

2.4

Travail demandé :

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le texte joint à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

Remarques générales :

1. Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligences ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs...) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.

2. Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.

Remarques particulières :

1. Un espace topologique est un ensemble E muni d'une famille \mathcal{O} de parties (appelées les ouverts) satisfaisant aux propriétés suivantes :

- i) E et l'ensemble vide sont dans \mathcal{O}
- ii) une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert
- iii) une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Une partie U de E est un voisinage d'un point $x \in U$ si elle contient un ouvert contenant x .

Une topologie est dite séparée si des éléments distincts possèdent des voisinages disjoints.

2. Une application $f : E \rightarrow E'$ entre deux espaces topologiques est dite continue si l'image réciproque par f de tout ouvert de E' est un ouvert de E .

3. Un homéomorphisme entre deux espaces topologiques est une application bijective, continue, dont la bijection réciproque est continue.

Le lecteur pourra toujours supposer que les espaces topologiques considérés sont des sous-ensembles E d'un espace vectoriel euclidien de dimension assez grande, et que la topologie y est obtenue en prenant l'intersection de E avec les ouverts (au sens de la topologie donnée par la norme euclidienne) de cet espace euclidien.

Caractéristique d'Euler des surfaces et présentation
de polyèdres célèbres

Table des matières

Introduction	2
1 Définitions utiles	3
1.1 Polyèdres	3
1.2 Surfaces	4
1.3 Triangulation : définition et propriétés	4
2 Formule d'Euler : présentation empirique de la caractéristique d'Euler	6
3 Géométrie sphérique et caractéristique d'Euler	9
3.1 Grands cercles, fuseaux et triangles sphériques	9
3.2 Aire sur une sphère	11
3.3 Polyèdres et formule d'Euler	12
4 Surfaces et caractéristique d'Euler	14
4.1 Surfaces orientables ou non-orientables	14
4.2 Pliage d'un carré pour obtenir un tore ou un plan projectif .	16
4.3 Somme connexe	18
4.4 Théorème fondamental	20
4.5 Caractéristique d'Euler	20

Introduction

Dès l'antiquité grecque, les polyèdres ont fasciné les plus grands savants. Platon avait énoncé une théorie selon laquelle tout élément classique avait été créé à partir des 5 polyèdres réguliers convexes (les solides de Platon). Si la découverte de ces 5 polyèdres peut être attribuée à Pythagore, c'est un contemporain de Platon, Théétète, qui a transmis la première démonstration qu'il n'existe pas d'autres polyèdres réguliers convexes. Dans son livre *Eléments* (livre XIII), Euclide a repris cette étude en la complétant par des propriétés de ces différents polyèdres : par exemple, le rapport entre la longueur d'un côté du polyèdre et le diamètre de sa sphère circonscrite. D'autres théories concernant ces 5 polyèdres ont existé, notamment celle de l'astronome allemand Johannes Kepler. Celui-ci présenta dans son livre *Mysterium Cosmographicum*, publié en 1596, un modèle de système solaire dans lequel les cinq solides étaient fixés les uns dans les autres et séparés par une série de sphères inscrites et circonscrites.

Au XVIII^e siècle, le célèbre mathématicien et physicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) s'est également penché sur la géométrie et la topologie algébrique. De ses travaux, on retient notamment le cercle et la droite d'Euler pour un triangle dans le plan, mais aussi la formule d'Euler pour les polyèdres ($S - A + F = 2$, où S est le nombre de sommets du polyèdre, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces) et la caractéristique d'Euler pour les surfaces ($\chi(M) \in]-\infty, 2]$). Concernant la formule d'Euler, il semblerait que Descartes est également découvert une formule similaire. C'est pourquoi cette formule est fréquemment appelée : relation ou théorème de Descartes-Euler. De même, la caractéristique d'Euler est aussi appelée caractéristique d'Euler-Poincaré, car celle-ci a été le point de départ de travaux de Poincaré sur la topologie algébrique, plus particulièrement sur l'homologie.

Dans notre premier chapitre, nous définirons différentes notions, qui nous serviront tout au long de notre étude. Puis, nous nous intéresserons à la formule d'Euler pour les polyèdres à partir de deux approches différentes : l'une plus empirique, l'autre fondée sur la géométrie sphérique. Puis, nous étendrons notre étude à la caractéristique d'Euler pour les surfaces et nous essaierons de classer ces dernières. Finalement, nous étudierons quelques familles célèbres de polyèdres, qui, grâce à la formule d'Euler, nous seront plus familières.

Chapitre 1

Définitions utiles

Nous travaillerons dans un espace euclidien de dimension 3.

1.1 Polyèdres

Nous allons tout d'abord définir la notion, plus générale, de polytope. Puis, nous donnerons une première définition d'un polyèdre.

Remarque 1.1. *Un ensemble convexe est connexe.*

Définition 1.1. *L'enveloppe convexe d'un sous-ensemble de l'espace est l'intersection de tous les ensembles convexes qui contiennent ce sous-ensemble.*

Définition 1.2. *Un polytope est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points.*

Définition 1.3 (Première définition). *Un polyèdre (convexe) est un polytope de dimension 3.*

Remarque 1.2. *Il existe d'autres polytopes en dimension inférieure : les polygones en dimension 2 par exemple.*

Cependant, cette définition n'est pas assez précise. C'est pourquoi nous allons la compléter à partir de celle de M. Audin, pour laquelle nous avons besoin d'autres éléments géométriques.

Définition 1.4. *Une arête est un espace ouvert connexe de dimension 1. C'est le lieu d'intersection de deux plans (ou demi-plans, ou tout autre espace ouvert convexe du plan).*

Définition 1.5. *Une face est un espace ouvert convexe du plan délimité par des arêtes.*

Définition 1.6. *Un sommet est un point de l'espace, où se coupent au moins trois arêtes et un nombre égal de faces.*

Définition 1.7 (Deuxième définition). *Un polyèdre (convexe) est un polytope de dimension 3, dont l'ensemble de points est non coplanaire. Celui-ci est limité par des faces, limité par des arêtes, limité par des sommets.*

Ainsi, lorsque nous parlerons de polyèdres, c'est à cette dernière définition que nous nous référerons.

Remarque 1.3. *Notons qu'ici nous n'étudierons pas les polytopes dégénérés, tels qu'un polygone à deux arêtes (digone).*

1.2 Surfaces

Nous allons présenter deux définitions de la notion de surface. Celles-ci se complètent et permettent d'avoir deux approches différentes de cette notion.

Définition 1.8 (Définition 1). *Une variété de dimension n , ou une n -variété, est un espace de Hausdorff (espace topologique séparé) localement homéomorphe à un espace vectoriel réel de dimension n .*

Définition 1.9 (Définition 2). *Une variété de dimension n est un espace topologique séparé, dont chaque point possède un voisinage ouvert homéomorphe à la boule unité de dimension n .*

Remarque 1.4. *Une n -variété est toujours localement compact.*

Cependant, ces deux définitions nous empêchent de considérer un espace fermé comme une variété. Par exemple, un disque fermé n'est pas une variété, alors que le disque ouvert l'est. Cependant, il est plus facile d'imaginer un disque fermé qu'un disque ouvert. C'est pourquoi nous allons définir la notion de variété à bord.

Définition 1.10. *Une variété à bord est la réunion d'une variété et de sa frontière.*

Définition 1.11. *Nous appellerons surfaces les variétés connexes de dimension 2 et surfaces à bord les variétés à bord connexes de dimension 2.*

1.3 Triangulation : définition et propriétés

La triangulation d'une surface à bord consiste à partager d'une façon particulière une surface à bord donnée par des "triangles".

Remarque 1.5. *Les "triangles" sont nommés ainsi, mais ils sont en réalité les images d'un triangle du plan par un homéomorphisme. De même, on nomme respectivement "arête" et "sommet" du "triangle" l'image d'une arête et d'un sommet d'un triangle par ce même homéomorphisme.*

La triangulation doit obéir à quelques règles que nous allons énoncer :

- l'ensemble des "triangles" obtenus est une famille finie d'ensembles fermés, qui recouvre la surface donnée,
- deux "triangles" distincts sont soit disjoints, soit ont en commun un "sommet" ou une "arête" toute entière (donc également deux sommets).

Remarque 1.6. *On admettra que toute surface à bord peut être triangulée.*

On peut également effectuer le procédé inverse, c'est-à-dire construire une surface compacte à l'aide de triangles en suivant les règles énoncées précédemment. On peut donc procéder par étape successive et numéroter tous les triangles : à chaque étape, on rajoute un triangle et on lui attribue le numéro suivant.

Proposition 1.1. *Chaque arête est commune à au plus deux triangles.*

Démonstration . *Nous allons reprendre les règles de la triangulation énoncées ci-dessus pour voir combien de triangles peuvent avoir une même arête.*

Soient deux triangles de la triangulation et une arête A du premier triangle.

- *Si ces deux triangles sont disjoints, l'arête A ne peut pas appartenir au deuxième triangle.*
- *Si ces deux triangles ont un sommet en commun, l'arête A ne peut pas appartenir au deuxième triangle.*
- *Si ces deux triangles ont une arête toute entière en commun, cette arête peut être l'arête A et celle-ci ne peut appartenir qu'aux seuls deux triangles considérés.*

Une arête d'une triangulation ne peut donc être commune qu'au plus à deux triangles.

Remarque 1.7. *En fait, si l'arête appartient au bord de la surface de départ, celle-ci n'appartient qu'à un seul triangle ; sinon l'arête est commune à exactement deux triangles.*

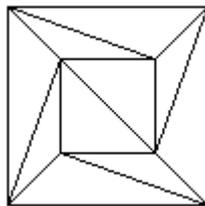


FIG. 1.1 – Exemple d'une triangulation

Chapitre 2

Formule d'Euler : présentation empirique de la caractéristique d'Euler

Nous allons montrer grâce à une expérience mentale que, pour les polyèdres, nous avons la formule d'Euler : $S - A + F = 2$, où S est le nombre de sommets du polyèdre, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces.

La démonstration tient en trois étapes et une première proposition, que nous allons énoncer et démontrer immédiatement :

Proposition 2.1. *Tout triangle vérifie $S - A + F = 1$.*

Démonstration . *Il suffit de compter le nombre d'arêtes (3), le nombre de sommets (3) et le nombre de faces (1) d'un triangle. Donc : $3 - 3 + 1 = 1$. On obtient ce qu'il fallait démontrer.*

Nous allons détailler chaque étape en l'appliquant à un cube.

Étape 1 : A tout polyèdre, on peut ôter une face (face rose) et le projeter ensuite sur le plan qui contenait la face.

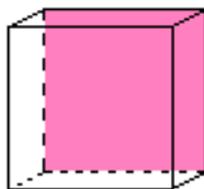


FIG. 2.1 – Dessin du cube et de la face que nous allons ôter.

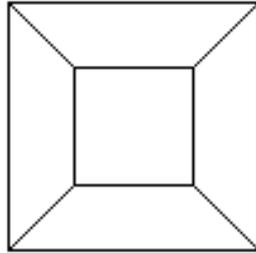


FIG. 2.2 – Projection du cube

Étape 2 : La surface à bord connexe obtenue peut être triangulée et cette triangulation peut être numérotée de sorte qu'un triangle ait soit une arête en commun, soit un sommet en commun avec le triangle qui le précède dans la liste.

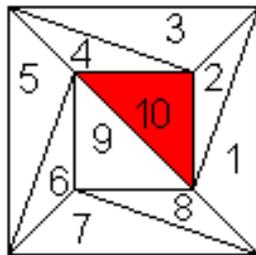


FIG. 2.3 – Triangulation de la surface

Étape 3 : On peut ôter les triangles obtenus un par un, en suivant l'ordre établi précédemment, jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un unique triangle (triangle rouge).

Ces étapes sont facilement applicables aux polyèdres.

De plus, on peut les effectuer dans le sens inverse, c'est-à-dire qu'on peut, à partir d'un triangle unique (étape 3), obtenir une surface triangulée (étape 2). Puis, en effectuant la projection inverse et en rajoutant une face (étape 1), on peut retrouver un polyèdre.

Preuve de la formule d'Euler pour les polyèdres :

Prenons un polyèdre comme nous l'avons défini. *Nous noterons en italique les modifications apportées à la formule d'Euler : $S - A + F = 2$.*

Étape 1 : choisissons une face du polyèdre et ôtons la. *On soustrait 1 à F .* Le plan, qui passait par la face, sera notre plan de projection. Projetons toutes les faces restantes sur ce plan. Nous avons donc transformé notre polyèdre de dimension 3 en une surface plane de dimension 2. *Après l'étape 1, nous avons : un polyèdre vérifie la formule d'Euler si et seulement si, pour la surface projetée, on a : $S - A + F = 1$.*

Étape 2 : triangulons la surface obtenue et numérotions les triangles de sorte qu'un triangle ait soit une arête en commun, soit un sommet en commun avec le triangle qui le précède dans la liste. Nous ne montrerons pas qu'une telle triangulation est possible. *Cette opération ne modifie pas la formule d'Euler.*

Étape 3 : ôtons les triangles les uns après les autres. Or, ôter un triangle revient soit à ôter une face et une arête, soit une face, un sommet et deux arêtes. *Par conséquent, cette opération ne modifie pas la formule d'Euler.* A la fin, il ne nous reste plus qu'un unique triangle.

Ainsi, on a : un polyèdre vérifie la formule d'Euler si et seulement si un triangle vérifie : $S - A + F = 1$. Or, d'après la proposition démontrée ci-dessus, on a bien le fait qu'un triangle vérifie : $S - A + F = 1$.

D'où : un polyèdre vérifie la formule d'Euler.

Chapitre 3

Géométrie sphérique et caractéristique d'Euler

3.1 Grands cercles, fuseaux et triangles sphériques

Nous allons considérer une sphère, sauf indication contraire la sphère est de rayon R .

Définition 3.1. *Nous allons appeler **grand cercle**, l'intersection entre les plans passant par le centre de la sphère et celle-ci.*

Remarque 3.1. *Sur une sphère donnée, il suffit de connaître deux points non diamétralement opposés pour définir un grand cercle.*

Proposition 3.1. *Deux grands cercles distincts ont deux points d'intersection.*

Démonstration . *Prenons les deux plans, dont l'intersection avec la sphère nous donne les deux grands cercles. Ceux-ci sont distincts et ont un point commun : le centre de la sphère. Donc ces deux plans ont une droite en commun, qui passe par le centre de la sphère. L'intersection de cette droite avec la sphère nous donne deux points diamétralement opposés. Ces deux points appartiennent aux deux plans et à la sphère. Ce sont donc les deux points d'intersection des grands cercles.*

Proposition 3.2. *Trois grands cercles distincts ont deux ou six points d'intersection, deux à deux diamétralement opposés.*

Démonstration . *Les trois plans, dont l'intersection avec la sphère nous donne les trois grands cercles, ont un point en commun : le centre de la sphère, mais ils ne sont pas confondus. Par conséquent, ces plans ont soit une droite en commun, soit un point en commun.*

Premier cas : les trois plans, dont l'intersection avec la sphère nous donne les trois grands cercles, ont une droite en commun, qui passe par

le centre de la sphère. L'intersection de cette droite avec la sphère nous donne deux points diamétralement opposés. Ces deux points appartiennent aux trois plans et à la sphère. Ce sont les deux points d'intersection des grands cercles.

Deuxième cas : les trois plans, dont l'intersection avec la sphère nous donne les trois grands cercles, ont un point en commun, qui est le centre de la sphère. Il suffit alors de considérer les plans, dont l'intersection avec la sphère nous donne les grands cercles deux par deux, c'est-à-dire de considérer les deux premiers, puis les deux derniers, enfin le premier et le troisième. A chaque fois, nous obtenons une droite, qui passe par le centre de la sphère. Or ces trois droites ne sont pas confondues. Donc elles ont un unique point commun. L'intersection de ces trois droites avec la sphère nous donne trois couples distincts de points diamétralement opposés. Ces six points appartiennent à deux plans et à la sphère. Ce sont les six points d'intersection des grands cercles.

Définition 3.2. Une partie de la sphère délimitée par deux grands cercles sera appelée *fuseau*.

Rappel :

Pour connaître la mesure de l'angle entre deux grands cercles sur une sphère de dimension 3, on se ramène à un angle de droites dans un plan de dimension 2.

Pour cela, il faut tout d'abord projeter localement les grands cercles sur le plan tangent à la sphère au point d'intersection I des deux grands cercles, puis tracer les tangentes des grands cercles au point I et finalement mesurer l'angle entre ces tangentes (comme pour un angle de droites en dimension 2).

Définition 3.3. Un fuseau d'angle θ est un fuseau, dont la mesure de l'angle entre les deux grands cercles (à leur point d'intersection) vaut θ .

Remarque 3.2. Deux grands cercles distincts délimitent quatre fuseaux : deux d'angle θ et deux d'angle $\pi - \theta$.

Définition 3.4. Une figure limitée par trois grands cercles, ayant six points d'intersection, sera appelée *triangle*.

Remarque 3.3. Ces trois grands cercles délimitent huit triangles, qui forment une partition de la sphère.

Pour preuve, considérons une pomme que l'on découperait trois fois suivant des axes différents passant par le centre de la pomme : la première coupe nous donne 2 parties de pomme, la seconde 4 (2^2) parties de pomme et la dernière 8 (2^3) parties de pomme. Les triangles sont les surfaces de peau sur chaque partie. Avec les 8 parties de pomme, on peut reconstituer la pomme.

Remarque 3.4. *Un triangle, ainsi défini, est limité par trois arêtes, limitées par trois sommets. Les arêtes sont des parties connexes des grands cercles et sont homéomorphes à des intervalles de la droite réelle. Les sommets sont les points d'intersection entre les trois grands cercles.*

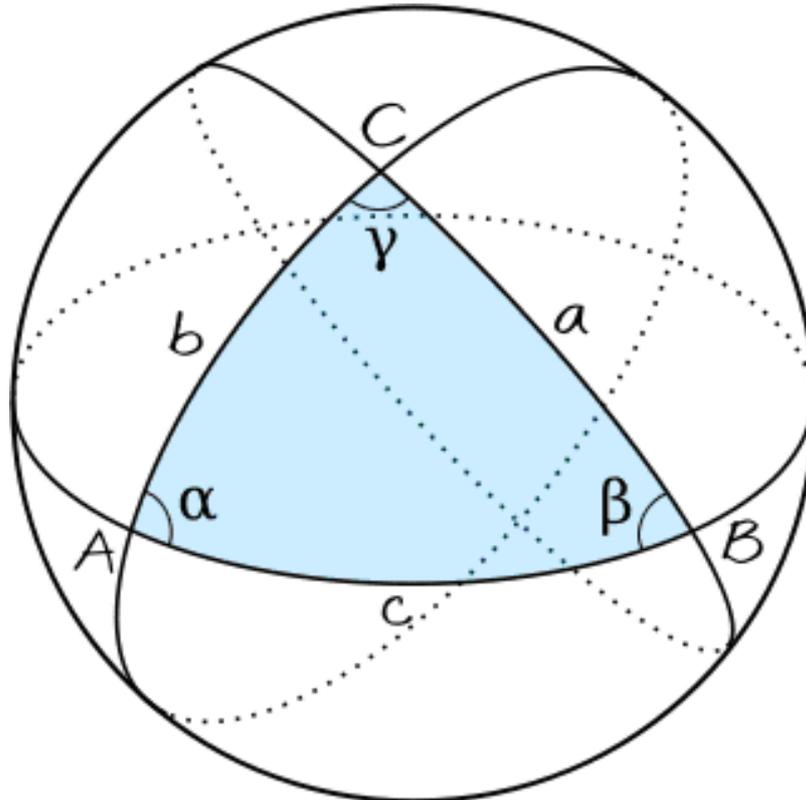


FIG. 3.1 – Représentation d'un triangle sphérique

3.2 Aire sur une sphère

Proposition 3.3. *Il existe une fonction **aire**, définie sur un ensemble de parties de la sphère qui contient les fuseaux et les triangles, qui prend des valeurs positives et qui vérifie : l'aire est invariante par isométries, additive et l'aire totale d'une sphère de rayon R vaut $4\pi R^2$.*

Conséquence : Comme l'aire d'une sphère de rayon R vaut $4\pi R^2$, alors proportionnellement l'aire d'un fuseau d'angle α est donnée par $\frac{\alpha}{2\pi} \times 4\pi R^2$, c'est-à-dire $2\alpha R^2$.

Nous avons évalué l'aire d'un fuseau ; nous allons donc calculer celle d'un triangle.

Proposition 3.4 (Formule de Girard). *Soit T un triangle sphérique d'angles α , β et γ . On a alors : $Aire(T) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.*

Démonstration . *Considérons la sphère contenant le triangle T . Nous prendrons un des grands cercles qui délimite le triangle T comme ligne séparatrice entre les deux hémisphères.*

Considérons la demi-sphère, qui contient le triangle T . Nous allons calculer l'aire de cette demi-sphère de deux façons différentes :

- *Nous savons que l'aire totale d'une sphère de rayon R vaut $4\pi R^2$, donc l'aire d'une demi-sphère de rayon R vaut $2\pi R^2$.*

- *Nous savons que nous pouvons construire une partition composée de huit triangles de la sphère à partir de trois grands cercles. Ainsi, à partir des trois grands cercles qui délimitent le triangle T , nous obtenons une partition de la sphère. Comme nous avons choisi l'un de ces grands cercles comme ligne séparatrice entre les deux hémisphères, il existe une partition de la demi-sphère composée de quatre triangles, dont le triangle T .*

Considérons à présent les fuseaux qui recouvrent cette demi-sphère. En effet, nous avons ici ,appartenant entièrement à la demi-sphère, trois fuseaux : l'un d'angle α , l'autre d'angle β et le dernier d'angle γ . Le triangle T est l'intersection de ces trois fuseaux. De plus, ces fuseaux ne s'intersectent deux à deux que sur le triangle T . Par conséquent, nous avons :

aire de la demi-sphère = aire des 3 fuseaux - $2 \times$ aire du triangle T .

- *D'où : $Aire(T) = \frac{2\alpha R^2 + 2\beta R^2 + 2\gamma R^2 - 2\pi R^2}{2}$.*

C'est-à-dire : $Aire(T) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.

Corollaire . *La somme des angles d'un triangle sphérique est supérieure à π .*

Démonstration . *Utilisons la formule de Girard. La fonction aire est à valeurs positives.*

Or : $R^2 \geq 0$,

donc aussi : $\alpha + \beta + \gamma - \pi \geq 0$.

Donc : $\alpha + \beta + \gamma \geq \pi$.

3.3 Polyèdres et formule d'Euler

Proposition 3.5 (Formule d'Euler). *Soit F le nombre de faces, A le nombre d'arêtes, S le nombre de sommets d'un polyèdre P .*

Pour tout polyèdre convexe, on a la relation suivante : $S + F = A + 2$.

Remarque 3.5. *Dans cette démonstration, nous allons trianguler des polygones. Pour cette triangulation, il suffit de choisir un sommet d'un polygone*

à k côtés; puis, de relier ce point à tous les sommets du polygone, qui ne sont pas déjà reliés à ce sommet, c'est-à-dire les k sommets, sauf les deux sommets qui lui sont reliés par des arêtes du polygone. Nous avons donc $(k-2)$ triangles pour un polygone à k côtés.

Démonstration . Choisissons un point O dans l'intérieur de P . Considérons la sphère Σ de centre O et de rayon 1. Considérons l'image de P par la projection radiale : $x \rightarrow \frac{x}{\|x\|}$.

Celle-ci envoie :

- les sommets de P sur des points de Σ ,
- les arêtes de P sur des arcs de grands cercles : un segment $[MN]$ est envoyé sur l'intersection de Σ avec le plan (OMN) ,
- les faces de P sur des polygones sphériques.

On a ainsi construit une variante courbe de notre polyèdre, dessinée sur la sphère Σ .

La démonstration consiste à calculer de deux façons différentes la somme de tous les angles de tous les polygones sphériques obtenus.

- D'une part, en chaque sommet, la somme est 2π , et donc la somme totale est $2\pi S$.

- D'autre part, c'est aussi la somme de tous les angles de toutes les faces. En triangulant un polygone à k sommets comme dans la remarque précédant la démonstration et en appliquant la formule de Girard, on remarque que la somme des angles de ce polygone est son aire à laquelle il faut ajouter $(k-2)\pi$. Nous avons ainsi évalué : $2\pi S = \sum_{f \text{ face}} (\text{Aire}(f) + (\text{nombre de sommets de } f - 2))\pi$.

La somme des aires de toutes les faces est l'aire de la sphère unité, soit 4π . Comme chaque face a autant d'arêtes que de sommets et comme chaque arête appartient à deux faces, la somme des nombres de toutes les faces est $2A$ et il nous reste l'égalité :

$$2\pi S = 4\pi + 2A\pi - 2F\pi,$$

qui donne la formule d'Euler quand on la divise par 2π .

Chapitre 4

Surfaces et caractéristique d'Euler

4.1 Surfaces orientables ou non-orientables

Définition 4.1. *Deux repères ayant même origine définissent la même orientation si le déterminant de la matrice de passage entre ces deux repères est strictement positif.*

On classifera les surfaces en deux types : celles orientables et celles non-orientables. Pour les différencier, on va tout d'abord définir un *lacet avec inversion* d'une surface quelconque.

Définition 4.2. *On choisit un lacet (un chemin fermé) appartenant à la surface. On choisit ensuite un point sur le lacet et on choisit un repère dont l'origine est le point choisi. A partir de ce point, on parcourt le lacet jusqu'à y revenir pour la première fois. Si le nouveau repère ainsi obtenu ne définit pas la même orientation, alors ce lacet est un lacet avec inversion.*

Définition 4.3. *Une surface est dite non-orientable s'il existe un lacet avec inversion sur cette surface. Une surface est dite orientable si, pour tout lacet de la surface, ce n'est pas un lacet avec inversion.*

Exemples de surfaces orientables :

- la sphère S^2 ;
- le tore : une surface compacte ressemblant à un "beignet" ou à un anneau solide. Plus précisément, un tore est tout espace topologique homéomorphe au produit de deux cercles $S^1 \times S^1$, ou encore tout espace topologique homéomorphe à l'ensemble suivant de \mathbb{R}^3 : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : [(x^2 + y^2)^{1/2} - 2]^2 + z^2 = 1\}$ (nous verrons une autre description d'un tore dans le paragraphe suivant).

Exemples de surfaces non-orientables :

- le plan projectif : une surface, homéomorphe à la sphère S^2 , dont on a identifié les points diamétralement opposés (nous verrons une autre description d'un plan projectif dans le paragraphe suivant) ;
- le ruban de Möbius : une surface à bord non orientable de \mathbb{R}^2 découverte en 1858 par August Ferdinand Möbius. Pour visualiser un ruban de Möbius, il suffit de considérer une bande de papier longue, mais peu large, dont on aurait rejoint les deux bouts en formant une boucle.

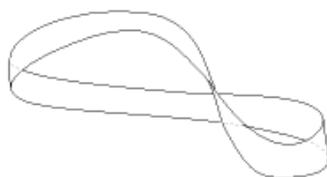


FIG. 4.1 – Un ruban de Möbius

Remarque 4.1. Rappelons nous de la projection stéréographique du plan complexe sur la sphère S^2 . Celle-ci permet de rappeler l'homéomorphisme entre un plan et une sphère. Cette projection ramène "l'infini" en un point : le pôle nord de la sphère. Pour le plan projectif, "l'infini" est un ensemble non dénombrable de points, mais dont on a identifié des couples de points. Imaginons le plan projectif comme une infinité de cercles, dont le rayon est une fonction strictement croissante. Lorsque ces cercles "touchent l'infini", on identifie les points diamétralement opposés entre eux.

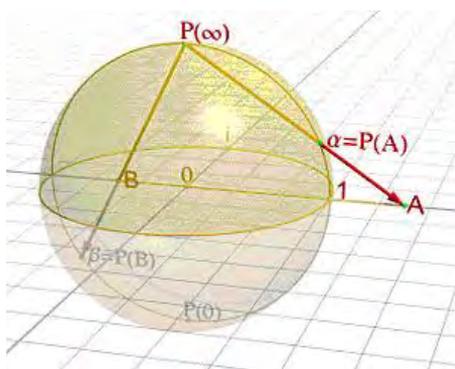


FIG. 4.2 – Projection stéréographique

4.2 Pliage d'un carré pour obtenir un tore ou un plan projectif

Voici une autre description du tore et du plan projectif.

Nous allons définir tout d'abord un *pliage*. Pour le pliage, nous commençons la description d'un pliage à partir d'un carré, qui représente la surface de départ à partir de laquelle nous allons agir en respectant les deux règles suivantes :

- deux lettres identiques signifient que les arêtes, qui portent cette lettre, représentent la même arête.

Or, il y a alors deux possibilités : soit l'orientation des deux arêtes est la même, soit celle-ci est inversée. C'est pourquoi on place également des flèches sur les arêtes pour indiquer le sens de l'arête.

- les flèches présentes sur les arêtes avec la même lettre doivent également se superposer.

Description d'un tore :

Le dessin suivant nous permettra de compléter les explications du pliage.

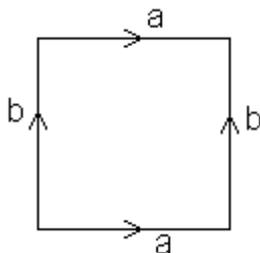


FIG. 4.3 – Pliage d'un carré pour obtenir un tore

La première étape du pliage consiste à superposer un couple d'arêtes. Prenons, par exemple, les arêtes *a*. Superposons-les dans le sens indiqué par les flèches. Nous obtenons ainsi un tube (un cylindre sans les disques des bases).

La deuxième étape consiste à superposer le deuxième couple d'arêtes, qui est devenu homéomorphe à deux cercles après la première étape et qui se situe aux extrémités du tube. Nous obtenons ainsi un tore.

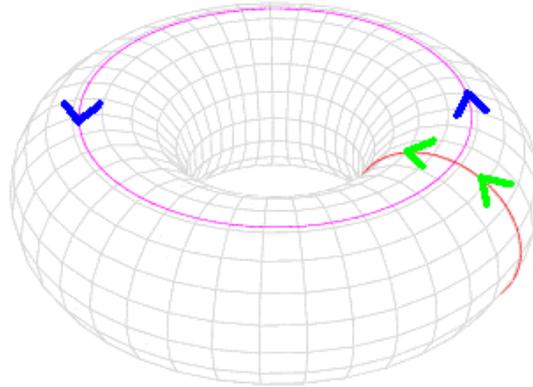


FIG. 4.4 – Tore après pliage

La courbe mauve avec la flèche bleue représente les arêtes du premier couple. La courbe rouge avec la flèche verte représente les arêtes du deuxième couple.

Description d'un plan projectif :

Le dessin suivant nous permettra de compléter les explications du pliage.

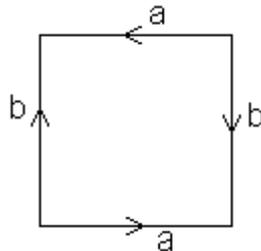


FIG. 4.5 – Pliage d'un carré pour obtenir un plan projectif

Les arêtes du dessin représente "l'infini", ce qu'il serait tentant d'appeler le bord du plan projectif. En effectuant le pliage indiqué sur la figure ci-dessus, on s'aperçoit que les points diamétralement opposés sont bien identifiés entre eux.

Pour le voir plus précisément, observons tout d'abord les opérations que subissent les sommets du carré. Lorsqu'on identifie les arêtes a dans le sens indiqué par les flèches, le sommet en haut à gauche se superpose à celui en bas à droite et, de même, le sommet en haut à droite se superpose à celui en bas à gauche. En identifiant les arêtes b, on obtient le même résultat pour les sommets. Puis, nous pouvons vérifier que cette superposition fonctionne pour tout point sur les arêtes du carré. Le centre du carré devient centre de symétrie pour "l'infini" du plan projectif.

4.3 Somme connexe

Définition 4.4. Une somme connexe de deux surfaces disjointes S_1 et S_2 , notée $S_1 \# S_2$, est formée en choisissant :

dans chaque surface, une surface homéomorphe au disque unité, que l'on va noter D_1 et D_2 , avec $D_1 \in S_1$ et $D_2 \in S_2$;

un homéomorphisme φ qui à tout point de la frontière de D_1 associe un point de la frontière de D_2 .

On obtient alors $S_1 \# S_2 = (S_1 \setminus D_1) \underset{\varphi}{\cup} (S_2 \setminus D_2)$, qui est bien une surface.

Remarque 4.2. Une définition plus empirique de la somme connexe de deux surfaces disjointes : une somme connexe de deux surfaces disjointes S_1 et S_2 , notée $S_1 \# S_2$, est formée en ôtant une partie connexe de chaque surface et en recollant les deux surfaces en les liant à partir des parties manquantes.

Proposition 4.1. La somme connexe est une loi commutative et associative.

Démonstration . D'après la définition, on a immédiatement : $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$ et $(S_1 \# S_2) \# S_3 = S_1 \# (S_2 \# S_3)$

Remarque 4.3. Par contre, on ne peut pas trouver d'inverse. Par conséquent, la somme connexe n'est pas une loi de groupes sur l'ensemble des classes d'équivalence de surfaces à homéomorphismes près.

Exemples :

• Un premier exemple de somme connexe sera le *bretzel*. Celui-ci est le résultat de la somme connexe de deux tores. On peut voir ceci facilement. Prenons deux tores. Ôtons un petit cercle dans chacun des tores et relierons-les par un petit cylindre comme sur la figure ci-dessous. Nous obtenons ainsi le bretzel.

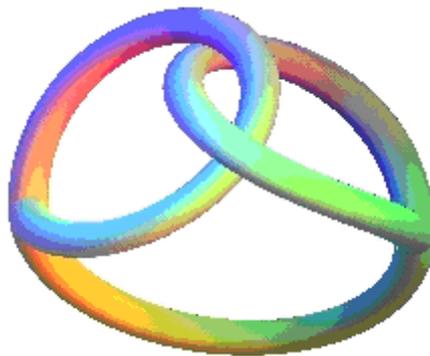


FIG. 4.6 – Somme connexe de deux tores : le bretzel

Remarque 4.4. *Cet exemple nous prouve qu'un "bretzel" peut être vu comme la somme connexe de deux "donuts" (ou que les mathématiques et la cuisine n'ont pas toujours de lien).*

- Un second exemple de somme connexe, moins trivial, est la *bouteille de Klein*. En effet, celle-ci est la somme connexe de deux plans projectifs et est non-orientable. La bouteille de Klein n'est pas représentable dans \mathbb{R}^3 , mais on peut la représenter dans \mathbb{R}^4 .

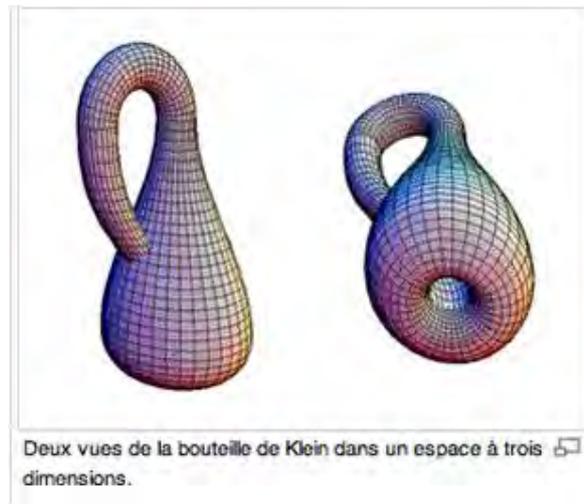


FIG. 4.7 – Bouteille de Klein

On peut également représenter une bouteille de Klein à partir d'un carré comme pour le tore et le plan projectif, vus précédemment.

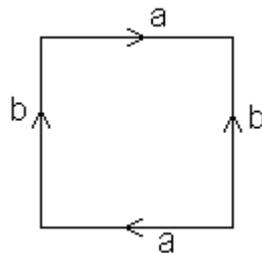


FIG. 4.8 – Pliage d'une bouteille de Klein

Remarque 4.5. *Pour la petite histoire, la bouteille de Klein s'appellerait ainsi à cause d'une mauvaise traduction. Un traducteur, qui voulait traduire de l'allemand à l'anglais, aurait traduit kleinsche Fläche (surface de Klein) par Kleinbottle (bouteille de Klein), qui en allemand s'écrit kleinsche Fläsche.*

4.4 Théorème fondamental

Théorème 4.2 (Théorème fondamental). *Toute surface compacte est homéomorphe : soit à une sphère, soit à la somme connexe de tores, soit à la somme connexe de plans projectifs.*

Nous ne démontrerons pas ce théorème, que William S. Massey démontre dans son livre en plusieurs parties. Cependant, nous évoquerons ici un théorème, qu'il utilise dans sa démonstration et qui nous servira surtout par la suite.

Théorème 4.3. *La somme connexe de trois plans projectifs est homéomorphe à la somme connexe d'un tore et d'un plan projectif.*

Grâce à ce théorème, nous pouvons déjà distinguer un certain nombre de cas et différencier les surfaces en fonction de ce à quoi elles sont homéomorphes (une sphère, des tores ou des plans projectifs). Cependant, il reste à déterminer qu'une surface homéomorphe à m tores n'est pas homéomorphe à une surface à n tores. C'est pourquoi nous allons introduire la caractéristique d'Euler dans le paragraphe suivant.

4.5 Caractéristique d'Euler

Dans un premier temps, nous allons définir la caractéristique d'Euler pour une surface compacte triangulée.

Définition 4.5. *Soit M une surface compacte et T_i sa triangulation. Soit A le nombre d'arêtes, S le nombre de sommets et F le nombre de triangles. Alors, on pose : $\chi(M) = S - A + F$ la caractéristique d'Euler de M .*

Définition 4.6. *Un invariant numérique est un nombre qui décrit un aspect d'une forme de l'espace topologique ou de la structure.*

Proposition 4.4. *La caractéristique d'Euler ne dépend pas de la triangulation choisie, mais de la surface M , et est un invariant numérique.*

La méthode de triangulation peut par ailleurs être appliquée en remplaçant les triangles par des polygones arbitraires. On nommera *régions* les images des homéomorphismes transformant les polygones en compacts fermés de \mathbb{R}^2 recouvrant totalement la surface M donnée.

Proposition 4.5. *La caractéristique correspond toujours à la même formule : $\chi(M) = S - A + F$, avec A le nombre d'arêtes, S le nombre de sommets et F le nombre de régions.*

On peut montrer que la caractéristique est invariante pour certaines transformations, qui permettent soit de modifier la triangulation (proposition 4.4), soit de passer des triangles aux régions (proposition 4.5) :

- diviser une arête en deux arêtes en ajoutant un nouveau sommet ou inversement soustraire un sommet situé entre deux arêtes,
- diviser un polygone en deux polygones en ajoutant une arête, qui relie deux sommets ensemble ou inversement soustraire une arête pour former un polygone unique à partir de deux polygones,
- introduire une arête et un sommet au milieu d'une région ou inversement enlever une telle arête et un tel sommet.

À chaque fois, la transformation fait augmenter ou diminuer A , F ou S de telle sorte que la caractéristique d'Euler reste la même.

Exemple : ajouter 1 arête et 1 sommet (premier cas) ne modifie pas la caractéristique d'Euler.

Proposition 4.6. *La caractéristique d'Euler d'une sphère vaut 2, celle d'un tore vaut 0 et celle d'un plan projectif vaut 1.*

Démonstration . *Nous allons trouver une représentation appropriée au calcul de la caractéristique d'Euler pour chaque surface compacte de la proposition.*

Tout d'abord, pour la sphère :

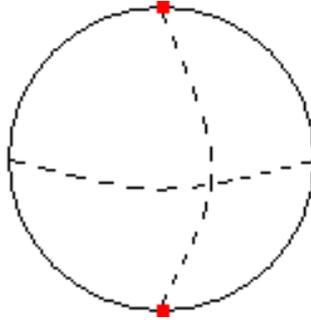


FIG. 4.9 – Représentation d'une sphère

Les points rouges symbolisent ici les sommets, les traits continus représentent le dessin de la sphère, mais aussi celui des arêtes, tandis que les traits en pointillés nous rappellent uniquement que notre figure est dessinée en 3 dimensions. Par conséquent, on compte 2 sommets, 2 arêtes et 2 faces. En effet, il y a deux sommets (points rouges) aux pôles nord et sud de notre sphère, une arête de chaque côté, une face à l'avant que l'on voit entièrement et une face à l'arrière que l'on ne voit pas du tout sur la figure.

On obtient ainsi : $\chi(\text{sphère}) = 2 + 2 - 2 \equiv 2$.

Puis, pour le tore, reprenons le pliage d'un carré pour obtenir un tore (cf. 4.2.) :

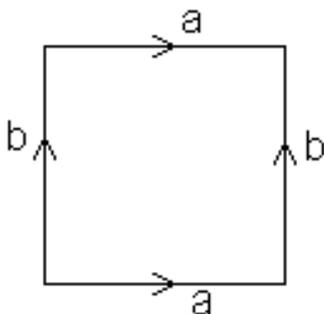


FIG. 4.10 – Pliage d'un carré pour obtenir un tore

Avec les mêmes règles que lors du pliage, on compte 2 arêtes, 1 sommet et 1 face. En effet, il y a une arête a et une arête b. De même, il n'y a qu'un seul sommet à cause des deux pliages. De plus, il n'y a qu'une seule face, car la surface de départ est le carré.

On obtient ainsi : $\chi(\text{tore}) = 1 + 1 - 2 = 0$.

Enfin, pour le plan projectif, reprenons également le pliage d'un carré pour obtenir un plan projectif (cf. 4.2.) :

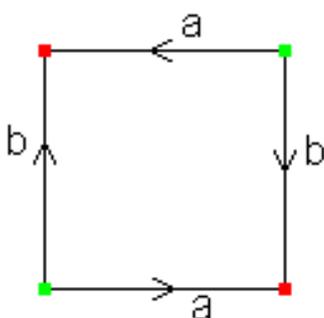


FIG. 4.11 – Pliage d'un carré pour obtenir un plan projectif

On compte ici 2 arêtes, 2 sommets et 1 face. En effet, il y a deux arêtes (une arête a et une arête b), deux sommets (celui en rouge et celui en vert) et une seule face (le carré de départ).

On obtient ainsi : $\chi(\text{plan projectif}) = 2 + 1 - 2 = 1$.

Nous avons donc trouvé les caractéristiques d'Euler de nos surfaces "de base" (sphère, tore et plan projectif). Pour pouvoir utiliser complètement le théorème fondamental du paragraphe précédent, il nous faut trouver une formule pour la somme connexe de deux surfaces.

Théorème 4.7. Soient la somme connexe de deux surfaces S_1 et S_2 , alors on a la formule suivante : $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$.

Démonstration . Considérons deux surfaces triangulées S_1 et S_2 . Nous allons faire la somme connexe de ces deux surfaces. Ôtons un triangle de chaque surface et relient les deux surfaces par un tube reliant les bords des triangles ôtés. Dans ces opérations, nous avons ajouté les caractéristiques d'Euler des deux surfaces, soustrait deux faces (les deux triangles) et rajouté trois faces et trois arêtes (le tube à base triangulaire). On obtient bien ainsi la formule du théorème.

Rappelons que le *théorème fondamental* du paragraphe précédent nous permettait d'affirmer que toute surface était homéomorphe soit à une sphère, soit à la somme connexe de tores, soit à la somme connexe de plans projectifs. En appliquant la formule vue ci-dessus, on peut construire le tableau suivant (avec n un entier naturel) :

Surface homéomorphe à	Caractéristique d'Euler associée
Sphère	2
Tore	0
Plan projectif	1
Somme connexe de n tores	$2 - 2n$
Somme connexe de n plans projectifs	$2 - n$

On aboutit donc au théorème suivant :

Théorème 4.8. Deux surfaces sont homéomorphes si et seulement si elles sont toutes les deux orientables ou toutes les deux non orientables et si, en plus, leur caractéristique d'Euler est égale.

Démonstration . On va utiliser le *théorème fondamental*, en sachant qu'une surface est soit orientable, soit non orientable. La sphère et le tore sont orientables, tandis que le plan projectif est non orientable. La somme connexe de deux tores (le "bretzel") est une surface orientable. De même, la somme connexe de tores est orientable. La somme connexe de deux plans projectifs est une bouteille de Klein, qui est une surface non orientable. De même, la somme connexe de plans projectifs est une surface non orientable. Ainsi, d'après le *théorème fondamental*, les surfaces orientables sont homéomorphes à une sphère ou à la somme connexe de n tores, tandis que les surfaces non orientables sont homéomorphes à la somme connexe de n plans projectifs.

On peut reprendre le tableau ci-dessus à l'envers et classer ainsi les surfaces.

Caractéristique d'Euler	surface orientable correspondante homéomorphe à	surface non-orientable correspondante homéomorphe à
2	sphère	
1		plan projectif
0	tore	bouteille de Klein
-1		somme connexe de trois plans projectifs
-2	bretzel	somme connexe de quatre plans projectifs