

DM 2

pour le mardi 26 septembre 2023

Lampe Fer-Hydrogène

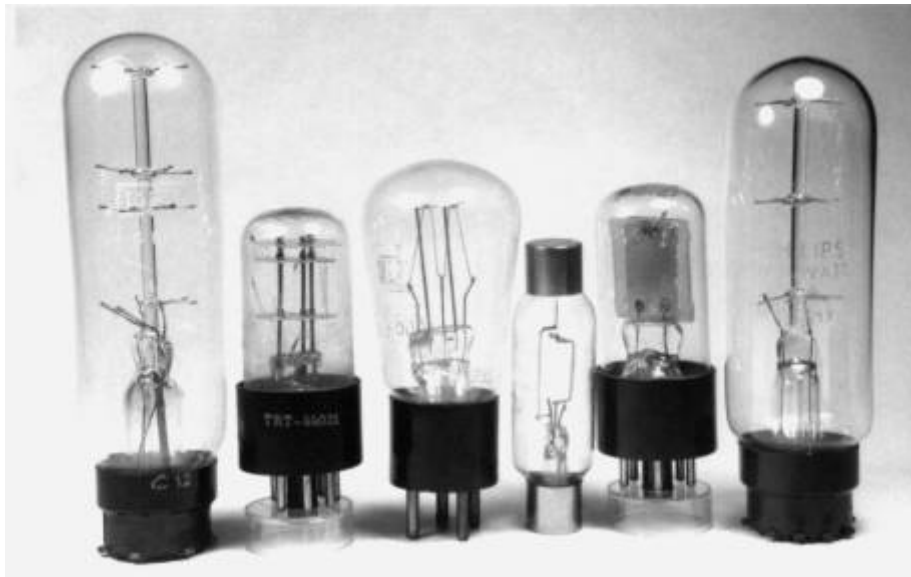
(Extrait de X-ENS MP 2009 sur les instabilités)

<http://paillard.claude.free.fr/lampes/ferhydro/ferhydro.html>

Vers 1930, à peine libérés des contraintes de l'alimentation par batteries en passant au "secteur" alternatif, les récepteurs doivent faire face à un autre problème : les fluctuations de la tension secteur, en un temps où de multiples compagnies distribuent un courant alternatif (ou continu...) dans des lignes plus ou moins bien adaptées aux variations de la consommation.

Avec une tension variant parfois de 20 % autour de la valeur nominale, il est difficile d'espérer un bon service de tubes dont les filaments sont mis à rude épreuve. La solution est apportée par les tubes régulateurs "Fer-Hydrogène" dans lesquels un filament de fer maintient constant le courant le traversant, ce pour des tensions appliquées pouvant varier, en général, dans un rapport 1 à 3. L'ampoule est remplie d'hydrogène, gaz ne présentant pas d'affinité avec le fer tout en permettant une bonne conduction thermique.

Le coefficient de température de l'ensemble est positif : la résistance tend à augmenter avec le courant traversant, d'où la stabilisation recherchée.



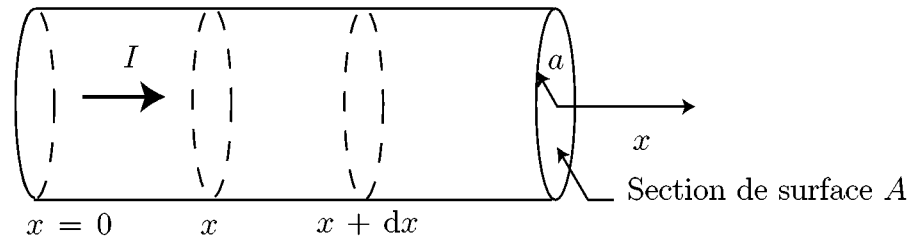
C12 - TRT44021 (en fait Ampérite 10-4A) - 4603 MAZDA - RC15/45-300 - 1H20 - C8

DEUXIÈME PARTIE – ÉTUDE D'UNE LAMPE FER-HYDROGÈNE

Une lampe fer-hydrogène est constituée d'un filament de fer de longueur supposée infinie :

- de section droite de surface A et de rayon a ,
- de conductivités thermique et électrique notées respectivement λ et $\gamma = 1/\rho$, en notant ρ la résistivité électrique,
- de masse volumique μ et de capacité calorifique massique c .

Ce filament, parcouru par un courant continu d'intensité I imposé par un générateur de courant, est situé dans une enceinte (ampoule) remplie de dihydrogène. Dans tout le problème, l'environnement de dihydrogène est maintenu à la température constante notée T_e . Ce filament est modélisé figure (3).



Environnement du filament : dihydrogène à la température T_e

FIGURE 3 – Représentation du filament de la lampe fer-hydrogène.

Dans tout le problème, on considérera que le système est quasi-unidimensionnel et on notera $T(x, t)$ la température qui règne, à l'instant t , en tout point M du filament, situé à l'abscisse x . En $x = 0$, la température du filament est maintenue à $T(x = 0) = T_e$.

I. CAS OÙ LA RÉSISTANCE EST INDÉPENDANTE DE T

A. Établissement de l'équation d'évolution

- 20.** Donner un ordre de grandeur de γ et de λ pour un métal.
- 21.** Énoncer clairement les lois phénoménologiques locales de Fourier et d'Ohm. Dans la suite, on supposera que ces lois s'appliquent au filament.

Les transferts thermiques radiatifs et convectifs sont décrits par la densité de flux thermique $\vec{j}_h(x, t)$ au niveau de l'interface entre le filament et le dihydrogène. Dans la limite où $T(x, t)$ est voisine de T_e , on pourrait montrer que cette densité de flux s'exprime comme

$$\vec{j}_h(x, t) = h(T(x, t) - T_e) \vec{n}_{\text{ext}}$$

où h est un coefficient qui décrit les échanges thermiques entre le filament et son environnement, et \vec{n}_{ext} est un vecteur unitaire sortant, normal à la surface du filament.

- 22.** Exprimer le travail électrique $\delta^2 W$ reçu par un élément de volume $d\tau = A dx$ du conducteur pendant un temps dt , de la part du générateur. On exprimera le résultat en fonction de I , γ , A , dx et dt .

- 23.** À l'aide d'un bilan d'énergie qu'on établira clairement, montrer que l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $T(x, t)$ s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha (T - T_e) + \beta \rho I^2$$

où D , α et β sont des constantes qu'on exprimera en fonction des paramètres du problème.

B. Étude du régime stationnaire

Profil de température en régime stationnaire

- 24.** Déterminer le profil de température ($T = T(x)$) en régime stationnaire. On supposera que le fil occupe le demi-axe $x \geq 0$. On introduira une longueur caractéristique δ qu'on exprimera en fonction de a , λ et h .
- 25.** Tracer le profil de $T(x) - T_e$. On précisera la température limite notée T_ℓ en fonction de T_e , ρ , a , h , et I .
- 26.** Y a-t-il conservation du flux thermique conductif? On argumentera la réponse.

Mise en évidence du caractère dissipatif du système. Création d'entropie

On se propose à présent de déterminer le taux de création d'entropie $\sigma(x)$ par unité de longueur et de temps dans le filament, à l'abscisse x . Cette étude s'appuie sur un bilan d'entropie en régime stationnaire. Le système thermodynamique d'étude sera un élément de volume $d\tau = A dx$ du filament. On notera $\delta^2 S_{\text{ech}}$ et $\delta^2 S_c$ l'entropie d'échange et l'entropie créée, pendant dt .

- 27.** En régime stationnaire, déterminer le lien entre l'entropie d'échange $\delta^2 S_{\text{ech}}$ et l'entropie créée $\delta^2 S_c$
- 28.** Exprimer l'entropie d'échange entrante δS_{ech}^e par la section d'abscisse x pendant dt . On exprimera le résultat en fonction de la densité de flux conductif $j_{\text{cd}}(x)$, $T(x)$, A et dt .
- 29.** Exprimer de même l'entropie d'échange sortante δS_{ech}^s du cylindre de volume $d\tau = A dx$. On exprimera le résultat en fonction de h , T_e , a , dx , dt , A et des fonctions j_{cd} et T évaluées à des abscisses que vous préciserez.
- 30.** Montrer alors que le taux de création d'entropie $\sigma(x)$ par unité de longueur et de temps s'écrit :

$$\sigma(x) = \frac{\delta^2 S_c}{dx dt} = \frac{\rho I^2}{AT} + \frac{\lambda A}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + 2\pi a h (T - T_e) \left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T} \right) \quad (3)$$

On ne cherchera pas à établir une expression explicite de $\sigma(x)$ en fonction de x .

- 31.** Identifier les différentes sources d'irréversibilité du problème.
- 32.** À quelle condition l'état stationnaire est-il un état d'équilibre thermodynamique pour le filament ?

- 33.** À partir de l'équation (3), exprimer σ (sans expliciter la dépendance en x) dans un régime de conduction thermique pure, c'est-à-dire en l'absence de courant, ainsi qu'en l'absence de transferts radiato-convectifs. Justifier le signe de λ .
- 34.** En vous appuyant sur l'équation (3), vérifier que tout contact thermique entre deux corps dont les températures de surface sont différentes constitue une source de création d'entropie.

II. CAS OÙ ρ DÉPEND DE T – RECHERCHE DES SOLUTIONS STATIONNAIRES STABLES

On prend désormais en compte les variations de résistivité ρ du métal en fonction de la température T . Des mesures, pour le fer, permettent d'obtenir la courbe $\rho(T)$ illustrée figure (4).

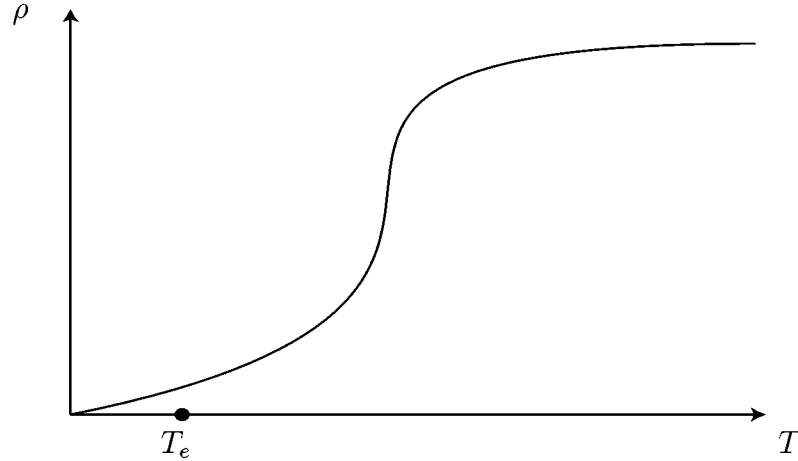


FIGURE 4 – Évolution de la résistivité ρ du filament en fonction de T .

Dans cette partie, on supposera, dans une bonne approximation, que la température est homogène sur toute la longueur du filament.

A. Approche qualitative

39. Montrer que la recherche des solutions stationnaires conduit à une équation de la forme :

$$\rho(T) = y(T) \quad , \quad (4)$$

où $y(T)$ est l'équation d'une droite \mathcal{D} dont on précisera la pente et l'ordonnée à l'origine, en fonction de h , a , I et T_e . On appellera T^* une température solution de l'équation (4).

40. On supposera, dans toute cette étude, que T_e est maintenue constante à la valeur indiquée sur la figure (4).

Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation (4) par rapport à l'intensité I . On nommera *points de fonctionnement* ces solutions. On indiquera très clairement sur la courbe les différents points de fonctionnement possibles.

B. Stabilité des solutions stationnaires

Afin d'étudier la stabilité des solutions déterminées graphiquement à la question précédente, on examine le comportement du système face à une fluctuation de température notée $\epsilon(t) = T(t) - T^*$ avec $|\epsilon| \ll T^*$ et T^* est la valeur de la température du point de fonctionnement considéré.

41. Montrer que l'équation différentielle satisfaite par $\epsilon(t)$ s'écrit

$$\frac{d\epsilon(t)}{dt} = \kappa(\tilde{p}(T^*) - p) \epsilon(t)$$

où

- * κ est à exprimer en fonction de β et I ,
- * $\tilde{p}(T^*)$ et p sont des pentes que l'on précisera.

- 42.** Dégager un critère graphique simple permettant de conclure quant au caractère stable ou instable des points de fonctionnement étudiés. Représenter la zone instable.
- 43.** Dédurre l'allure de la courbe donnant les variations de T^* en fonction de I . On représentera sur cette courbe les différents points de fonctionnement.
- 44.** Supposons que l'on observe l'image du courant I sur la voie X d'un oscilloscope et celle de la température T^* sur la voie Y. Quelles sont les parties de la courbe qu'on observerait effectivement en mode XY, en régime variable (faible fréquence) ? Préciser graphiquement l'amplitude minimale du courant qu'il faudra assurer pour observer une courbe $T^*(I)$ révélant les propriétés particulières du système.

C. Étude à tension imposée

- 45.** Reprendre la question 39 dans le cas où le filament est alimenté par un générateur de tension continue.
- 46.** Justifier physiquement que le point de fonctionnement trouvé est toujours stable, quelle que soit la valeur de U .