

DS 3

Le jeudi 23 novembre 2023

Problème 1 : Bilan thermique dans une lampe à incandescence



Problème 2 : jean PERRIN et l'hypothèse atomique

* * *

Problème 2 : Bilan thermique dans une lampe à incandescence

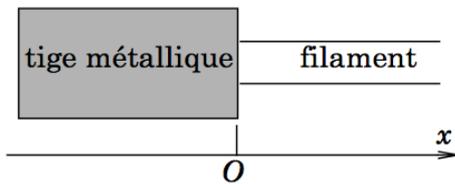
* * *

On s'intéresse dans ce problème à la température dans le filament de tungstène d'une lampe à incandescence. Il est modélisé par un cylindre de rayon $r = 0,03$ mm et de longueur $L = 4$ cm. On supposera que la résistivité ρ du tungstène ne dépend pas de la température. Le filament est parcouru par un courant d'intensité I . Sa température normale de fonctionnement est $T_0 = 2600$ K.

On admettra que les transferts thermiques par rayonnement sont donnés par la loi de Stefan, relative ici à un corps gris : la puissance surfacique émise par le filament à une température T est :

$$\varphi = \sigma_1 T^4$$

où $\sigma_1 = 10^{-8}$ W.m⁻².K⁻⁴.

I.C - Evolution de la température au voisinage des points de fixation

Comme il est indiqué sur le schéma ci-contre, le filament est fixé à chacune de ces extrémités à une tige métallique de diamètre voisin de 0,5 mm.

I.C.1) Justifier qualitativement que la température de chaque tige-support, égale à la température mesurée au niveau de la douille de l'ampoule, est pratiquement uniforme. Dans la suite, on note $T_V = 420$ K cette température, valeur conforme à la spécification CEE 25 relative aux luminaires équipés de lampes à incandescence. Dans la partie du filament située au voisinage du support, la température passe progressivement de T_V à T_0 sur une distance d que l'on cherche à évaluer. On repère un point du filament, supposé cylindrique par son abscisse x comptée à partir du point de fixation. On a donc $T_{(x=0)} = T_V$. On néglige les échanges thermiques par convection mais on tient compte du phénomène de conduction thermique le long du filament en plus des transferts par rayonnement. Cette conduction thermique est supposée suivre la loi de Fourier. On se place en régime permanent et on suppose, vue la faible valeur du diamètre du filament que la température $T(x)$ est uniforme dans une section droite. De plus, on considère que, pour x suffisamment grand, la température du filament atteint la température d'équilibre T_0 .

I.C.2) En faisant un bilan énergétique pour une portion de filament comprise entre x et $x + dx$, établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$. On fera intervenir r , ρ , σ_1 , I et la conductivité thermique λ du tungstène. Comme on ne cherche qu'un ordre de grandeur pour la distance d , on peut supposer que λ et ρ sont indépendants de T .

I.C.3) En faisant apparaître la température d'équilibre T_0 du filament, mettre l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{(T^4 - T_0^4)}{\delta^2 T_0^3} = 0 \text{ où } \delta \text{ est homogène à une distance.}$$

Donner l'expression littérale de δ en fonction de T_0 , r , λ et σ_1 .

Application numérique : Calculer δ sachant que $\lambda = 92 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

I.C.4) Déterminer une expression approchée de la pente à l'origine

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \text{ sous la forme } \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \gamma \frac{T_0}{\delta}.$$

Indiquer la valeur numérique de γ et estimer la distance caractéristique d sur laquelle le filament monte en température.

I.C.5) On note P_{ther} la puissance thermique cédée par le filament à la tige-support au niveau de la section droite $x = 0$ et P_r la puissance rayonnée par le filament. Exprimer le rapport P_{ther}/P_r en fonction de δ , L et γ . Calculer pour l'ampoule étudiée ci-dessus, la valeur numérique de ce rapport, dans les conditions normales de fonctionnement. Commenter ce résultat.

I.C.6) Montrer que les pertes thermiques par conduction diminuent en valeur relative si on augmente la puissance à température et rayon du filament fixés.

Partie II - Lampe à incandescence en régime sinusoïdal forcé basse fréquence

II.A - Étude théorique de l'évolution périodique de la température

En dépit de l'inertie thermique du filament, lorsqu'on alimente une ampoule à incandescence avec une tension périodique $u_a(t)$ de période τ , la température du filament devient une fonction périodique du temps notée $T(t)$. On note m la masse du filament et c_p la capacité thermique massique du tungstène. Afin de proposer un modèle des phénomènes physiques observés, on retient les hypothèses simplificatrices suivantes :

- a) Le filament absorbe l'énergie électrique et rayonne comme un corps gris suivant la loi de Stefan. (On rappelle qu'il suffit de remplacer σ par σ_1 dans la loi de Stefan.)
- b) On néglige les phénomènes convecto-diffusifs et le rayonnement du verre de l'ampoule.
- c) La température $T(t)$, supposée uniforme dans tout le filament varie autour d'une valeur moyenne T_0 . On note $\theta(t)$ l'écart en température : $T(t) = T_0 + \theta(t)$ avec $|\theta(t)| \ll T_0$.
- d) On néglige les variations de résistance du filament avec la température : $R(T) \approx R(T_0) = R_0$.
- e) La capacité thermique massique c_p du tungstène est constante dans le domaine de variation de température considéré.
- f) La tension $u_a(t)$ varie suffisamment lentement pour que l'auto-inductance du filament puisse être négligée.

II.A.1) Équation d'évolution de la température

a) On suppose que la pression à l'intérieur de l'ampoule reste constante. Exprimer la variation d'enthalpie dH du filament lorsque la température varie de T à $T + dT$.

b) En effectuant un bilan énergétique simple, établir l'équation différentielle reliant $T(t)$ à $P_e(t)$, puissance électrique instantanée reçue par le filament. En déduire celle reliant $\theta(t)$ à $u_a(t)$. On fera apparaître dans cette dernière équation les grandeurs m , c_p , T_0 , σ_1 , L , r et R_0 .

II.A.2) Que vaut, par définition de T_0 , la valeur moyenne

$$\langle \theta(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \theta(t) dt .$$

Déduire de l'équation différentielle établie à la question précédente, la valeur de T_0 en fonction des constantes du problème et de la valeur efficace de $u_a(t)$ notée u_{aRMS} et donnée par la relation

$$u_{aRMS}^2 = \langle u_a^2(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} u_a^2(t) dt$$

II.A.3) On étudie maintenant le cas où le filament est alimenté par une tension sinusoïdale $u_a(t) = U_a \sqrt{2} \cos \frac{\omega}{2} t$. On suppose alors, que la température $T(t) = T_0 + \theta(t)$ varie sinusoïdalement autour de T_0 avec $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$ et $\theta_m \ll T_0$.

a) Exprimer la puissance électrique $P_e(t)$ fournie au filament en fonction de U_a , R_0 , ω et t .

b) Justifier la fréquence proposée pour l'expression de $\theta(t)$.

c) On pose $\theta(t) = \text{Re}(\underline{\theta} \exp(i\omega t))$. Montrer que la représentation complexe de l'écart en température est donnée par la relation

$$\underline{\theta} = \frac{\theta_0}{1 + i \frac{\omega}{\omega_C}} \text{ où } \theta_0 \text{ s'exprime de façon simple en fonction de } T_0.$$

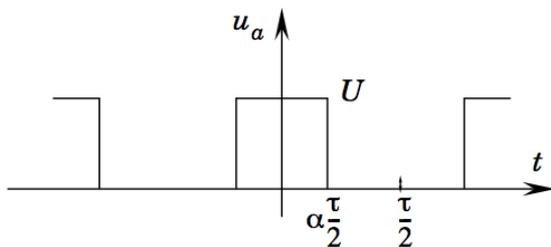
d) Quelle est la nature du filtre que constitue le filament, en considérant $\theta(t)$ comme grandeur de sortie et la composante sinusoïdale de $P_e(t)$ comme grandeur d'entrée ? Donner l'expression de ω_C en faisant intervenir la masse volumique μ du tungstène. Vérifier que ω_C est indépendante de la longueur du filament. Dans quel domaine de fréquence a-t-on $\theta_m < T_0/10$?

e) Application numérique : $c_p = 0,16 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\mu = 19 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Calculer la fréquence de coupure ν_C définie par $\omega_C = 2\pi\nu_C$.

II.B - Modulation de l'intensité lumineuse par largeur d'impulsion

On alimente la lampe avec une tension rectangulaire $u_a(t)$ périodique, représentée ci-dessous et définie sur une période τ par :

$$u_a(t) = U \text{ pour } |t| \leq \frac{\alpha\tau}{2} \text{ et } u_a(t) = 0 \text{ pour } \frac{\alpha\tau}{2} < |t| \leq \frac{\tau}{2}.$$



On agit sur l'intensité lumineuse émise par le filament, en modifiant le rapport cyclique α (compris entre 0 et 1).

II.B.1) Justifier qualitativement qu'une variation de α permet de faire varier l'intensité lumineuse émise par le filament.

II.B.2) On cherche la décomposition en série de Fourier de la tension $u_a(t)$ sous la forme

$$u_a(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Que vaut a_0 ?

Justifier que les b_n sont tous nuls.

On admet que les coefficients de Fourier a_n sont donnés par

$$a_n = \frac{2U}{n\pi} \sin(n\alpha\pi)$$

Représenter le spectre de ce signal rectangulaire dans le cas $\alpha = 1/3$.

II.B.3) Dédurre de la question précédente, la décomposition en série de Fourier de la puissance électrique instantanée reçue par le filament sous la forme :

$$P_e(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \cos(n\omega t) . \text{ En notant } \underline{P}(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n e^{in\omega t} ,$$

on peut encore écrire $P_e(t) = \text{Re}(\underline{P}(t))$.

II.B.4) L'écart en température $\theta(t)$ étant une fonction τ périodique de valeur moyenne nulle, on peut l'écrire

$$\theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n) .$$

On note $\theta_n = c_n e^{i\varphi_n}$ et on définit $\underline{\theta}(t)$, représentation complexe de la décomposition en série de Fourier de $\theta(t)$, par la relation

$$\underline{\theta}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n e^{in\omega t} .$$

On a bien sûr, la relation $\theta(t) = \text{Re}(\underline{\theta}(t))$. Exprimer les coefficients θ_n à l'aide des coefficients P_n , puis en fonction de T_0 , ω_C , n , ω et α . Simplifier cette relation dans le cas où $\omega \gg \omega_C$.

II.B.5) Afin de caractériser l'écart en température, on introduit sa valeur quadratique moyenne définie par

$$\theta_{RMS}^2 = \langle \theta^2(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \theta^2(t) dt .$$

Exprimer θ_{RMS} en fonction des coefficients θ_n , en déduire le taux d'ondulation de la température du filament défini par

$$\delta_0 = \frac{\theta_{RMS}}{T_0} .$$

Quelle est la limite de δ_0 lorsque la période τ de la tension d'alimentation diminue ?

II.C - Vérification expérimentale

Afin de confronter l'expérience avec le modèle développé plus haut, on utilise un capteur optique, constitué d'une photodiode et d'un système électronique, délivrant une tension de sortie qui est l'image de la puissance lumineuse absorbée par la photodiode. On place la photodiode de surface S à une distance D du filament. La taille de la photodiode est telle que $S \ll D^2$ et la distance D est grande devant la longueur L du filament. Ce capteur optique est rapide, mais il présente néanmoins le défaut de n'être sensible que dans un domaine relativement restreint de longueur d'onde ($0,45 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 1,1 \mu\text{m}$). Les données techniques fournies par le constructeur de la photodiode permettent d'établir que dans le domaine d'utilisation décrit ci-dessus, la tension de sortie u_S du capteur est reliée à la température T du filament par la relation

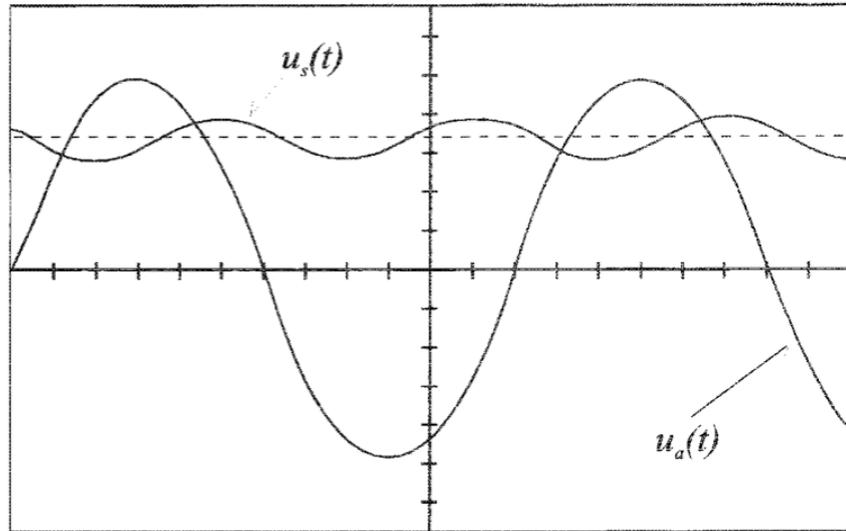
$$u_S = KT^{7,5}, \text{ expression dans laquelle } K \text{ est une constante.}$$

II.C.1) Réponse en fréquence du filament

- a) À température du filament donnée et à D fixé, comment faut-il placer la photodiode pour avoir une réponse u_S maximale ?
- b) En faisant abstraction du verre, exprimer la puissance lumineuse incidente sur la photodiode en fonction de la puissance électrique P_e absorbée par l'ampoule, de D et de S .
- c) Justifier brièvement pourquoi la réponse du capteur n'est pas $u_S = KT^4$.
- d) Pour étudier les oscillations de température du filament, on alimente une ampoule ($6\text{V} ; 0,55\text{A}$) par un générateur de tension sinusoïdale de fréquence f et de valeur efficace U_a . La photodiode est disposée près de l'ampoule dans une position fixe. La réponse de l'association photodiode-système électronique est visualisée sur un oscilloscope en même temps que la tension du générateur pour une fréquence de 20Hz . Les deux voies de l'oscilloscope sont en mode DC . La valeur moyenne de la tension $u_S(t)$ vaut $7,1\text{V}$, tandis que la valeur efficace de

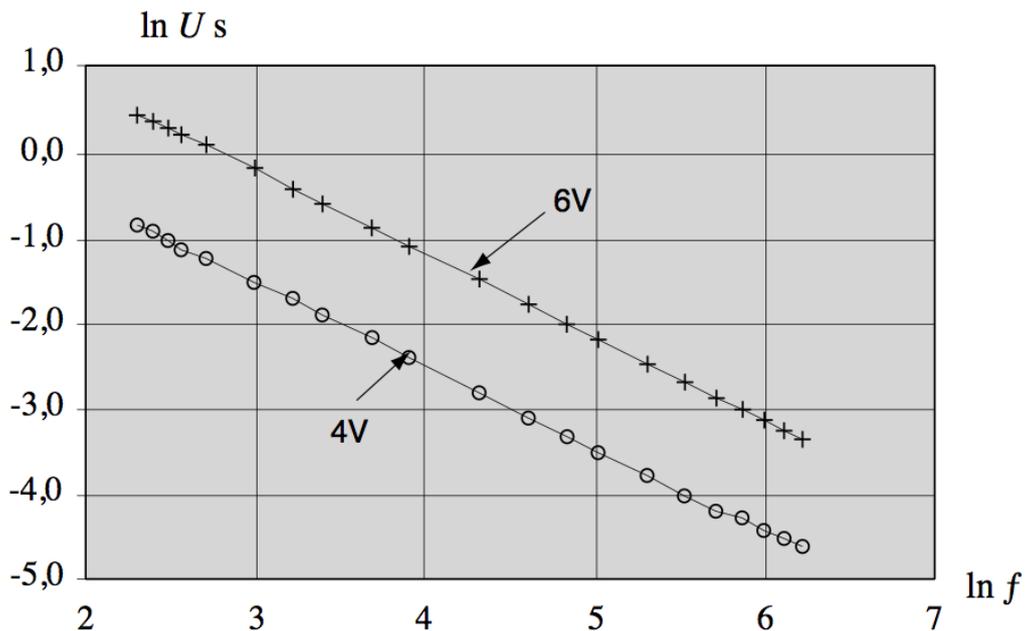
sa composante alternative est égale à 0,84 V . À l'aide des valeurs expérimentales déterminer l'amplitude θ_m des oscillations de température, sachant que la température moyenne vaut $T_0 = 2600\text{K}$. Comparer cette valeur de θ_m à celle prévue par les résultats de la question II.A.3). Commenter cette comparaison.

II.C.2) Le graphique ci-dessous représente, pour deux valeurs de la tension d'alimentation ($U_a = 4\text{V}$ et $U_a = 6\text{V}$), le logarithme népérien du nombre donnant la valeur efficace en Volts de la composante alternative de u_S , en fonction du logarithme



népérien du nombre donnant la fréquence f en Hertz. Montrer que les pentes de ces courbes sont en accord avec l'expression de θ établie en II.A.3-c).

II.C.3) Pourquoi observe-t-on un décalage de l'ordonnée à l'origine ? Relier ce décalage aux deux températures moyennes du filament.



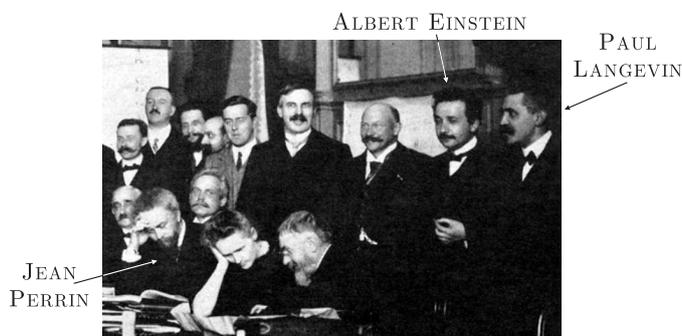
JEAN PERRIN et l'hypothèse atomique

Les études théoriques sur le mouvement brownien, proposées par ALBERT EINSTEIN en 1905 et complétées par celles de PAUL LANGEVIN en 1908, ont été spectaculairement confirmées par une série d'une dizaine d'expériences réalisées entre 1907 et 1909 par JEAN PERRIN dont nous fêtons le 150^e anniversaire de naissance. Ces études sont les piliers de l'acceptation de l'existence des atomes par la communauté scientifique. Elles ont clos la « controverse atomiste » ouverte par les Grecs 6 siècles avant notre ère !

Après avoir pris connaissance des résultats de PERRIN, en 1908, l'un des derniers farouches anti-atomistes, WILHELM OSTWALD, déclare « *Je suis désormais convaincu que nous sommes entrés en possession de preuves expérimentales du caractère discret ou granulaire de la nature, que l'hypothèse atomique avait cherchées en vain depuis des millénaires* ».

Les expériences de PERRIN et le modèle de LANGEVIN reposent entièrement sur les modèles microscopiques de LUDWIG BOLTZMANN, fondateur dans la seconde moitié du XIX^e siècle de la physique statistique. Les travaux expérimentaux de PERRIN lui permirent notamment de mesurer la constante de BOLTZMANN k_B . En 1906, donc peu de temps avant la publication de ces travaux, BOLTZMANN se suicida, las des critiques et des attaques des disciples d'OSTWALD...

En 1926, PERRIN obtint le prix NOBEL pour ses expériences !



Dans ce sujet, nous proposons de revenir sur quelques points de ce moment fameux de l'histoire de la physique en étudiant quelques aspects de la théorie de LANGEVIN et de certaines des expériences réalisées par PERRIN. Sur la photo ci-contre, prise lors du Congrès SOLVAY de 1911, on retrouve les trois acteurs de cette histoire, entourés de prestigieux collègues. Pour réaliser ses expériences, JEAN PERRIN utilise des grains de gomme-gutte. Écou-

tons le décrire son procédé d'obtention de ses grains : « *La gomme-gutte, qu'on utilise pour l'aquarelle, provient de la dessiccation du latex. Un morceau de cette substance, frotté avec la main sous un mince filet d'eau distillée se dissout peu à peu en donnant une belle émulsion opaque d'un jaune vif, où le microscope révèle un fourmillement de grains jaunes de diverses tailles parfaitement sphériques. On peut calibrer ces grains jaunes et les séparer du liquide où ils baignent par une centrifugation énergique.* »

Dans tout ce problème, ces grains seront donc supposés identiques, de forme sphérique, de rayon $R_b = 0,2 \mu\text{m}$, de volume $V_b = 3,4 \times 10^{-20} \text{m}^3$ et de masse volumique $\mu_b = 1,2 \times 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On note $m_b = 4,1 \times 10^{-17} \text{kg}$ la masse d'un grain. Dans ses expériences, JEAN PERRIN fabrique une émulsion en introduisant ces grains dans de l'eau légèrement sucrée. Ce liquide possède une masse volumique assimilable à celle de l'eau pure $\mu_e = 1,0 \times 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Le peu de sucre dissous dans l'eau lui confère tout de même un caractère visqueux. De ce fait, l'eau exerce sur les grains en mouvement lent deux forces :

- la résultante des forces de pression, peu modifiée par rapport à une situation d'équilibre, est donnée par la loi d'ARCHIMÈDE : cette force $\vec{\Pi} = -\mu_e V_b \vec{g}$ est exactement opposée au poids du liquide déplacé par chaque grain ;
- la résultante des forces de frottement visqueux se traduit par une force $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ où $\alpha > 0$ et \vec{v} désigne la vitesse des grains. La formule de STOKES précise que, pour un grain sphérique, $\alpha = 6\pi\eta R_b$ dans laquelle $\eta = 1,2 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$ représente le coefficient de viscosité dynamique de l'eau légèrement sucrée. Avec ces valeurs numériques, on trouve ici $\alpha = 4,5 \times 10^{-9} \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

En dehors de ces données, aucune connaissance relative à la viscosité n'est nécessaire à cette étude.

Ce problème est décomposé en 4 parties relativement indépendantes : la partie **I** est consacrée au modèle du gaz parfait ; la partie **II** est dédiée aux expériences de sédimentation pratiquées sur les émulsions ; la partie **III** présente le modèle théorique du mouvement brownien de LANGEVIN complété par les expériences de diffusion de PERRIN ; la partie **IV** étudie les moyens optiques mis en œuvre par JEAN PERRIN pour réaliser ses mesures.

Dans ce qui suit on utilisera la fonction $A(z) = \exp(-z/H)$. Les vecteurs sont surmontés d'une flèche \vec{f} , sauf s'ils sont unitaires et sont alors repérés par un chapeau ($\|\hat{e}_x\| = 1$). Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. La valeur moyenne temporelle d'une fonction $\varphi(t)$ sera notée $\langle \varphi \rangle$. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. **Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte.**

I Équilibre vertical d'un gaz à la température ambiante

On considère un gaz parfait constitué de molécules identiques, de masse molaire $M = 30 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, en équilibre thermique à la température ambiante T_0 . Le gaz, soumis à la pesanteur, est au repos dans un récipient de volume V , de hauteur h de l'ordre de quelques mètres, et de section $S = 1 \text{ m}^2$. L'encombrement caractéristique d'une molécule constituant ce gaz est une sphère de rayon R_m de l'ordre de la centaine de picomètres.

On rappelle les valeurs de l'accélération de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, de la constante de BOLTZMANN, $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, de la constante d'AVOGADRO, $N_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ et éventuellement de leur produit $R = k_B N_A = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- – 1. En précisant les valeurs choisies de température T_0 et de pression (supposée provisoirement uniforme) P_0 , estimer le volume molaire du gaz. En déduire une estimation du rapport entre le volume occupé par l'ensemble des sphères associé aux molécules et le volume du récipient.
- – 2. Rappeler la définition d'un gaz parfait. Les ordres de grandeur établis à la question précédente justifient-ils d'adopter ce modèle dans la suite ?
- – 3. Donner l'expression de l'énergie cinétique E_{cm} et de l'énergie potentielle E_{pm} d'une particule de masse m_m de ce gaz. Pourquoi observe-t-on qu'à température ambiante ces molécules ne se regroupent pas au fond du récipient ?

La loi de la statique des fluides montre que, sous l'action de la pesanteur, la pression $P(z)$ n'est pas uniforme verticalement et dépend de l'altitude z .

- – 4. En déduire que la masse volumique ρ du gaz dépend aussi de z et l'exprimer en fonction de $P(z)$. Ecrire la condition d'équilibre mécanique pour une tranche de gaz comprise entre les altitudes z et $z + dz$ pour laquelle on supposera l'équilibre thermodynamique local réalisé. En déduire une équation différentielle vérifiée par $P(z)$.
- – 5. En notant $P_0 = P(z = 0)$, montrer que $\frac{P(z)}{P_0}$ s'exprime simplement grâce à la fonction $A(z)$. Exprimer la distance caractéristique H en fonction de k_B , g , T_0 et m_m . Calculer la valeur numérique de H . La variation de pression est-elle détectable, avec un manomètre usuel, dans le récipient considéré ? En serait-il de même si le récipient était rempli d'eau liquide ?
- – 6. Préciser la fonction $E(z)$ telle que $A(z) = \exp\left[-\frac{E(z)}{k_B T_0}\right]$. Que représente la fonction $E(z)$? Interpréter physiquement cette expression dont la généralisation est due à BOLTZMANN.
- – 7. Montrer que la concentration $c_g(z)$ du gaz, rapport du nombre de moles sur le volume, suit une loi du même type, et qu'on peut écrire $c_g(z) = c_{g_0} A(z)$, où c_{g_0} représente la concentration au niveau du sol ($z = 0$) dont on précisera l'expression.

II Étude d'un équilibre de sédimentation

Dans une première expérience, JEAN PERRIN lâche, sans vitesse initiale, à la surface d'un récipient, un grand nombre ($N = 13000$) de grains dans de l'eau légèrement sucrée. Le récipient a une section S et une hauteur h_1 suffisante pour être considérée comme infinie.

- – 8. Faire le bilan des forces exercées sur un des grains lors de sa chute dans l'eau sucrée.

- – 9. On note $\vec{v}(t) = -v(t)\hat{e}_z$ la vitesse de chute du grain, \hat{e}_z étant l'axe vertical ascendant, et $v(t) > 0$. Établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ puis donner sa solution.

Montrer qu'une fois le régime permanent établi, les grains possèdent une vitesse limite $v_\ell = m^*g/\alpha$.

Exprimer le paramètre m^* en fonction de V_b et des masses volumiques μ_b et μ_e . Justifier qu'on nomme cette quantité « masse apparente ».

Exprimer la durée caractéristique τ du régime transitoire en fonction de m_b et α . Evaluer un ordre de grandeur de v_ℓ et de τ .

Même au bout d'une longue durée, les grains ne se tassent pas au fond du récipient. On observe un phénomène de sédimentation : les grains se répartissent sur l'ensemble de la hauteur et la densité de grains, notée $c(z)$ et exprimée en m^{-3} , n'est pas uniforme.

Afin d'interpréter ce phénomène, on introduit deux vecteurs, appelés « densité de flux de particules » et qui s'expriment dans les mêmes unités mais par des lois distinctes :

- Un premier vecteur densité de flux, \vec{j}_c , est associé au mouvement de chute des grains. Il est à l'origine d'un phénomène de convection et défini par la relation $\vec{j}_c(z) = -c(z)v_\ell\hat{e}_z$;
- Un deuxième vecteur densité de flux est associé au gradient de densité, ici sur l'axe z . L'inhomogénéité crée un courant de particules dont l'expression est donnée par la loi de FICK qui s'écrit ici $\vec{j}_n(z) = -\frac{dc}{dz}D\hat{e}_z$. Le coefficient D se nomme coefficient de diffusion. Il dépend de la nature du milieu et des particules étudiées. Aucune connaissance relative à la loi de FICK n'est nécessaire à l'étude du problème.

- – 10. Donner les unités (ou dimensions) communes aux vecteurs \vec{j}_c et \vec{j}_n , ainsi que l'unité de D . À l'état d'équilibre macroscopique, caractérisé par une température uniforme T_0 et une répartition de concentration $c(z)$ indépendante du temps, quelle est la relation entre \vec{j}_c et \vec{j}_n ? En déduire une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $c(z)$.

En posant $c(z = 0) = c_0$, exprimer $c(z)$ en fonction de $A(z)$, on déterminera la distance caractéristique H_b apparaissant dans $A(z)$ en fonction de R_b , D , η , m^* , et g .

- – 11. Compte tenu des forces conservatives s'exerçant sur un grain, quelle est l'expression de l'énergie potentielle $E_p^*(z)$ correspondant au poids de la masse apparente m^* du grain à l'altitude z ? En déduire l'expression de D en fonction de k_B , T_0 , η et R_b permettant d'écrire $A(z) = \exp\left[-\frac{E_p^*(z)}{k_B T_0}\right]$.

- – 12. Sachant que le nombre N de grains est conservé sur la hauteur h_1 du récipient, suffisamment grande pour être supposée infinie, exprimer la concentration c_0 en fonction de N , de la section S , et de la distance caractéristique H_b .

Une fois la température de l'émulsion stabilisée à une valeur uniforme $T_0 = 20^\circ\text{C}$, JEAN PERRIN a compté le nombre moyen $n(z)$ de grains dans des petites tranches régulièrement réparties en hauteur et d'épaisseur e constante. Il publie les résultats que nous avons synthétisés sur la figure 1 (Annales de Chimie et de Physique, Mouvement brownien et réalité moléculaire, 8^e série, sept. 1909).

- – 13. En exprimant $c(z)$ en fonction de $n(z)$, déduire de ces données une estimation de la hauteur caractéristique H_b associée ici au phénomène. La hauteur du récipient utilisé par JEAN PERRIN, $h_1 = 100\ \mu\text{m}$, était-elle suffisante au regard des hypothèses faites ici ?

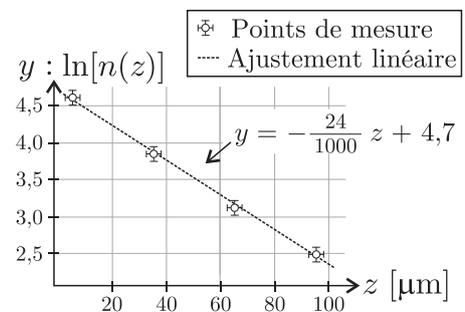


FIGURE 1 – Sédimentation de grains

- – 14. Estimer la valeur de k_B qu'a pu déduire JEAN PERRIN de cette expérience. Identifier des causes d'erreurs expérimentales.