

# DM 6

pour le jeudi 23 novembre 2023

\*\*\*

## Photoluminescence : Détection du signal (X Physique/SI 2014 extrait)

\*\*\*

La photoluminescence est l'étude de la radiation émise, en plus de l'émission thermique, par un système physique soumis à une excitation optique réalisée, par exemple, à l'aide d'un laser. On s'intéresse ici à la détection du signal.

La lumière sortant par la face avant de l'échantillon est envoyée dans un monochromateur, qui sélectionne en sortie la gamme la plus étroite possible de longueurs d'onde au voisinage d'une longueur d'onde donnée,  $\lambda$ . Cette longueur d'onde est déterminée par la position angulaire d'un système dispersif,  $\theta(t)$ , laquelle varie lentement dans le temps. Après détection, le signal est donc représenté par une tension lentement variable,  $s(t)$ , d'où l'on déduit facilement l'intensité émise à une longueur d'onde donnée,  $I(\lambda)$ . La détection directe de ce signal présente des inconvénients, aux premiers rangs desquels on peut citer le bruit et la dérive des divers appareils. Le signal doit donc être traité.

## Détection synchrone (analogique)

### Principe de la détection synchrone

La détection synchrone pallie partiellement ces problèmes. Dans cette méthode, le phénomène physique représenté par  $s(t)$  est modulé sinusoïdalement en amplitude à la pulsation  $\omega_0$  choisie de telle manière que  $s$  peut être considéré comme constant sur la durée  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ ; le signal de sortie s'exprime alors par  $S(t) = \Gamma s(t) \cos(\omega_0 t) + b(t)$ , où  $\Gamma$  est un réel positif et  $b(t)$  est un bruit. Pour extraire  $s$  de  $S$ , on produit électroniquement le produit  $P(t) = S(t) \cos(\omega_0 t - \varphi)$ , où  $\varphi$  est le déphasage accordable d'un générateur pilote. Le signal  $P$  traverse ensuite un filtre sélectif, qui donne en sortie le signal :

$$\overline{m(t, T_i)} = \int_{t-T_i}^t P(u) du$$

où  $T_i$  est le temps d'intégration du module de sortie du détecteur synchrone dont on peut voir le schéma à la figure 1.

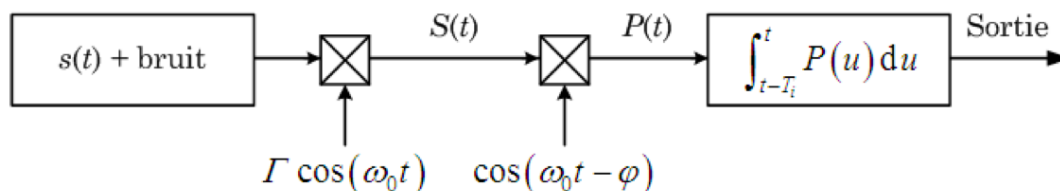


FIGURE 1 – Schématisation d'un détecteur synchrone.

- Justifier qualitativement que, dans un domaine fréquentiel donné, l'on puisse assimiler un filtre passe-bas à un intégrateur. Exprimer  $\overline{m(t, T_i)}$  sous forme de la somme de deux intégrales, l'une faisant intervenir  $s(t)$  et l'autre, notée  $B(t)$ , faisant intervenir  $b(t)$ ; on rappelle la relation  $\cos p \cos q = \frac{1}{2}[\cos(p + q) + \cos(p - q)]$ . Que peut-on dire de  $B(t, T_i)$  ?
- La figure 2 représente les spectres fréquentiels de  $s(t)$ , du bruit  $b(t)$  et de  $S(t)$ . Représenter qualitativement les spectres fréquentiels du signal après passage dans le second multiplieur puis après l'intégrateur.

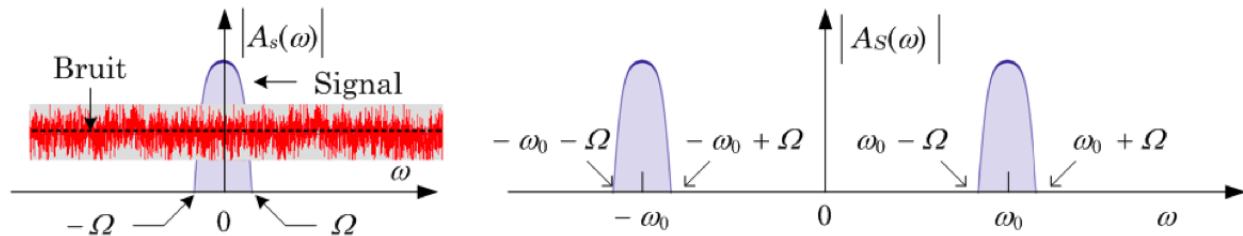


FIGURE 2 – Le spectre fréquentiel d'un signal  $u(t)$  est défini par  $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(i\omega t) dt$ . Le module du spectre de  $s$ ,  $|A_s(\omega)|$ , est représenté à gauche ; on lui a donné une forme symétrique sur la bande étroite, centrée en 0,  $[-\Omega, \Omega]$ . Le spectre du bruit est « plat ». La figure de droite représente le spectre de la partie utile de  $S(t)$  : le bruit n'y est pas représenté.

- Quel compromis réaliser sur  $T_i$  pour que  $\overline{m(t, T_i)}$  reproduise le plus fidèlement possible la forme de  $s(t)$  ? Exprimer  $\overline{m(t, T_i)}$  dans ces conditions, en fonction de  $\Gamma$ ,  $s(t)$  et  $\varphi$ , en supposant  $B(t, T_i)$  négligeable. Comment choisir  $\varphi$  ?

### Réalisation d'une détection synchrone

Pratiquement, la modulation est réalisée en utilisant un hacheur mécanique, tel que la roue ajourée représentée Figure 3, interposée entre le laser et l'échantillon.

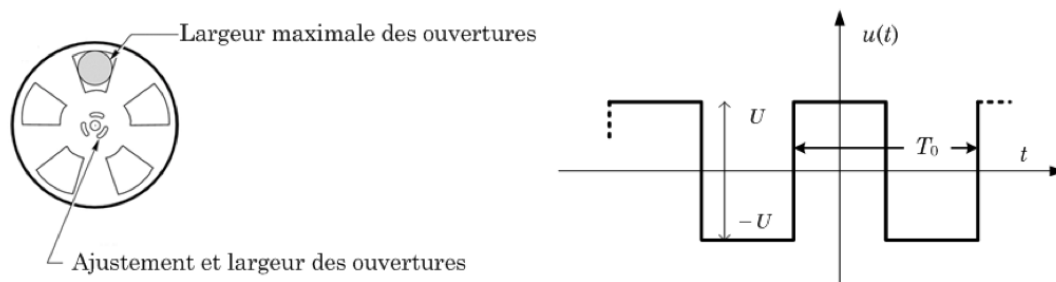


FIGURE 3 – La roue du modulateur mécanique est percée de  $p$  quadrants identiques régulièrement répartis et de largeur ajustable ; une photodiode et un photorécepteur placés de part et d'autre de cette roue produisent le signal rectangulaire de référence, symbolisé dans la partie droite de la figure. Si  $\omega_r$  est la vitesse angulaire de rotation, on note  $T_0 = \frac{2\pi}{p\omega_r} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ .

Ce dispositif permet d'obtenir électriquement le signal rectangulaire périodique  $u(t)$ , nommé *signal de référence* dont la décomposition en série de Fourier est

$$u(t) = \frac{4U}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} \cos\left(2\pi(2n + 1)\frac{t}{T_0}\right)$$

Le signal de photoluminescence  $s$ , d'amplitude positive, est ainsi haché périodiquement, avec une période  $T_0$ . On note  $S(t)$  le produit (obtenu électroniquement) du signal périodique  $u$  et du signal  $s$ , porteur de l'information à traiter. La démodulation consiste à extraire ce dernier de  $S$ .

4. Montrer que tout se passe comme si le signal  $s$  était modulé par une infinité de porteuses sinusoïdales, dont on donnera les fréquences respectives.
5. Quelle est la nature du filtre de transmittance complexe :

$$\underline{H}(jx) = A \frac{2m(jx)}{1 + (jx)^2 + 2m(jx)}$$

où  $A$  et  $m$  sont réels positifs et  $x = \omega/\omega_c$  une fréquence réduite ? Esquisser, pour  $m < 1$ , le diagramme de BODE, en amplitude et en phase, de cette transmittance.

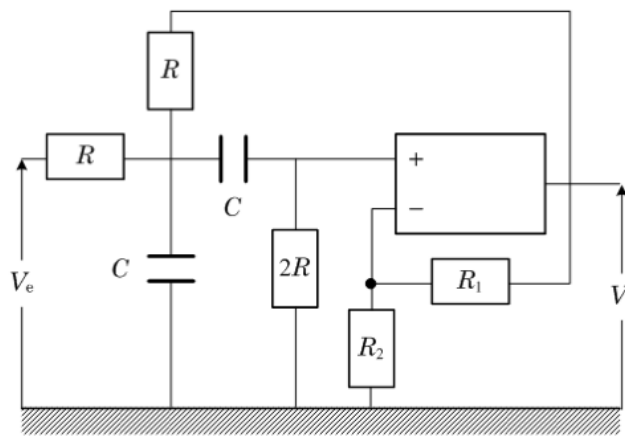


FIGURE 4 – *Filtre de Sallen-Kay*. L'AO, supposé parfait, fonctionne en régime linéaire. La transmittance est alors  $\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = K \frac{jRC\omega}{1 + (3-K)jRC\omega + (jRC\omega)^2}$ , où  $K = 1 + R_1/R_2$ .

6. La transmittance complexe du filtre de Sallen-Kay de la Figure 4 est du type de celui de la question précédente. Exprimer  $A$ ,  $Q = \frac{1}{2m}$  et  $\omega_c$  en fonction des composants  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R$  et  $C$  de ce filtre.
7. Le filtre de la Figure 4 est alimenté par le signal rectangulaire représenté dans la partie droite de la Figure 3. Comment choisir les composants pour une utilisation optimale du filtre ?

## Échantillonneur-bloqueur (numérique)

Un signal numérique est moins sensible aux perturbations qu'un signal analogique et surtout, il se prête bien plus facilement au traitement (numérique!). Pour ces raisons, on choisit de convertir le signal analogique issu du détecteur en signal numérique binaire. La chaîne de transmission des données est représentée Figure 5.

La conversion analogique numérique commence par l'échantillonnage, transformation du signal continu analogique en signal discontinu. L'élément réalisant cette transformation (Figure 9) est essentiellement un interrupteur commandé par une tension périodique  $e(t)$  de fréquence  $F_e = 1/T_e$  ( $T_e$  est la période de fermeture de l'interrupteur). La durée de fermeture est très



FIGURE 5 – Chaîne de traitement de signal. CAN = Convertisseur Analogique Numérique. La boîte Capteur analogique peut contenir des éléments de traitement analogique.

petite devant  $T_e$ .

Le signal de commande  $e(t)$  est modélisé par une suite périodique de pics d’amplitude constante et de largeur temporelle  $\varepsilon$  très petite devant  $T_e$  (voir Figure 7) ; le pic centré sur l’instant  $t = nT_e$  étant noté  $\delta(t - nT_e)$ , la tension de commande s’exprime alors par

$$e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_e)$$

8. Exprimer la tension de sortie  $v_e(t)$ .

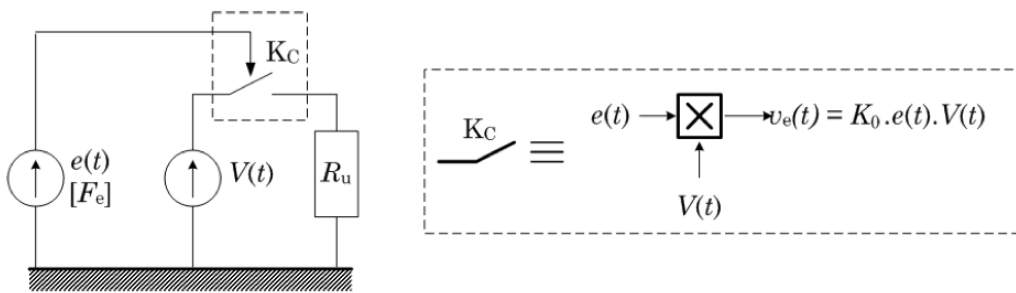


FIGURE 6 – Principe d’un échantillonneur ; le commutateur  $K_C$  est un multiplieur commandé de gain  $K_0$  entre  $e(t)$  et le signal  $V(t)$ . Le circuit d’utilisation est modélisé par la résistance  $R_u$ .

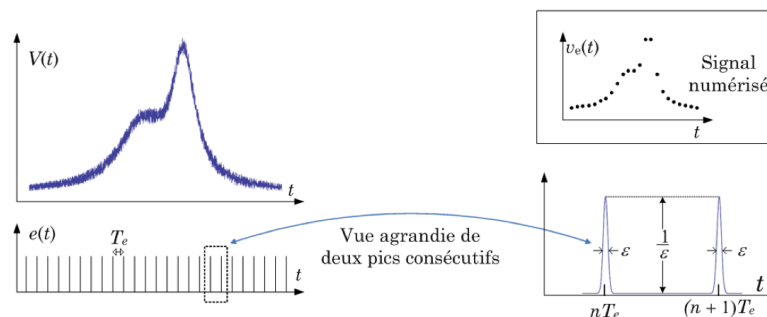


FIGURE 7 – Échantillonnage. Le cartouche en haut à droite donne l’allure de  $v_e(t)$ , tension aux bornes de  $R_u$  ; l’allure de la courbe originale est préservée, mais le pointé du sommet est imprécis.

Le convertisseur analogique numérique doit conserver (bloquer) la valeur à convertir pendant le temps nécessaire à cette conversion. On transforme pour cela le circuit de la Figure 6 en circuit

de mémorisation formant ainsi un échantillonneur bloqueur. Le schéma électrique de principe du dispositif est représenté dans la partie gauche de la Figure 8.

9. En position fermée, la résistance de sortie du générateur fournissant la tension  $V(t)$  (à laquelle s'ajoute celle de l'interrupteur de commande) est assimilable à une résistance de valeur  $R_s$ . Donner l'expression du temps au bout duquel la tension aux bornes du condensateur atteint 95% de sa valeur limite, supposée constante pendant la charge.
10. Que se passe-t-il lorsque l'interrupteur  $K$  bascule en position ouverte ?
11. Quel est l'intérêt d'intercaler entre la charge  $R_u$  et l'échantillonneur bloqueur un étage à Amplificateur Opérationnel (AO), tel que représenté dans la partie droite de la Figure 8 ?
12. Représenter l'allure du signal obtenu à la sortie de l'échantillonneur bloqueur. On notera  $t_a$  le temps d'acquisition et  $t_h$  le temps de maintien de la charge du condensateur.



FIGURE 8 – À gauche : échantillonneur bloqueur ; la résistance  $R_u$  modélise le circuit d'utilisation. À droite : échantillonneur bloqueur avec AO parfait. La résistance  $R$  représente l'ensemble des résistances en amont, lorsque l'interrupteur est fermé.

## Restitution du signal après traitement

On suppose à présent disposer du signal traité numériquement, que l'on veut remettre sous forme analogique. Le Convertisseur Numérique Analogique (CNA) réalise cette opération. Le principe d'un CNA est représenté Figure 9.

13. Quelle est la résistance de l'ensemble du circuit à la droite du point  $A_1$  de la figure 9 ?
14. En déduire que le courant immédiatement à droite de ce point est égal au  $i_1$  de la figure 9.
15. Toujours avec les notations de la figure 9, montrer que

$$i_s = \frac{V_{ref}}{2R} \left( \frac{e_0}{2^0} + \frac{e_1}{2^1} + \dots + \frac{e_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{e_n}{2^n} + \dots \right)$$

16. Quel est, écrit en base 2, le nombre représenté en base 10 dans la relation établie à la question précédente ?
17. Quelle doit-être la valeur minimale de  $n$  si l'on veut obtenir au moins 250 valeurs différentes de la tension de sortie ?
18. Le signal analogique de sortie reste, en réalité, quantifié (Figure 10). Par quel genre de traitement électronique pourrait-on, à partir de ce signal constant par morceaux, obtenir une courbe continûment dérivable ?

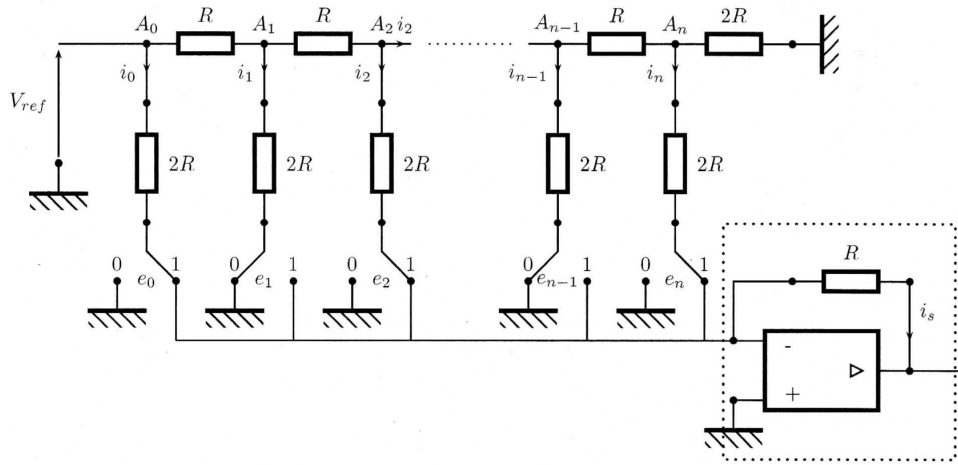


FIGURE 9 – Un CNA dit à échelle comprend autant de sources qu’il y a de bits dans le signal numérique ; par convention, l’état de fermeture d’une commutateur correspond à la valeur binaire  $e_k = 1$  et l’état d’ouverture (borne reliée à la masse) à la valeur  $e_k = 0$ . Le circuit à AO dans le cadre en pointillés fournit en sortie la grandeur analogique étudiée.

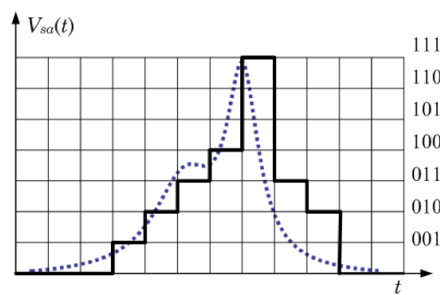


FIGURE 10 – Un exemple de conversion pour  $n = 3$  du spectre de la Figure 7. On obtient en sortie le signal constant par morceaux représenté en trait gras. Cette discrétisation est caricaturalement fruste : on perd a priori la structure à deux bosses de l’original, représenté en pointillés.

## Quelques aspects pratiques

### Bruit de quantification

La *quantification linéaire par défaut* réalise la codification du signal  $e(t) \in [nq; (n+1)q] \mapsto nq$ . La quantité  $\epsilon = e(t) - nq$  est supposée être uniformément répartie entre 0 et  $q$  :  $0 \leq \epsilon < q$ . Tout se passe donc comme si l'on substituait au signal  $e$  le signal  $nq + \epsilon$ , somme du signal déterministe  $nq$  et d'un signal aléatoire, d'où le nom de *bruit de quantification* donné à  $\epsilon$ . La valeur moyenne d'une fonction  $F(\epsilon)$  est par définition ici

$$\bar{F} = \frac{1}{q} \int_0^q F(\epsilon) d\epsilon$$

L'écart type  $\sigma$  est donné par

$$\sigma^2 = \overline{(F - \bar{F})^2}$$

19. Après avoir vérifié le résultat évident  $\bar{\epsilon} = q/2$ , calculer l'écart-type de  $\epsilon$ .
20. Dans la *quantification linéaire centrée*, on codifie par  $e(t) \in [(2n-1)q/2; (2n+1)q/2] \mapsto nq$ ; le bruit de quantification est uniformément réparti entre  $-q/2$  et  $q/2$ . Calculer la valeur moyenne et l'écart type du bruit de quantification.
21. Lequel de ces deux modes de quantification vous apparaît-il plus avantageux que l'autre ?

### Bruits d'origine physique

Il ne saurait y avoir de signal sans fluctuations aléatoires, que l'on nomme *bruit*. La valeur moyenne de ce bruit est nulle ; son écart type ne l'est pas. Un filtre passe-bas (ou un passe-bande) a pour effet de couper les hautes fréquences, éliminant une partie du bruit et diminuant sa valeur efficace. Il est donc nécessaire d'indiquer la bande passante d'analyse du signal. Un concept utile de ce point de vue est la *bande passante équivalente*,  $B_{eq}$ , d'un filtre de transmittance  $\underline{H}(j\omega)$  :

$$B_{eq} = \frac{1}{2\pi |\underline{H}_M|^2} \int_0^\infty |\underline{H}(j\omega)|^2 d\omega$$

où  $|\underline{H}_M|$  est le maximum de  $|\underline{H}|$  ; voir Figure 11

22. Interpréter le sens physique de  $B_{eq}$ .
23. Calculer  $B_{eq}$  pour  $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$ .
24. Sachant que

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1-x^2)^2 + 4m^2x^2} dx = \frac{\pi}{4m}$$

calculer  $B_{eq}$  pour le filtre de Sallen-Kay de la question 5. Pour  $m \ll 1$ , comparer  $B_{eq}$  à la largeur à mi hauteur de ce filtre.

Le détecteur de lumière est un photomultiplicateur (Figure 12) dont la surface sensible (cathode), lorsqu'elle est éclairée, libère des électrons ; ces électrons, constituant un courant, (valeur typique pour un signal de photoluminescence :  $i_K \approx 10^{-12}$  A) sont focalisés par un dispositif d'optique électronique sur des plaques multiplicatrices d'électrons (dynodes) : le gain  $G$  de la chaîne est de l'ordre de  $10^6$ , de sorte que le courant de signal au niveau de l'anode ( $i_A = Gi_K \approx 10^{-6}$  A) est finalement recueilli sur une résistance de charge ( $R_a \approx 10^3 \Omega$ ). La tension aux bornes de cette résistance est ainsi  $\approx 1$  mV.

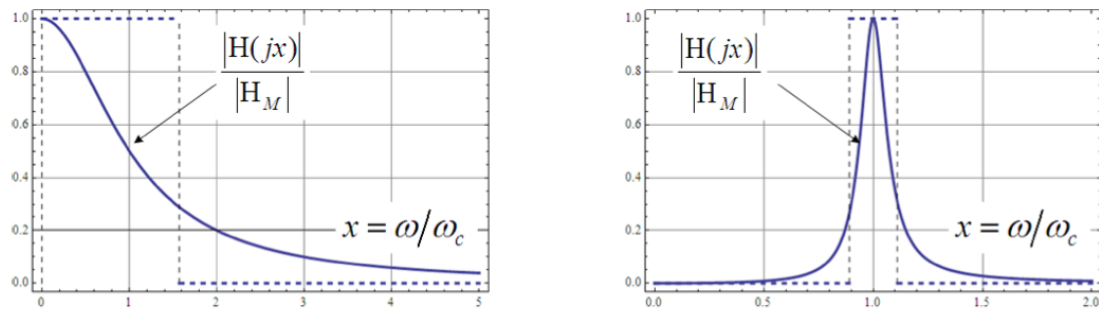


FIGURE 11 – Bandes passantes équivalentes : à gauche d'un filtre passe bas, à droite d'un filtre passe bande. Les graduations des axes sont linéaires.

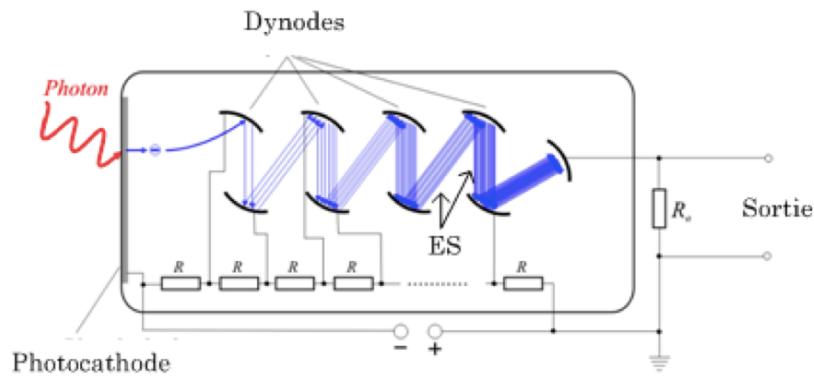


FIGURE 12 – Photomultiplicateur. Un photoélectron arraché de la cathode photosensible est démultiplié par une batterie de dynodes polarisées. La résistance de charge  $R_a$  recueille le courant anodique d'électrons secondaires (ES). Source : [wikimedia.org/wiki/File :Photomultiplier schema de.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Photomultiplier_schema_de.png).



En réalité, s'ajoutent à cette dernière tension un certain nombre de signaux de bruit, parmi lesquels : d'une part un bruit dit de scintillation,  $i_{sc}$ , qui existe en l'absence de signal et qui est dû à des émissions d'électrons « dans le noir » :

$$i_{sc} = G(2ei_d B_{eq})^{1/2}$$

où  $e$  est la charge élémentaire et  $i_d \approx 10^{-15}$  A, d'autre part une tension aléatoire aux bornes de la résistance de charge,  $V_J = (4k_B T B_{eq} R_a)^{1/2}$  (bruit de Johnson).

25. Vérifier l'homogénéité des relations de définition de  $i_{sc}$  et de  $V_J$ .
26. Le courant associé au bruit de Johnson étant  $i_J = \left(\frac{4k_B T B_{eq}}{R_a}\right)^{1/2}$ , comparer  $i_{sc}$  et  $i_J$  à la température ambiante.
27. Au signal de photocathode  $i_K$  est associé le bruit  $i_b = G(2ei_K B_{eq})^{1/2}$ . Calculer le rapport signal sur bruit défini par  $\frac{Signal}{Bruit} = \frac{i_K}{(i_b^2 + i_J^2 + i_{sc}^2)^{1/2}}$  et commenter le résultat obtenu, en se donnant une valeur raisonnable de  $B_{eq}$ .