Analyse réelle : énoncés

Exercices CCP

1) Étudier, en fonction de x_0, le comportement d'une suite $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $f:\ x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x^2}$.

2) Étudier la suite définie par la donnée de $u_0, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^{*+}$ et la récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = \sqrt[3]{u_n u_{n+1} u_{n+2}}$.

3) Écrire des codes Python renvoyant des valeurs approchées à 10^{-6} des sommes $S_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^4}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^4}$.

4) Étudier la convergence de la série de terme général u_n défini par :

a) $\sin \dfrac{1}{n^2}$ b) $\dfrac{1}{n \ln n \ln \ln n}$ c) $e^{1/n} - \tan\left(\dfrac{\pi n}{4n+\alpha}\right)$

d) $\dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k$ e) $\left(\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{n^2}$ f) $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+\alpha n^2+\beta n+\gamma}$

g) $a^{1+1/2+\cdots+1/n},\ a > 0$ h) $\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}$

5) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\, ln^\alpha(n)}$ $(n \geq 2)$.

a) Pour $\alpha \leq 0$, donner une minoration très simple de u_n qui prouve la divergence de la série.

b) Pour $\alpha > 0$, étudier la convergence en utilisant la fonction $f:\ x \longmapsto \dfrac{1}{x\ \ln^\alpha(x)}$.

c) Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\ln^2(n+n^2)}$.

Exercices Mines-Centrale - suites de réels

6) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et v la suite définie par : $\forall n \geq 1,\ v_n = \dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$.

a) Montrer que si u est monotone, v l'est également.

b) Montrer que si u tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors v converge également vers l.

c) Étudier les réciproques des deux résultats précédents.

7) Montrer que si $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est injective, $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

8) Soit α un irrationnel positif et $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels convergeant vers α, avec $q_n > 0$ pour tout n. Montrer que (p_n) et (q_n) tendent vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.

9) Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites de réels telles que $u_n = o(v_n)$. Construire $(w_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

10) Pour $a > 0$, montrer que la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$ converge vers $\sqrt{a}$. Montrer ensuite que la convergence est quadratique, c'est à dire qu'il existe une constante M et un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq M|u_n - \sqrt{a}|^2$.

Donner les 12 premières décimales de $\sqrt{2}$.

11) Pour $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de réels strictement positifs, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_n}}}}$$

a) Montrer que x est croissante et qu'elle peut tendre vers $+\infty$.

b) On suppose que a est la suite périodique $(1, 2, 1, 2, \dots)$. Écrire une fonction python qui, appliquée à un entier naturel $n \geq 1$, renvoie x_n. Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite x ?

c) Montrer que pour (a_n) périodique, la suite x converge.

d) On suppose que $a_n = n$ pour tout $n \geq 1$. Écrire une fonction python qui, appliquée à un entier naturel $n \geq 1$, renvoie le couple (x_n, y_n), où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{n - 1 + \sqrt{2n+1}}}}}$$

Que peut-on conjecturer ? Démontrer votre conjecture.

12) On pose : $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \dfrac{n}{a_n}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$. Donner un équivalent de S_n au voisinage de $+\infty$ (on utilisera l'équivalent de Stirling).

13) Montrer que si (a_n) est une suite de réels strictement positifs telle que a_{n+1}/a_n converge vers $\lambda \in [0, +\infty]$, alors $\sqrt[n]{a_n}$ converge également vers λ.

14) Soit x la suite définie par : $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$. Donner un équivalent de x_n (on pourra introduire $x_{n+1}^2 - x_n^2$).

15) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a \leq b$. On définit les suites u et v par :

$$(u_0, v_0) = (a, b) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ (u_{n+1}, v_{n+1}) = \left(\sqrt{u_n v_n}, \frac{u_n + v_n}{2}\right)$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Leur limite $\lambda(a, b)$ est appelée *moyenne arithmético-géométrique* de a et b. Quelles relations existe-t-il entre les moyennes arithmétique, géométrique et arithmético-géométrique ?

Écrire une fonction python qui prend en arguments des réels a, b, ε, avec $0 < a < b$ et $0 < \varepsilon$ et qui renvoit une valeur approchée de $\lambda(a, b)$ à ε près.

16) Montrer que l'équation $\tan \dfrac{\pi x}{2} = \dfrac{\pi}{2nx}$ a une unique solution x_n entre 0 et 1. Donner les deux premiers termes d'un développement asymptotique de x_n au voisinage de $+\infty$.

17) Donner un développement asymptotique à quatre termes de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^3}\right)\right)_{n\geq 1}$.

18) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que si une suite (x_n) vérifie : $\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}=f(x_n)$ et possède une unique valeur d'adhérence λ, elle converge.

19) Soit u la suite définie par $u_0\in\,]0,\pi/2[$ et $u_{n+1}=\sin u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Étudier la convergence de la suite u.

b) On suppose qu'il existe un réel α et un réel strictement positif A tel que $u_n\sim_{+\infty} An^{\alpha}$. En considérant $u_{n+1}-u_n$, trouver α.

c) Démontrer que les réels α et A du b) existent bien (on pourra étudier $u_{n+1}^{1/\alpha}-u_n^{1/\alpha}$).

20) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0>0$ et $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$ pour tout $n\geq 0$. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

21) a) Pour tout $n\geq 1$, montrer que le polynôme $x^n+\cdots+x-1$ possède une unique racine x_n dans $[0,+\infty[$.

b) Montrer que (x_n) décroît vers $1/2$.

c) On pose $x_n=\frac{1}{2}+\varepsilon_n$; montrer que $\varepsilon_n=O(q^n)$ pour tout $q\in\,]1/2,1[$ puis donner un équivalent de ε_n.

22) (Centrale Python 2012) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0=9$ et $u_{n+1}=4u_n^3+3u_n^4$ pour tout $n\geq 0$.

a) Calculer le nombre c_n de chiffres 9 qui terminent l'écriture de u_n, pour n compris entre 0 et 9.

b) Conjecturer puis déterminer la valeur de c_n pour $n\in\mathbb{N}$.

23) (Centrale 2012) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$v_n=\frac{1}{n\,u_n}\sum_{k=1}^{n}u_k \text{ et } w_n=\frac{1}{n^2\,u_n}\sum_{k=1}^{n}k\,u_k.$$

a) Étudier la convergence et les limites éventuelles des suites v et w quand $u_n=n^{\alpha}$ avec $\alpha>0$.

b) On suppose que la suite v converge vers $a>0$ et l'on pose, pour $k\in\mathbb{N}^*$, $S_k=\sum_{p=1}^{k}u_p$. Montrer que w_n est équivalent à $\dfrac{1}{an^2u_n}\sum_{k=1}^{n}S_k$. Montrer que w converge et déterminer sa limite.

24) (Mines 2016) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n\geq 1, u_{n+1}=\dfrac{u_n}{n}+\dfrac{1}{n^2}$. Montrer que (u_n) converge vers 0 et donner un équivalent de u_n au voisinage de l'infini.

25) (Mines 2016) Donner un équivalent de u_n, où $u_0=1$, $u_1=2$ et $\forall n\geq 1,\ u_{n+1}=2u_n+\dfrac{u_{n-1}}{n^2}$.

26) (Mines 19) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par la donnée de $u_0\in\mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+e^{-u_n}.$$

a) Montrer que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

b) On pose $v_n = e^{u_n}$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $v_{n+1} - v_n$ a une limite finie et en déduire un équivalent de v_n puis un développement asymptotique à deux termes de u_n.

27) Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in [0,1] \text{ et } \forall n \geq 0, u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(u_k).$$

On note A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

a) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

b) Montrer que A est un intervalle.

c) Montrer que A est un singleton, puis que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un point fixe de f.

28) On note $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\cdots + \sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$ pour tout entier $n \geq 1$.

a) Montrer que u_n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $u_n \leq n$ pour tout $n \geq 1$.

c) Montrer que $u_n = o(n)$, puis donner un équivalent de u_n.

29) (Centrale Python 2019) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

a) Écrire une fonction qui calcule, en fonction de n, la valeur u_n pour $n \leq 100$. Que peut-on conjecturer quant au comportement de la suite u ? Démontrer votre conjecture.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{\binom{n}{k}} = \frac{nu_n}{2}$.

30) (Mines 2019) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \ln(1+u_n) + \ln(1+u_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$.

a) On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

b) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

c) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \inf_{k\geq n} u_k \text{ et } A_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} u_k$$

sont convergentes. On note a et A leurs limites respectives.

d) Montrer que a et A sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

e) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

31) (Mines 2019) Étudier le comportement asymptotique d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 > 0$ et la relation $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = u_n \dfrac{1+u_n}{2+u_n}$.

32) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs (dans $\mathbb{N}^*$) de n et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sigma(k)$.

a) Montrer que $S_n = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\left\lfloor \frac{n}{p}\right\rfloor\left(\left\lfloor \frac{n}{p}\right\rfloor + 1\right)$.

b) Donner un équivalent de S_n quand n tend vers l'infini.

33) La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie par :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 0,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

a) En utilisant cette formule de récurrence, écrire une fonction récursive `fibo1` qui calcule F_n. Quel est la complexité de cette fonction ?

b) Écrire une fonction `fibo2` qui fait le même travail en temps linéaire.

c) Montrer la relation :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}.$$

En déduire une fonction `fibo3` qui calcule F_n en temps logarithmique (on utilisera une fonction auxiliaire récursive qui calcule (F_n, F_{n+1}), en différenciant les cas selon la parité de n).

34) Soit une suite réelle $(x_n)_{n\geq 1}$ vérifiant $\forall n \geq 1,\ x_{n+1} = n(x_n - n)$. Montrer que $x_n = O(n)$ si et seulement si $x_1 = 2e$.

35) On fixe un réel $a > 0$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in]n, +\infty[$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x-k} = a$.

b) Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

c) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $x_n \geq n + m$ à partir d'un certain rang.

d) Calculer un équivalent de x_n quand n tend vers l'infini (on pourra poser $\alpha_n = x_n - n$).

36) a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique $x_n \in]0,1]$ tel que $x_n^n = nx_n - 1$.

b) Montrer que $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante, puis que $x_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.

c) On pose $x_n = \frac{1+\varepsilon_n}{n}$. Montrer que $(1+\varepsilon_n)^n$ tend vers 1 et en déduire un développement asymptotique de x_n à deux termes.

37) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, l'équation $x^n - nx + 1$ possède une unique solution x_n dans $[0,1]$. Montrer que (x_n) est décroissante, en donner un équivalent à l'infini puis un développement asymptotique à 2 termes.

Exercices Mines-Centrale - séries à termes réels

38) Séries commutativement convergentes

Une série à terme réel $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite *commutativement convergente* quand pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ est convergente.

a) Montrer qu'une série absolument convergente est commutativement convergente, avec :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}},\ \sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)} = \sum_{n\geq 0} u_n.$$

b) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série semi-convergente. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} u_n^+ = \max(u_n, 0) \\ u_n^- = \max(-u_n, 0) \end{cases}$$

Montrer que les deux séries à termes positifs $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ divergent. En déduire que pour tout $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ converge vers λ. Montrer qu'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la suite des sommes partielles de la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ admette tout réel pour valeur d'adhérence. Conclure.

39) Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\sigma(n)}{(1+n)^2}$ diverge (utiliser une sommation par paquets).

40) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante positive.

a) Montrer que si $\sum u_n$ converge, u_n est négligeable devant $1/n$ au voisinage de l'infini.

b) Les séries $\sum u_n$ et $\sum n\, u_n^2$ sont-elles de même nature ?

41) Soit $S = \{(u_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}} \ / \ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1\}$. Pour $u \in S$, montrer que $\Phi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_n \sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ est bien défini. Déterminer la borne inférieure des $\Phi(u)$ quand u décrit S.

42) Règle de Raabe-Duhamel

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{k}{n} + v_n$, où $k \in \mathbb{R}$ et v_n est le terme général d'une série absolument convergente.

a) Montrer que la série de terme général $\frac{k}{n} + \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$ est absolument convergente.

b) Montrer qu'il existe un réel λ tel que $u_n \sim \lambda/n^k$. En déduire le comportement de la série de terme général u_n.

43) Pour $n \geq 1$, on pose $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}$.

a) Montrer que la suite (c_n) converge.

b) Trouver des réels r, s, t tels que, pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = r \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + s \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} + t \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$$

c) Exprimer $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$ à l'aide de la constante d'Euler.

44) (Mines 2016) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in]0, \pi/2[, \ P_n(\operatorname{cotan}^2 t) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin^{2n+1} t}.$$

b) Trouver les racines de P_n et calculer leur somme.

c) Montrer que, pour tout $t \in]0, \pi/2[$, $\cot^2 t \leq \dfrac{1}{t^2} \leq 1 + \cot^2 t$.

d) En déduire la valeur de $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

45) (Mines 2016) On donne $a, b, c \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \frac{a}{n^2} + \frac{b}{n^3} + \frac{c}{n^4}$. Pour $n \geq 2$, on pose $\delta_n = S_n - S_{n-1}$.

a) Exprimer δ_n sous la forme $\dfrac{P(n)}{n^4(n-1)^4}$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$. Déterminer a, b, c de façon à minimiser le degré de P. On adopte désormais ces valeurs de a, b et c.

b) Montrer qu'il existe une constante K, que l'on calculera, telle que $\forall n \geq 2,\ |\delta_n| \leq \dfrac{K}{(n-1)^7}$.

c) En déduire une méthode de calcul approché de $\zeta(3)$.

46) (Centrale 2019) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$. On suppose que $a_n S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

a) Montrer que $\sum_{k \geq 1} a_k^2$ diverge.

b) Donner un équivalent de S_n^3, puis de a_n.

47) (Mines 2019) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \geq 1$, on pose $b_n = a_n^{1-1/n}$.

a) Montrer que si $\displaystyle\sum_{n \geq 1} b_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

b) On suppose réciproquement que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et on fixe $\lambda > 1$. En introduisant $X = \{n \in \mathbb{N}^*,\ b_n \leq \lambda a_n\}$ et $Y = \mathbb{N}^* \setminus X$, montrer que $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge. Donner une majoration de $B = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ en fonction de $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

48) Quel est la nature de $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\ln n)}{n}$? On pourra utiliser des paquets de termes de signe constant.

49) Calculer un équivalent du reste R_n de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n!}$.

50) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \binom{\alpha}{n} \overset{def}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $|a_n| \sim_{+\infty} \dfrac{A}{n^{1+\alpha}}$.

51) (Mines 2022) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\tan\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)\right)$.

Exercices Mines-Centrale - familles sommables

52) Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{m^2n+n^2m+2mn}\right)_{n,m\geq 1}$ est sommable et montrer que sa somme est égale à $7/4$.

53) Pour tout $x\in\,]-1,1[$, établir que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^{2n}}$.

54) Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{a^m+b^n}\right)_{n,m\geq 0}$ est sommable si et seulement si $a>1$ et $b>1$.

55) (Mines 2018) Montrer que pour tout réel $s>1$, $\displaystyle\zeta(s)=\prod_{p\in\mathbf{P}}\frac{1}{1-p^{-s}}$, où $\mathbf{P}$ désigne l'ensemble des nombre premiers.

Exercices X-ENS

56) (X) Étudier la convergence des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la récurrence $u_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}\,u_{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\,u_n$.

57) (L) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle bornée telle que $u_n+\dfrac{u_{2n}}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$. Est-ce que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge ?

58) (L) Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ trois suites réelles.

a) On suppose que a_n+b_n tend vers 0 et que $e^{a_n}+e^{b_n}$ tend vers 2 quand n tend vers l'infini. Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ convergent.

b) On suppose que $a_n+b_n+c_n$ tend vers 0 et que $e^{a_n}+e^{b_n}+e^{c_n}$ tend vers 3 quand n tend vers l'infini. Que peut-on dire ?

59) (X) Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_n$ une série convergente à termes positifs, de somme S.

a) On pose $w_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\,u_k$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{w_n}{n(n+1)}$ converge et que sa somme est égale à S.

b) On pose $v_n=(u_1\dots u_n)^{1/n}$. Montrer que la série de terme général v_n converge et que sa somme est majorée par $e\,S$.

60) (X) Soient $a,b\in\mathbb{C}$ et $u=(a^n+b^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Trouver une relation de récurrence liant les u_n.

b) On suppose $|a|=|b|=1$. À quelle condition nécessaire et suffisante la suite u est-elle convergente ?

61) (X) On considère une suite strictement positive $(u_n)_{n\geq 1}$ et on note $S_n=\sum_{k=1}^n u_k$ et $R_n=\sum_{k=n}^{+\infty}u_k$ (en cas de convergence).

a) On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_n$ diverge. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

b) On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_n$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

62) (X) Étudier la convergence des séries de termes généraux $\dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ et $\dfrac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

On commencera par démontrer que pour f de classe C^2 sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}\,(f(b)+f(a)) - \frac{1}{2}\int_a^b (b-t)(t-a)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

63) (X 2012) a) Soit $(p_{n,j})_{0\leq j\leq n}$ une famille de réels positifs telle que, pour tout $n\geq 0$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} p_{n,j} = 1$. Pour $(s_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on définit la suite $t = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{n,j}s_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall (s_n)_{n\geq 0},\ \forall \ell\in\mathbb{R},\ s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \Longrightarrow t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\,$;

(ii) $\forall j\in\mathbb{N},\ p_{n,j} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

64) (L) Soit $q\in\,]1,2[$. On note $E=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $f:\ E\longrightarrow\mathbb{R}$ l'application $(\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}}\longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n q^{-n}$. Que vaut $f(E)$? f est-elle injective ?

65) (X) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $D_n=\{k\in\{1,\ldots,n\},\ k\,|\,n\}$ et $d_n=\mathrm{Card}(D_n)$. Montrer que $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k = n\ln n + O(n)$ au voisinage de l'infini.

66) (X) Soit $f:\ [0,1]\longrightarrow[0,1]$ continue et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $u_{n+1}-u_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Pour le sens réciproque, on pourra commencer par démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est un intervalle.

67) (X 2022) Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ telle que $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in A}$ est sommable. Montrer que A est de densité nulle, i.e. que $\dfrac{|A\cap[\![1,n]\!]|}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

68) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note p_n le n-ième nombre premier et $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs où égaux à n. On admet le théorème des nombres premiers : $\pi(n)\sim_{+\infty}\dfrac{n}{\ln n}$.

Donner un équivalent de p_n et en déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_n}$.

Analyse réelle : corrigés

Exercices CCP

1) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(1+x^2)^2}$. Le polynôme $x^2 - 2x - 1$ a pour racines $r_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $r_2 = 1 + \sqrt{2}$, ce qui donne le tableau de variation :

x	$-\infty$		r_1		r_2		$+\infty$
$f(x)$	0^+	$\nearrow$	$\simeq 1{,}2$	$\searrow$	$\simeq -0{,}2$	$\nearrow$	0^-

L'intervalle $[r_1, r_2]$ est stable par f et $f(\mathbb{R}) = [f(r_2), f(r_1)] \subset [r_1, r_2]$. Quitte à commencer la suite à l'indice 1, on peut donc supposer que $x_0 \in [r_0, r_1]$. Nous devons donc étudier une suite définie par une fonction décroissante sur un segment : nous savons que les suites $(x_{2n})_{n\geq}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont monotones, de monotonies opposées et convergentes (car bornées).

f possède un unique point fixe, car $f(x) = x$ est équivalent à $x^3 + 2x - 1 = 0$. Ce polynôme de degré 3 est strictement croissant, donc il possède une unique racine α, qui est l'unique point fixe de f. Par dichotomie, on montre que $0,553 < \alpha < 0,554$.

Les plus courageux peuvent étudier les points fixes de $f \circ f$, puisque les limites des suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des points fixes de $f \circ f$. On obtient :

$$f \circ f(x) - x = \frac{x(x-1)(x^3 + 2x - 1)}{x^4 + 3x^2 - 2x + 2}$$

Comme le dénominateur ne s'annule pas, il est de signe constant (strictement positif), ce qui nous donne le signe de $f \circ f(x) - x$:

x	r_1		0		α		1		r_2
$f \circ f(x) - x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Il n'y a maintenant plus de difficulté, puisque le comportement de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ va uniquement dépendre de la position de x_0 par rapport à 0, α et 1 :

- si $r_1 \leq x_0 \leq 0$, on a $x_{2n} \leq 0$ pour tout n (par croissance de $f \circ f$) et $(x_{2n})_{n\geq 0}$ converge en croissant vers 0. La suite $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ converge en décroissant vers $1 = f(0)$;
- si $0 < x_0 < \alpha$, on a $0 < x_{2n} < \alpha$ pour tout n et $(x_{2n})_{n\geq 0}$ converge en décroissant vers 0. La suite $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ converge en croissant vers 1 ;
- si $x_0 = \alpha$, la suite est constante égale à α ;
- si $\alpha < x_0 < 1$, $(x_{2n})_{n\geq 0}$ converge en croissant vers 1 et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ converge en décroissant vers 0 ;
- si $1 \leq x_0 r_2$, $(x_{2n})_{n\geq 0}$ converge en croissant vers 1 et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ converge en décroissant vers 0 ;

Si on souhaite revenir au cas $x_0 \in \mathbb{R}$, on peut dire que les deux suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers deux limites différentes (0 et 1), sauf si $x_1 = \alpha$. L'équation $f(x_0) = \alpha$ possède deux racines (voir les variations de f). La première racine est α et la seconde est une valeur $\beta < r_1$. On peut calculer β en remarquant que $f(\beta)$ est racine du polynôme $X^3 + 2X - 1$, ce qui donne après calculs, $\beta^3 + 2\beta^2 - \beta + 2 = 0$. L'unique racine réelle de ce polynôme est environ égale à $-2,66$. On en conclut que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oscille entre 0 et 1 sauf si $x_0 \in \{\alpha, \beta\}$, auquel cas la suite stationne à la valeur α à partir de $n = 1$.

2) Comme les u_n sont strictement positifs, on peut définir la suite $(v_n)_{n\geq 0} = (\ln(u_n)))_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite vérifie la relation de récurrence linéaire homogène :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+3} = \frac{v_n + v_{n+1} + v_{n+2}}{3}$$

On introduit le polynôme $X^3 - \frac{X^2+X+1}{3} = \frac{(X-1)}{3}(3X^2+2X+1)$, qui a trois racines distinctes :

$$r_1 = 1,\ r_2 = \frac{-1+i\sqrt{2}}{3} \text{ et } r_3 = \overline{r_2}.$$

On en déduit qu'il existe 3 constantes complexes a, b, c (que l'on peut calculer en fonction de u_0, u_1 et u_2) telles que :

$$v_n = a + b\left(\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right)^n + c\left(\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right)^n.$$

Comme $|r_1| = |r_2| = \dfrac{\sqrt{3}}{3} < 1$, v_n converge vers a quand n tend vers l'infini. On a d'autre part :

$$\begin{cases} a+b+c = v_0 & (1) \\ a + b\,r_2 + c\,r_3 = v_1 & (2) \\ a + b\,r_2^2 + c\,r_3^2 = v_2 & (3) \end{cases}$$

En se souvenant que r_2 et r_3 sont les racines de $3X^2+2X+1$, on peut penser à calculer $(1)+2\times(2)+3\times(3)$, qui donne $6a = v_0 + 2\,v_1 + 3, v_2$, soit $a = \sqrt[6]{u_0u_1^2u_2^3}$.

3) On peut utiliser le résultat sur le théorème des séries alternées : comme $\frac{1}{1+n^4}$ décroît vers 0, la première série est convergente et :

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{1+k^4} \leq S_1 \leq \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{1+k^4}$$

En choisissant $n = 16$, la largeur de cet intervalle est strictement plus petite que 10^{-6}. Nous obtenons :

$$0,549427 \leq \sum_{k=0}^{31}\frac{(-1)^k}{1+k^4} \leq S_1 \sum_{k=0}^{32}\frac{(-1)^k}{1+k^4} \leq 0,549429$$

et donc $S_1 \simeq 0,549420 \pm 10^{-6}$.

Pour S_2, on utilise une comparaison intégrale-série (la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^4}$ est déxroissante sur $[0, +\infty[$) :

$$0 \leq S_2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^4} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{1+k^4} \leq \int_n^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{+\infty}\frac{1}{t^4} = \frac{1}{3\,n^3}.$$

Avec $n = 70$, nous obtenons :

$$0 \leq S_2 - \sum_{k=0}^{70}\frac{1}{1+k^4} \leq \frac{1}{1029000} \leq 9,72\,10^{-7}.$$

En s'assurant que le calcul de cette somme de 71 termes se fait avec une erreur plus petite que $2\,10^{-8}$, nous obtenons :

$$S_2 \simeq 1,5784766 \pm 10^{-6}.$$

4) a) La série converge car u_n est équivalent à $1/n^2$, terme général d'un série à terme positif convergente (série de Riemann).

b) On utilise une comparaison avec une intégrale : comme la fonction $f\,:\;t\longmapsto\dfrac{1}{t\ln n\ln\ln t}$ est positive et décroissante sur $]e,+\infty[$, la série étudiée est de même nature que $\displaystyle\int_3^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$; f admet pour primitive $t\longmapsto \ln\ln\ln t$ qui tend vers $+\infty$ quand t tend vers l'infini, donc l'intégrale et la série divergent.

c) Il suffit de faire un développement asymptotique, en s'arrêtant dès que le reste donne une série absolument convergente, ce qui demande peu de calculs :

$$u_n=\frac{\pi\,\alpha+8}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc si $\pi\,\alpha+8$ est non nul, u_n est équivalent à un terme général positif de série divergente : la série diverge. Par contre, si $\alpha=-\dfrac{8}{\pi}$, $u_n=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est un terme général de série absolument convergente.

d) L'astuce consiste ici à calculer un équivalent de la somme, par comparaison avec une intégrale (la fonction ln est croissante sur $[1,+\infty[$) :

$$n\ln n\sim_{+\infty} n\ln n-n+1=\int_1^n \ln\,t\,\mathrm{d}t\leq\sum_{k=2}^n\ln k=\sum_{k=1}^n\ln k\leq\int_1^{n+1}\ln\,t\,\mathrm{d}t=(n+1)\ln(n+1)-n\sim_{+\infty} n\ln n$$

On a donc $u_n\sim_{+\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}=v_n$. Ces termes généraux étant positifs, la série étudiée est de même nature que la série de Bertrand $\sum_{n\geq 0}v_n$: elle est donc convergente si et seulement si $\alpha>1$.

Les séries de Bertrand n'étant pas explicitement au programme, on peut rappeler la méthode (on est dans un cas simple car $\ln n$ est au numérateur) :

- si $\alpha\leq 1$, $v_n\geq\dfrac{\ln n}{n}\geq\dfrac{1}{n}$ pour tout $n\geq 3$: la série est divergente, par comparaison avec la série harmonique.
- si $\alpha<1$, on peut fixer $\beta\in]\alpha,1[$ et $v_n=o\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$ et la série est convergente, par comparaison avec une série de Riemann convergente.

e) On calcule facilement un équivalent de $u_n=e^{-n^2\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)}$:

$$\begin{aligned}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}&=\frac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln n}=1+\frac{1}{n\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\\ \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)&=\ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right)=\frac{1}{n\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\\ u_n&=\exp\left(-\frac{n}{\ln n}+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)\sim_{+\infty} e^{-n/\ln n}=v_n\end{aligned}$$

puisque $O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Comme les séries étudiées sont à termes positifs, $\sum u_n$ est de même nature que $\sum v_n$. Comme $n\geq 2\ln^2 n$ à partir d'un certain rang, on a $v_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$: la série est donc convergente.

f) On a $u_n=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\alpha}{3}\right)+\left(\dfrac{3}{8}-\dfrac{\beta}{3}+\dfrac{\alpha^2}{9}\right)\dfrac{1}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Nous avons donc 3 cas :

- si $\alpha\neq\dfrac{3}{2}$, la série diverge grossièrement (son terme général a une limite non nulle) ;
- si $\alpha=\dfrac{3}{2}$ et $\beta\neq\dfrac{15}{8}$, $u_n\sim_{+\infty}\left(\dfrac{5}{8}-\dfrac{\beta}{3}\right)\dfrac{1}{n}$ et la série diverge, par comparaison avec la série harmonique.
- si $\alpha=\dfrac{3}{2}$ et $\beta=\dfrac{15}{8}$, la série converge, car $u_n=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

g) Par comparaison avec une intégrale, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + \ln n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n+1)$$

ce qui donne $u_n = O(a^{\ln n})$ et $a^{\ln n} = O(u_n)$. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum a_n$ est de même nature que $\sum a^{\ln n}$.

Comparons $v_n = a^{\ln n}$ à un terme général de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$, pour $n \geq 2$:

$$a^{\ln n} \leq \frac{1}{n^\alpha} \Longleftrightarrow \ln n \, \ln a \leq -\alpha \ln n \Longleftrightarrow -\ln a \geq \alpha$$

Ainsi, si $-\ln a > 1$, on peut fixer α tel que $1 < \alpha \leq -\ln a$ et la série étudiée converge ($u_n = O(1/n^{al})$ avec $\alpha > 1$).

Sinon, on peut choisir $\alpha = 1$ et on a $v_n \geq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$: la série est divergente.

Nous avons donc montré que la série était convergente si et seulement si $a < \dfrac{1}{e}$.

h) Nous avons ici un terme général téléscopique : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n = \sqrt{\ln(N+1)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$ et la série diverge.

5) a) Quand $\alpha \leq 0$, on a $u_n \leq \frac{1}{n}$ donc la série diverge, par théorème de comparaison des séries à termes positifs (la série harmonique est divergente).

b) Quand $\alpha > 0$, la fonction f est continue, positive et décroissante sur $]1, +\infty[$. Par théorème de comparaison série-intégrale, on en déduit que $\sum_{n\geq 1} u_n$ est de même nature que $\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Si $\alpha = 1$, $x \longmapsto \ln(\ln x)$ est une primitive de f, donc l'intégrale est divergente ; sinon, f s'intègre en $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$: l'intégrale est divergente pour $\alpha \in]0,1[$ et convergente pour $\alpha > 1$. La série est donc convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

c) D'une part, on a : $\ln^2(n+n^2) = \big(\ln(n^2) + \ln(1+1/n)\big)^2 \sim_{+\infty} \ln^2(n^2) = 4\ln^2 n$.

D'autre part, $e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e\left(1 - e^{n\ln(1+1/n)-1}\right) = e\left(1 - e^{-\frac{1}{2n^2}+o(1/n^2)}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{e}{2n}$.

On en déduit donc que $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{e}{8n\ln^2(n)}$, qui est un terme général de série convergente d'après le b). Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série étudiée est convergente.

Exercices Mines-Centrale - suites de réels

6) a) Notons U_n la somme partielle $u_1 + \cdots + u_n$. Nous avons :

$$\forall n \geq 1,\ v_{n+1} - v_n = \frac{U_n + u_{n+1}}{n+1} - \frac{U_n}{n} = \frac{nu_{n+1} - U_n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} (u_{n+1} - u_k)$$

donc si u est monotone, v l'est également, de même monotonie.

b) Supposons dans un premier temps que $\ell \in \mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \geq 1$ tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. On a alors, pour $n \geq n_0$:

$$|v_n - \ell| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}|u_k - \ell| + \frac{n - n_0 + 1}{n}\varepsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}|u_k - \ell| + \varepsilon.$$

Comme $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1}|u_k - \ell|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, il existe $n_1 \geq 1$ tel que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1}|u_k - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_1$. On en déduit donc :

$$\forall n \geq \max(n_0, n_1),\ |v_n - \ell| \leq 2\varepsilon$$

ce qui traduit que v_n converge vers ℓ quand n tend vers l'infini.

Si $\ell = +\infty$ (la preuve est identique si $\ell = -\infty$), pour $A \in \mathbb{R}^+$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $u_n \geq A$ pour tout $n \geq n_0$. On a alors, pour $n \geq n_0$:

$$v_n \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right) + \frac{n-n_0}{n}A \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right) + A.$$

Comme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, il existe $n_1 \geq 1$ tel que $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right) \geq -1$ pour $n \geq n_1$. On a alors :

$$\forall n \geq \max(n_0, n_1),\ v_n \geq A - 1$$

et v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.

c) Les réciproque sont fausses. Pour le a), on peut remarquer que l'application $(u_n)_{n\geq 1} \longmapsto (v_n)_{n\geq 1}$ est une bijection de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ sur lui-même, l'inverse de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ étant la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_1 = v_1 \text{ et } \forall n \geq 2,\ u_n = nv_n - (n-1)v_{n-1}.$$

En posant $v_1 = 1$ et $\forall n \geq 2,\ v_n = \frac{3}{2}$, la suite v est monotone mais son antécédent u ne l'est pas, puisque $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et $u_3 = \frac{3}{2}$.

Pour le b), la suite définie par $u = \left((-1)^n\right)_{n\geq 1}$ n'a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors que la suite v associée converge vers 0.

7) Si $A \in \mathbb{R}$, $]-\infty, A] \cap \mathbb{N}$ est un ensemble fini ; par injectivité de f, $f^{-1}\left(]-\infty, A] \cap \mathbb{N}\right)$ est également fini et il existe N tel que :

$$\forall n \geq N,\ f(n) \notin]-\infty, A]$$

Nous avons donc démontré :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ f(n) > A$$

ce qui traduit que $f(n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

8) Si (q_n) ne tend pas vers l'infini, on peut en extraire une sous-suite $\left(q_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$ constante (on peut commencer par en extraire une sous-suite majorée, puis cette sous-suite étant une suite majorée de $\mathbb{N}$, elle possède une sous-suite constante). On en déduit que $p_{\varphi(n)} = \frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}} \times q_{\varphi(n)}$ converge vers αq, où $q = q_{\varphi(0)}$. Comme les $p_{\varphi(n)}$ sont des entiers, $p = \alpha q$ est aussi un entier, ce qui prouve que $\alpha = \frac{p}{q}$ est rationnel : c'est absurde.

On en déduit que q_n tend vers $+\infty$, puis $p_n = \frac{p_n}{q_n} \times q_n$ tend vers $+\infty$, car $\frac{p_n}{q_n}$ tend vers $\alpha > 0$.

9) Remarque : la « bonne » définition de $u_n = o(v_n)$ est :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ |u_n| \leq \varepsilon\,|v_n|.$$

En particulier, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $v_n = 0 \Longrightarrow u_n = 0$. La suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \geq 0,\ \varepsilon_n = \begin{cases} \frac{|u_n|}{|v_n|} & \text{si } v_n \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

converge vers 0 et $|u_n| = \varepsilon_n\,|v_n|$ pour $n \geq n_0$. La suite $w = \left(\sqrt{\varepsilon_n}\,v_n\right)_{n\geq 0}$ est alors solution évidente du problème car pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \geq 0$ tel que $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon^2$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui donne :

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ |w_n| \leq \varepsilon\,|v_n| \text{ et } \forall n \geq \max(n_0, n_\varepsilon),\ |u_n| = \varepsilon_n|v_n| = \sqrt{\varepsilon_n}|w_n| \leq \varepsilon\,|w_n|.$$

10) La fonction $f:\ x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)$ est définie sur $]0,+\infty[$, continue, strictement décroissante sur $]0,\sqrt{a}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{a},+\infty[$. Comme $f(\sqrt{a})=\sqrt{a}$, l'intervalle $I=[\sqrt{a},+\infty[$ est stable par f. On montre facilement que $\sqrt{a}$ est le seul point fixe de f, avec $f(x)>x$ pour tout $x>\sqrt{a}$. Comme $u_1 \geq \sqrt{a}$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée : elle converge donc et sa limite ℓ est un élément de I qui est fixe par f. On en déduit que u_n converge vers $\sqrt{a}$.

Nous avons ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq u_{n+1}-\sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)-\sqrt{a} = \frac{u_n^2+a-2u_n\sqrt{a}}{2u_n} = \frac{1}{2u_n}(u_n-\sqrt{a})^2 \leq M(u_n-\sqrt{a})^2$$

où $M=\frac{1}{2\sqrt{a}}$, puisque $u_n \geq \sqrt{a}$ dès que $n \geq 1$ (où même $n \geq 0$ si $u_0 \geq \sqrt{a}$).

En choisissant $a=2$ et $u_0=1,5$, nous avons (en minorant $\sqrt{2}$ par $1,4$) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1}-\sqrt{2} \leq \frac{1}{2,8}(u_n-\sqrt{2})^2$$

Avec $u_0-\sqrt{2}<10^{-1}$, nous avons grossièrement (en minorant $2,8$ par 1) :

$$u_n-\sqrt{2} \leq 10^{-2^n}.$$

ainsi, $n=4$ suffit à atteindre 10^{-12}. un calcul plus précis donne $0 \leq u_3-\sqrt{2} \leq 8 10^{-12}$ et $0 \leq u_4-\sqrt{2} \leq 2\,10^{-23}$.

On obtient ainsi :

$$1,414213562373 < \sqrt{2} < 1,414213562374$$

et même

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488017 \pm 10^{-22}$$

On peut confirmer l'exactitude de ce résultat en remarquant que l'on a bien :

$$(1,4142135623730950488016)^2 < 2 < (1,4142135623730950488018)^2$$

11) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_n+\sqrt{a_{n+1}}$, donc $a_{n-1}+\sqrt{a_n} \leq a_{n-1}+\sqrt{a_n+\sqrt{a_{n+1}}}$, puis par itération $x_n \leq x_{n+1}$.

Si cette preuve par itération n'est pas jugée assez précise, on peut reformuler, en donnant une bonne définition de x_n. Il faut pour cela définir des fonctions : pour toute suite finie $(a_1,\dots,a_n)$ de réels strictement positifs, nous définissons $f_{a_1,\dots,a_n}:\ \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par récurrence sur n :

- si $n=1$ et $x \geq 0$, $f_{a_1}(x)=\sqrt{a_1+x}\,$;
- si $n \geq 2$ et $x \geq 0$, $f_{a_1,\dots,a_n}(x)=f_{a_1,\dots,a_{n-1}}(\sqrt{a_n+x})$.

Cela donne bien une définition précise correspondant à l'écriture :

$$f_{a_1,\dots,a_n}(x)=\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{\cdots+\sqrt{a_n+x}}}}$$

Chacune de ces fonctions est croissante sur $\mathbb{R}^+$ (récurrence évidente, car $x \longmapsto \sqrt{a_n+x}$ est croissante), ce qui donne :

$$x_n = f_{a_1,\dots,a_n}(0) \leq f_{a_1,\dots,a_n}(\sqrt{a_{n+1}}) = x_{n+1}.$$

On peut choisir une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers l'infini. Le plus simple est de construire les a_n par récurrence : on commence par choisir $a_1=1$ pour avoir $x_1 \geq 1$. On remarque ensuite que $f_{a_1}(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers $+\infty$: on peut donc choisir $a_2>0$ tel que $x_1=f_{a_1}(\sqrt{a_2}) \geq 2$. On continue ensuite par récurrence : si on suppose construits

$a_1, \ldots, a_n$ tels que $x_n \geq n$, on choisit a_{n+1} tel que $x_{n+1} = f_{a_1,\ldots,a_n}(\sqrt{a_{n+1}}) \geq n+1$. On obtient ainsi une suite (x_n) qui tend vers l'infini.

On peut donner une preuve plus simple, si on pense à remarquer que $x_n \geq a_n^{1/2^n}$, en minorant $a_1, \ldots, a_{n-1}$ par 0. On peut alors choisir $a_n = n^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et (x_n) tendra vers $+\infty$ puisque $x_n \geq n$.

b) On peut remarquer que $x_{n+2} = \sqrt{1 + \sqrt{2 + x_n}}$ pour tout $n \geq 0$, d'où l'écriture d'une fonction récursive :

```
def x(n):
        if n == 1:
                return 1
        elif n == 2:
                return (1+2**0.5)**0.5
        else:
                return((1+(2 + x(n-2))**0.5)**0.5)
```

À partir de $n = 30$, il semble que l'on obtienne toujours le même résultat arrondi : 1,710644095045033. La suite semble donc converger.

c) Comme la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est périodique, elle est majorée par un réel $M \geq 0$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq y_n$$

où (y_n) est la suite associée à la suite constante $(M)_{n\geq 1}$. En posant $y_0 = 0$, on a $y_{n+1} = \sqrt{M + y_n}$ pour tout $n \geq 0$ et cette suite s'étudie très facilement : la fonction $y \longmapsto \sqrt{M+y}$ est croissante et continue sur l'intervalle stable $[0, +\infty[$ et possède un unique point fixe ℓ, qui est la racine positive de l'équation $M + y = y^2$. On en déduit que y_n converge vers ce point fixe (la suite est croissante et majorée par ℓ). Ainsi, (y_n) est majorée, donc (x_n) également : comme elle est croissante, (x_n) possède une limite (finie).

d) Il faut ici faire le calcul en commençant par la droite de l'expression :

```
def xy(n):
        x, y = n**0.5, (2*n+1)**0.5
        for k in range(n-1, 0, -1):
                x,y = (k + x)**0.5, (k + y)**0.5
        return(x,y)
```

Quelques calculs semblent montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes à partir du rang 2 (on a $y_1 < y_2$) : démontrons cette propriété.

- on sait déjà que (x_n) est croissante ;
- pour tout $n \geq 2$, on a $y_{n+1} = f_{1,2,\ldots,n-1}(\sqrt{n + \sqrt{2n+3}})$ et $y_n = f_{1,2,\ldots,n-1}(\sqrt{2n+1})$. Comme $f_{1,2,\ldots,n-1}$ est strictement croissante, nous avons $y_{n+1} \leq y_n$ si et seulement si $\sqrt{n + \sqrt{2n+3}} \leq \sqrt{2n+1}$, propriété équivalente à $2 \leq n^2$. Ainsi, (y_n) décroit à partir du rang $n = 2$.
- il reste à montrer que $y_n - x_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui se fait en majorant (avec introduction de la quantité conjuguée) :

$$\begin{aligned} 0 \leq y_n - x_n &= \sqrt{1 + f_{2,\ldots,n-1}(\sqrt{2n+1})} - \sqrt{1 + f_{2,\ldots,n-1}(\sqrt{n})} \\ &= \frac{f_{2,\ldots,n-1}(\sqrt{2n+1}) - f_{2,\ldots,n-1}(\sqrt{n})}{x_n + y_n} \\ &\leq \frac{f_{2,\ldots,n-1}(\sqrt{2n+1}) - f_{2,\ldots,n-1}(\sqrt{n})}{2} \end{aligned}$$

car $x_n + y_n \geq 1 + 1 = 2$. On a ensuite :

$$0 \leq y_n - x_n \leq \frac{f_{3,\ldots,n-1}(\sqrt{2n+1}) - f_{3,\ldots,n-1}(\sqrt{n})}{2 \times 2\sqrt{2}}$$

en remarquant que $f_{2,\dots,n-1}(\sqrt{2n+1}) + f_{2,\dots,n-1}(\sqrt{n}) \geq \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

En itérant ce calcul, nous obtenons :

$$0 \leq y_n - x_n \leq \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}}{2 \times 2\sqrt{2} \times \cdots \times 2\sqrt{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

puisque ce majorant est de l'ordre de grandeur de $\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}\sqrt{(n-1)!}}$, i.e. de $\dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{(n-2)!}}$.

12) On commence par calculer une expression, puis un équivalent de a_n. On a facilement :

$$\forall n \geq 1,\ a_{2n} = \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1}{(2n-2) \times (2n-4) \times \cdots \times 2 \times a_1} = \frac{(2n-1)!}{\left(2^{n-1}(n-1)!\right)^2}$$

puis l'équivalent de Stirling donne

$$a_{2n} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\, e^{-2n+1}(2n-1)^{2n-1}}{4^{n-1} 2\pi(n-1) e^{-2(n-1)}(n-1)^{2(n-1)}} \sim \frac{2\sqrt{n}}{e\sqrt{\pi}} \left(\frac{1-\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^{2n-1}.$$

On a ensuite $(2n-1)\left(\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = (2n-1)\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{n} + O(1/n^2)\right) = 1 + O(1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On en déduit :

$$\begin{cases} a_{2n} \sim_{+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n} \\ a_{2n+1} = \dfrac{2n}{a_{2n}} \sim_{+\infty} \sqrt{\pi}\,\sqrt{n} \end{cases}$$

On peut ensuite écrire $S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} u_k$ en posant $u_k = a_{2k-1} + a_{2k}$ pour tout $k \geq 1$. Nous avons :

$$u_k \sim_{+\infty} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{2\pi}\right) \sqrt{k} = v_k$$

et v_k est le terme général d'une série divergente à termes positifs : nous en déduisons l'équivalent :

$$S_{2n} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{2}(2+\pi)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

On conclut grâce à une comparaison “série-intégrale” usuelle :

$$\begin{aligned} S_{2n} \quad &\sim_{+\infty} \quad \frac{\sqrt{2}(2+\pi)}{\sqrt{\pi}} \int_{t=1}^{n} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &\sim_{+\infty} \quad \frac{\sqrt{2}(2+\pi)}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{3} n^{3/2} \\ &\sim_{+\infty} \quad \frac{2+\pi}{3\sqrt{\pi}} (2n)^{3/2} \end{aligned}$$

Nous avons ensuite :

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \underbrace{a_{2n+1}}_{=o(n^{3/2})} \sim_{+\infty} \frac{2+\pi}{3\sqrt{\pi}} (2n)^{3/2} \sim_{+\infty} \frac{2+\pi}{3\sqrt{\pi}} (2n+1)^{3/2},$$

ce qui donne :

$$S_n \sim_{+\infty} \frac{2+\pi}{3\sqrt{\pi}} n^{3/2}.$$

13) Supposons dans un premier temps que $\lambda > 0$. Pour $\varepsilon \in]0, \lambda[$, il existe n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 < \lambda - \varepsilon \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda + \varepsilon.$$

On en déduit par récurrence immédiate :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 < a_{n_0}(\lambda-\varepsilon)^{n-n_0} \leq a_n < a_{n_0}(\lambda+\varepsilon)^{n-n_0},$$

ce qui donne, en prenant la racine n-ième :

$$\forall n \geq n_0,\ \underbrace{\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\lambda-\varepsilon)^{n_0}}}\,(\lambda-\varepsilon)}_{=m_n} \leq \sqrt[n]{a_n} < \underbrace{\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\lambda+\varepsilon)^{n_0}}}\,(\lambda+\varepsilon)}_{=M_n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, le minorant $m_n$tend vers $\lambda-\varepsilon$ et le majorant $M-n$ tend vers $\lambda+\varepsilon$. Il existe donc un rang $n_1 \geq n_0$ tel que :

$$\forall n \geq n_1,\ \lambda - 2\varepsilon \leq m_n \leq \sqrt[n]{a_n} < M_n \leq \lambda + 2\varepsilon$$

ce qui traduit que $\sqrt[n]{a_n}$ converge vers λ quand n tend vers $+\infty$.

Dans le cas où $\lambda = 0$, il suffit de reprendre la preuve en ne regardant que la majoration : pour $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon,$$

ce qui donne par récurrence :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{\varepsilon^{n_0}}}\,\varepsilon$$

et il existe une nouvelle fois $n_1 \geq n_0$ tel que :

$$\forall n \geq n_1,\ 0 \leq \sqrt[n]{a_n} < 2\,\varepsilon$$

ce qui traduit que $\sqrt[n]{a_n}$ converge vers $\lambda = 0$.

14) La suite (x_n) est strictement croissante et diverge vers $+\infty$ (sinon, sa limite ℓ vérifierait $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$).

On a ensuite $u_n = x_{n+1}^2 - x_n^2 = \left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right)^2 - x_n^2 = 2 + \dfrac{2}{x_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. Le théorème de Cesàro donne alors :

$$\frac{x_n^2 - x_0^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

ce qui donne facilement que x_n est équivalent à $\sqrt{2n}$ quand n tend vers l'infini.

15) Remarquons tout d'abord que les deux suites sont bien définies et qu'elles sont strictement positives (récurrence évidente). Montrons ensuite par récurrence la propriété :

$$\mathcal{P}_n :\ u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$$

- Initialisation : nous avons $u_0 = a \leq b = v_0$, $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{\sqrt{ab}}{a} = \sqrt{\dfrac{b}{a}} \geq 1$, $v_1 - u_1 = \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$ et $v_2 - v_1 = \dfrac{b-a}{2} \geq 0$.
- Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$. Comme précédemment (en remplaçant a et b par u_{n+1} et v_{n+1}, nous avons $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$.

(u_n) est donc croissante majorée par v_0, (v_n) décroissante minorée par u_0 : on en déduit que les deux suites convergent. en notant U et V leurs limites respectives, nous obtenons $V = \frac{U+V}{2}$ en faisant tendre n vers l'infini dans la relation $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, soit $U = V$: les deux suites sont adjacentes. On a en particulier :

$$\sqrt{ab} = u_1 \leq \lambda(a,b) \leq v_1 = \frac{a+b}{2}$$

L'écriture de la fonction ne pose pas de problème :

```python
from math import sqrt

def Lambda(a,b,eps):
    u,v = a,b
    while(v-u>eps):
        u,v = sqrt(u*v),(u+v)/2
    return(u)
```

16) Notons $f:\ x \longmapsto \tan\dfrac{\pi x}{2}$ et, pour tout $n \geq 1$, $g_n:\ x \longmapsto \dfrac{\pi}{2nx}$, définies sur $I =]0,1[$. Pour tout $n \geq 1$, la fonction $f - g_n$ est continue et strictement croissante sur $]0,1[$ et tend vers $-\infty$ en 0 et vers $+\infty$ en 1. Elle réalise donc une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$ et il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $f(x_n) = g_n(x_n)$. On a d'autre part $f(x) < g_n(x)$ sur $]0, x_n[$ et $f(x) > g_n(x)$ sur $]x_n, 1[$.

Toujours pour tout $n \geq 1$, nous avons :

$$g_n(x_{n+1}) = \frac{\pi}{2nx_{n+1}} > \frac{\pi}{2(n+1)x_{n+1}} = g_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$$

donc $x_{n+1} < x_n$: la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante. Comme est la minorée par 0, elle converge vers une limite ℓ. Si ℓ était non nulle, on aurait $\tan\dfrac{\pi\ell}{2} = 0$, en faisant tendre n vers l'infini dans la relation $f(x_n) = g_n(x_n)$, ce qui serait absurde. On en déduit que $\ell = 0$.

On trouve ensuite facilement un équivalent de x_n :

$$\frac{\pi x_n}{2} \sim \tan\frac{\pi x_n}{2} = \frac{\pi}{2nx_n}$$

et x_n est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ quand n tend vers l'infini.

On peut donc écrire $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,(1+\varepsilon_n)$ avec $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On peut alors faire des développements asymptotiques de $f(x_n)$ et de $g_n(x_n)$, en écrivant tous les termes pour bien regarder les ordres de grandeurs :

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= \tan\frac{\pi\,(1+\varepsilon_n)}{2\sqrt{n}} = \frac{\pi\,(1+\varepsilon_n)}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi\,(1+\varepsilon_n)}{2\sqrt{n}}\right)^3 + O\left(\left(\frac{\pi\,(1+\varepsilon_n)}{2\sqrt{n}}\right)^5\right)\\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{n}} + \frac{\pi\,\varepsilon_n}{2\sqrt{n}} + \frac{\pi^3}{24n^{3/2}} + \frac{\pi^3\varepsilon_n}{8n^{3/2}} + \frac{\pi^3\varepsilon_n^2}{8n^{3/2}} + \frac{\pi^3\varepsilon_n^3}{24n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\\
g_n(x_n) &= \frac{\pi}{2\sqrt{n}}\,\frac{1}{1+\varepsilon_n} = \frac{\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi\,\varepsilon_n}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne (en simplifiant et en changeant un terme de côté) :

$$\frac{\pi^3}{24n^{3/2}} + \underbrace{\frac{\pi^3\varepsilon_n}{8n^{3/2}} + \frac{\pi^3\varepsilon_n^2}{8n^{3/2}} + \frac{\pi^3\varepsilon_n^3}{24n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{=\,o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)} = -\frac{\pi\,\varepsilon_n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}\right)$$

soit $\dfrac{\pi^3}{24n^{3/2}} \sim_{+\infty} -\dfrac{\pi\,\varepsilon_n}{\sqrt{n}}$, ou encore $\varepsilon_n \sim_{+\infty} -\frac{\pi^2}{24n}$. Cela donne le développement de x_n à deux termes :

$$x_n = \frac{1}{n^{1/2}} - \frac{\pi^2}{24}\,\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

17) Quand k décrit $[\![1,n]\!]$, k/n^3 est compris entre 0 et $1/n^2$: toutes ces valeurs sont donc proches de 0 quand n est suffisamment grand. Nous allons donc pouvoir utiliser le DL de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0, en veillant à donner au reste une forme assez précise pour pouvoir manipuler la somme. Nous écrivons donc :

$$\forall x \in [0,1],\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^3\varphi(x)$$

où φ est une fonction bornée sur $[0,1]$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^3}\right) &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2n^6}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \underbrace{\frac{1}{n^9}\sum_{k=1}^{n} k^3\varphi(k/n^3)}_{=R_n} \\
&= \frac{n+1}{2n^2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^5} + R_n \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12n^5} + R_n
\end{aligned}$$

En notant M un majorant de $|\varphi(x)|$ sur $[0,1]$, nous avons ensuite :

$$|R_n| \leq \frac{1}{n^9}\sum_{k=1}^{n} k^3|\varphi(k/n^3)| \leq \frac{M}{n^9}\sum_{k=1}^{n} n^3 = \frac{M}{n^5}$$

Nous obtenons donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^3}\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{4n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

18) Il existe une extractive φ telle que $x_{\varphi(n)}$ converge vers λ. Comme f est continue, on en déduit que $x_{\varphi(n)+1} = f(x_{\varphi(n)})$ converge vers $f(\lambda)$. Ainsi, $f(\lambda)$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$, donc $f(\lambda) = \lambda$: l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$ est un point fixe de f.

Supposons que $(x_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers λ. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \geq n,\ |x_p - \lambda| \geq \varepsilon_0 \qquad (i)$$

La continuité de f en λ prouve ensuite qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x-\lambda| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \lambda| < \varepsilon_0 \qquad (ii)$$

Fixons $N \in \mathbb{N}$. Comme λ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$, il existe $p \geq N$ tel que $|x_p - \lambda| < \eta$. Si l'on avait $|x_{p+k} - \lambda| < \eta$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on aurait $|x_{p+k+1} - \lambda| < \varepsilon_0$ pour tout k, ce qui contredirait (i). On peut donc définir $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N},\ x_{p+k} - \lambda| \geq \eta\}$. On a $k_0 \geq 1$ (car $|x_p - \lambda| < \eta$) et $|x_{p+k_0-1} - \lambda| < \eta$ par minimalisé de k_0. En utilisant (ii), nous obtenons :

$$\eta \leq |x_{p+k_0} - \lambda| < \varepsilon_0.$$

Nous avons donc démontré :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n > N,\ \eta \leq |x_n - \lambda| < \varepsilon_0$$

Il existe ainsi une extractrice ψ telle que $\eta \leq |x_{\psi(n)} - \lambda| < \varepsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite extraite $\left(x_{\psi(n)}\right)_{n\geq 0}$ est alors une suite bornée : elle possède une valeur d'adhérence μ, qui est aussi une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$: on doit donc avoir $\lambda = \mu$, ce qui est absurde car $0 < \eta \leq |\mu - \lambda| \leq \varepsilon_0$.

Nous avons donc démontré (preuve par l'absurde) que $(x_n)_{n\geq 0}$ convergeait vers λ.

19) a) L'intervalle $I = [0, \pi/2]$ est stable par $f :\ x \longmapsto \sin x$ et f est continue et croissante sur I. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Comme $u_1 = \sin u_0 < u_0$, la suite est décroissante et minorée par 0 : elle a donc une limite ℓ, puis $\ell = 0$, seul point fixe de f sur I.

b) Supposons que a et α existent. Comme u_n tend vers 0, nous avons :

$$\alpha_n = u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n^3}{6} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{A^3}{6}\, n^{3\alpha} = \beta_n$$

Comme α_n est un terme général de série convergente (u_n converge), le théorème sur la sommation des équivalents de termes généraux de séries à termes de signe constant (les β_n sont négatifs) donne :

$$-u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \beta_k = -\frac{A^3}{6} \sum_{k=n}^{+\infty} k^{3\alpha}$$

La convergence de cette dernière série impose que $3\alpha < -1$ et par comparaison série-intégrale, on a :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} k^{3\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} x^{3\alpha}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{3\alpha+1}\, n^{3\alpha+1}$$

On en déduit :

$$-An^{\alpha} \underset{+\infty}{\sim} -u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{A^3}{6} \sum_{k=n}^{+\infty} k^{3\alpha} \underset{\infty}{\sim} \frac{A^3}{6(3\alpha+1)}\, n^{3\alpha+1},$$

ce qui donne $\alpha = 3\alpha + 1$ et $-A = \dfrac{A^3}{6(3\alpha+1)}$, i.e. $\alpha = -1/2$ et $A = \sqrt{3}$.

c) Nous avons :

$$u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \left(u_n - \frac{1}{6}\, u_n^3 + o(u_n^3)\right)^{-2} - u_n^{-2} = u_n^{-2}\left((1 - \frac{1}{6}\, u_n^2 + o(u_n^2))^{-2} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3}$$

puisque $(1+x)^{-2} - 1 \sim_0 -2x$. On peut ensuite appliquer le théorème de Césàro :

$$\frac{u_n^{-2} - u_0^{-2}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}$$

ce qui donne $u_n^{-2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{3}$, puis $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$.

20) La suite u est trivialement croissante et diverge vers $+\infty$ (la fonction $x \longmapsto x + 1/\sqrt{x}$ définie sur $]0, +\infty[$ n'a pas de point fixe). On utilise alors une méthode usuelle : on cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ possède une limite non nulle λ : le théorème de Cesàro donnera alors $u_n^{\alpha} \sim \lambda\, n$, soit $u_n \sim (\lambda\, n)^{1/\alpha}$.

Nous avons :

$$v_n = u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} = u_n^{\alpha}\left[\left(1 + \frac{1}{u_n^{3/2}}\right)^{\alpha} - 1\right] \sim_{+\infty} u_n^{\alpha} \times \frac{\alpha}{u_n^{3/2}}.$$

Ainsi, avec $\alpha = 3/2$, nous avons $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 3/2$ et $\dfrac{u_n^{\alpha} - u_0^{\alpha}}{n} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3/2$. Nous avons donc démontré que u_n était équivalent à $\left(\frac{3n}{2}\right)^{2/3}$.

On peut ensuite affiner le calcul précédent en utilisant cet équivalent :

$$v_n = u_n^{3/2}\left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{u_n^{3/2}} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{u_n^3} + o\left(\frac{1}{u_n^3}\right)\right) = \frac{3}{2} + \alpha_n$$

où $\alpha_n = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{u_n^{3/2}} + o\left(\dfrac{1}{u_n^{3/2}}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{3}{8}\, \dfrac{1}{u_n^{3/2}} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{4n}$.

On en déduit (théorème de sommation pour des séries à termes positifs divergentes) :

$$u_n^{3/2} = \frac{3n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k + u_0^{3/2} = \frac{3n}{2} + \frac{\ln n}{4} + o(\ln n)$$

Il reste à élever à la puissance 2/3 :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{3n}{2}\right)^{2/3}\left(1+\frac{\ln n}{6n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^{2/3} \\ &= \left(\frac{3n}{2}\right)^{2/3}\left(1+\frac{\ln n}{9n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \\ &= \left(\frac{3n}{2}\right)^{2/3}+\left(\frac{1}{18}\right)^{2/3}\frac{\ln n}{n^{1/3}}+o\left(\frac{\ln n}{n^{1/3}}\right) \end{aligned}$$

21) a) La fonction $f_n:\ x\longmapsto x^n+\cdots+x-1$ est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, avec $f_n(0)=-1$ et $f_n(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$. On en déduit que f_n est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[-1,+\infty[$: f_n possède une unique racine positive x_n.

b) Comme $f_n\leq f_{n+1}$ sur $[0,+\infty[$, on a $f_n(x_{n+1})\leq f_{n+1}(x_{n+1})=0$. Ceci prouve que $x_{n+1}\leq x_n$ (car f_n est négative sur $[0,x_n]$ et positive sur $[x_n,+\infty[$.

La suite est donc décroissante et minorée par 0 : elle admet une limite ℓ. On a ensuite, pour $n\geq 2$ ($x_n<1$) :

$$\forall n\geq 2, \frac{1-x_n^{n+1}}{1-x_n}=2.$$

On a $\ln(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln\ell<0$, donc $1-x_n^{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$. On en déduit que $1=2(1-\ell)$, soit $\ell=\dfrac{1}{2}$.

c) Soit $q\in]1/2,1[$. Comme x_n tend vers $1/2$, il existe un rang n_0 à partir duquel $x_n\leq q$. On a ensuite, pour $n\geq n_0$:

$$1-2\varepsilon_n=2(1/2-\varepsilon_n)=2(1-x_n)=1-x_n^{n+1}\geq 1-q^{n+1}$$

d'où $0\leq\varepsilon_n\leq\dfrac{q}{2}\,q^n$: ε_n est un O de q^n.

On en déduit :

$$\begin{aligned} x_n^{n+1} &= \left(\frac{1}{2}+\varepsilon_n\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}+O(q^n)\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\left(1+O(q^n)\right)\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e^{(n+1)\ln(1+O(q^n))} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e^{O((n+1)q^n)} \\ &\sim \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

car $(n+1)q^n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini ($0<q<1$). Nous en déduisons :

$$\varepsilon_n=\frac{1}{2}\,x_n^{n+1}\sim\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}.$$

Nous avons ainsi obtenu le développement asymptotique :

$$x_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}+o\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

22) a) On utilise python pour calculer les premiers termes de la suite :

```
def u(n):
    if n == 0:
        return 9
    else:
        v = u(n-1)
        return(4*v**3+3*v**4)
```

On peut s'amuser ensuite à écrire une fonction qui renvoie le nombre de 9 qui termine l'écriture d'un entier :

```
def nb_neuf(n):
    if n % 10 != 9:
        return 0
    else:
        return 1+nb_neuf(n//10)
```

On obtient :

In : [nb_neuf(u(n)) for n in range(10)]

Out : [1,2,4,8,16,32,64,128,256,512]

On peut donc conjecturer que u_n se termine par 2^n chiffres 9.

b) Pour tout n, nous pouvons écrire d'une unique façon $u_n = 10^{k_n} a_n - 1$ avec $k_n \in \mathbb{N}$ et a_n non divisible par 10 (k_n est le nombre de 9 terminant l'écriture de u_n en base 10). Nous avons :

$$u_{n+1} = 4(10^{k_n} a_n - 1)^3 + 3(10^{k_n} a_n - 1)^4 = (3\, a_n^4\, 10^{2k_n} - 8\, a_n^3\, 10^{k_n} + 6\, a_n^2)\, 10^{2k_n} - 1$$

Si nous pouvons montrer que $3\, a_n^4\, 10^{2k_n} - 8\, a_n^3\, 10^{k_n} + 6\, a_n^2$ n'est pas divisible par 10, nous pourrons donc affirmer que $k_{n+1} = 2k_n$ et conclure que $k_n = 2^n$, puisque $k_0 = 1$. Nous avons :

$$3\, a_n^4\, 10^{2k_n} - 8\, a_n^3\, 10^{k_n} + 6\, a_n^2 \equiv 6\, a_n^2 \mod 10$$

donc il faut avoir une propriété supplémentaire sur a_n pour pouvoir conclure. On voit que le passage de a_n à $6a_n^2$ n'introduit pas de facteur 5 : on peut donc maintenant démontrer par récurrence la propriété plus forte :

$(\mathcal{P}_n)$: u_n s'écrit $10^{2^n} a_n - 1$ avec $a_n \not\equiv 0 \mod 5$.

La propriété est vraie pour $n = 0$, avec $a_0 = 1$; soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}_n$ est vérifié. On a alors :

$$u_{n+1} = 10^{2^{n+1}} a_{n+1} - 1 \text{ avec } a_{n+1} = 3\, 10^{2^{n+1}} a_n^4 - 8\, 10^{2^n} a_n^3 + 6a_n^2 \equiv a_n^2 \not\equiv 0 \mod 5$$

ce qui achève la preuve.

Nous avons donc démontré que pour tout n, les 2^n derniers chiffres de u_n sont des 9 et que le chiffre suivant n'est ni un 9, ni un 4. On peut calculer ce chiffre en étudiant modulo 10 la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 6a_n^2$: comme $a_1 = 6$, $a_2 = 6^3 \equiv 6 \mod 10$, puis $a_n \equiv 6 \mod 10$ pour tout $n \geq 1$. Pour $n \geq 1$, l'écriture en base 10 de a_n se termine donc par un chiffre 6 suivi de 2^n chiffres 9.

23) a) Quand $u_n = n^\alpha$, la série de terme général u_n diverge et par comparaison avec une intégrale, on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} \int_1^n x^\alpha \, \mathrm{d}x \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

On en déduit que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\alpha+1}$, donc v_n tend vers $\dfrac{1}{\alpha+1}$ quand n tend vers l'infini.

De la même manière, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k u_k \underset{+\infty}{\sim} \int_1^n x^{\alpha+1} \, \mathrm{d}x \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+2}}{\alpha+2}$$

puis v_n tend vers $\dfrac{1}{\alpha+2}$ quand n tend vers l'infini.

b) Comme a est non nul, on peut écrire $S_n \sim_{+\infty} anu_n$; S_n est strictement croissante et strictement positive, donc la série de terme général S_n est donc grossièrement divergente (son terme général ne tend pas vers 0) et le théorème de sommation des équivalents, pour des séries à termes positifs, donne :

$$\sum_{k=1}^{n} S_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} aku_k.$$

Par produit, on obtient :

$$w_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{an^2u_n} \sum_{k=1}^{n} S_k.$$

On peut écrire ensuite :

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)u_i = (n+1)\sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{i=1}^{n} iu_i = (n+1)S_n - n^2u_nw_n.$$

On en déduit :

$$w_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(n+1)v_n}{an} - \frac{w_n}{a}$$

Le premier terme de cette somme tend vers 1 quand n tend vers l'infini et il faut être un peu prudent en manipulant les équivalents (on ne fait pas de somme d'équivalents) : on peut par exemple écrire

$$\frac{(n+1)v_n}{an} - \frac{w_n}{a} = w_n + o(w_n)$$

ce qui donne

$$\frac{(n+1)v_n}{an} = \left(1 + \frac{1}{a}\right) w_n + o(w_n) \sim_{+\infty} \frac{1+a}{a}\, w_n$$

pour enfin obtenir

$$w_n \sim_{+\infty} \frac{a}{a+1}\,\frac{(n+1)v_n}{an} \sim_{+\infty} \frac{a}{a+1}$$

ce qui traduit que w_n converge vers $\dfrac{a}{a+1}$.

24) Notons $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $v_1 = 0$ et $\forall n \geq 1, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{n} + \dfrac{1}{n^2}$. La suite $w = u - v$ vérifie :

$$w_1 = u_1 \text{ et } \forall n \geq 1, w_{n+1} = \frac{w_n}{n}.$$

On en déduit que $\forall n \geq 1,\ w_n = \dfrac{u_1}{(n-1)!}$, ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + \frac{u_1}{(n-1)!}.$$

Comme $v_1 = 0$, $v_2 = 2$, puis une récurrence élémentaire montre que $0 \leq v_n \leq 2$ pour tout $n \geq 1$:

- $v_1, v_2 \in [0, 2]$ donc la propriété est initialisée au rang $n = 1$ et $n = 2$;
- soit $n \geq 2$ et supposons que $0 \leq v_n \leq 2$; on a $0 \leq \dfrac{v_n}{n} + \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2} \leq 1 + \dfrac{1}{4} \leq 2$, donc $0 \leq v_{n+1} \leq 2$.

On en déduit :

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq v_{n+1} \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

donc v_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On en déduit :

- $v_{n+1} = \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, i.e. $v_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

- $v_{n+1} = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{v_n}{n} = \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

Nous en concluons que $u_n = v_n + \dfrac{u_1}{(n-1)!}$ est équivalent à $\dfrac{1}{n^2}$ au voisinage de $+\infty$.

25) Le terme u_{n-1}/n^2 est sans doute négligeable devant $2u_n$, ce qui conduit à comparer u à la suite v définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n$ pour tout n, i.e. à la suite $(2^n)_{n\geq 0}$. Il est donc naturel d'étudier $(w_n)_{n\geq 0} = \left(\dfrac{u_n}{2^n}\right)_{n\geq 0}$. Nous avons $w_0 = w_1 = 1$ et $w_{n+1} = w_n + \dfrac{w_{n-1}}{4n^2}$ pour tout $n \geq 1$. La suite w est trivialement croissante, ce qui permet d'écrire :

$$\forall n \geq 1,\ w_{n+1} \leq w_n \left(1 + \frac{1}{4n^2}\right)$$

ce qui donne :

$$\forall n \geq 1,\ w_n \leq w_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{4k^2}\right) = \alpha_n.$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{4n^2}\right)$ est convergente car son terme général est équivalent à $\dfrac{1}{4n^2}$) : cela prouve que (α_n) est convergente, donc majorée. On en déduit que v_n a une limite finie $\lambda \geq 1$ (elle est croissante et majorée). On a donc $w_n \sim_{+\infty} \lambda$ et $u_n \sim_{+\infty} \lambda\, 2^n$.

Je ne pense pas qu'il soit possible de calculer la valeur de λ.

26) a) La suite est strictement croissante et n'a pas de limite finie (si elle convergeait vers ℓ, on aurait $\ell = \ell + e^{-\ell}$). On en déduit donc que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.

b) On a $v_{n+1} = v_n e^{1/v_n}$. Comme $1/v_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on a :

$$v_{n+1} = v_n \left(1 + \frac{1}{v_n} + o\left(\frac{1}{v_n}\right)\right) = v_n + 1 + o(1)$$

Ainsi, $v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et, par le théorème de Cesàro :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

ce qui donne $v_n \underset{+\infty}{\sim} n$.

On peut ensuite améliorer le développement de v_{n+1} :

$$v_{n+1} = v_n \left(1 + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{2v_n^2} + o\left(\frac{1}{v_n^2}\right)\right) = v_n + 1 + \frac{1}{2v_n} + o\left(\frac{1}{v_n}\right)$$

On a donc :

$$v_{n+1} - v_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2v_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

Le théorème de sommation des équivalents pour des séries divergentes à termes positifs donne :

$$v_n - v_1 + (n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k - 1) \sim_{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} \sim \frac{1}{2}\ln n$$

qui donne le développement $v_n = n + \frac{1}{2}\ln n + o(\ln n)$, puis :

$$u_n = \ln v_n = \ln n + \ln\left(1 + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) = \ln n + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

27) a) On a $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(u_k) + f(u_n)\right) = \dfrac{n}{n+1}\, u_n + \dfrac{1}{n+1}\, f(u_n)$, et donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{f(u_n) - u_n}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

car $|f(u_n) - u_n| \leq 2$.

b) Un réel a est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n - a| < \varepsilon.$$

Supposons donc que $a, b \in A$ et $c \in \mathbb{R}$ avec $a < c < b$: montrons que $c \in A$. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Quitte à diminuer ε et à augmenter N, on peut supposer :

- $a < c - \varepsilon < c + \varepsilon < b$;
- $\forall n \geq N,\ |u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$.

En appliquant l'hypothèse $a \in A$ au couple $(c - \varepsilon - a, N)$, on obtient un entier n_1 tel que $n_1 \geq N$ et $u_{n_1} < c - \varepsilon$; l'hypothèse $b \in A$ appliquée au couple $(b - c - \varepsilon, n_1)$ donne ensuite $n_2 \geq n_1$ tel que $u_{n_2} > c + \varepsilon$. La suite $u_{n_1}, \ldots, u_{n_2}$ passe donc d'une valeur $< c - \varepsilon$ à une valeur $> c + \varepsilon$ en faisant des sauts majorés par ε en valeur absolue : il existe ainsi n compris entre n_1 et n_2 tel que $c - \varepsilon < u_n < c + \varepsilon$, ce qui donne un entier $n \geq N$ tel que $|c - u_n| < \varepsilon$: c est bien élément de A.

c) Supposons que a soit un point intérieur à A. Si $f(a) > a$, on a également $f(x) - x > 0$ sur un voisinage $I =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ de a. Si u_n appartient à cet intervalle, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{f(u_n) - u_n}{n+1} > 0$: la suite va donc être strictement croissante tant quelle ne sort pas de I. Comme elle ne converge pas, elle va donc nécessairement sortir de I : on va alors utiliser l'hypothèse que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 pour montrer que la suite ne peut plus s'approcher de a. Il existe en effet $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geq N$. On peut ensuite choisir $n_1 \geq N$ tel que $u_{n_1} \in I$. Il existera ensuite $m_1 > n_1$ tel que $u_{n_1} < u_{n_1+1} < \cdots < u_{m_1-1} < u_{m_1}$, $u_{m_1-1} \in I$ et $u_{m_1} \geq a + \varepsilon$. Comme a est valeur d'adhérence, la suite doit revenir dans l'intervalle I, mais la condition $|u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geq N$ prouve l'existence d'un $n_2 > m_1$ tel que $u_{m_1}, \ldots, u_{n_2-1} \geq a + \varepsilon$ et $a + \frac{\varepsilon}{2} \leq u_{n_2} < a + \varepsilon$. Le même argument prouve ensuite que $u_n \geq a + \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq n_2$, ce qui contredit le fait que $a \in A$.

Nous avons ainsi prouvé que $f(a) \leq a$, et par symétrie que $f(a) \geq a$. Ainsi, pour tout point intérieur à A, $f(a) = a$. Si A n'était pas réduit à un singleton, il existerait a et $\varepsilon > 0$ tels que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A$. Il existerait alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$: cette valeur étant intérieure à A, on aurait $f(u_{n_0}) = u_{n_0}$, puis $u_{n_0+1} = u_{n_0}$: la suite u serait dons stationnaire à partir du rang n_0, donc convergente, ce qui est exclu car A n'est pas un singleton.

Ainsi, A est un singleton et comme la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée, elle converge vers l'unique élément a de A (sinon, il existerait $\varepsilon > 0$ et une extractrice φ telle que $|u_{\varphi(n)} - a| \geq \varepsilon$ pour tout n : la suite extraite aurait alors une valeur d'adhérence b (théorème de Stone-Weierstrass) différente de a, avec $b \in A = \{a\}$).

Enfin, comme u_n tend vers a et que f est continue, $f(u_n)$ tend vers $f(a)$ et le théorème de Cesaro donne que $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(u_k)$ tend vers $f(a)$, d'où $a = f(a)$: la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un point fixe de f.

28) a) On a $u_n \geq \sqrt{n}$, donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

b) Montrons cette propriété par récurrence :

- $u_1 = 1 \leq 1$;

- soit $n \geq 1$ et supposons que $u_n \leq n$. On a alors :

$$u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \leq \sqrt{2n+1} \leq n+1$$

car $2n+1 \leq (n+1)^2$.

c) On a donc, pour $n \geq 2$:

$$u_n = \sqrt{n+u_{n-1}} \leq \sqrt{2n-1} = o(n)$$

puis

$$u_n = \sqrt{n+u_{n-1}} = \sqrt{n+o(n)} = \sqrt{n}\,\sqrt{1+o(1)} \sim_{+\infty} \sqrt{n}.$$

29) a) On commence par écrire une fonction récursive `binomial` qui, appliquée à un entier n, renvoie la suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{0\leq k\leq n}$, puis la fonction `u` n'a plus qu'à additionner les inverses des éléments calculés par `binomial` :

```
def binomial(n):
    if n == 0:
        return [1]
    else:
        l = binomial(n-1)
        for i in range(n-1):
            l[n-i-1] = l[n-i-1]+l[n-i-2]
        l.append(1)
        return l
```

```
def u(n):
    l = binomial(n)
    s = 0
    for i in range(n+1):
        s += 1/l[i]
    return(s)
```

On obtient ainsi les valeurs approchées de u_n :

```
Int[3]: u(10), u(100), u(1000)
Out[3]: (2.2746031746031745, 2.0204169474120084, 2.004016129428053)
```

On peut donc conjecturer que u_n converge vers 2 quand n tend vers l'infini. La preuve utilise la même astuce que pour montrer que $n!$ est équivalent à $\sum_{k=0}^{n} k!$ quand n tend vers l'infini :

$$\sum_{k=0}^{n} k! = n! + (n-1)! + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} k!}_{\leq (n-1)(n-2)!} = n! + O((n-1)!) \sim n!$$

Dans notre cas, nous avons, pour $n \geq 4$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{n} + 1$$

et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{n-3}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: cela donne bien que u_n converge vers 2.

b)

30) a) La suite u est clairement positive. Supposons qu'elle converge et notons $\ell \geq 0$ sa limite. Par continuité de la fonction ln, nous avons $\ell = 2\ln(1+\ell)$. Une étude élémentaire de la fonction $f :\ x \longmapsto x - 2\ln(1+x)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$ montre qu'elle possède deux racines, 0 et $\alpha > 0$, et que l'on a $f(x) < 0$ pour $x \in]0, \alpha[$ et $f(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

On montre facilement par récurrence que $u_n \geq 1$ pour tout n (la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, et si elle est vraie pour $n-2$ et $n-1$, alors $u_n \geq 2\ln 2 \geq 1$), donc $\ell = \alpha$.

Si la suite (u_n) converge, elle converge vers la racine $\alpha > 0$ de l'équation $x = 2\ln(1+x)$. On trouve facilement $2,512 < \alpha < 2,513$.

b) On a $u_0 \leq \alpha$ et $u_1 \leq \alpha$. Pour $n \geq 2$, si on suppose que $u_{n-2} \leq \alpha$ et $u_{n-1} \leq \alpha$, on a

$$u_n = \ln(1+u_{n-1}) + \ln(1+u_{n-2}) \leq 2\ln(1+\alpha) = \alpha.$$

La suite u est donc bornée, avec $0 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Les suites a et A sont respectivement croissante et décroissante. Comme elles sont bornées, elles convergent.

d) Si λ est une valeur d'adhérence de u, il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)}$ converge vers λ. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{\varphi(n)} \leq u_{\varphi(n)} \leq A_{\varphi(n)}$$

et donc $a \leq \lambda \leq A$ en faisant tendre n vers l'infini.

Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $N \geq n$ tel que $|a_N - a| \leq \varepsilon$. On a donc en particulier $a_N \leq a + \varepsilon$; comme a_N est le plus grand des minorants de $\{u_k,\ k \geq N\}$, il existe $k \geq N$ tel que $u_k \leq a+\varepsilon$, ce qui donne $a \leq u_k \leq a + \varepsilon$. Nous avons donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geq n,\ |u_k - a| \leq \varepsilon$$

ce qui traduit que a est une valeur d'adhérence de u (la preuve est identique pour A).

e) En choisissant une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)}$ converge vers a, la suite $(u_{\varphi(n)-1}, u_{\varphi(n)-2})$ est bornée, donc il existe une extractrice ψ telle que $u_{\varphi(\psi(n))-1}$ et $u_{\varphi(\psi(n))-2}$ convergent vers respectivement ℓ_1 et ℓ_2. En faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité :

$$u_{\varphi(\psi(n))} = \ln(1+u_{\varphi(\psi(n))-2}) + \ln(1+u_{\varphi(\psi(n))-1}),$$

on obtient $a = \ln(1+\ell_1) + \ln(1+\ell_2)$. Comme ℓ_1 et ℓ_2 sont des valeurs d'adhérence de u, on a $\ell_1 \geq a$ et $\ell_2 \geq a$, ce qui donne $f(a) = a - 2\ln(1+a) \geq 0$ par croissante de la fonction ln. Ceci prouve que $\alpha \leq a$.

De même, on montre que $\alpha \geq A$, ce qui donne $A \leq \alpha \leq a$, soit $\alpha = a = A$ puisque $a \leq A$. Comme $a_n \leq u_n \leq A_n$, la suite (u_n) converge vers α.

31) L'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par l'application continue $f\ :\ x \longmapsto x\dfrac{1+x}{2+x}$ donc la suite u est bien définie et strictement positive. Elle est trivialement décroissante : elle converge donc vers un réel $a \geq 0$ et un passage à la limite donne $a = a\dfrac{1+a}{2+a}$, soit $a = 0$.

En posant $\mathrm{v}_n = \ln u_n$, nous avons :

$$v_{n+1} - v_n = \ln \frac{1+u_n}{2+u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln 2.$$

Le théorème de Cesàro donne donc $v_n \sim_{+\infty} -n\ln 2$, mais cet équivalent ne suffit pas pour en déduire un équivalent de u_n. Nous allons donc affiner le développement :

$$v_{n+1} - v_n + \ln 2 = \ln(1+u_n) - \ln(1+u_n/2) \sim_{+\infty} -\frac{u_n}{2}$$

Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1+u_n}{2+u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2} < 1$, u_n est un terme général de série convergente (critère de d'Alembert pour les séries à termes strictement positifs). Par théorème de comparaison des séries de signe constant, on en déduit que $\sum_{n\geq 0} v_{n+1} - v_n + \ln 2$ est convergente. En notant S sa somme, nous avons :

$$v_n - v_0 + n\ln 2 = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{n+1} - v_n + \ln 2) = S + o(1)$$

Nous pouvons donc maintenant revenir à u_n :

$$u_n = e^{v_n} = e^{-n\ln 2 + S + v_0 + o(1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{K}{2^n} \text{ en posant } K = e^{S+v_0}.$$

Il y a peu de chance que l'on soit capable de donner une expression précise de K, qui dépend de u_0, comme un calcul numérique le met en évidence.

32) a) On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\substack{q \geq \mathbb{N}^* \\ q \mid n}} q \right) = \sum_{\substack{p,q \geq 1 \\ pq \leq n}} q = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} q \right) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 \right)$ en utilisant la formule bien connue : $1 + 2 + \cdots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

b) L'encadrement $a - 1 \leq \lfloor a \rfloor \leq a$ donne ensuite $\displaystyle\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{n}{p} - 1 \right) \frac{n}{p} S_n \leq \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{p} \left(\frac{n}{p} + 1 \right)$, soit :

$$\frac{n^2}{2} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} - \frac{n}{2} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq S_n \leq \frac{n^2}{2} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \frac{n}{2} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$$

Comme $\displaystyle n \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sim n \ln n = o(n^2)$, on obtient $S_n \sim_{+\infty} \dfrac{\pi^2 n^2}{12}$. En remarquant que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6} + O(1/n)$, on a un résultat un peu meilleur : $S_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{12} + O(n \ln n)$.

33) a) On a directement :

```
def fibo1 n:
   if n < 2:
      return a
   else:
      return fibo1(n-1)+fibo1(n-2)
```

En notant T_n le temps de calcul pour l'appel `fibo1 n`, nous avons :

$$T_0 = T_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 0,\ T_{n+2} = T_{n+1} + T_n + 1.$$

Cette récurrence a pour solution particulière la suite contante égale à -1 et la solution générale de la congruence homogène associée est $x_n = A\Phi^n + B\overline{\Phi}^n$, avec $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or) et $\Phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On en déduit, en utilisant les conditions initiales :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = -1 + \frac{5+\sqrt{5}}{5}\, \Phi^n + \frac{5-\sqrt{5}}{5}\, \overline{\Phi}^n$$

Ainsi, $T_n = \dfrac{5+\sqrt{5}}{5}\, \Phi^n - 1 + o(1)$, puisque $|\overline{\Phi}| < 1$: le temps de calcul est exponentiel.

b) Il suffit d'utiliser une fonction auxiliaire récursive `couple` qui renvoie le couple (F_n, F_{n+1}) :

```
def fibo2(n) :
    def couple(n):
        if n == 0:
            return 0,1
        else:
            u,v = couple(n-1)
            return v,u+v
    return couple(n)[0]
```

c) Montrons par récurrence sur n la propriété :

$$\mathcal{P}_n :\ \forall m \in \mathbb{N}^*,\ F_{n+m} = F_{n+1} F_m + F_n F_{m-1}.$$

- pour $n = 0$ et $m \geq 1$, on a bien $F_{n+m} = F_m = F_1 F_m + F_0 F_{m-1}$ puisque $F_1 = 1$ et $F_0 = 0$;
- soit $n \geq 0$ et supposons que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée. Pour $m = 1$, nous avons bien :

$$F_{n+1+m} = F_{n+2} = F_{n+2} F_1 + F_{n+1} F_0 = F_{n+2} F_m + F_{n+1} F_{m-1}.$$

Pour $m \geq 2$, nous avons (en utilisant deux fois l'hypothèse de récurrence au rang n) :

$$\begin{aligned}
F_{n+1+m} &= F_{n+m} + F_{n+m-1} \\
&= F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1} + F_{n+1}F_{m-1} + F_nF_{m-2} \\
&= F_{n+1}F_m + F_{n+1}F_{m-1} + F_n(F_{m-1} + F_{m-2}) \\
&= F_{n+1}F_m + F_{n+1}F_{m-1} + F_nF_m \\
&= (F_{n+1} + F_n)F_m + F_{n+1}F_{m-1} \\
&= F_{n+2}F_m + F_{n+1}F_{m-1}
\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc démontrée.

On en déduit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
F_{2k} &= F_k(F_{k-1} + F_{k+1}) \\
F_{2k+1} &= F_{k+1}^2 + F_k^2 \\
F_{2k+2} &= F_{k+2}F_{k+1} + F_{k+1}F_k = (F_k + F_{k+1})F_{k+1} + F_{k+1}F_k
\end{aligned}$$

On peut donc calculer (F_{2k}, F_{2k+1}) à partir de (F_{k-1}, F_k) et (F_{2k+1}, F_{2k}) à partir de (F_k, F_{k+1}). Cela donne :

```python
def fibo3(n) :
    def couple(n):
        if n == 0:
            return 0,1
        elif n % 2 == 0:
            u,v = couple(n//2-1)
            w = u+v
            return v*(u+w),v**2+w**2
        else:
            u,v = couple(n//2)
            w = u+v
            return u**2+v**2,v*(u+w)
    return couple(n)[0]
```

Le temps de calcul $T(n)$ vérifie :

$$T(0) = 1 \text{ et } \forall n \geq 0,\ T(2n+2) = T(2n+1) = 1 + T(n),$$

ce qui donne bien un temps de calcul logarithmique.

34) L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites vérifiant cette récurrence est un espace affine de dimension 1, de direction $\mathcal{S}_0$, espace des solutions de l'équation homogène : $x_{n+1} = nx_n$. Comme $\mathcal{S}_0$ est engendré par la suite $((n-1)!)_{n\geq 1}$, on peut appliquer la méthode de variation de la constante : en posant $x_n = \theta_n(n-1)!$, la relation $x_{n+1} = nx_n - n^2$ devient :

$$\forall n \geq 1,\ \theta_{n+1} = \theta_n - \frac{n}{(n-1)!}.$$

On en déduit :

$$\forall n \geq 1,\ \theta_n = \theta_1 - \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}.$$

Ainsi, θ_n tend vers $\theta_1 - 2e$ quand n tend vers l'infini et si $\theta_1 \neq 2e$, $x_n \sim_{+\infty} (\theta_1 - 2e)(n-1)! \gg n$: il est donc nécessaire d'avoir $\theta_1 = 2e$, i.e. $x_1 = 2e$, pour avoir $x_n = O(n)$.

Réciproquement, supposons que $x_1 = 2e$. On a alors :

$$\forall n \geq 2,\ x_n = \left(\sum_{n-2}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)(n-1)! = \left(\frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!} + 2\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)(n-1)! = n + 1 + 2\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{k!}$$

Pour $k \geq n$, on a $\dfrac{(n-1)!}{k!} = \dfrac{1}{n(n+1)\dots k} \leq \dfrac{1}{1 \times 2 \cdots \times (k-n+1)} = \dfrac{1}{(k-n+1)!}$, ce qui donne :

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq x_n \leq n + 1 + 2\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q!} = n - 1 + 2e$$

et x_n est un $O(n)$.

35) a) Pour $n \geq 1$, la fonction $f_n :\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$ est continue et strictement décroissante sur $]n, +\infty[$; comme elle tend vers $+\infty$ en n et vers 0 en $+\infty$, f_n réalise une bijection de $]n, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$: il existe donc un unique x_n vérifiant $f_n(x_n) = a$.

b) Soit $n \geq 1$. On a $f_n(x_{n+1}) < f_{n+1}(x_{n+1}) = a$ et f_n^{-1} est strictement décroissante, donc $x_{n+1} > f_n^{-1}(a) = x_n$: la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

c) On a :

$$f_n(n+m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+m-k} = \sum_{q=m}^{n+m} \frac{1}{q} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Il existe donc un rang $n_0 \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ f_n(n+m) \geq a$$

et, par décroissance de f_n, $n + m \leq x_n$ dès que $n \geq n_0$.

d) Pour tout $n \geq 1$, posons $x_n = n + \alpha_n$; d'après la question précédente, α_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. Nous avons :

$$a = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+\alpha_n-k} = \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{\alpha_n+q}.$$

Dès que $\alpha_n > 1$, on peut écrire :

$$\int_0^{n+1} \frac{1}{\alpha_n+t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{q+\alpha_n} \leq \int_{-1}^{n} \frac{1}{\alpha_n+t}\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne :

$$\ln\left(1 + \frac{n+1}{\alpha_n}\right) = \ln\frac{\alpha_n+n+1}{\alpha_n} \leq a \leq \ln\frac{\alpha_n+n}{\alpha_n-1} = \ln\left(1 + \frac{n+1}{\alpha_n-1}\right)$$

puis en prenant l'exponentielle :

$$\frac{n+1}{\alpha_n} \leq e^a - 1 \leq \frac{n+1}{\alpha_n-1}$$

Comme α_n tend vers l'infini, on en déduit que $\dfrac{\alpha_n}{n}$ tend vers $\dfrac{1}{e^a-1}$, i.e. que $\dfrac{x_n}{n}$ tend vers $1 + \dfrac{1}{e^a-1} = \dfrac{e^a}{e^a-1}$. Comme cette limite est non nulle, cela donne :

$$x_n \sim_{+\infty} \frac{e^a}{e^a-1}\,n.$$

36) a) La fonction $f_n :\ x \longmapsto x^n - nx + 1$ est strictement décroissante sur $[0,1]$ et $f(0) = 1 > 0 \geq 2 - n = f(1)$: d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

b) On montre facilement que $f_n \geq f_{n+1}$ sur $[0,1]$; on a donc $0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \geq f_n(x_{n+1})$, ce qui prouve que $x_{n+1} \leq x_n$ par décroissance de f_n.

On en déduit que $(x_n)_{n\geq 2}$ admet une limite $\lambda \in [0, 1[$ (suite décroissante minorée par 0, avec $x_2 < 1$). Si λ était non nul, $nx_n - 1$ tendrait vers $+\infty$ alors que $x_n^n = e^{n \ln x_n}$ tendrait vers 0 : ce serait absurde ; on en déduit que $\ell = 0$, puis que $nx_n - 1 = e^{n \ln x_n}$ tend vers 0, i.e. que x_n est équivalent à $1/n$.

c) On a $\varepsilon_n = nx_n - 1 = x_n^n = \dfrac{(1+\varepsilon_n)^n}{n^n}$. Comme ε_n tend vers 0, $\varepsilon_n \leq 1$ à partir d'un certain rang n_0, puis $(1+\varepsilon_n)^n \leq 2^n$ pour $n \geq n_0$. On en déduit que $\varepsilon_n \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n$, toujours pour $n \geq n_0$. Ceci permet d'écrire, en remarquant que $\varepsilon_n \geq 0$:

$$\forall n \geq n_0,\ 1 \leq (1+\varepsilon_n)^n \leq \left(1 + \left(\frac{2}{n}\right)^n\right)^n = e^{n\ln\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^n\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Ceci prouve que $(1+\varepsilon_n)^n$ tend vers 1, puis que $\varepsilon_n = \dfrac{(1+\varepsilon_n)^n}{n^n}$ est équivalent à $\dfrac{1}{n^n}$; ceci donne le développement :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n-1}} + o\left(\frac{1}{n^{n-1}}\right).$$

37) Pour $n \geq 2$, notons $f_n :\ x \longmapsto x^n - nx + 1$. Un calcul élémentaire prouve que f_n est strictement décroissante sur $[0,1]$: comme $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 2 - n \leq 0$, le théorème de la bijection monotone (f_n est continue) prouve l'existence et l'unicité de x_n. On utilisera dans la suite les propriétés :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) \geq 0 \iff x \leq x_n \text{ et } f_n(x) \leq 0 \iff x \geq x_n.$$

Pour $x \in]0,1]$, un nouveau calcul élémentaire prouve que $t \longmapsto x^t - tx + 1$ est décroissante sur $[2,+\infty[$. On en déduit :

$$\forall x \in]0,1],\ \forall n \geq 2,\ f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$$

ce qui donne ;

$$\forall n \geq 2,\ 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1})$$

ce qui prouve que $x_{n+1} \leq x_n$ pour tout $n \geq 2$. La suite (x_n) est donc décroissante. Comme elle est minorée, elle a une limite $\ell \geq 0$. On a ensuite $nx_n - 1 = e^{n\ln x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $x_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$.

En posant $x_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a ensuite $\frac{(1+\varepsilon_n)^n}{n^n} = \varepsilon_n$. Il faut donc étudier le comportement de $(1+\varepsilon_n)^n$, i.e. de $n\ln(1+\varepsilon_n)$. La division par n^n nous permet de conjecturer que ε_n tend très vite vers 0. Si c'est le cas, $n\ln(1+\varepsilon_n)$, qui est équivalent à $n\varepsilon_n$, va tendre vers 0 et on aura $\varepsilon_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^n}$. Il reste donc à obtenir une majoration de $|\varepsilon_n|$ suffisante pour démontrer que $n\varepsilon_n$ tend vers 0. Il suffit par exemple de démontrer que $0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{n^2}$ (au moins pour n assez grand), ce qui se fait facilement en calculant les signes de $f_n(1/n)$ et de $f_n(1/n + 1/n^3)$:

$$f_n(1/n) = \frac{1}{n^n} > 0 \text{ et } f_n(1/n + 1/n^3) = \underbrace{\frac{e^{n\ln(1+1/n^3)}{}^n}{n}}_{\sim_{+\infty} 1/n^n} - \frac{1}{n^2} \sim_{+\infty} -\frac{1}{n^2} < 0$$

donc pour n assez grand, $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$, soit $0 < \varepsilon_n < \dfrac{1}{n^2}$. Nous avons alors, avec les arguments donnés ci-dessus, $\varepsilon_n \sim \dfrac{1}{n^n}$, soit :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right).$$

Exercices Mines-Centrale - séries à termes réels

38) a) Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons $M_N = \max\limits_{0\leq n\leq N} \sigma(n)$. Nous avons (tous les termes de la première somme sont contenus dans la deuxième somme) :

$$\sum_{n=0}^{N} |u_{\sigma(n)}| \leq \sum_{m=0}^{M_N} |u_m| \leq \sum_{m=0}^{+\infty} |u_m|$$

donc $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente.

Toujours pour $N\in\mathbb{N}$, notons $A_N = [\![0, M_N]\!] \setminus \{\sigma(n),\ 0\leq n\leq N\}$. Nous avons :

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_{\sigma(n)} - \sum_{m=0}^{M_N} u_m\right| = \left|\sum_{n\in\sigma^{-1}(A_N)} u_{\sigma(n)}\right| \leq \sum_{n\in\sigma^{-1}(A_N)} |u_{\sigma(n)}| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n|$$

car $\sigma^{-1}(A_N)\subset [\![N+1, +\infty[\![$. Nous obtenons alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m$ en faisant tendre N vers l'infini.

Une autre façon de faire consiste à commencer par le cas des séries convergentes à termes positifs :

$$\sum_{n=0}^{N} u_{\sigma(n)} \leq \sum_{m=0}^{M_N} u_m \leq \sum_{m=0}^{+\infty} u_m = S$$

prouve que la série de terme général (positif) $u_{\sigma(n)}$ est convergente et que sa somme S_σ est inférieure ou égale à S : par symétrie (en considérant $\sigma{-}1$), on a aussi $S\leq S_\sigma$, d'où l'égalité des deux sommes.

On passe ensuite au cas général : si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série absolument convergente, on pose $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$, de sorte que $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$. Les deux séries à termes positifs $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ sont convergentes, donc les séries $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}^-$ le sont également et ont mêmes sommes. On en déduit que $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente (comme diférence de deux séries absolument convergentes) et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

b) Comme $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ est le terme général d'une série divergente, l'une des deux séries de termes positifs généraux u_n^+ et u_n^- est divergente ; ensuite, $u_n = u_n^+ - u_n^-$ étant le terme général d'une série convergente, les deux séries doivent diverger (car la somme d'une série divergente et d'une série convergente est convergente). On en déduit, les séries étant à termes positifs, que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n^+$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n^-$ tendent vers $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$.

Notons $A^+ = \{n\in\mathbb{N},\ u_n\geq 0\} = \{p_0, p_1, \ldots, p_k, \ldots\}$ et $A^- = \{n\in\mathbb{N},\ u_n < 0\} = \{q_1, \ldots, q_k, \ldots\}$ [1] où $(p_k)_{k\geq 0}$ et $(q_k)_{k\geq 1}$ sont deux suites strictement croissante. Les ensembles $\{p_k,\ k\geq 0\}$ et $\{q_k,\ k\geq 1\}$ forment une partition de $\mathbb{N}$ et les deux séries $\sum_{k\geq 0} u_{p_k}$ et $\sum_{k\geq 1} u_{q_k}$ divergent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$.

Soit λ est un réel quelconque. Nous allons construire par récurrence une permutation $(\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n), \ldots)$ de $\mathbb{N}$. Dès que cela aura un sens, nous noterons, pour $n\geq 0$, $\displaystyle\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}$.

Pour commencer, il existe un entier $n\geq 0$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_{p_i} > \lambda$ (car la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{p_k}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini). Soit n_0 le plus petit entier vérifiant cette inégalité. On pose :

$$\forall i\in [\![0, n_0]\!],\ \sigma(i) = p_i.$$

La suite $(\Sigma_k)_{0\leq k\leq n_0}$ est croisante et $\Sigma_{n_0} > \lambda$. Il existe ensuite $n\geq 1$ tel que $\displaystyle\Sigma_{n_0} + \sum_{i=1}^{n} u_{q_i} < \lambda$ (car la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{q_k}$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers l'infini). Soit m_0 le plus petit de ces entiers n. On pose :

$$\forall i\in [\![1, m_0]\!],\ \sigma(n_0 + i) = q_i.$$

1. Nous numérotons les q_i à partir de 1 pour simplifier la définition de σ.

La suite $(\Sigma_k)_{n_0 \leq k \leq n_0+m_0}$ est décroissante et $\Sigma_{n_0+m_0} < \lambda \leq \Sigma_{n_0+m_0-1}$.

On définit de même $n_1 \geq 1$, valeur minimale donnant $\Sigma_{n_0+m_0} + \sum_{i=1}^{n_1} u_{p_{n_0+i}} > \lambda$ et :

$$\forall i \in [\![1, n_1]\!],\ \sigma(n_0+m_0+i) = p_{n_0+i}$$

puis $m_1 \geq 1$, valeur minimale donnant $\Sigma_{n_0+m_0+n_1} + \sum_{i=1}^{m_1} u_{q_{m_0+i}} < \lambda$ et :

$$\forall i \in [\![1, m_1]\!],\ \sigma(n_0+m_0+n_1+i) = q_{m_0+i}.$$

On construit ainsi par itération une bijection σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. De façon plus imagée, on met les éléments de $\mathbb{N}$ à la queue leu leu en mettant les n_0+1 premiers éléments de A^+ d'abord, puis les m_0 premiers éléments de A^-, puis les n_1 éléments suivants de A^+, puis les m_1 éléments suivants de A^-, et ainsi de suite.

Pour prouver la convergence de Σ_n vers λ, notons $N_0 = n_0$, $N_1 = n_0 + m_0$, $N_2 = n_0 + m_0 + n_1$, ...

Tout d'abord, $\Sigma_{N_{2k}}$ converge vers λ car, pour $k \geq 1$, $\Sigma_{N_{2k}} - u_{p_{n_k}-1} \leq \lambda < \Sigma_{N_{2k}}$ et $u_{p_{n_k}-1}$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini (la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, donc son terme général tend vers 0).

De même, $\Sigma_{N_{2k+1}}$ converge vers λ et Σ_{N_k} converge vers λ quand k tend vers l'infini.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut encadrer n entre deux valeurs consécutives de la suite N_k : il existe $k(n)$ tel que

$$N_{k(n)} \leq n < N_{k(n)+1}.$$

Comme les termes du paquet $(u_{N_{k(n)}+1}, \ldots, u_{N_{k(n)+1}})$ sont de signe constant, on a, suivant la parité de k :

$$\Sigma_{N_{k(n)}} \leq \Sigma_n \leq \Sigma_{N_{k(n)+1}} \text{ ou } \Sigma_{N_{k(n)+1}} \leq \Sigma_n \leq \Sigma_{N_{k(n)}}.$$

Comme $k(n)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, le théorème d'encadrement prouve que Σ_n tend vers λ quand n tend vers l'infini. On a donc pu changer l'ordre des terme de la série pour la faire converger vers la valeur λ, réel quelconque.

Si $\lambda = +\infty$ (on adapte facilement la preuve au cas $\lambda = -\infty$), on utilise le même type d'argument, avec tous les m_i égaux à 1 (on fait des paquets de termes négatifs de taille 1) et en imposant $\Sigma_{N_{2k}} \geq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\Sigma_{N_{2k}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$ et $\Sigma_{N_{2k+1}} = \Sigma_{N_{2k}} + u_{q_{k+1}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$, puisque $u_{q_{k+1}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$. On conclut, de la même façon qu'avec $\lambda \in \mathbb{R}$, que $\Sigma_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Enfin, on peut faire osciller $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entre $+\infty$ et $-\infty$: il suffit de choisir les n_i et m_i tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \Sigma_{N_{2k+1}} < -(2k+1) \text{ et } \Sigma_{N_{2k}} > 2k.$$

Les sous-suites $\left(\Sigma_{N_{2k+1}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\Sigma_{N_{2k}})_{k \in \mathbb{N}}$ vont diverger respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$, mais comme $u_{\sigma(n)}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, tous les réels sont valeurs d'adhérence de $(\Sigma_n)_{n \geq 0}$. En effet, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Il faut montrer qu'il existe n tel que $n \geq N$ et $|\Sigma_n - \lambda| < \varepsilon$. Pour commencer, il existe $n_\varepsilon \geq N$ tel que $|u_{\sigma(n)}| < \varepsilon$ pour $n \geq n_\varepsilon$. Nous pouvons ensuite fixer k tel que :

- $N_{2k} \geq n_\varepsilon$;
- $\Sigma_{N_{2k}} > \lambda + \varepsilon$ et $\Sigma_{N_{2k+1}} < \lambda - \varepsilon$

car les suites $(\Sigma_{N_{2k}})_{k \geq 0}$ et $(\Sigma_{N_{2k+1}})_{k \geq 0}$ tendent respectivement vers $+\infty$ et vers $-\infty$. La suite (finie) $(\Sigma_n)_{N_{2k} \leq n \leq N_{2k+1}}$ est décroisante et l'écart entre deux termes consécutifs est strictement inférieur à ε : un de ses termes est donc dans l'intervalle $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$ (on ne peut pas traverser une flaque de diamètre 2ε en faisant des pas de longueurs inférieures à ε sans mettre un pied dans la flaque). Ainsi, il existe n, strictement compris entre N_{2k} et N_{2k+1}, tel que $|\Sigma_n - \lambda| < \varepsilon$. Ce n étant plus grand que N, nous avons montré que λ était valeur d'adhérence de $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

39) L'idée consiste à remarquer que si on prend un paquet de N termes consécutifs, les $\sigma(k)$ qui interviennent dans la somme de ces termes seront dans le pire des cas égaux à 0, 1, …, $N-1$. On écrit donc, pour $M \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=M}^{M+N-1} \frac{\sigma(n)}{(1+n)^2} \geq \frac{1}{(M+N-1)^2} \sum_{n=M}^{M+N-1} \sigma(n) \geq \frac{1}{(M+N-1)^2} \sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{(N-1)N}{2(M+N-1)^2}.$$

En choisissant $M = N$, on obtient :

$$\sum_{n=N}^{2N-1} \frac{\sigma(n)}{(1+n)^2} \geq \frac{(N-1)N}{2(2N-1)^2}.$$

Comme cette quantité tend vers $1/8 \neq 0$ quand N tend vers l'infini, la série diverge. En effet, dans le cas contraire, on aurait :

$$\sum_{n=N}^{2N-1} \frac{\sigma(n)}{(1+n)^2} = S_{2N-1} - S_{N-1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

40) a) Comme $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, on a :

$$0 \leq n u_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

De même :

$$0 \leq n u_{2n+1} \leq \sum_{k=n+2}^{2n+1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui traduit que nu_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

b) Elles ne sont pas de même nature en général : la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$ est bien décroissante et positive, avec $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ divergente et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\, u_n^2 = \sum_{n\geq 0} \frac{n}{(n+2)^2 \ln^2(n+2)}$ convergente (série de Bertrand : le terme général est équivalent à $\dfrac{1}{n \ln^2 n}$ dont la convergence s'obtient par comparaison à une intégrale).

41) Remarquons que pour $u \in \mathcal{S}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \sum_{k=0}^{n} u_k \leq u_n$$

donc $u_n \sum_{k=0}^{n} u_k$ est le terme général d'une série convergente (comparaison des séries à termes positifs). On a ensuite, en échangeant l'ordre de sommation (c'est possible le théorème de Fubini discret s'applique) :

$$\begin{aligned}
\Phi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_n u_k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} u_n u_k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \left(1 - \sum_{n=0}^{k-1} u_n\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \left(1 + u_k - \sum_{n=0}^{k} u_n\right) \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2 - \Phi(u)
\end{aligned}$$

Cela donne :

$$\forall u \in S,\ \Phi(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2.$$

On en déduit que $\frac{1}{2}$ est un minorant de Φ ; pour montrer que c'est le plus grand, il suffit de construire des éléments u de S tels que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2$ soit arbitrairement proche de 0. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{si } 0 \leq n \leq m-1 \\ 0 & \text{si } n \geq m \end{cases}$$

On a :

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2m}$$

ce qui montre que $\frac{1}{2}$ est bien la borne inférieure de Φ.

42) a) Comme v_n tend vers 0 (c'est le terme général d'une série convergente), on peut utiliser un DL de ln au voisinage de 1 :

$$a_n = \frac{k}{n} + \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{k}{n} + \ln\left(1 - \frac{k}{n} + v_n\right) = \frac{k}{n} - \frac{k}{n} + v_n + O\left(\left(-\frac{k}{n} + v_n\right)^2\right) = v_n + O(w_n)$$

avec $w_n = \left(-\frac{k}{n} + v_n\right)^2 = \underbrace{\frac{k^2}{n^2}}_{=s_n} \underbrace{-2\frac{k}{n}\,v_n + v_n^2}_{=t_n}$. s_n est un terme général de série convergente (série de Riemann) et $t_n = o(v_n)$ est un terme général de série absolument convergente : le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet donc d'affirmer que a_n est le terme général d'une série absolument convergente.

b) Nous devons démontrer que $x_n = n^k u_n$ a une limite non nulle λ quand n tend vers l'infini, ce qui revient à dire $y_n = \ln(x_n)$ a une limite quand n tend vers l'infini. Par comparaison avec une série, cela revient à dire que la série de terme général $b_n = y_{n+1} - y_n$ converge. Nous avons, en faisant un DL du logarithme :

$$b_n = k\ln(n+1) + \ln u_{n+1} - k\ln n - \ln u_n = k\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) + a_n$$

donc b_n est un terme général de série absolument convergente (somme de deux termes généraux de séries absolument convergentes).

43) a) On transforme la suite (c_n) en série, en étudiant la série de terme général $u_n = c_n - c_{n-1}$:

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{\ln n}{n} - \frac{(\ln n)^2}{2} + \frac{(\ln(n-1))^2}{2} \\
&= \frac{\ln n}{n} + \frac{(\ln n + \ln(n-1))(\ln(n-1) - \ln n)}{2} \\
&= \frac{\ln n}{n} + \frac{(2\ln(n) + \ln(1-1/n))\ \ln(1-1/n)}{2} \\
&= \frac{\ln n}{n} + \frac{(2\ln n + O(1/n))(-1/n + O(1/n^2))}{2} \\
&= \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2}\left(-2\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right) \\
&= O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

Comme $3/2 > 1$, $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ est un terme général de série convergente : par comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\geq 2} u_n$ est absolument convergente : la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

b) On sépare les termes pairs des termes impairs :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \\
&= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln 2+\ln k}{k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k} \\
&= \ln 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k}
\end{aligned}$$

donc $r = \ln 2$, $s = 1$ et $t = -1$ conviennent.

c) En notant c la limite de la suite (c_n) et γ la constante d'Euler, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k} &= \ln 2\,(\ln n+\gamma+o(1)) + \frac{(\ln n)^2}{2} + c + o(1) - \left(\frac{(\ln(2n))^2}{2} + c + o(1)\right) \\
&= \ln 2\,(\ln n+\gamma+o(1)) + \frac{(\ln n)^2}{2} + c + o(1) - \left(\frac{(\ln(2n))^2}{2} + c + o(1)\right) \\
&= \ln 2\,\ln n + \gamma\,\ln 2 + \frac{(\ln n)^2 - (\ln 2+\ln n)^2}{2} + o(1) \\
&= \gamma\,\ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

ce qui donne $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{\ln k}{k} = \gamma\,\ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$ en faisant tendre n vers l'infini.

44) a) On a, pour $n\in\mathbb{N}$:

$$\forall t\in\mathbb{R},\ e^{i(2n+1)t} = (\cos t + i\sin t)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{k}{2n+1}\, i^k\cos^{2n+1-k}t\sin^k t$$

d'où, en prenant la partie imaginaire

$$\forall t\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z},\ \frac{\sin(2n+1)t}{\sin^{2n+1}t} = \sum_{q=0}^{n}\binom{2q+1}{2n+1}\,(-1)^q\cos^{2(n-q)}t\sin^{2(q-n)}t = \sum_{q=0}^{n}\binom{2q+1}{2n+1}\,(-1)^q\left(\cot^2 t\right)^{n-q}.$$

Le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{q=0}^{n}\binom{2q+1}{2n+1}\,(-1)^q X^{n-q}$ est donc une solution.

Cette solution est unique, car si Q est une autre solution, on a $P_n(x) = Q(x)$ pour tout $x\geq 0$ ($\cot^2(t)$ décrit $\mathbb{R}^+$ quand t décrit $]0,\pi/2]$) et donc $P_n = Q$ (le polynôme $P_n - Q$ est nul car il a une infinité de racine).

b) Pour $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, posons $r_k = \cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$. On a :

$$\forall k\in\{1,2,\ldots,n\},\ P_n(r_k) = \frac{\sin k\pi}{\sin^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{(2n+1)\pi}\right)} = 0$$

Comme cotan^2 est injective sur $]0, \pi/2]$, $r_1, \dots, r_n$ sont des racines distinctes de P_n ; le degré de P_n étant égal à n, ce sont exactement les n racines de P_n.

En écrivant $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a :

$$r_1 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{\binom{3}{2n+1}(-1)^3}{\binom{1}{2n+1}(-1)^0} = \frac{2n(2n-1)}{6} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

c) On montre facilement les inégalités classiques :

$$\forall t \in]0, \pi/2],\ 0 < \sin t \leq t \leq \tan t$$

ce qui donne, en élevant au carré et en prenant l'inverse :

$$\forall t \in]0, \pi/2],\ \text{cotan}^2\, t \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{\sin^2 t}.$$

d) On applique ceci à $t = \dfrac{k\pi}{(2n+1)}$, pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, et on somme sur k :

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} 1 + r_k$$

ce qui donne :

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(n + \frac{n(2n-1)}{3}\right)$$

et on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ en faisant tendre n vers l'infini.

45) a) On obtient facilement $P = (-2a+1)X^5 + (5a-3b-4)X^4 + (-4a+6b-4c+6)X^3 + (a-4b+6c-4)X^2 + (b-4c+1)X + c$, donc il faut choisir $a = 1/2$, $b = -1/2$ et $c = 1/4$ pour annuler les trois coefficients de plus haut degré. On a ici un coup de chance : le terme de degré 2 s'élimine également et on obtient $P(X) = -\dfrac{X}{2} + \dfrac{1}{4}$.

b) On en déduit :

$$\forall n \geq 2,\ |\delta_n| \leq \frac{2n-1}{4n^4(n-1)^4} \leq \frac{2n-1}{4(n-1)^8}.$$

Comme $\frac{2n-1}{n-1}$ décroît avec n, on a $\frac{2n-1}{n-1} \leq 3$, ce qui donne :

$$\forall n \geq 2,\ |\delta_n| \leq \frac{3}{4(n-1)^7}.$$

c) S_n a pour limite $\zeta(3)$ et on peut écrire (comparaison intégrale-série, avec la fonction décroissante $t \longmapsto 1/t^7$) :

$$\forall n \geq 12,\ |\zeta(3) - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \delta_k\right| \leq \frac{3}{4} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^7} \leq \frac{3}{4} \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{t^7}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\,\frac{1}{(n-1)^6}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on peut calculer $n_0 \geq 2$ tel que $\dfrac{1}{8}\dfrac{1}{(n-1)^6} < \varepsilon$: la valeur S_{n_0} est alors une valeur approchée de $\zeta(3)$ à ε près.

Exemple : si $\varepsilon = 10^{-6}$, on peut prendre $n_0 = 9$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{2n_0^2} - \frac{1}{2n_0^3} + \frac{1}{4n_0^4} = \frac{173128758451}{144027072000}$ est une valeur approchée de $\zeta(3)$ à 10^{-6} près. En reprenant l'inégalité démontrée, on a l'encadrement :

$$1,2020565 \leq S_{n_0} - \frac{1}{8}\frac{1}{(n_0-1)^6} \leq \zeta(3) \leq S_{n_0} + \frac{1}{8}\frac{1}{(n_0-1)^6} \leq 1,2020575$$

46) a) Si $\sum_{k\geq 1} a_k^2$ convergeait, a_n tendrait vers 0 à l'infini et S_n aurait une limite finie : la suite (a_nS_n) tendrait vers 0, contrairement à l'hypothèse.

b) L'idée consiste à utiliser le théorème de Césàro en travaillant sur $S_n^3 - S_{n-1}^3$:

$$S_n^3 - S_{n-1}^3 = (S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_nS_{n-1} + S_{n-1}^2) = a_n^2(S_n^2 + S_nS_{n-1} + S_{n-1}^2).$$

Comme $0 < S_{n-1} \leq S_n$, on en déduit l'encadrement :

$$3a_n^2S_{n-1}^2 \leq S_n^3 - S_{n-1}^3 \leq 3a_n^2S_n^2.$$

Comme a_nS_n tend vers 1, ceci prouve que $S_n^3 - S_{n-1}^3$ tend vers 3, ce qui donne $S_n^3 \sim_{+\infty} 3n$ grâce au théorème de Césàro. On a ensuite $a_n \sim \dfrac{1}{S_n} \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{3n}}$.

47) a) Comme b_n tend vers 0 à l'infini, on a $\ln b_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\ln a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, puis $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Pour n assez grand, $\ln a_n < 0$ et $\underbrace{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)}_{\leq 1}\ln a_n \geq \ln a_n$, d'où $b_n \geq a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, par comparaison des séries à termes positifs.

b) Pour $n \in X$, $0 \leq b_n \leq \lambda a_n$, qui est un terme général de série convergente : la somme $\displaystyle\sum_{n\in X} b_n$ est donc convergente avec

$$\sum_{n\in X} b_n \leq \lambda \sum_{n\in X} a_n \leq \lambda\, A.$$

Pour $n \in Y$, on a $a_n^{-1/n} > \lambda$, donc $a_n < \lambda^{-n}$. On en déduit que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ln a_n \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\ln \frac{1}{\lambda^n}$, ce qui donne :

$$\forall n \in Y,\ b_n \leq e^{-(n-1)\ln\lambda} = \frac{1}{\lambda^{n-1}}.$$

Comme $\dfrac{1}{\lambda^{n-1}}$ est un terme général de série convergente, $\displaystyle\sum_{n\in Y} b_n$ est convergente avec

$$\sum_{n\in Y} b_n \leq \sum_{n\in Y} \frac{1}{\lambda^{n-1}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^{n-1}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Ceci prouve que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} b_n$ converge avec :

$$B = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \leq \lambda\, A + \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Une étude élémentaire de la fonction $\lambda \longmapsto \lambda\, A + \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$ montre qu'elle atteint son minimum quand $\lambda = \dfrac{\sqrt{A}+1}{\sqrt{A}}$. Avec cette valeur de λ, on obtient :

$$B \leq (\sqrt{A}+1)^2.$$

48) Première méthode : nous allons montrer que cette série diverge, en groupant les termes par paquets. Il y a en effets “trop” de termes de signes constants consécutifs ($\ln n$ tend lentement vers l'infini). Nous allons construire $a(k)$ et $b(k)$ tels que :

- $1 \leq a(k) < b(k)$;
- $a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$;
- pour tout $n \in [\![a(k), b(k)]\!]$, $u_n \geq 0$;
- $P_k = \displaystyle\sum_{a(k)\leq n\leq b(k)} u_n$ ne tend pas vers 0 quand k tend vers l'infini.

Ceci prouvera la divergence de la série puisqu'en cas de convergence, $P_k = S_{b(k)} - S_{a(k)-1}$ convergerait vers 0, en notant (S_n) la suite des sommes partielles. La somme P_k va être minorée en minorant chaque $\ln(\cos(n))$; il est donc naturel de poser $a(k) = \lceil e^{2k\pi-\pi/4}\rceil$ et $b(k) = \lfloor e^{2k\pi+\pi/4}\rfloor$, puisqu'on aura alors $u_n \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2n}$ pour n compris entre $a(k)$ et $b(k)$, puis :

$$\forall k \geq 1, P_k \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=a(k)}^{b(k)}\frac{1}{k} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{a(k)}^{b(k)+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{b(k)+1}{a(k)}.$$

Comme $x - 1 < \lfloor x\rfloor$ et $\lceil x\rceil < x + 1$, on a :

$$\frac{b(k)+1}{a(k)} \geq \frac{e^{2k\pi+\pi/4}}{e^{2k\pi-\pi/4}+1}$$

d'où :

$$\forall k \geq 1,\ P_k \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{e^{2k\pi+\pi/4}}{e^{2k\pi-\pi/4}+1}$$

et le minorant tend vers $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4} > 0$ quand k tend vers $+\infty$: P_k ne tend donc pas vers 0 et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(\ln n)}{n}$ diverge.

Seconde méthode : il est possible de comparer cette série à une intégrale. L'application $F :\ t \longmapsto \sin(\ln t))$ est une primitive de $f :\ t \longmapsto \dfrac{\cos(\ln(t))}{t}$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à F, qui est de classe C^2 sur $[1, +\infty[$, nous avons :

$$\forall n \geq 1,\ |F(n+1) - F(n) - f(n)| \leq \frac{1}{2}\sup_{n\leq x\leq n+1}\left|-\frac{\cos(\ln t) + \sin(\ln t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

On en déduit que la série de terme général $F(n+1) - F(n) - f(n)$ est convergente. En notant S sa somme, nous avons donc :

$$\sum_{k=1}^{n} F(k+1) - F(k) - f(k) = S + o(1)$$

soit

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = F(n+1) - F(1) - S + o(1) = \sin(\ln(n+1)) - S + o(1)$$

et la série est divergente puisque $\sin(\ln(n+1))$ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

49) L'idée consiste à utiliser le théorème sur la sommation de termes équivalent, en cherchant un terme v_n équivalent à u_n dont le reste se calcule. La suite u_n tend très vite vers 0, dans le sens où u_{n+1} est négligeable devant u_n :

$$u_{n+1} = u_n\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} =_{+\infty} o(u_n))$$

On en déduit que u_n est équivalent à $u_n - u_{n+1}$: comme ces termes sont positifs et sont ils termes généraux de séries convergentes, on a :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim_{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_k - u_{k+1}) = u_{n+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{n!\sqrt{n}}.$$

50) Comme $\dfrac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \dfrac{n-\alpha-1}{n}$ à partir d'un certain rang $n_0 \geq 1$, il est naturel d'étudier la somme partielle de la série de terme général $u_n = \ln \dfrac{|a_n|}{|a_{n-1}|}$. Nous avons :

$$\forall k \geq n_0,\ u_k = \ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right) = -\frac{\alpha+1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

En sommant, nous obtenons :

$$\ln|a_n| = \ln|a_{n_0-1}| + \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \ln|a_{n_0-1}| - (\alpha+1)\sum_{k=n_0}^{n}\frac{1}{k} + \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} O\left(\frac{1}{k^2}\right)}_{=T_n}.$$

En utilisant le développement usuel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ (γ est la constante d'Euler) et en remarquant que T_n a une limite T, nous avons :

$$\ln|a_n| = \ln|a_{n_0-1}| + (\alpha+1)\sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{1}{k} - (\alpha+1)\left(\ln n + \gamma + o(1)\right) + T + o(1) = -(\alpha+1)\,\ln n + K + o(1)$$

avec $K = \ln|a_{n_0-1}| - (\alpha+1)\left(\gamma - \displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{1}{k}\right)$. En prenant l'exponentielle, nous obtenons :

$$|a_n| = \frac{e^{K+o(1)}}{n^{\alpha+1}} \sim_{+\infty} \frac{A}{n^{\alpha+1}} \text{ avec } A = e^K.$$

51) Notons $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ pour tout $n \geq 1$, de sorte que $u_n = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - R_n\right)\right)$. Un calcul élémentaire de DL donne, au voisinage de 0 :

$$\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = \ln\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right) = \ln(1 - x + O(x^3)) - \ln(1 + x + O(x^3)) = -2x + O(x^3)$$

donc

$$u_n = -2R_n + O(R_n^3).$$

Nous allons maintenant étudier précisément le reste R_n ; tout d'abord, nous savons que R_n est du signe de $(-1)^n$ et que $|R_n| \leq \frac{1}{2n+1}$ (théorème spécial des séries alternées, qui s'applique car $\frac{1}{2n-1}$ décroit vers 0). On en déduit qu'un $O(R_n^3)$ est aussi un $O\left(1/n^3\right)$: $\sum_{n\geq1} u_n$ est donc de même nature que $\sum_{n\geq1} R_n$.

Comme (R_n) est une suite de signe alternée, un équivalent de R_n ne suffira pas *a priori* pour conclure sur la nature de la série $\sum_{n\geq1} R_n$ et il faudra en faire une développement plus précis. Nous utiliserons plusieurs la propriété évidente que pour tous polynômes P et Q tels que $P(n)/Q(n)$ est équivalent à α/n au voisinage de l'infini (où $\alpha \neq 0$), on a le développement plus précis :

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\alpha}{n} + O(1/n^2).$$

Nous avons, quand n est impair avec $n = 2m+1$ (on groupe les termes par paquets de deux, sauf le premier) :

$$R_{2m+1} = -\frac{1}{4m+3} + \sum_{k=m+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3}\right)$$

On peut ensuite utiliser une petite astuce en faisant apparaître un terme téléscopique :

$$\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+3}=\frac{1}{8k(k+1)}+O(1/k^3)$$

donc, en utilisant que $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ et le théorème de sommation des relations de prépondérance :

$$\sum_{k=m+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+3}\right)=\frac{1}{8(m+1)}+O(1/m^2).$$

Ainsi :

$$R_n=-\frac{1}{4m+3}+\frac{1}{8(m+1)}+O(1/m^2)=-\frac{1}{8m}+O(1/m^2)=\frac{(-1)^n}{4n}+O(1/n^2).$$

On montre de la même façon que ce développement est également valide quand n est pair. On en déduit que R_n est la somme de deux termes généraux de séries convergentes (le premier par le théorème spécial des séries alternées, le second par convergence absolue). La série étudiée est donc convergente.

Exercices Mines-Centrale - familles sommables

52) Pour $n\geq 1$ fixé, la famille $\left(\dfrac{1}{m^2n+n^2m+2mn}\right)_{m\geq 1}$ est sommable (le terme général est équivalent à $1/(nm^2)$ quand m tend vers l'infini) avec :

$$\alpha_n=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2n+n^2m+2mn}=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m(m+n+2)}=\frac{1}{n(n+2)}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right)=\frac{1}{n(n+2)}\sum_{m=1}^{n+2}\frac{1}{m}.$$

Ce terme est équivalent à $\dfrac{\ln n}{n^2}$, qui est un $O(n^{-3/2})$: on en déduit que la famille $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est sommable, ce qui prouve que la famille étudiée est sommable et que sa somme S est égale à la somme des α_n. Nous avons ensuite :

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}\sum_{m=1}^{n+2}\frac{1}{m}=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}=\sum_{\substack{1\leq m\leq n\\ n\geq 3}}\frac{1}{nm(n-2)}$$

Posons $T_m=\displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n(n-2)}$; par télescopage, nous avons

$$\forall m\geq 2,\ T_m=\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n(n-2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-2}+\frac{1}{m-1}\right).$$

On peut alors échanger l'ordre de sommation dans l'expression de S, ce qui donne :

$$S=\sum_{\substack{1\leq m\leq n\\ n\geq 3}}\frac{1}{nm(n-2)}=\underbrace{T_3}_{\text{quand } m=1}+\underbrace{\frac{1}{2}T_3}_{\text{quand } m=2}+\sum_{m=3}^{+\infty}\frac{1}{m}T_m=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)T_3+\sum_{m=4}^{+\infty}\frac{T_m}{m}.$$

Nous avons enfin :

$$\sum_{m=4}^{+\infty}\frac{T_m}{m}=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum_{m=4}^{+\infty}\frac{1}{m(m-2)}}_{=T_4}+\underbrace{\sum_{m=4}^{+\infty}\frac{1}{m(m-1)}}_{=\frac{1}{3}}\right).$$

Comme $T_3 = \dfrac{3}{4}$ et $T_4 = \dfrac{5}{12}$, nous obtenons enfin :

$$S = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{12} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{4}.$$

53) Fixons $x \in]-1,1[$; pour $n \geq 1$, $\dfrac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} x^{m(2n-1)}$. Posons donc :

$$\forall n \geq 1,\ \forall m \geq 1,\ \alpha_{n,m} = x^{m(2n-1)}$$

Si nous montrons que la famille $(\alpha_{n,m})_{n,m\geq 1}$ est sommable, nous pourrons écrire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_{n,m}\right) = \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{n,m}\right) = \sum_{m=1}^{+\infty}\left(x^m \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2km}\right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{1-x^{2m}}$$

Pour cela, il suffit de remarquer que :

- pour tout $n \geq 1$, $\sum_{m\geq 1} |\alpha_{n,m}|$ converge (car $|x|^{2m-1} < 1$) et a pour somme $\beta_n = \dfrac{|x|^{2n-1}}{1-|x|^{2n-1}}$;
- $\beta_n \sim_{+\infty} |x|^{2n-1}$ qui est un terme général de série convergente (car $|x|^2 < 1$).

54) Si la famille est sommable, la sous-famille $\left(\frac{1}{a^m+1}\right)_{m\geq 0}$ est sommable, donc $\frac{1}{a^m+1}$ est un terme général de série convergente : ceci impose $a > 1$ (si $0 < a \leq 1$, $\frac{1}{a^m+1}$ ne tend pas vers 0). Par symétrie, il faut également avoir $b > 1$.

Supposons réciproquement que $a > 1$ et $b > 1$. Pour tout $n \geq 0$, la série (à termes positifs) $\displaystyle\sum_{m\geq 0} \frac{1}{a^m+b^n}$ est convergente (le terme général est équivalent à $\left(\frac{1}{a}\right)^m$ qui est un terme géométrique de raison < 1) ; la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{a^t+b^n}$ est continue et décroissante sur $[0,+\infty[$, donc on peut écrire :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{a^m+b^n} \leq \frac{1}{1+b^n} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^t+b^n}\,\mathrm{d}t}_{=\alpha_n}$$

Le changement de variable $u = a^t$ donne :

$$\alpha_n = \frac{1}{b^n \ln a} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+b^n}\right) \mathrm{d}u = \frac{1}{b^n \ln a}\left[\ln \frac{u}{u+b^n}\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln(1+b^n)}{b^n \ln a}.$$

Comme $\ln(1+b^n) = n\ln b + \ln\left(1+\frac{1}{b^n}\right) \sim_{+\infty} n\ln b$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{a^m+b^n} = O\left(\frac{n}{b^n}\right)$: c'est donc un terme général de série convergente et la famille étudiée est sommable.

55) Notons $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers et Σ l'ensemble des suites $\sigma = (\sigma_i)_{i\geq 1}$ d'entiers naturels qui sont nulles à partir d'un certain rang. Posons ensuite :

$$\forall \sigma \in \Sigma,\ x_\sigma = \left(\prod_{i\in\mathbb{N}^*} p_i^{\sigma_i}\right)^{-s}$$

(le produit est en fait un produit fini, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'exposants σ_i non nuls). Chaque entier $n \geq 1$ possédant une unique factorisation en produit de facteurs premiers, l'application $\sigma \longmapsto x_\sigma$ est une bijection de Σ sur

$\left\{\dfrac{1}{n^s},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^s}$ est convergente, la famille $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ est sommable et sa somme est égale à $\zeta(s)$.

En notant $\Sigma_n = \{(\sigma_i)_{i\geq 1} \in \Sigma,\ \sigma_m = 0 \text{ pour tout } m > n\}$, nous avons :

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_n} x_\sigma \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(s)$$

en appliquant le théorème de Fubini, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in\Sigma_n} x_\sigma &= \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_n\in\mathbb{N}} \frac{1}{p_1^{s\sigma_1}}\frac{1}{p_2^{s\sigma_2}}\cdots\frac{1}{p_n^{s\sigma_n}} \\
&= \left(\sum_{\sigma_1=0}^{+\infty} \left(p_1^{-s}\right)^{\sigma_1}\right)\left(\sum_{\sigma_2=0}^{+\infty} \left(p_2^{-s}\right)^{\sigma_2}\right)\cdots\left(\sum_{\sigma_n=0}^{+\infty} \left(p_n^{-s}\right)^{\sigma_n}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-p_i^{-s}}
\end{aligned}$$

Ceci prouve que le produit infini $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$ converge et a pour valeur $\zeta(s)$.

Exercices X-ENS

56) En posant $a = u_0$ et $b = u_1$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1-\alpha_n)a + \alpha_n b$$

où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'élément de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ défini par :

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,\alpha_{n+1} + \frac{1}{n+2}\,\alpha_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+2} \in [\alpha_{n+1}, \alpha_n]$ puisqu'on reconnaît un barycentre à masses positives. Comme $\alpha_0 = 0 < 1 = \alpha_1$, on a $\alpha_0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1$, puis $\alpha_0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_1$. Une récurrence immédiate prouve :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_0 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_{2n} < \alpha_{2n+1} \leq \cdots \leq \alpha_3 \leq \alpha_1.$$

La suite $(\alpha_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$) est croissante et majorée (resp. décroisante et minorée) : ces deux suites sont donc convergentes, de limite ℓ et ℓ'. On a ensuite :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}\,\alpha_{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\,\alpha_{2n}$$

donc $\ell = \ell'$ en faisant tendre n vers l'infini. Ceci prouve que les suites (α_{2n}) et (α_{2n+1}) sont adjacentes et que (α_n) converge vers ℓ. On en déduit que u_n converge vers $(1-\ell)u_0 + \ell u_1$ quand n tend vers l'infini.

On obtient l'encadrement : $0,6321205 < \alpha_{10} < \ell < \alpha_{11} < 0,6321206$.

57) Soit λ un valeur d'adhérence de (u_n), limite de la sous-suite $(u_{\varphi(n)})$. On a :

$$u_{\varphi(n)} + \frac{1}{2}\,u_{2\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc $u_{2\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2(1-\lambda)$. Ainsi, $2(1-\lambda)$ est aussi valeur d'adhérence de la suite (u_n). En posant $\lambda_0 = \lambda$ et $\lambda_{n+1} = 2(1-\lambda_n)$ pour tout $n \geq 0$, on définit une suite arithmético-géométrique de valeurs d'adhérence de (u_n). Comme (u_n) est bornée, cette suite (λ_n) l'est également, ce qui impose que l'on ait $\lambda = \dfrac{2}{3}$. La suite (u_n) est donc convergente (suite réelle bornée possédant une unique valeur d'adhérence). On peut rappeler la preuve du résultat : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'un compact K possédant une unique valeur d'adhérence λ, alors u_n tend vers λ. Par l'absurde : sinon, il existerait $\varepsilon_0 > 0$ et $\varphi :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $||u_{\varphi(n)} - \lambda|| \geq \varepsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{\varphi(n)})$ étant une suite du compact K, elle aurait une valeur d'adhérence μ, ce qui serait absurde car μ serait une valeur d'adhérence de (u_n) distincte de λ, puisque $||\lambda - \mu|| \geq \varepsilon_0$.

58) a) Posons $A_n = e^{a_n}$ et $B_n = e^{b_n}$, de sorte que $\alpha_n = A_n + B_n$ et $\beta_n = A_n B_n$ tendent respectivement vers 2 et 1. Comme A_n et B_n sont les deux racines du polynômes $X^2 - \alpha_n X + \beta_n$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 0} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \frac{1}{2}\left(\alpha_n + \varepsilon_n\sqrt{\alpha_n^2 - 4\beta_n}\right) \text{ et } A_n = \frac{1}{2}\left(\alpha_n - \varepsilon_n\sqrt{\alpha_n^2 - 4\beta_n}\right).$$

On en déduit que A_n et B_n tendent vers 1, puis que $a_n = \ln A_n$ et $b_n = \ln B_n$ tendent vers 0.

b) Posons cette fois $A_n = e^{a_n}$, $B_n = e^{b_n}$, $C_n = e^{c_n}$, $\alpha_n = A_n + B_n + C_n$, $\beta_n = A_n B_n + B_n C_n + C_n A_n$ et $\gamma_n = A_n B_n C_n$.

A_n, B_n et C_n sont les racines du polynôme $P_n = X^3 - \alpha_n X^2 + \beta_n X - \gamma_n$ et nous savons que α_n et γ_n tendent respectivement vers 3 et 1. On pourrait penser qu'il est possible de trouver un cas particulier où β_n ne converge pas, mais nous allons voir que ce n'est pas le cas. L'argument essentiel est que P_n est scindé sur $\mathbb{R}^+$, ce qui va permettre de démontrer que 3 est la seule valeur d'adhérence de $(\beta_n)_{n\geq 0}$.

Remarquons tout d'abord que $0 \leq A_n \leq \alpha_n$, donc $(A_n)_{n\geq 0}$ est bornée, de même que B_n et C_n. On en déduit que $(\beta_n)_{n\geq 0}$ est également bornée : nous allons montrer qu'elle converge 3 en montrant que 3 est sa seule valeur d'adhérence (une suite réelle bornée qui n'a qu'un valeur d'adhérence converge). Soit donc une extractive φ telle que $\beta_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta$. Le polynôme $P_{\varphi(n)}$ tend donc "terme à terme" vers le polynôme $P = X^3 - 3X^2 + \beta X - 1$. Nous allons montrer que ce polynôme n'a pas de racine dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: fixons pour cela $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Comme $A_{\varphi(n)}$, $B_{\varphi(n)}$ et $C_{\varphi(n)}$ sont réels, nous avons :

$$\left|P_{\varphi(n)}(z)\right| = \left|(z - A_{\varphi(n)})(z - B_{\varphi(n)})(z - C_{\varphi(n)})\right| \geq \left|\mathrm{Im}(z)\right|^3$$

mais $P_{\varphi(n)}(z)$ tend vers $P(z)$ quand n tend vers l'infini : on en déduit que $|P(z)| \geq \left|\mathrm{Im}(z)\right|^3 > 0$: z n'est donc pas racine de P et P est scindé sur $\mathbb{R}$.

Avec le même argument, P n'a pas de racines dans $]-\infty, 0[$: si $x < 0$, $|P(x)| \geq |x|^3$ car $A_{\varphi(n)}$, $B_{\varphi(n)}$ et $C_{\varphi(n)}$ sont positifs.

Le polynôme P' a pour discriminant $12(3 - \beta)$ et il est scindé sur $\mathbb{R}$ (car P l'est) : ceci impose $\beta \leq 3$ et les racines de P' sont $r_1 = 1 - \sqrt{1 - \beta/3}$ et $r_2 = 1 + \sqrt{1 - \beta/3}$. Comme P a trois racines réelles, on a $r_1 \geq 0$ et $P(r_1) \geq 0$ (faire un dessin du graphe de P), ce qui donne $\beta \geq 0$ et $\underbrace{-3 + \frac{2\sqrt{9 - 3\beta}}{3} - \frac{2\beta\sqrt{9 - 3\beta}}{9} + \beta}_{=g(\beta)} \geq 0$. En posant $u = \sqrt{1 - \beta/3}$, on obtient :

$$0 \leq g(\beta) = 2u^2(u - 3/2) \text{ avec } 0 \leq u \leq 1.$$

Ceci impose $u = 0$, soit $\beta = 3$, et cela achève de démontrer que β_n tend vers 3 quand n tend vers l'infini.

Pour finir, nous pouvons démontrer que A_n tend vers 1 : cette suite est bornée, donc il suffit de montrer que 1 est sa seule valeur d'adhérence ; soit donc une extractrice φ telle que $A_{\varphi(n)}$ converge vers un réel A. On a :

$$0 = P_{\varphi(n)}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(A) = (A - 1)^3$$

donc $A = 1$. On en déduit que a_n tend vers 0, ainsi que b_n et c_n par symétrie.

59) a) Considérons la famille de réels positifs $\left(\dfrac{k\,u_k}{n(n+1)}\right)_{\substack{k,n\in\mathbb{N}^*\\ 1\leq k\leq n}}$. Pour $k \geq 1$ fixé, la famille $\left(\frac{k\,u_k}{n(n+1)}\right)_{n\geq 1}$ est sommable (série télescopique), avec :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k\,u_k}{n(n+1)} = k\,u_k \sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = u_k.$$

Comme $(u_k)_{k\geq 1}$ est sommable, on en déduit que la famille $\left(\dfrac{k\,u_k}{n(n+1)}\right)_{\substack{k,n\in\mathbb{N}^*\\1\leq k\leq n}}$ est sommable et que :

$$\sum_{1\leq k\leq n}\frac{k\,u_k}{n(n+1)}=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k=S.$$

On peut ensuite inverser l'ordre de sommation : pour tout $n\geq 1$, la famille $\left(\dfrac{k\,u_k}{n(n+1)}\right)_{1\leq k\leq n}$ est sommable et sa somme, i.e. $\dfrac{w_n}{n(n+1)}$ est le terme général d'une série convergente, avec :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{w_n}{n(n+1)}=\sum_{1\leq k\leq n}\frac{k\,u_k}{n(n+1)}=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k=S.$$

b) L'idée consiste à utiliser l'inégalité entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique :

$$\forall x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R},\ \ \sqrt[n]{x_1\dots x_n}\leq\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

Pour faire apparaître les w_k, il est naturel de choisir $x_k=k\,u_k$. Cela donne :

$$\forall n\geq 1,\ \ \sqrt[n]{(1\,u_1)(2\,u_2)\dots(n\,u_n)}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ku_k$$

ce qui peut s'écrire :

$$\forall n\geq 1,\ \ v_n\leq\frac{w_n}{n\sqrt[n]{n!}}$$

Si nous pouvons prouver que $\sqrt[n]{n!}\geq\dfrac{n+1}{e}$, nous aurons majoré v_n par $e\,\dfrac{w_n}{n(n+1)}$: la série de terme général v_n sera convergente de somme majorée par eS.

Il reste donc à vérifier que $\sqrt[n]{n!}\geq\dfrac{n+1}{e}$, i.e. que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln k\geq\ln(n+1)-1$. Pour cela, la fonction ln étant croissante et continue sur $[1,n]$, nous avons (comparaison série-intégrale) :

$$\forall n\geq 1,\ \ \sum_{k=1}^{n}\ln k=\sum_{k=2}^{n}\ln k\geq\int_1^n\ln t\,\mathrm{d}t=n\ln n-n+1.$$

On en déduit :

$$\forall n\geq 1,\ \ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k-\ln(n+1)+1\geq\ln n+\frac{1}{n}-\ln(n+1)=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\geq 0.$$

Remarque : la constante e qui apparaît dans l'inégalité démontrée est optimale ; en effet, soit M une constante vérifiant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{u_1\dots u_n}\leq M\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$$

pour toute série convergente à termes positifs $\sum_{n\geq 1}u_n$. Pour s'approcher du cas d'égalité, nous pouvons penser à choisir des u_n qui donnent le cas d'égalité dans l'inégalité de convexité :

$$\forall n\geq 1,\ \ \sqrt[n]{(1\,u_1)(2\,u_2)\dots(n\,u_n)}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ku_k$$

par exemple $nu_n=1$; ce choix étant interdit (la série doit converger), on peut penser à tronquer cette « suite idéale » : pour $N\geq 1$, on choisit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n=\frac{1}{n}$ si $1\leq n\leq N$ et $u_n=0$ sinon. Nous avons alors :

$$w_n=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} & \text{si } 1\leq n\leq N\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq M \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \qquad (1)$$

Comme $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$, on a $\sqrt[n]{n!} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n}$ (si $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $\sqrt[n]{a_n} = e^{1/n \ln a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$).

Ainsi, $\sqrt[n]{n!} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{e}$ puisque $\sqrt[2n]{2\pi n} = e^{\frac{1}{2n} \ln(2\pi n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On en déduit que $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ est un terme général de série divergente et par sommation de la relation d'équivalence (les séries sont à termes positifs) :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{N} \frac{e}{n}.$$

En divisant (1) par $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ et en faisant tendre N vers l'infini, nous obtenons $e \leq M$: e est bien la plus petite constante vérifiant l'inégalité.

60) a) si $a = b$, on a $u_{n+1} = au_n$, dont la solution générale ; sinon, (u_n) vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - (a+b)u_{n+1} + abu_n = 0 \qquad (1)$$

puisque a et b sont les racines de l'équation caractéristique $X^2 - (a+b)X + ab = 0$ (cette relation est encore valable dans le cas où $a = b$).

b) On suppose que $|a| = |b| = 1$ et que la suite (u_n) converge vers un complexe ℓ, on obtient, en faisant tendre n vers l'infini dans (1) :

$$\ell - (a+b)\ell + ab\ell = 0$$

On en déduit que $\ell = 0$ ou $1 - (a+b) + ab = 0$; cette seconde condition s'écrit aussi $(1-a)(1-b) = 0$. Nous avons ainsi trois cas :

- $a = 1$: on en déduit que b^n converge, ce qui impose $b = 1$;
- $b = 1$: on a symétriquement $a = 1$;
- $a \neq 1$ et $b \neq 1$: $u_n = a^n \left(1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^n\right)$ tend vers 0 ; comme $|a| = 1$, ceci signifie que $1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ tend vers 0, et donc :

  $$\left(\frac{b}{a}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1.$$

  En écrivant $\frac{b}{a} = e^{i\theta}$, ceci donne $\cos(n\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ et $\sin(n\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité :

  $$\sin(n+1)\theta = \sin n\theta\, \cos\theta + \cos n\theta \sin\theta,$$

  on obtient $0 = -\sin\theta$, d'où $\theta = 0$ ou π modulo 2π, ce qui est absurde (dans les deux cas, $\cos n\theta$ ne tend pas vers -1).

Le seul cas possible est donc $a = b = 1$.

Réciproquement, la suite converge quand $a = b = 1$.

61) a) Comme $\sum_{n\geq 1} u_n$ est à terme strictement positif et divergente, (S_n) est strictement croissante et diverge vers $+\infty$.

- Soit $\alpha \leq 1$; on a $\dfrac{u_n}{S_n} = O\left(\dfrac{u_n}{S_n^\alpha}\right)$ donc il suffit de montrer que l'on a divergence pour $\alpha = 1$ et on aura divergence pour tout $\alpha \leq 1$ grâce au théorème de comparaison des séries à termes positifs.
  L'idée est d'étudier un paquet de terme de la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n}$: pour $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 \leq p \leq q$, on a :
  $$\sum_{n=p}^{q} \frac{u_n}{S_n} \geq \frac{1}{S_q} \sum_{n=p}^{q} u_n = \frac{S_q - S_{p-1}}{S_q}.$$
  Quand q tend vers $+\infty$, ce quotient tend vers 1. On en déduit que si la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n}$ convergeait, on aurait :
  $$\forall p \geq 1,\ \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{u_n}{S_n} \geq 1$$
  ce qui serait absurde, puisque le reste $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{u_n}{S_n}$ devrait tendre vers 0 quand p tend vers l'infini. On en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{S_n}$ est divergente.
- Soit $\alpha > 1$. Nous avons
  $$0 \leq \frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}} S_n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \alpha_n.$$
  Comme $\alpha > 1$, α_n est le terme général d'une série convergente, avec $\sum_{n=2}^{+\infty} \alpha_n = \int_{S_1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, et la série étudiée est convergente, par application du théorème de comparaison des séries à termes positifs.
  b) Les preuves sont presque identiques, en remarquant que R_n décroit vers 0 :
  - Soit $\alpha \geq 1$; on a $\dfrac{u_n}{R_n} = O\left(\dfrac{u_n}{R_n^\alpha}\right)$ donc il suffit de montrer la divergence pour $\alpha = 1$. Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \leq q$, on a :
    $$\sum_{n=p}^{q} \frac{u_n}{R_n} \geq \frac{1}{R_p} \sum_{n=p}^{q} u_n = \frac{R_p - R_{q+1}}{R_p}.$$
    Si la série convergeait, on pourrait faire tendre q vers l'infini et obtenir :
    $$\forall p \geq 1,\ \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{u_n}{R_n} \geq 1$$
    ce qui serait absurde, puisque $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{u_n}{R_n}$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini.
  - Soit $\alpha < 1$. Si $\alpha < 0$, $\dfrac{u_n}{R_n^\alpha} = o(u_n)$ donc la série de terme général $\dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge. Si $\alpha \geq 0$, on peut écrire :
    $$\frac{u_n}{R_n^\alpha} = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n^{al}} \leq \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \beta_n$$
    Comme $\alpha < 1$, β_n est le terme général d'une série convergente, avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n = \int_0^{R_1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, et la série étudiée converge, toujours par comparaison des séries à termes positifs.

62) La formule proposée se démontre par intégrations par parties :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_a^b (b-t)(t-a)f''(t)\,\mathrm{d}t &= \underbrace{\frac{1}{2}\Big[(b-t)(t-a)f'(t)\Big]_a^b}_{=0} - \frac{1}{2}\int_a^b (-2t+a+b)f'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\Big[(2t-a-b)f(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{b-a}{2}\left(f(b)+f(a)\right) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Notons $f:\ t \longmapsto \dfrac{\sin\sqrt{t}}{t}$ et $a_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la formule précédente avec $a = k$ et $b = k+1$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$), nous obtenons :

$$\forall k \geq 1,\ \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,(a_{k+1}+a_k) - \frac{1}{2}\underbrace{\int_k^{k+1} (k+1-t)(t-k)f''(t)\,\mathrm{d}t}_{=\alpha_k}.$$

En sommant ces égalités, nous obtenons :

$$\forall n \geq 1,\ \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\,(a_{k+1}+a_k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k$$

ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1+a_n}{2} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k.$$

Nous avons :

- a_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini ;
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ |\alpha_k| \leq \displaystyle\int_k^{k+1} (k+1-t)(t-k)|f''(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} |f''(t)|\,\mathrm{d}t$ et

  $$f''(t) = -\frac{5\cos(\sqrt{\mathrm{t}})}{4t^{\frac{5}{2}}} - \frac{\sin(\sqrt{\mathrm{t}})}{4t^2} + \frac{2\sin(\sqrt{\mathrm{t}})}{t^3} =_{+\infty} O(1/t^2).$$

  On en déduit que f'' est intégrable au voisinage de $+\infty$ et que α_k est le terme général d'une série absolument convergente ;
- le changement de variable $u = \sqrt{t}$ donne :

  $$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$$

  et cette expression a une limite quand n tend vers l'infini, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ est une intégrale convergente bien connue.

On en déduit donc que A_n converge quand n tend vers l'infini : la série de terme général $\dfrac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ est convergente.

En posant $g:\ t \longmapsto \dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ et $b_n = g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous obtenons de la même façon :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{b_1+b_n}{2} + \int_1^n g(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k$$

en posant

$$\forall k \geq 1,\ \beta_k = \int_k^{k+1} (k+1-t)(t-k)g''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Une nouvelle fois, b_n tend vers 0 et β_k est le terme général d'une série convergente :

$$g''(t) = -\frac{3\cos(\sqrt{t})}{4t^2} - \frac{\sin(\sqrt{t})}{4t^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\sin(\sqrt{t})}{4t^{\frac{5}{2}}} =_{+\infty} O(1/t^{3/2}).$$

Par contre, $\displaystyle\int_1^n g(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{n}} \sin u\,\mathrm{d}u = 2(\cos 1 - \cos\sqrt{n})$ n'a pas de limite quand n tend vers l'infini. On en déduit que B_n n'a pas de limite : la série de terme général $\dfrac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ est divergente.

63) a) Supposons que (i) est vérifié. Pour $j_0 \in \mathbb{N}$, la suite $s = (\delta_{n,j_0})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc $t_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{n,j}\delta_{n,j_0} = p_{n,j_0}$ converge vers 0 et (ii) est vérifié.

b) Supposons réciproquement que (ii) est vérifié et soit (s_n) une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\ell = 0$, fixons $\varepsilon > 0$; il existe $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|s_j| \leq \varepsilon$ pour tout $j \geq j_\varepsilon$. On a alors :

$$\forall n \geq j_\varepsilon,\ |t_n| \leq \underbrace{\left|\sum_{j=1}^{j_\varepsilon - 1} p_{n,j}s_j\right|}_{=R_n} + \varepsilon \underbrace{\sum_{j=j_\varepsilon}^{n} p_{n,j}}_{\leq 1}.$$

D'après (ii), R_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc il existe $n_\varepsilon \geq j_\varepsilon$ tel que $R_n \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_\varepsilon$. On en déduit :

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ |t_n| \leq 2\varepsilon$$

donc t_n converge vers $0 = \ell$.

Si ℓ est non nul, on pose $s' = (s_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ et on est dans le cas précédent : la suite t' associée à s' converge vers 0, ce qui donne directement que t_n converge vers ℓ.

64) Pour $\varepsilon \in E$, on a $0 \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n q^{-n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} q^{-n} = \frac{q}{q-1}$ donc $f(E) \subset \left[0, \dfrac{q}{q-1}\right] = I$.

Soit $x \in I$. Nous allons définir par récurrence une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 0} \in E$ telle que $f(\varepsilon) = x$. Nous utilisons pour cela une propriété élémentaire :

$$\forall y \in I,\ \exists \alpha \in \{0,1\},\ q(y-\alpha) \in I.$$

En effet, si $y \in \left[0, \dfrac{1}{q-1}\right]$, on pose $\alpha = 0$ et on a bien $0 \leq q(y-\alpha) = qy \leq \dfrac{q}{q-1}$. Sinon, on a $\dfrac{1}{q-1} < y \leq \dfrac{q}{q-1}$ et on pose $\alpha = 1$; on a alors :

$$0 \leq \frac{q(2-q)}{q-1} = q\left(\frac{1}{q-1} - 1\right) \leq q(y-\alpha) = q(y-1) \leq q\left(\frac{q}{q-1} - 1\right) = \frac{q}{q-1}$$

Dans tous les cas, on a $q(y-\alpha) \in I$.

On peut ensuite définir les ε_n par récurrence :

- Il existe $\varepsilon_0 \in \{0,1\}$ tel que $q(x - \varepsilon_0) \in I$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que l'on ait défini $(\varepsilon_k)_{0\leq k\leq n} \in \{0,1\}^{n+1}$ tels que

$$q^{n+1}\left(x - \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k q^{-k}\right) \in I.$$

Il existe alors $\varepsilon_{n+1} \in \{0,1\}$ tel que $q\left(q^{n+1}\left(x - \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k q^{-k}\right) - \varepsilon_{n+1}\right) \in I$, c'est-à-dire tel que :

$$q^{n+1}\left(x - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon_k q^{-k}\right) \in I.$$

La suite $\varepsilon \in E$ étant ainsi définie, on a $0 \leq x - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon_k q^{-k} \leq \dfrac{1}{q^n(q-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $f(\varepsilon) = x$: f est surjective de E sur I.

f n'est pas injective car dans la preuve précédente, les intervalles $I_1 = \left[0, \dfrac{1}{q-1}\right]$ et $I_2 = \left[1, \dfrac{q}{q-1}\right]$ ne sont pas disjoints et si $y \in I_1 \cap I_2$, on peut choisir indifféremment $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ pour avoir $q(y-\alpha) \in I$. Pour donner un exemple précis, on peut remarquer que $q \in I$, donc il existe $\varepsilon \in E$ telle que $q = f(\varepsilon)$, ce qui donne $1 = f(\varepsilon')$, en posant $\varepsilon' = (0, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$. D'autre part, $1 = f(1, 0, 0, \dots)$, donc f n'est pas injective.

65) On a $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{d=1}^{n} \mathbb{1}_{d\,|\,k}\right)$ où $\mathbb{1}_{d\,|\,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } d \text{ divise } k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On peut ensuite échanger les deux sommes :

$$S_n = \sum_{d=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{d\,|\,k}\right) = \sum_{d=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

car les multiples de d compris entre 1 et n sont les entiers d, $2d$, $\dots$,$\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor d$.

En utilisant l'encadrement $\dfrac{n}{d} - 1 < \left\lfloor \dfrac{n}{d} \right\rfloor \leq \dfrac{n}{d}$, on obtient ensuite :

$$n\,H_n - n = \sum_{d=1}^{n}\left(\frac{n}{d} - 1\right) \leq S_n \leq \sum_{d=1}^{n} \frac{n}{d} = n\,H_n$$

et donc $S_n = n\,\ln n + O(n)$, puisque $H_n = \ln n + \gamma + o(1) = \ln n + O(1)$.

66) Le sens direct est évident. Supposons réciproquement que $u_{n+1} - u_n$ tende vers 0. Si α et β sont deux valeurs d'adhérence distinctes et si $\alpha < \gamma < \beta$, fixons $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\alpha + \varepsilon_0 < \gamma - \varepsilon_0 < \gamma + \varepsilon_0 < \beta - \varepsilon_0.$$

Soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$; il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Pour $N \in \mathbb{N}$, il existe alors $p, q \geq \max(n_0, N)$ tels que $|u_p - \alpha| < \varepsilon$ et $|u_q - \beta| < \varepsilon$. En supposant que $p \leq q$ (mais la preuve serait pratiquement identique avec $p \geq q$), la suite $(u_p, u_{p+1}, \dots, u_q)$ part de la valeur $u_p < \gamma - \varepsilon$ et arrive à la valeur $u_q > \gamma + \varepsilon$ en faisant des sauts $u_{p+1} - u_p, \dots, u_q - u_{q-1}$ strictement plus petits que ε. On en déduit qu'il existe $i \in]p+1, q-1[$ tel que $u_i \in]\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon[$. Nous avons ainsi démontré que pour $\varepsilon > 0$ assez petit et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $i \geq N$ tel que $|u_i - \gamma| < \varepsilon$: cela traduit que γ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Remarquons ensuite que si α est une valeur d'adhérence de (u_n), α est un point fixe de f : il existe en effet une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)}$ converge vers α. On en déduit que $f(u_{\varphi(n)}) = u_{\varphi(n)+1} = \underbrace{u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)}}_{\longrightarrow 0} + u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$, avec également $f(u_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\alpha)$ car f est continue en α : on a bien $\alpha = f(\alpha)$.

Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne convergeait pas, elle aurait au moins deux valeurs d'adhérence distinctes $\alpha < \beta$ (une suite réelle bornée converge si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence). Fixons $\gamma \in]\alpha, \beta[$; comme γ est une valeur d'adhérence de (u_n) et que $]\alpha, \beta[$ est un voisinage de γ, il existe n_0 tel que $u_{n_0} \in]\alpha, \beta[$. Ainsi, u_{n_0} est un point fixe de f (c'est une valeur d'adhérence de la suite et toute valeur d'adhérence est un point fixe de f). On a donc $u_{n_0+1} = f(u_{n_0}) = u_{n_0}$

et par récurrence immédiate $u_n = u_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire, ce qui est absurde car elle est divergente.

67) Le reste $r_n = \displaystyle\sum_{\substack{j\geq n\\ j\in A}} \frac{1}{j}$ tend vers 0, donc le théorème de Cesàro donne $\sigma_n = \dfrac{r_1+\cdots+r_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Nous avons, en notant $\mathbf{1}_X$ la fonction indicatrice d'un partie X :

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{+\infty}\frac{\mathbf{1}_A(j)}{j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=i}^{+\infty}\mathbf{1}_{[\![1,n]\!]}(i)\frac{\mathbf{1}_A(j)}{j}.$$

Comme tous les termes sont positifs, nous pouvons échanger les deux sommes et écrire :

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{\mathbf{1}_A(j)}{j}\sum_{i=1}^{j}\mathbf{1}_{[\![1,n]\!]}(i)\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathbf{1}_A(j)}{j}\underbrace{\sum_{i=1}^{j}\underbrace{\mathbf{1}_{[\![1,n]\!]}(i)}_{=1}}_{=j} = \frac{|A\cap[\![1,n]\!]|}{n}$$

ce qui donne le résultat demandé.

Remarque : la réciproque de ce résultat est fausse ; un contre-exemple est donné par l'ensemble $\mathbf{P}$ des nombres premiers. Le théorème des nombres premiers, prouvé indépendamment par Hadamard et La Vallée Poussin, affirme que $\dfrac{|\mathbf{P}\cap[\![1,n]\!]|}{n} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{\ln n}$. $\mathbf{P}$ est donc de densité nulle, bien que $\displaystyle\sum_{p\in\mathbf{P}}\frac{1}{p} = +\infty$.

68) Nous avons $n = \pi(p_n) = n$ pour tout $n \geq 1$, donc $n \sim \dfrac{p_n}{\ln p_n}$. En prenant le logarithme, nous obtenons :

$$\underbrace{\ln p_n - \ln(\ln p_n)}_{\sim \ln p_n} = \ln(n+o(n)) = \ln n + \ln(1+o(1)) = \underbrace{\ln n + o(1)}_{\sim \ln n}$$

ce qui donne $\ln p_n \sim \ln n$. On obtient donc $p_n = \dfrac{p_n}{\ln p_n}\ \ln p_n \sim n\ln n$.

Ainsi, $\dfrac{1}{p_n} \sim \dfrac{1}{n\ln n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_n}$ diverge.