

DS 1

Le samedi 23 septembre 2023

Problème 1 : Diffusion thermique. Interaction Laser-Matière

Problème 2 : Température dans le tunnel de Fréjus

Problème 3 : Climatisation de voiture

Diffusion thermique. Interaction Laser-Matière

Un rayonnement laser arrivant sur la surface d'un matériau donne lieu à différents effets : thermiques, électromécaniques, etc.

Pour simplifier on supposera que la totalité de l'énergie du faisceau laser est absorbée par le matériau. Ceci se traduit par une élévation de la température, et donc par un accroissement des vibrations de la structure moléculaire ou cristalline du matériau.

Cette transformation se fait à la surface de la zone d'interaction dans une épaisseur caractéristique moyenne δ appelée profondeur de pénétration moyenne de la lumière. Cette zone d'interaction devient une source de chaleur intense qui chauffe la matière par conduction thermique. Lorsque δ est faible devant le diamètre $2r$ du faisceau laser, on peut utiliser un modèle unidimensionnel de conduction de la chaleur. On néglige tout écoulement de chaleur en dehors de la direction Ox de propagation.

Pendant le début de l'échauffement, le matériau est soumis à un flux thermique constant. Lorsque celui-ci se met à fondre, il apparaît une interface liquide-solide, dont la température est supposée constante et égale à la température de fusion T_f du matériau. Cette interface se propage alors dans le matériau. On notera L_f la chaleur latente de fusion du matériau. On considère que la partie fondue du matériau transmet intégralement la lumière du laser.

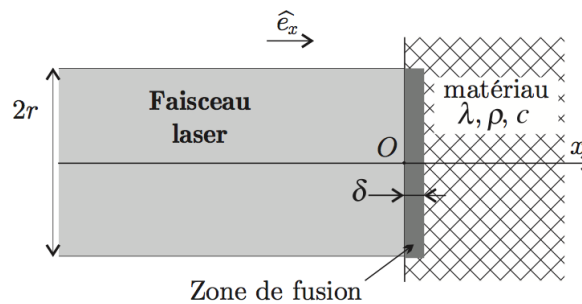


Figure 1 : Interaction laser-matière

Équation de diffusion

Le matériau de masse volumique ρ , de chaleur massique c , de conductivité thermique λ occupe le demi espace défini par $x > 0$. Il est initialement en équilibre à la température T_0 . La conduction de la chaleur se fait suivant l'axe Ox . On note $\vec{j}_Q(x, t) = j_Q(x, t)\hat{e}_x$ le vecteur densité de flux thermique et $T(x, t)$ la température du milieu que constitue le matériau. On néglige toute perte de chaleur dans la région $x < 0$.

1. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée à la fois par $T(x, t)$ et par $j_Q(x, t)$. On introduira le paramètre $\mu = \frac{\lambda}{\rho c}$. On vérifiera que cette équation admet une famille de solutions de la forme

$$\theta(x, t) = \theta_0 + \frac{be^{-u^2}}{\sqrt{\mu t}} \text{ avec } u = \frac{\kappa x}{\sqrt{\mu t}}$$

Les quantités θ_0 et b sont des constantes d'intégration et κ un rapport de deux nombres entiers positifs que l'on déterminera.

Flux thermique constant

On suppose que la surface du matériau (située en $x = 0$) reçoit à partir de l'instant $t = 0$ une densité de flux constant \vec{j}_{Qo} dirigée selon \hat{e}_x

2. Montrer que la solution proposée à la question 1 ne convient pas dans ce cas.

On admet que la solution correspondant à cette situation s'écrit pour la température sous la forme :

$$T(x, t) = A_1 + \frac{2B_1\sqrt{\mu t}}{\lambda} F(u) \text{ avec } F(u) = \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} - u \operatorname{erfc}(u) \text{ et } \operatorname{erfc}(u) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt$$

3. Déterminer l'expression de $j_Q(x, t)$ en fonction de B_1 et $\operatorname{erfc}(u)$.
 4. Étudier toutes les conditions aux limites du problème en x et en t . On commentera toutes ces conditions aux limites et on admettra que si $u \rightarrow \infty$ alors

$$\operatorname{erfc}(u) \sim \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} \left[u^{-1} - \frac{1}{2}u^{-3} + o(u^{-3}) \right].$$

En déduire les expressions de A_1 et B_1 en fonction de T_0 et j_{Qo} .

Température constante

On suppose à présent que la surface située en $x = 0$ est maintenue à la température constante T_1 . On montre que la solution correspondante s'écrit

$$T(x, t) = A_2 + B_2 \operatorname{erfc}(u)$$

où la fonction $\operatorname{erfc}(u)$ est la même que celle définie dans la partie précédente, A_2 et B_2 étant deux températures constantes.

5. Étudier toutes les conditions aux limites en x et t de $T(x, t)$. On déterminera notamment les expressions de A_2 et B_2 en fonction de T_1 et T_0 .
 6. Déterminer l'expression de $j_Q(x, t)$; ce résultat vous paraît-il plausible?

Modélisation d'une opération de perçage

On perce une plaque d'aluminium ; les valeurs numériques correspondant à cette opération sont les suivantes : $\lambda = 210 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho c = 2.40 \times 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2.70 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $L_f = 3.88 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$, la température initiale de la surface considérée est $T_0 = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ et la température de fusion de l'aluminium est $T_f = 660 \text{ }^\circ\text{C}$. La surface est chauffée dans un premier temps jusqu'à la température de fusion puis l'avancée du perçage se fait alors par liquéfaction progressive de la matière. On admettra que le front liquide-solide se propage sans déformation avec une vitesse constante v et que l'aluminium absorbe tout le rayonnement qu'il reçoit. La densité de flux thermique j_{Qo} du faisceau laser de section $\sigma = 0.20 \text{ cm}^2$ et de puissance $P_l = 1.00 \text{ kW}$ est supposée constante.

7. En utilisant les résultats de la partie "flux thermique constant", déterminer l'expression du temps t_f au bout duquel la surface du matériau atteint la température de fusion T_f . Calculer sa valeur numérique.

À partir de l'instant t_f , on suppose que le front liquide-solide se propage dans le matériau à la vitesse $\vec{v} = v\hat{e}_x$, où v est une constante positive dans le référentiel du laboratoire. On parle de front de fusion. On se place dorénavant dans le référentiel lié à ce front, dans lequel l'abscisse du point O devient $x = -vt$.

8. En écrivant la conservation de l'énergie pendant la durée dt et sur une tranche que l'on précisera, établir une relation donnant v en fonction de j_{Qo} , ρ , λ , L_f et $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}$.
9. La distribution de température dans le repère lié au front de fusion est supposée stationnaire. Montrer que la distribution de la température à droite du front de fusion vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dx} = -\gamma \frac{d^2T}{dx^2}$$

où l'on exprimera γ en fonction de μ et v

10. Déterminer l'expression de $T(x)$ en fonction de T_0 , T_f , v et μ .
11. En déduire l'expression de v en fonction de P_l , σ , ρ , L_f , c , T_f et T_0 . Calculer la valeur numérique de v pour le perçage considéré.

De la physique dans le tunnel de Fréjus

Ce sujet comporte deux parties indépendantes qui s'intéressent à divers aspects de la physique dans le tunnel de Fréjus. A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont soulignés. La notation \bar{z} désigne le nombre complexe conjugué de z . Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple \vec{j} pour un flux surfacique ; sauf s'ils sont unitaires et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple \hat{e}_z tel que $\|\hat{e}_z\| = 1$. Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs.

I. — Température dans le tunnel de Fréjus

Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

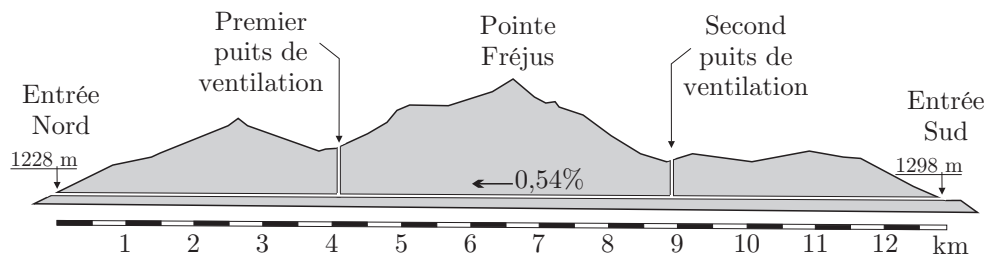


FIGURE 1 – Tunnel de Fréjus

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ 30°C . Dans un premier temps nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.

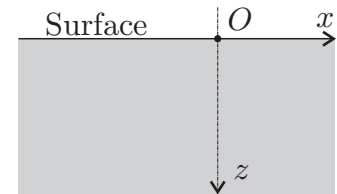


FIGURE 2 – Sol

I.A. — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 m. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique κ , de masse volumique ρ_s et de capacité thermique massique c_s . Sa surface est plane et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure $T(z = 0, t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$ avec $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$. (Voir figure 2).

- 1 — Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en $z = 0$. Calculer la température maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour T_0 pour les évolutions annuelles de température.
- 2 — Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt , est noté $d\phi_Q$. Rappeler la définition du vecteur \vec{j}_Q , densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?
- 3 — Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application. En déduire les dimensions de la conductivité thermique κ .
- 4 — On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre z et $z + dz$ de surface S . Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?

❑ 5 — Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

❑ 6 — Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial z}$ et \mathcal{S} puis en fonction de ρ_s , c_s , \mathcal{S} et $\frac{\partial T}{\partial t}$.

❑ 7 — En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.

On cherche des solutions de la forme $\underline{T}(z,t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - kz)}$ vérifiant la condition aux limites $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$.

❑ 8 — Interpréter cette forme de solution. Déterminer la relation de dispersion correspondante. En déduire l'expression de \underline{k} qu'on mettra sous la forme $\underline{k} = k' + ik''$ avec $k' > 0$. Quelle est la signification physique de k' et k'' . Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle $T(z,t)$.

❑ 9 — Calculer la profondeur z_e à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de θ_0 de plus de 1%. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus ? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne $\rho_s = 2,65 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c_s = 8,50 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\kappa = 3,00 \text{ SI}$.

❑ 10 — Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur z_e ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

I.B. — Température d'origine géophysique

La température moyenne de 30° C relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est $L_c = 45,0 \text{ km}$. Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration.

Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{z}{H}}$ avec $H = 10,0 \text{ km}$. On prendra $\mathcal{P}_0 = 2,50 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$. La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface $\mathcal{I}_{c/m}$ entre la croûte et le manteau ce dernier génère un flux surfacique constant $\vec{j}_m = -j_m \hat{e}_z$ avec $j_m = 35,0 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$.

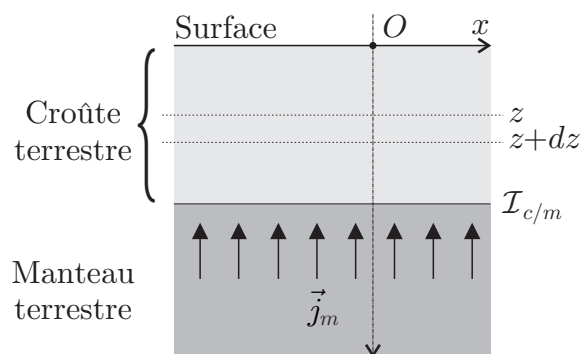


FIGURE 3 – Modèle géophysique

❑ 11 — Effectuer, en régime stationnaire, le bilan thermique dans une tranche de croûte terrestre de surface \mathcal{S} , comprise entre z et $z + dz$.

❑ 12 — En déduire la température $T(z)$ en fonction de : H , L_c , \mathcal{P} , j_m , κ et $\theta_0 = 0^\circ \text{ C}$ la température moyenne de surface en $z = 0$.

❑ 13 — Exprimer le flux thermique total $\vec{j}_S = j_S \hat{e}_z$ au niveau de la surface en $z = 0$.

❑ 14 — Comparer les deux termes proportionnels à z et simplifier l'expression de $T(z)$. Calculer la température au centre du tunnel de Fréjus ($z = 1,70 \text{ km}$) puis j_S .

Climatisation de voiture

Ce problème étudie le système de climatisation d'une voiture.

Destiné à maintenir dans l'habitacle un débit d'air et une température régulée, le système de climatisation (figure 1) se compose : d'un circuit d'air pulsé dans lequel un débit d'air est créé par la rotation d'un ventilateur, et d'un circuit frigorifique composé d'un compresseur, d'un condenseur, d'un détendeur, et d'un évaporateur dans lesquels circule un fluide frigorigène dont la vaporisation dans l'évaporateur absorbe l'énergie provenant de l'habitacle, permettant ainsi la régulation de température souhaitée.

Le fluide frigorigène utilisé depuis 1995, en remplacement du fréon utilisé jusqu'alors est du tétrafluoroéthane, connu sous l'appellation R134A, plus respectueux de l'environnement.

Données pouvant être utiles :

Propriétés du fluide R134A :

Capacité thermique à pression constante (supposée indépendante de T) du liquide :

$$c_{pliq} = 1.35 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Capacité thermique à pression constante (supposée indépendante de T) de la vapeur :

$$c_{pvap} = 0.87 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Masse molaire $M = 102 \text{ g mol}^{-1}$

On rappelle l'expression de l'entropie massique du gaz parfait :

$$s = c_{pvap} \ln(T) - \frac{R}{M} \ln(P) + Cte$$

On rappelle l'expression de l'entropie massique d'une phase liquide supposée incompressible :

$$s = c_{pliq} \ln(T) + Cte$$

TABLE 1 – Quelques données utiles

Température de changement d'état	$T_B = 278 \text{ K} = 5 \text{ °C}$	$T_H = 323 \text{ K} = 50 \text{ °C}$
Pression de vapeur saturante correspondante	$P_B = 3.5 \text{ bar}$	$P_H = 14 \text{ bar}$
Enthalpie massique de vaporisation $l_{vap}(T)$	196 kJ kg^{-1}	150 kJ kg^{-1}

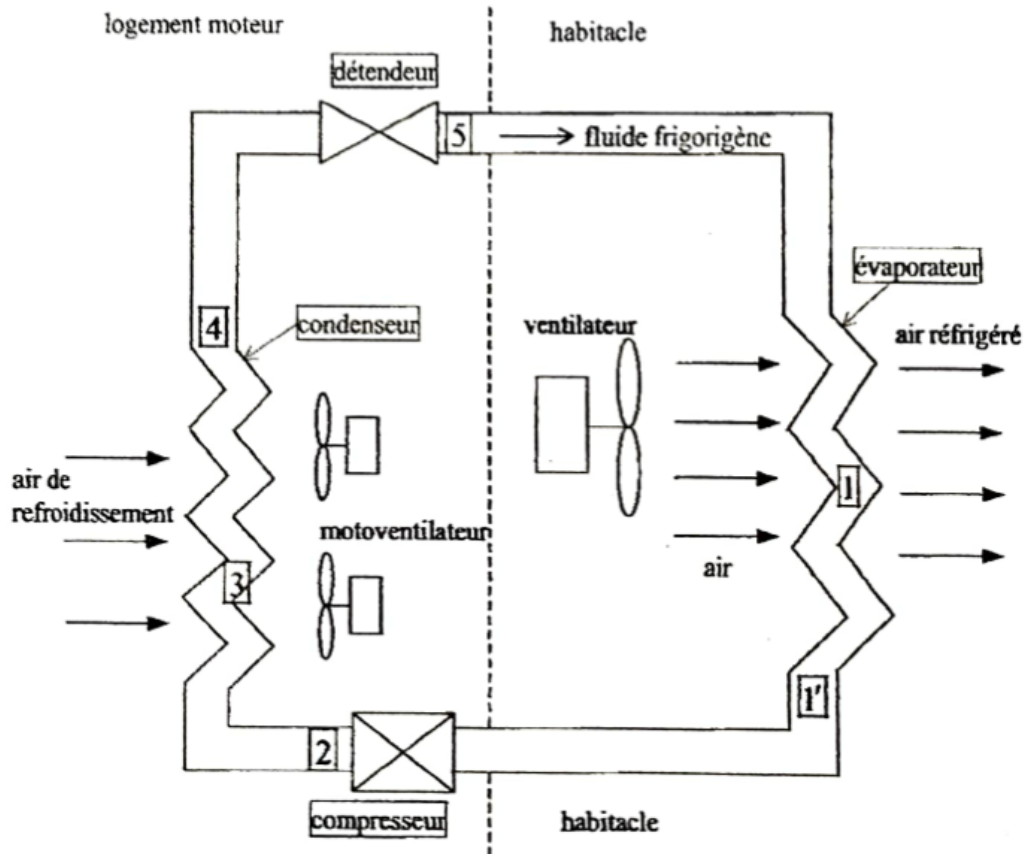


FIGURE 1 – Circuit frigorifique

Description du cycle :

On désire maintenir une température $T_F = 293 \text{ K} (20 \text{ °C})$ dans l'habitacle, la température extérieure étant $T_C = 308 \text{ K} (35 \text{ °C})$. Dans un premier temps on considère que le fluide décrit, entre les pressions P_B et P_H le cycle suivant :

— Détendeur

Dans le détendeur parfaitement calorifugé et ne comportant pas de pièces mobiles, le fluide de l'état 4 (liquide saturant à température T_H et à la pression P_H) subit une détente de Joule-Thomson jusqu'à la pression P_B , au cours de laquelle une partie du fluide se vaporise (état 5).

— Evaporateur

L'évaporateur est un échangeur thermique placé dans l'habitacle devant un ventilateur commandé par le conducteur, soufflant l'air qui se refroidit en échangeant l'énergie avec le fluide frigorigène.

Le fluide frigorigène, partiellement vaporisé en 5 achève de se vaporiser à la pression P_B

jusqu'à l'état 1. Pour être sûr que le compresseur n'aspire que de la vapeur sèche (le liquide peu compressible peut provoquer la rupture de certaines pièces), la vapeur est surchauffée à la pression constante P_B de la température $T_1 = T_B$ à la température T_1' (état 1').

Le fonctionnement correct du compresseur exige que la température à la sortie de l'évaporateur T_1' soit supérieure à celle du changement d'état T_B . Un capteur de température mesurant T_1' est relié au détendeur par un dispositif qui module le débit massique D_m du fluide (en modifiant l'ouverture du détendeur) de telle manière que la température T_1' reste égale à la température de consigne $T_0 = 283 \text{ K} (10^\circ\text{C})$.

— Compresseur

À la sortie de l'évaporateur, de l'état 1', le fluide est comprimé jusqu'à la pression P_H de façon adiabatique réversible (état 2).

— Condenseur

Le condenseur, situé à l'avant du véhicule, entre le radiateur de refroidissement du moteur et des motoventilateurs de refroidissement, est un échangeur thermique dans lequel le fluide frigorigène échange de l'énergie avec le flux d'air créé par les motoventilateurs. Dans la première partie du condenseur, le fluide passe de l'état 2 à l'état 3 en se refroidissant à la pression constante P_H jusqu'à ce que sa température atteigne la température de la vapeur saturante correspondant à P_H . La condensation totale du fluide s'effectue ensuite dans la partie centrale à la pression P_H (état 4).

On suppose que les conduits reliant les différents appareils sont parfaitement calorifugés et que la pression qui y règne est constante. On néglige toutes les variations de vitesse du fluide.

Etude du cycle dans le diagramme de Mollier

1. Montrer, en définissant soigneusement le système fermé choisi, que la variation d'enthalpie massique h du fluide, à la traversée d'un système (condenseur, évaporateur, compresseur, détendeur...) est donnée en régime stationnaire par :

$$\Delta h = w_u + q$$

où w_u représente le travail massique reçu de la part des parties mobiles du système et q représente le transfert thermique massique reçu par le fluide.

2. Tracer sur le diagramme de Mollier ($\ln P$ en fonction de h) du fluide R134A le cycle décrit par le fluide en faisant clairement apparaître les états 1, 1', 2, 3, 4 et 5.
3. Ecrire pour chacun des éléments le bilan enthalpique et représenter sur le diagramme de Mollier ou sur une allure du diagramme à reporter sur la copie les transferts thermiques massiques et le travail utile massique reçus par le fluide.
4. En utilisant le diagramme de Mollier, déterminer graphiquement la température du fluide dans l'état 2.
5. Quelle valeur obtient-on pour T_2 si on suppose que le fluide se comporte comme un gaz parfait ? Commenter.
6. Commenter l'allure des isothermes.

7. Quelle est dans l'état 5 la fraction massique de vapeur lue sur le diagramme ?
Établir l'expression du titre massique en vapeur x , en fonction de l'enthalpie massique $h(T, x)$ du fluide diphasé, de l'enthalpie massique de la phase vapeur $h_{vap}(T)$ et de l'enthalpie de la phase liquide $h_{liq}(T)$. Estimer une nouvelle valeur de x_5 .
8. Définir le coefficient d'efficacité ε de cette climatisation. Estimer à l'aide du diagramme les grandeurs pertinentes et en déduire une valeur numérique de ε .

Diagramme entropique

9. Quelle est la représentation graphique de δQ , transfert thermique reçu lors d'une transformation infinitésimale réversible dans un diagramme entropique (T, S) où T est en ordonnée et S en abscisse ?
Quelle est l'interprétation graphique de Q pour un cycle réversible ? Quelle est la correspondance entre le signe de Q et le sens de parcours du cycle ?
10. Quelle est l'équation d'une isobare en phase vapeur considérée comme un gaz parfait à la pression P_0 , notée $T(s)_{P_0}$ dans le diagramme entropique. Tracer son allure.
11. Quelle est l'équation d'une isobare en phase liquide ?
12. Établir l'entropie massique $s(T, x)$ du fluide diphasé en fonction de l'entropie massique de la vapeur en équilibre avec la phase vapeur $s_{vap}(T)$, de l'entropie de la phase liquide $s_{liq}(T)$ et de x .
13. Tracer l'allure complète d'une isobare dans le diagramme T, s .
14. Tracer le cycle décrit par le fluide dans le circuit frigorifique sur le diagramme entropique en faisant figurer la courbe de saturation et en indiquant clairement la température, la pression et l'état du fluide (liquide, vapeur ou diphasé) pour chacun des états 1, 1', 2, 3, 4, 5.
15. Donner les expressions et la valeur numérique des variations d'entropie massique Δs_{51} , $\Delta s_{11'}$, $\Delta s_{1'2}$, Δs_{23} , Δs_{34} , Δs_{45} et conclure pour le cycle.
16. Quelles seraient les transformations subies par un fluide diphasé décrivant un cycle de Carnot évoluant en contact avec un thermostat à T_C et un à T_F au cours duquel le passage par le condenseur assurerait une liquéfaction totale du fluide qui se trouvait à l'état de vapeur saturante à l'entrée du condenseur ? Représenter ce cycle de Carnot dans un diagramme entropique en faisant figurer la courbe de saturation.
17. La turbine et le compresseur de la machine de Carnot étant attelées sur le même arbre afin de permettre la récupération du travail de détente, exprimer grâce à une méthode graphique le coefficient d'efficacité ε_C en fonction de T_C et T_F .
18. Comparer cette valeur à celle de la machine réelle. Identifier les sources d'irréversibilité dans le cycle réel.

Étude de l'évaporateur

On note r la distance parcourue par le fluide depuis l'entrée de l'évaporateur jusqu'à un point M , x le titre en vapeur à ce point et $T(r)$ la température en ce point. La puissance thermique cédée par le fluide frigorigène à l'habitable, à la température T_F , sur une tranche de longueur dr est de la forme

$$dP_{th} = K[T(r) - T_F]dr$$

où K est une constante.

19. Établir la loi $r(x)$ dans la partie où a lieu l'évaporation en appliquant le bilan enthalpique établi en début de problème au fluide sur une tranche de longueur dr . Donner l'expression de r_1 , distance parcourue jusqu'au point où $x = 1$ (état 1) en fonction de D_m , $l_{vap}(T_B)$, K , T_F , T_B et x_5 .
20. Établir la loi $r(T)$ dans la partie où a lieu la surchauffe de la vapeur. Donner l'expression de r'_1 , distance parcourue jusqu'à la sortie de l'évaporateur en fonction de r_1 , T'_1 et toute autre grandeur utile.
21. On suppose $T'_1 < T_0$. Doit-on augmenter ou diminuer le débit massique D_m du fluide pour que T'_1 reprenne sa valeur de consigne ?

Cycle réel

Le cycle réel diffère de celui décrit précédemment.

Dans le condenseur, le fluide après s'être liquéfié totalement à la température T_H est refroidi à la température $T'_4 = 318 \text{ K}$ (45°C) de façon isobare pour subir une détente de Joule-Thomson jusqu'à l'état 5' à la pression P_B .

De plus, afin de tenir compte du transfert thermique à travers les parois du compresseur, on modélise la compression du fluide, toujours assimilé à un gaz parfait, par une évolution polytropique, intermédiaire entre une évolution isotherme et une évolution adiabatique par une loi liant la pression et le volume de la forme :

$$PV^k = Cste$$

avec $1 < k < \gamma$. L'état du fluide à la fin de la compression est alors caractérisé par $P'_2 = P_H$ et une température T'_2 .

22. Exprimer T'_2 en fonction de P_H , P_B , T'_1 et k .
23. Établir l'équation de l'évolution polytropique dans le diagramme entropique $T(s)$. Représenter cette évolution sur un diagramme entropique. Comment se situe-t-elle par rapport à l'isentropique ?
24. Représenter le cycle réel sur le diagramme de Mollier ainsi que sur un diagramme entropique en faisant apparaître clairement les différences par rapport aux cycles tracés précédemment.
25. Quelle est la nouvelle valeur de la fraction massique de vapeur dans l'état 5', x'_5 ?
26. Estimer le nouveau rendement. Commenter.