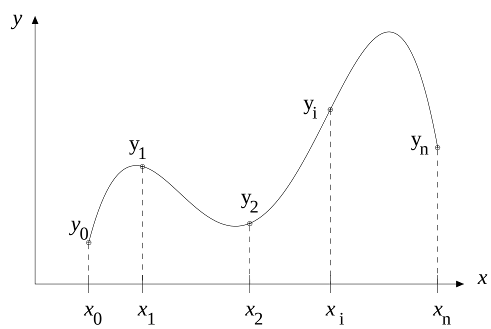

FIG. 3.1 – Exemple d'interpolation polynomiale.

de l'interpolation polynomiale peut alors se formuler de la façon suivante :

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } p \in \mathbb{P}_n \text{ vérifiant} \\ p(x_i) = y_i \quad \text{pour } i = 0, 1, \ldots, n. \end{cases}$$

On va d'abord montrer que le problème (3.1) est bien posé ; c'est l'objet du résultat suivant.

Théorème 1 : *Polynôme d'interpolation*

Si les $(n+1)$ points $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ sont distincts alors il existe un et un seul polynôme p de degré $\leq\ n$ tel que $p(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$. Ce polynôme est appelé polynôme d'interpolation aux points $(x_i,\ y_i)$.

L'unicité d'un tel polynôme d'interpolation peut s'établir de la façon suivante. Supposons en effet qu'il existe deux polynômes p et q de degré $\leq n$ tels que $p(x_i) = q(x_i) = y_i$, pour $i = 0, \ldots, n$. Par conséquent, les x_i pour $i = 0, \ldots, n$, sont racines du polynômes $p-q$. Donc le polynôme r défini par $r(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ divise $p-q$. Or $\deg(r) = n+1$ et $\deg(p-q) \leq n$, donc nécessairement $p - q \equiv 0$.

La démonstration de l'existence d'un polynôme d'interpolation quant à elle, peut se faire en utilisant soit la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_n$, soit les polynômes de Lagrange. Les sections suivantes détaillent successivement ces deux approches. Bien que ces méthodes fournissent toutes deux une démonstration de l'existence du polynôme d'interpolation, on verra que d'un point de vue pratique, seule la méthode de Lagrange est à retenir.

3.2 Base canonique - Système de Van-der-Monde

La famille $\{1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^n\}$ forme une base de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_n$. On cherche alors le polynôme p sous la forme $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, c'est à dire que l'on cherche à déterminer les valeurs réelles a_i pour $i = 0, 1, \dots, n$. Le problème de l'interpolation polynomiale (3.1) peut s'écrire sous forme matricielle. On note

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

les vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ formés respectivement par les valeurs y_i données et par les coefficients du polynôme p dans la base canonique de $\mathbb{P}_n$. On introduit également la matrice M appelée matrice de Van-der-Monde, à $(n+1)$ lignes et $(n+1)$ colonnes, définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Sous forme matricielle, le problème (3.1) s'écrit alors

$$Ma = y \tag{3.2}$$

Le système linéaire (3.2) admet une et une seule solution. En effet, on peut montrer que le déterminant de la matrice M est donné par $\text{dét}(M) = \prod_{j<i} (x_i - x_j)$. Puisque les $(n+1)$ points sont supposés distincts, on a nécessairement $\text{dét}(M) \neq 0$ et par conséquent la matrice M est inversible.

Remarque : Dans la pratique, on ne résout pas le système (3.2) pour calculer les coefficients a_i du polynôme p car c'est numériquement instable (au sens où des petites perturbations sur les données $(x_i,\ y_i)$ peuvent conduire à des résultats différents) et en plus, le coût de calcul pour résoudre le système (3.2) est en $O\left((n+1)^3\right)$ si on utilise une méthode de Gauss par exemple (voir le chapitre sur les systèmes linéaires).

3.3 Polynôme de Lagrange

Nous allons voir une autre façon de résoudre le problème d'interpolation (3.1) en introduisant des polynômes particuliers appelés polynôme de Lagrange.

Définition : *Polynômes de Lagrange*

Pour les points $x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n$ donnés et distincts, les n polynômes de Lagrange de degré n sont définis par

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} = \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \neq i}} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \tag{3.3}$$

pour $i = 0, 1, \dots, n$ et $x \in \mathbb{R}$.

La fonction L_i est un polynôme de degré n tel que

$$\boxed{L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}}$$

Le polynôme de Lagrange L_i est donc le polynôme d'interpolation associé aux points $\{x_0, \ldots, x_n\}$, qui vaut 1 en x_i et 0 ailleurs. Cette propriété est parfois prise comme définition des polynômes de Lagrange. La Figure 3.2 montre un exemple des trois polynômes de Lagrange de degré 2 associés aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

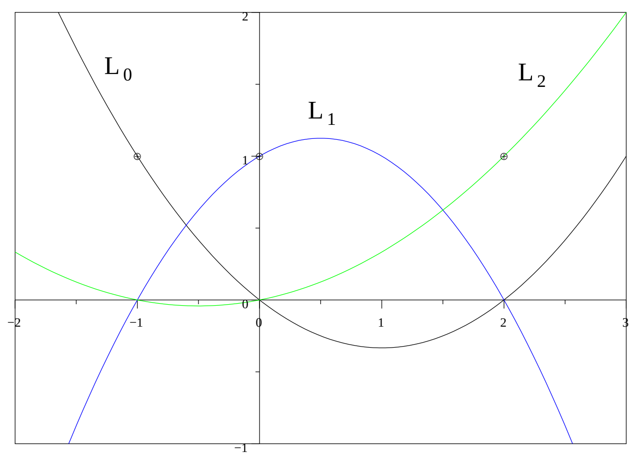

FIG. 3.2 – Les trois polynômes de Lagrange de degré 2 associés à $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

La famille $\{L_0, L_1, \ldots, L_n\}$ forme une base de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_n$. Le polynôme p d'interpolation de Lagrange aux points $(x_i,\ y_i)$ pour $i = 0, \ldots, n$ est alors donné par

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{3.4}$$

Les polynômes de Lagrange forment une base de $\mathbb{P}_n$ telle que la décomposition du polynôme d'interpolation p dans cette base, est simple (les coefficients sont les y_i connus).

<u>*Coût d'évaluation*</u> : Pour calculer chaque polynôme de Lagrange (cf. equation (3.3)), on effectue $4n - 1$ opérations. Le calcul de $p(x)$ avec la formule (3.4) nécessite, quant à lui, $2n + 1$ opérations. Au total, le calcul de $p(x)$ pour un x donné, coûte donc $(n + 1)(4n - 1) + 2n + 1 = 4n(n + 5/4) \simeq 4n^2 = O(n^2)$ opérations pour n grand.

Remarque : Il est possible de réduire ce coût en faisant un pré-calcul de $\prod_{0 \le j \le n}(x - x_j)$ et d'évaluer les L_i en divisant la quantité précédente par $(x - x_i)$. Mais alors on peut rencontrer des problèmes numériques lorsque x est proche de x_i.

3.4 Base de Newton - Différences divisées

Nous allons voir à présent une méthode efficace (en terme de nombre d'opérations) permettant de trouver une expression du polynôme d'interpolation dans une base particulière de $\mathbb{P}_n$, la base de Newton. On se donne $n + 1$ points distincts $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ et on considère les images de ces points par une fonction f (continue), c'est-à-dire $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $\ldots$, $y_n = f(x_n)$.

Définition : *Base de Newton*

On appelle base de Newton relative à $\{x_0, \ldots, x_n\}$, la base formée des $n+1$ polynômes

$$1, \quad (x-x_0), \quad (x-x_0)(x-x_1), \quad \ldots \quad , \quad (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Cette définition contient en fait un résultat, à savoir que la famille des polynômes en question constitue bien une base de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_n$. Tout polynôme $p \in \mathbb{P}_n$ peut s'écrire sous la forme

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n \prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i), \tag{3.5}$$

où les nombres réels a_i constituent les coefficients de p dans la base de Newton.

Lorsque le polynôme p interpole f aux points $(x_i,\ y_i = f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$, on cherche à déterminer les coefficients a_i de p dans la base de Newton. On voit alors dans ce cas que $a_0 = f(x_0) = y_0$ et $a_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Et la question naturelle est : que valent les a_i pour tout $i = 0, \ldots, n$? Comme nous allons le voir, la réponse est donnée par les différences divisées.

Notation et Définition. *Différences divisées*

Soient $\{x_k\}_{k\geq 0}$ des points deux à deux distincts. Les différences divisées de la fonction f sont définies par récurrence de la façon suivante.

Différence divisée d'ordre 0 : $\quad f[x_i] = f(x_i) = y_i$

Différence divisée d'ordre 1 : $\quad f[x_i, x_j] = \dfrac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} = \dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \quad i \neq j$

Différence divisée d'ordre $k \neq 0$:
$$f[x_l, \ldots, x_{l+k}] = \frac{f[x_l, \ldots, x_{l+k-1}] - f[x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}]}{x_l - x_{l+k}} \tag{3.6}$$

Donnons tout de suite une propriété des différences divisées.

Proposition 1 :

i) On a, pour $k \geq 1$, $\quad f[x_l, \ldots, x_{l+k}] = \displaystyle\sum_{i=l}^{l+k} \frac{f(x_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{l \leq j \leq l+k \\ j \neq i}} (x_i - x_j)}$.

ii) Les valeurs des différences divisées ne dépendent pas de l'ordre des points.

La démonstration du point *i)* se fait par récurrence (exercice). Le point *ii)* quant à lui, est une conséquence directe de *i)* et affirme que par exemple $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_2, x_1, x_0] = \cdots$.

Exemple : Pour $h > 0$, on a $f[x_0 - h, x_0, x_0 + h] = \dfrac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{2h^2}$, ce qui correspond à la moitié de la différence finie centrée pour la dérivée seconde de f.

On a en fait le résultat suivant qui fait le lien entre les différences divisées et les coefficients du polynôme d'interpolation dans la base de Newton.

Théorème 2 :

1) *Formule de Taylor discrète.*

Pour $x \neq x_i$, $i = 0, \dots, n$, on a

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) + f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \quad (3.7)$$

2) Le polynôme d'interpolation p de degré $\leq n$ de f en $x_0, \dots, x_n$ s'écrit

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i), \quad (3.8)$$

c'est-à-dire que les coefficients a_i de p dans la base de Newton sont exactement les différences divisées i.e. $a_i = f[x_0, \dots, x_i]$.

Démonstration : 1) La démonstration se fait par récurrence. Pour $n = 0$, par définition on a $f(x) = f(x_0) + f[x_0, x](x - x_0)$. On suppose à présent la formule (3.7) vraie jusqu'au rang $n - 1$. Compte tenu de ce que les différences divisées ne dépendent pas de l'ordre des points, on peut écrire :

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_n] - f[x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x}$$

d'où on déduit que $f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x] = f[x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n] + (x - x_n) f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$. On multiplie alors par le produit $\prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$ pour obtenir

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) = f[x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

ce qui établit la formule de Taylor discrète au rang n.

2) On va utiliser le résultat intermédiaire suivant.

Lemme 1 :

Soient α et β deux réels distincts. On considère les deux polynômes d'interpolation q et r de degré $\leq n$ associés respectivement à $\{(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (\alpha, a)\}$ et $\{(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (\beta, b)\}$. Alors le polynôme d'interpolation p de degré $\leq n + 1$ associé à $\{(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (\alpha, a), (\beta, b)\}$ est donné par $p(x) = \dfrac{(\beta - x)q(x) - (\alpha - x)r(x)}{\beta - \alpha}$.

Démonstration du lemme : Il suffit de vérifier que $\deg(p) \leq n + 1$ et que $p(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \dots, n - 1$ et $p(\alpha) = a$, $p(\beta) = b$. □

La démonstration du point 2) du Théorème 2 se fait alors par récurrence sur n.
Pour $n = 1$, on a $p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$ car alors $\deg(p) \leq 1$ et $p(x_0) = f(x_0)$ et $p(x_1) = f(x_1)$ donc p est bien l'unique polynôme d'interpolation de f en x_0, x_1.

Supposons à présent que le polynôme d'interpolation p_n de degré $\leq n$ de f aux points $(x_0, y_0), \cdots, (x_n, y_n)$ soit donné par $p_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$. Soit q_n le polynôme d'interpolation de degré $\leq n$ de f aux points $(x_0, y_0), \cdots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_{n+1}, y_{n+1})$. Par hypothèse de récurrence on a

$$q_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_{n-1}] \prod_{i=0}^{n-2} (x - x_i) + f[x_0, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i).$$

D'après le Lemme 1, on a

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(x) &= \frac{(x_{n+1}-x)p_n(x)-(x_n-x)q_n(x)}{x_{n+1}-x_n} \\
&= \frac{(x_{n+1}-x_n)p_n(x)-(x_n-x)(p_n(x)-q_n(x))}{x_{n+1}-x_n} \\
&= p_n(x)+\frac{(x_n-x)}{(x_{n+1}-x_n)}\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)\Big(f[x_0,\cdots,x_n]-f[x_0,\cdots,x_{n-1},x_{n+1}]\Big). \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, compte tenu du fait que les différences divisées ne dépendent pas de l'ordre des points, on a

$$\begin{aligned}
f[x_0,\cdots,x_n,x_{n+1}] &= f[x_n,\cdots,x_0,x_{n+1}] \\
&= \frac{f[x_n,\cdots,x_0]-f[x_1,\cdots,x_0,x_{n+1}]}{x_n-x_{n+1}} \\
&= \frac{f[x_0,\cdots,x_n]-f[x_0,\cdots,x_{n-1},x_{n+1}]}{x_n-x_{n+1}}
\end{aligned}$$

et en utilisant (3.9), on obtient $\quad p_{n+1}(x)=p_n(x)+f[x_0,\cdots,x_n,x_{n+1}]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$. □

3.5 Calcul des différences divisées

On utilise un tableau pour calculer les coefficients du polynôme d'interpolation dans la base de Newton c'est-à-dire - compte tenu du Théorème 2 - pour calculer les différences divisées. Les différences divisées d'ordre k sont calculées à partir des différences divisées d'ordre $k-1$ par la relation de récurrence (3.6) (et non pas en utilisant la Proposition 1). On construit ainsi le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|c|ccccccccc}
x_0 & y_0=\boxed{f(x_0)} & & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & & \\
x_1 & y_1=f(x_1) & \to & \boxed{f[x_0,x_1]} & & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & & \\
x_2 & y_2=f(x_2) & \to & f[x_1,x_2] & \to & \boxed{f[x_0,x_1,x_2]} & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & \\
x_3 & y_3=f(x_3) & \to & f[x_2,x_3] & \to & f[x_1,x_2,x_3] & \to & \boxed{f[x_0,x_1,x_2,x_3]} & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & \searrow & \vdots & \searrow & & & & & \searrow & \\
x_n & y_n=f(x_n) & \to & f[x_{n-1},x_n] & \to & f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] & \ldots & \ldots & \ldots & \to & \boxed{f[x_0,\ldots,x_n]}
\end{array}$$

Les coefficients de p dans la base de Newton sont lus en haut sur la diagonale. Si on ajoute un point supplémentaire $(x_{n+1},\ y_{n+1})$ il faut effectuer $n+1$ calculs en plus pour obtenir $f[x_0,\ldots,x_n,x_{n+1}]$.

Exemple : Déterminer les coefficients dans la base de Newton du polynôme d'interpolation de degré 3 tel que $p(-2)=-31$, $p(0)=-1$, $p(1)=-1$ et $p(4)=83$.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & & a_0 & & & & & \\
x_i & y_i & \swarrow & a_1 & & & & \\
\hline
-2 & \boxed{\mathbf{-31}} & & \swarrow & a_2 & & & \\
0 & -1 & \boxed{\mathbf{15}} & & \swarrow & a_3 & & \\
1 & -1 & 0 & \boxed{\mathbf{-5}} & & \swarrow & & \\
4 & 83 & 28 & 7 & \boxed{\mathbf{2}} & & &
\end{array}$$

On obtient ainsi $p(x)=-31+15(x+2)-5(x+2)x+2(x+2)x(x-1)$. □

Une fois les coefficients du polynôme obtenus, il faut évaluer la valeur de ce polynôme en une valeur x donnée. On utilise pour cela le schéma d'Horner.

3.5.1 Evaluation du polynôme - Schéma d'Horner

Dans la base de Newton, on a $p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$. On veut calculer $p(x)$ pour une valeur x donnée. Si on calcule par différences divisées les coefficients de p dans la base de Newton et qu'on évalue ensuite le polynôme en x, le nombre d'opérations effectuées est alors le suivant :

- *Evaluation des coefficients :*

1ère colonne : $2n$ soustractions + n divisions = $3n$ opérations.

2ème colonne : $3(n-1)$ opérations.

$\vdots$

n-ième colonne : 3 opérations.

Le coût total pour calculer les coefficients dans la base de Newton par différence divisées est donc de $3\,(n + (n-1) + \cdots 1) = \dfrac{3n(n+1)}{2} \simeq \dfrac{3n^2}{2}$ opérations pour n grand.

- *Evaluation du polynôme par un schéma de Horner :* Pour évaluer le polynôme p en un point x donné, on écrit l'expression de p dans la base de Newton sous la forme suivante (schéma de Horner) :

$$\boxed{p(x) = (\cdots(((x - x_{n-1})a_n + a_{n-1})\,(x - x_{n-2}) + a_{n-2})\,(x - x_{n-3}) + \cdots)\,(x - x_0) + a_0.}$$

On effectue ainsi $2n$ additions et n multiplications, soit un coût de $3n$ opérations pour le schéma d'Horner.

Le nombre total d'opérations effectuées pour calculer dans la base de Newton la valeur du polynôme p en un point x donné, est donc $\dfrac{3n(n+1)}{2} + 3n = \dfrac{3n(n+3)}{2} \simeq \dfrac{3n^2}{2} = O(n^2)$ opérations pour n grand.

Remarque : Une évaluation directe de $p(x)$ à partir de l'expression (3.5) (une fois les coefficients connus) requière $O(n^2)$ opérations. D'autres schémas moins coûteux (et différents de Horner) existent pour évaluer un polynôme. Par exemple, une alternative possible au schéma d'Horner est l'algorithme suivant :

$$
\begin{array}{l}
p \leftarrow a_0, \quad y \leftarrow 1 \\
\texttt{Pour } i \texttt{ de } 1 \texttt{ à } n \\
\left|\begin{array}{l} y \leftarrow y * (x - x_{i-1}) \\ p \leftarrow p + a_i * y \end{array}\right.
\end{array}
$$

On voit alors que le coût est de $4n$ opérations (contre $3n$ pour Horner).

3.6 Erreur d'interpolation

On va à présent analyser l'erreur que l'on commet lorsqu'on remplace une fonction f par son polynôme d'interpolation p associé aux points $\{x_0, \ldots, x_n\}$ distincts. D'après le Théorème 2 de la section 3.4, on sait que $f(x) - p(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ et grâce à la Proposition 1, on peut obtenir une expression de $f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]$. Malheureusement celle-ci fait intervenir la valeur $f(x)$ qu'on ne connait pas. Le théorème suivant fournit une estimation de la différence.

Théorème 3 : *Erreur d'interpolation*

Soit f une fonction $(n+1)$ fois dérivable et soit p son polynôme d'interpolation de degré n associés aux points $x_0, \ldots, x_n$ distincts. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un réel $\theta_x \in]\min(x, x_i), \max(x, x_i)[$ tel que

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x)\, f^{(n+1)}(\theta_x), \qquad \text{avec} \qquad \Pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

Démonstration. Si $x = x_i$, alors $\Pi_{n+1}(x) = 0$ et la formule est juste. Fixons à présent $x \neq x_i$ et considérons q le polynôme d'interpolation de f en x, x_0, ..., x_n. On a évidemment $f(x) - p(x) = q(x) - p(x)$ et $q - p$ est un polynôme de degré $\leq n+1$ qui s'annule aux $(n+1)$ points x_0, ..., x_n. Par conséquent, il existe une constante α telle que $q(t) - p(t) = \alpha \prod_{i=0}^{n}(t - x_i) = \alpha \Pi_{n+1}(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il reste à montrer que $\alpha = \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta_x)$. Posons $r(t) = f(t) - q(t) = f(t) - p(t) - \alpha \Pi_{n+1}(t)$. On remarque que la fonction r s'annule $(n+2)$ fois en x, x_0, x_1, ..., x_n. En appliquant $(n+1)$ fois le théorème de Rolle, on en déduit que la dérivée r' s'annule $(n+1)$ fois dans l'intervalle $I =]\min(x, x_i), \max(x, x_i)[$. On peut à nouveau appliquer n fois le théorème de Rolle et ainsi de suite ... De cette façon, en appliquant par récurrence le théorème de Rolle, on obtient que la $(n+1)$-ième dérivée $r^{(n+1)}$ s'annule une fois dans I, c'est-à-dire qu'il existe $\theta_x \in I$ tel que $r^{(n+1)}(\theta_x) = 0$. On en déduit que

$$0 = r^{(n+1)}(\theta_x) = f^{(n+1)}(\theta_x) - p^{(n+1)}(\theta_x) - \alpha \Pi_{n+1}^{(n+1)}(\theta_x).$$

Or $p^{(n+1)} \equiv 0$ car $\deg(p) \leq n$ et $\Pi_{n+1}^{(n+1)} \equiv (n+1)!$. On obtient donc $\alpha = \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta_x)$ ce qui prouve le théorème. □

3.7 Problème de convergence de l'interpolation

On a vu à la section précédente qu'on pouvait estimer l'erreur entre une fonction f et son polynôme d'interpolation. La question qu'on se pose à présent est de savoir si l'erreur d'interpolation diminue lorsqu'on augmente le nombre n de points d'interpolation et à la limite quand n tend vers l'infini, est-ce-que p converge (en un sens à préciser) vers f ?

D'après le Théorème 3, l'erreur d'interpolation dépend essentiellement de deux termes ; d'une part de la fonction Π_{n+1} qui ne dépend que de la répartition des points x_i et non de f et d'autre part de la dérivée $(n+1)$-ième de f qui au contraire ne dépend pas des x_i. On se place désormais sur un intervalle $[a, b]$ avec $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. On peut alors estimer la fonction Π_{n+1} pour des abscisses x_i quelconques.

Lemme 2 : Pour des points $x_0, \cdots, x_n$ quelconques, on a l'estimation

$$\max_{x \in [a,b]} |\Pi_{n+1}(x)| \leq h^{n+1} n! \quad \text{où} \quad h = \max_i h_i \text{ avec } h_i = |x_{i+1} - x_i|.$$

Démonstration. Pour x fixé, on considère l'indice k tel que $x \in [x_k, x_{k+1}]$. On a ainsi $|\Pi_{n+1}(x)| = \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leq \prod_{i=0}^{k} |x_{k+1} - x_i| \times \prod_{j=k+1}^{n} |x_j - x_k|$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{array}{lrcl}
\text{pour } i = 0, \cdots, k, & |x_{k+1} - x_i| & \leq & |x_{k+1} - x_k| + |x_k - x_{k-1}| + \cdots + |x_{i+1} - x_i| \\
 & & \leq & (k+1-i)h \\
\text{pour } j = k+1, \cdots, n, & |x_j - x_k| & \leq & |x_j - x_{j-1}| + |x_{j-1} - x_{j-2}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k| \\
 & & \leq & (j-k)h
\end{array}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
|\Pi_{n+1}(x)| &\leq \prod_{i=0}^{k} \Big((k+1-i)h\Big) \times \prod_{j=k+1}^{n} \Big((j-k)h\Big) \\
&\leq h^{k+1} \prod_{i=0}^{k}(k+1-i) \times h^{n-k} \prod_{j=k+1}^{n}(j-k) \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

On a, de plus

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{k}(k+1-i) &= (k+1) \times k \times (k-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = (k+1)! \qquad (3.11) \\
\prod_{j=k+1}^{n}(j-k) &= 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-k) = (n-k)! \\
&\leq 1 \times (2+k) \times (3+k) \times \cdots \times n = \frac{n!}{(k+1)!} \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Ainsi, par les relations (3.10)-(3.11)-(3.12), on obtient bien l'estimation cherchée. □

Pour une fonction f qui est $n+1$ fois dérivable, on considère son polynôme d'interpolation p aux points $\{x_0, \ldots, x_n\}$ et d'après le Théorème 3, on a

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |\Pi_{n+1}(x)| \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|.$$

Compte tenu du Lemme 2, on obtient alors l'estimation d'erreur suivante :

$$\boxed{\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)} \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|.} \tag{3.13}$$

On fait remarquer que le paramètre h dépend de n.

On va à présent s'intéresser à des distributions particulières des points x_i afin de pouvoir exploiter l'estimation d'erreur (3.13).

3.7.1 Points d'interpolation équidistants

Commençons par étudier le cas de points équidistants. On considère une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ en $(n+1)$ points $(n \geq 1)$:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \ldots \quad , \quad x_n = a + nh, \quad \text{avec } h = \frac{b-a}{n}.$$

Dans ce cas, on a $\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)} = \dfrac{1}{(n+1)} \left(\dfrac{b-a}{n}\right)^{n+1} \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$. Compte tenu de l'estimation d'erreur (3.13), on serait donc tenté de penser que l'erreur entre f et son polynôme d'interpolation p tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Mais attention car la $(n+1)$-ième dérivée de f dépend de n et en fait peut croître très rapidement avec n. En général, p ne converge pas vers f lorsque n tend vers $+\infty$. L'exemple suivant illustre une telle situation de non-convergence.

Exemple : *(Runge)*
On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[-5, 5]$. On note p_n le polynôme d'interpolation de f aux $n+1$ points équidistants dans l'intervalle $[-5, 5]$. On observe alors (cf. Figure 3.3) quand n augmente, des problèmes d'oscillations aux extrémités de l'intervalle. En fait $\left|f^{(n)}(5)\right|$ devient rapidement grand avec n. On montre que pour $|x| \geq 3.83\cdots$, on a $|f(x) - p(x)| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. $\square$

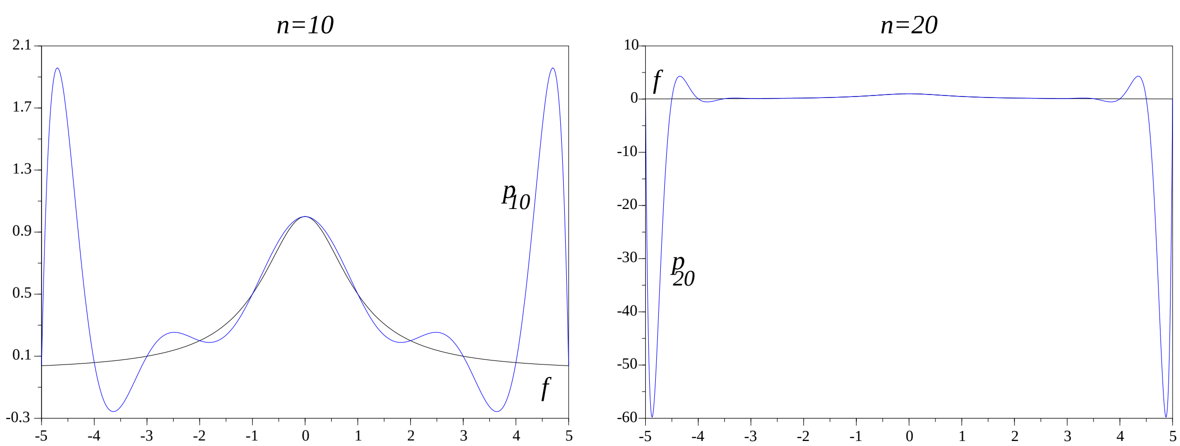

FIG. 3.3 – Phénomène de Runge : "explosion" de l'interpolation polynomiale avec points équidistants.

Nous venons de voir qu'en général, il n'y a pas de convergence du polynôme d'interpolation lorsqu'on choisit les points d'interpolation répartis de façon uniforme dans un intervalle fermé borné. Mais existe-t-il une répartition (évidemment non uniforme) des points d'interpolation pour lesquels il y convergence ? Une réponse est fournie par les abscisses de Tchebichev.

3.7.2 Abscisses de Tchebichev

Le problème est le suivant : étant donnés l'intervalle $[-1,1]$ et un entier $n \in \mathbb{N}$, trouver $n+1$ points $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ distincts qui minimisent $\|\Pi_{n+1}\|_\infty = \max\limits_{x\in[-1,1]} |\Pi_{n+1}(x)|$.
L'existence de ces points est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4 : *Abscisses de Tchebichev*

1) La fonction $T_{n+1}(x) = \cos\left((n+1)\arccos(x)\right)$ définie pour $x \in [-1,1]$ est un polynôme de degré $n+1$ en x, appelé polynôme de Tchebichev. Ce polynôme admet exactement $n+1$ racines distinctes dans $[-1,1]$, appelées abscisses de Tchebichev.

2) Les $(n+1)$ racines du polynôme de Tchebichev T_{n+1} minimisent la quantité $\|\Pi_{n+1}\|_\infty$.

On montre facilement par récurrence que les T_n vérifient

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{cases}$$

Ces relations permettent d'établir que T_{n+1} est bien un polynôme de degré $n+1$. Cherchons à présent les racines de ce polynôme. On cherche les x_i tels que $\cos\left((n+1)\arccos(x_i)\right) = 0$. On a donc $(n+1)\arccos(x_i) = \dfrac{\pi}{2} + i\pi = \dfrac{(2i+1)\pi}{2}$ pour $i \in \mathbb{Z}$, d'où $x_i = \cos\left(\dfrac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right)$. On voit en fait qu'il y a $n+1$ racines distinctes et puisque $\deg(T_{n+1}) = n+1$, ce sont nécessairement les seules racines.
Ainsi, les $n+1$ abscisses de Tchebichev sont données par

$$\boxed{x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad i = 0, \ldots, n.}$$

Exemple : Pour $n = 2$, les 3 abscisses de Tchebichev sont $x_0 = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_1 = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $x_0 = \cos(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\square$

Les points x_i sont répartis symétriquement autour de 0 (car $x_{n-i} = -x_i$) et de façon plus dense au voisinage de 1 et -1. En fait, lorsque n croît, les abscisses se concentrent autour des bords de l'intervalle (cf. Figure 3.4)

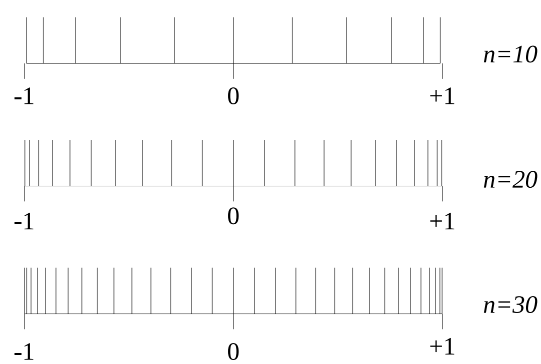

FIG. 3.4 – Abscisses de Tchebichev.

<u>*Abscisses de Tchebichev sur un intervalle* $[a, b]$</u> : Il suffit de prendre $t_i = \dfrac{(a+b)}{2} + \dfrac{(b-a)}{2} x_i$, où les x_i sont les abscisses de Tchebichev données sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Revenons maintenant au problème de la convergence du polynôme d'interpolation. En choisissant les abscisses de Tchebichev comme points d'interpolation, on sait maintenant que la quantité $\|\Pi_{n+1}\|_\infty$ est la plus petite possible donc converge vers 0 quand $n \to +\infty$ puisque c'est le cas avec des points équidistants. Mais est-ce suffisant pour assurer la convergence ? Si la $(n+1)$-ième dérivée de la fonction f ne croît pas trop vite avec n alors la réponse est positive. La figure 3.5 montre ce que donne les abscisses de Tchebichev avec l'exemple de Runge (cf. section 1.8.1).

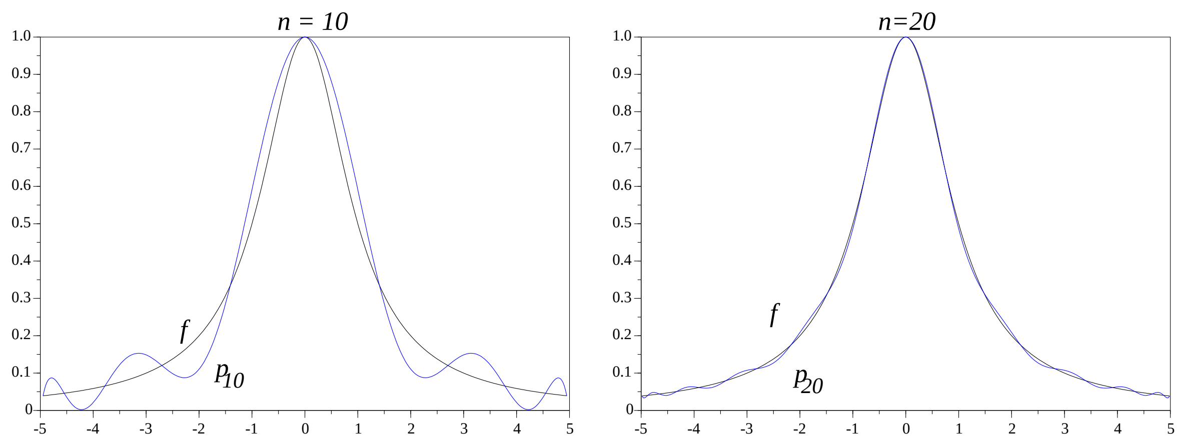

FIG. 3.5 – Interpolation avec les abscisses de Tchebichev.

En fait, on peut montrer (théorème de Faber) que si f est analytique sur $[a, b]$ (f développable en série entière), alors le polynôme d'interpolation de f associé aux abscisses de Tchebichev converge uniformément vers f sur l'intervalle $[a, b]$.

Remarque : Si on ordonne de façon croissante (ou décroissante) les abscisses de Tchebichev et qu'on utilise les différences divisées avec un schéma de Horner pour calculer le polynôme d'interpolation, des instabilités numériques peuvent alors apparaître autour des extrémités de l'intervalle, lorsque le nombre de points n est grand (du fait notamment de soustractions de quantités très proches : cf. Chapitre 1, Arithmétique flottante). Une façon d'y rémédier est de répartir les abscisses de Tchebichev alternativement de gauche à droite de l'origine.

3.8 Interpolation de Lagrange-Hermite

Dans certains problèmes, on est amené à chercher un polynôme qui interpole une fonction f en des points donnés (interpolation de Lagrange) ainsi que les dérivées en ces points (pentes données). C'est l'interpolation de Lagrange-Hermite. Plus précisement, on se donne des triplets (x_i, y_i, y_i'), pour $i = 0, \ldots, n$, où $y_i = f(x_i)$ et $y_i' = f'(x_i)$ sont connus (f' désigne la dérivée de f). On cherche alors un polynôme p (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite) tel que :

$$\begin{cases} p(x_i) = y_i \\ p'(x_i) = y_i', \quad \text{pour } i = 0, \ldots, n. \end{cases}$$

On voit clairement qu'on dispose de $2(n+1)$ équations. Il faut donc $2(n+1)$ inconnues et par conséquent on cherche un polynôme de degré $\leq 2n + 1$.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i H_i(x) + \sum_{i=0}^{n} y_i' K_i(x), \tag{3.14}$$

où les polynômes de Lagrange-Hermite H_i et K_i sont définis par

$$\begin{aligned} H_i(x) &= \left(1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)\right) L_i^2(x), \\ K_i(x) &= (x - x_i)L_i^2(x) \end{aligned}$$

et ceci pour $i = 0, \ldots, n$. On vérifie que H_i et K_i sont bien des polynômes de degré $2n + 1$.

3.9 Interpolation polynomiale par morceaux

3.9.1 Interpolation de Lagrange par morceaux

Les inconvénients majeurs de l'interpolation polynomiale de Lagrange, sont d'une part le coût élevé si le nombre n de points d'interpolation est grand (coût en $O(n^2)$ pour la base de Newton avec un schéma d'Horner) et d'autre part des effets de bords mal maitrisés. Une alternative possible consiste à effectuer des interpolations par morceaux. Supposons qu'on veuille interpoler une fonction f sur un intervalle $[a, b]$. L'interpolation par morceaux consiste - comme son nom l'indique - à interpoler f sur des sous-intervalles de $[a, b]$. On limite le degré m d'interpolation ($m = 2$ par exemple) dans chaque sous-intervalle et on regroupe les données. De cette façon, on obtient un raccord de continuité C^0 pour l'interpolation (cf. Figure 3.6).

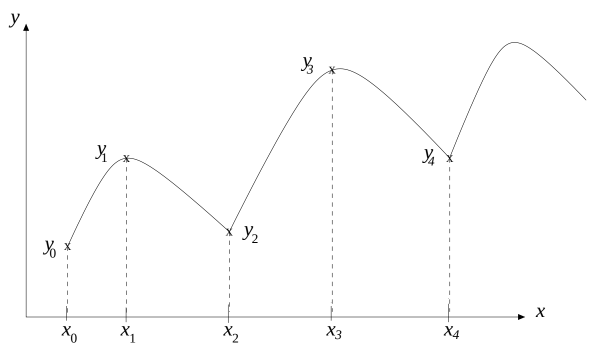

FIG. 3.6 – Interpolation de Lagrange par morceaux.

Convergence de l'interpolation de Lagrange par morceaux.

On va montrer que l'interpolation par morceaux est un processus convergent contrairement à l'interpolation polynômiale *globale*. Considérons pour cela un nombre entier m **fixé** ($m = 1, 2$ ou 3) et subdivisons l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de la forme $I_i = [x_{im}, x_{(i+1)m}]$. Soit alors p_i le polynôme de degré $\leq m$ qui interpole f sur le sous-intervalle I_i. D'après l'estimation (3.13) sur l'erreur d'interpolation, on a $\max_{x \in I_i} |f(x) - p_i(x)| \leq \dfrac{h^{m+1}}{(m+1)} \max_{x \in [a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$. où $h = \max_i |x_{i+1} - x_i|$. Si on note p la fonction définie sur tout $[a, b]$ et obtenue par recollement des polynômes p_i, on obtient

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{h^{m+1}}{(m+1)} \max_{x \in [a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|. \tag{3.15}$$

Par conséquent, on obtient bien la convergence (uniforme) de p vers f lorsque h tend vers 0 car m est désormais <u>fixe</u>. Le fait que h tende vers zéro traduit le fait que le nombre de sous-intervalles sur lesquels on effectue des interpolations par morceaux tendent vers l'infini tout en maintenant m points dans chacun de ces sous-intervalles. L'estimation (3.15) montre que l'erreur d'interpolation par morceaux est d'ordre $\mathcal{O}(h^{m+1})$ où m est le degré des polynômes d'interpolation. On fera enfin remarquer qu'on ne fait aucune hypothèse sur la répartition des points d'interpolation et que ceux-ci peuvent très bien être choisis de façon équidistante.

3.9.2 Interpolation de Lagrange-Hermite par morceaux

L'inconvénient de l'interpolation de Lagrange par morceaux est de fournir une interpolation seulement continue (raccord C^0). En conservant l'idée d'interpolation par morceaux, on peut améliorer ce raccord avec l'interpolation de Lagrange-Hermite.
La méthode consiste à faire de l'interpolation de Lagrange-Hermite non pas sur tout l'intervalle $[a, b]$ mais sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. On obtient ainsi des polynômes d'interpolation de degré 3 sur chacun des sous-intervalles $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$. Puis on regroupe les données. Puisqu'on a un raccordement de polynômes de degré 3 ainsi que de leurs dérivées, on obtient globalement un raccord C^1 pour l'interpolation (continue ainsi que la dérivée).

<u>*Evaluation du polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite.*</u>

Il est possible d'utiliser l'interpolation de Lagrange et les différences divisées pour déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite sur un sous-intervalle de la forme $[x_i, x_{i+1}]$. En effet, plaçons nous pour fixer les idées, sur le sous-intervalle $[x_0, x_1]$. On cherche le polynôme d'interpolation de degré 3 tel que

$$\begin{array}{ll} p(x_0) = y_0, & p(x_1) = y_1, \\ p'(x_0) = y'_0, & p'(x_1) = y'_1, \end{array}$$

où on suppose que $y_i = f(x_i)$ et $y'_i = f'(x_i)$ c'est-à-dire qu'on connait les valeurs d'une fonction f ainsi que les dérivées aux points x_i. On introduit alors 2 points supplémentaires $\varepsilon < \varepsilon'$ dans le sous-intervalle $[x_0, x_1]$ et destinés à tendre respectivement vers x_0 et x_1. On considère alors le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points x_0, ε, ε', x_1 (on oublie Hermite). On peut évaluer ce polynôme par différences divisées puis ensuite faire tendre ε vers x_0 et ε' vers x_1. On remarque que $f[x_0, \varepsilon] = \dfrac{f(\varepsilon) - y_0}{\varepsilon - x_0} \longrightarrow f'(x_0) = y'_0$ quand $\varepsilon \to x_0$. De même, on a $f[\varepsilon', x_1] = \dfrac{f(\varepsilon') - y_1}{\varepsilon' - x_1} \longrightarrow y'_1$ quand $\varepsilon' \to x_1$. On peut alors calculer les différences divisées dans un tableau où on a "doublé" les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1).

Exemple : Cherchons le polynôme de degré 3 tel que

$$\begin{array}{ll} p(0) = 1, & p(1) = 0, \\ p'(0) = 0, & p'(1) = 2. \end{array}$$

On calcule alors les différences divisées par le tableau suivant :

y'_0 donné (non calculé)

$$\begin{array}{c|c|cccc} x_i & y_i & & & \\ \hline 0 & \boxed{1} & & & \\ 0 & 1 & \boxed{0} & & \\ 1 & 0 & -1 & \boxed{-1} & \\ 1 & 0 & 2 & 3 & \boxed{4} \end{array}$$

y'_1 donné (non calculé)

On obtient ainsi $p(x) = 1 + 0 \times (x - 0) - 1 \times (x - 0)^2 + 4 \times (x - 0)^2(x - 1) = 1 - x^2 + 4x^2(x - 1)$.
$\square$

L'avantage de cette méthode est de fournir une interpolation plus régulière que l'interpolation de Lagrange par morceaux mais en revanche elle requière la connaissance des dérivées y'_i. Or dans la pratique, ces quantités ne sont pas toujours données ou connues.