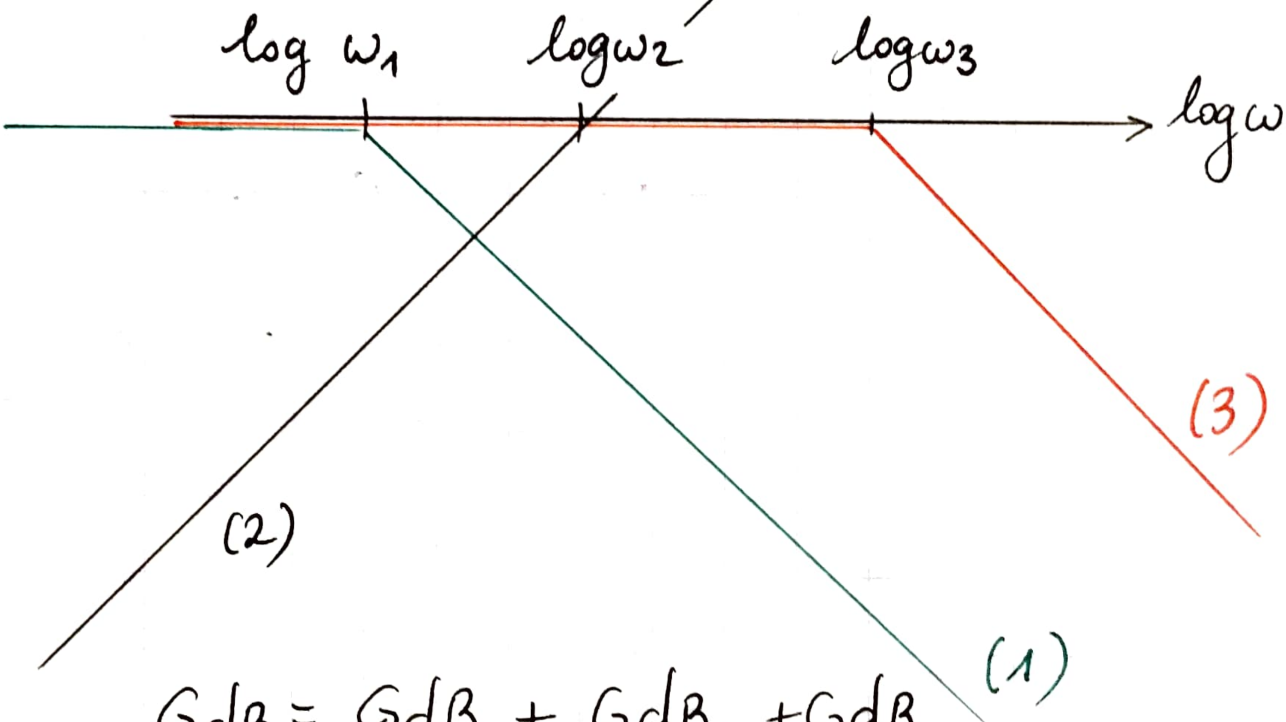
1

Exercice 1 : Tracé d'un diagramme de Bode

On note $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$ $\quad \omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$ $\quad \omega_3 = \frac{1}{\tau_3}$

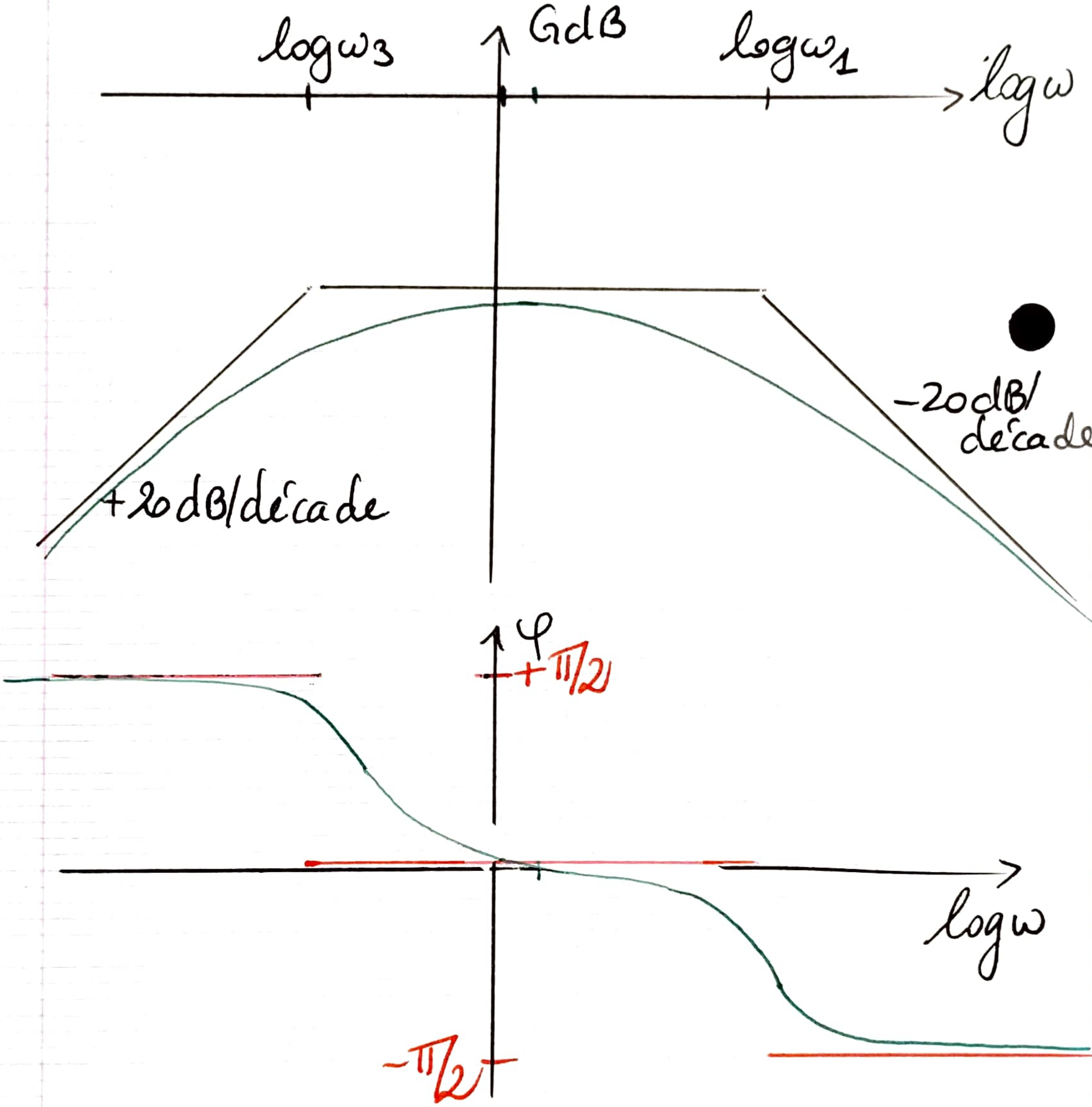
$$\omega_3 < \omega_2 < \omega_1$$

$$H(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_2} \times \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_1}} \times \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_3}}$$



$$G_{dB} = G_{dB_1} + G_{dB_2} + G_{dB_3}$$

2



Ce filtre est un passe-bande d'ordre 2 (à large bande).
Le dénominateur de la fonction de transfert est factorisable $Q < \frac{1}{2}$

③

on peut écrire H sous forme canonique $H = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

$$H = \frac{\tau_2 j\omega}{1 + (\tau_1 + \tau_3) j\omega + \tau_1 \tau_3 (j\omega)^2}$$

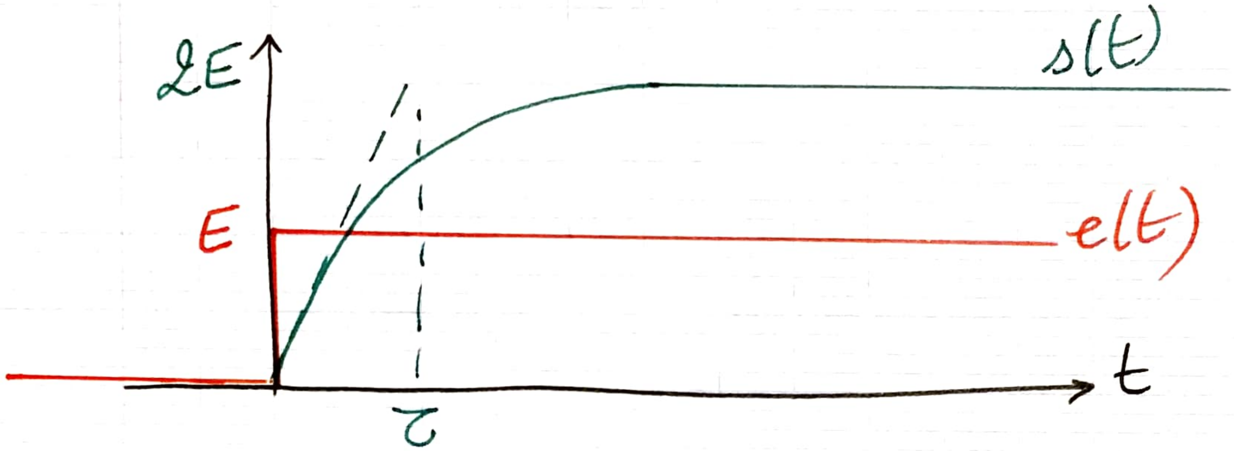
$$H = \frac{\tau_2 / (\tau_1 + \tau_3)}{1 + \dfrac{1}{(\tau_1 + \tau_3) j\omega} + \dfrac{\tau_1 \tau_3}{(\tau_1 + \tau_3)} j\omega}$$

et on identifie $\dfrac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_3} = H_0$

$$\left.\begin{aligned} Q\omega_0 &= \frac{1}{\tau_1 + \tau_3} \\ \frac{Q}{\omega_0} &= \frac{\tau_1 \tau_3}{\tau_1 + \tau_3} \end{aligned}\right\} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_3}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{\tau_1 \tau_3}}{\tau_1 + \tau_3}$$

①

Exercice 3 : Identification d'un système à partir de sa réponse indicielle



Aux temps longs $s = e \times 2$

→ ce filtre est un passe-bas de gain $H_0 = 2$ en bande passante

Aux temps courts, s est continu mais $\frac{ds}{dt}$ ne l'est pas

→ c'est un passe-bas d'ordre 1

$$H = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau}$$

$$s + \tau \frac{ds}{dt} = 2e$$

②

Pour $t > 0$

$$s + \tau \frac{ds}{dt} = 2E$$

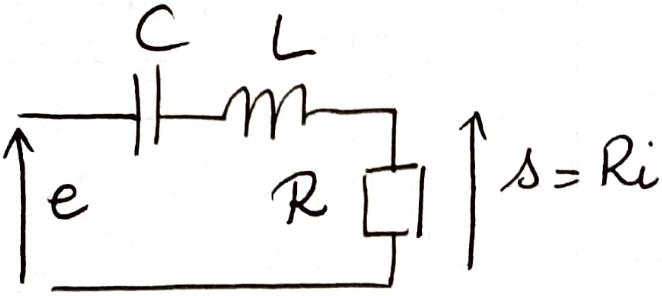
$$s(t) = 2E(1 - e^{-t/\tau})$$

On détermine τ à l'intersection de la tangente à la courbe $s(t)$ à l'origine (en 0^+) et de l'asymptote.

$$\tau = 1\,ms$$

①

Exo 4 : Circuit RLC série



$$H = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{s}{e} = \frac{1}{1 + j\frac{L\omega}{R} + \frac{1}{jRC\omega}}$$

$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R} \qquad Q\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta f} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

Pour $f = f_0$ $\quad H = 1 \Rightarrow S = E = RI_{max}$

$$\Rightarrow R = \frac{E}{I_{max}} = \frac{10}{0{,}1} = 100\,\Omega$$

$$Q \quad \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad f_0 = 500\,Hz$$

$$\Rightarrow L = \frac{QR}{\omega_0} = \frac{QR}{2\pi f_0} = \frac{5}{2} \times \frac{100}{2\pi \times 500} = \frac{1}{4\pi}\,H$$

$L = 80\,mH$

2

$$C = \frac{1}{RQ\,2\pi f_0} = \frac{1}{100 \times \frac{5}{2}\,2\pi \times 500}$$

$$C = 1{,}3\ \mu F$$

1

Exercice 5 : Détermination d'un filtre

- On constate qu'à basse fréquence $s = \frac{e}{2}$ ie $f = 10 Hz \ll f_0$

- à haute fréquence le signal de sortie est atténué

→ c'est un passe-bas de gain en bande passante $H_0 = \frac{1}{2}$

- à haute fréquence ($f = 10$ kHz) le déphasage est d'environ $-\pi/2$

→ passe-bas d'ordre 1.

$$H = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad H_0 = \frac{1}{2}$$

$$G = \frac{H_0}{\left(1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Pour $f_1 = 1{,}5$ kHz $\quad G_1 \simeq 0{,}4$

2

Pour $f_2 = 10\,kHz$ $\quad G_2 \simeq 0{,}15$

avec $f_1 \Rightarrow \left(\frac{H_0}{G_1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{f_1}{f_0}\right)^2$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = 1 + \left(\frac{f_1}{f_0}\right)^2$$

$$\frac{9}{16} = \left(\frac{f_1}{f_0}\right)^2$$

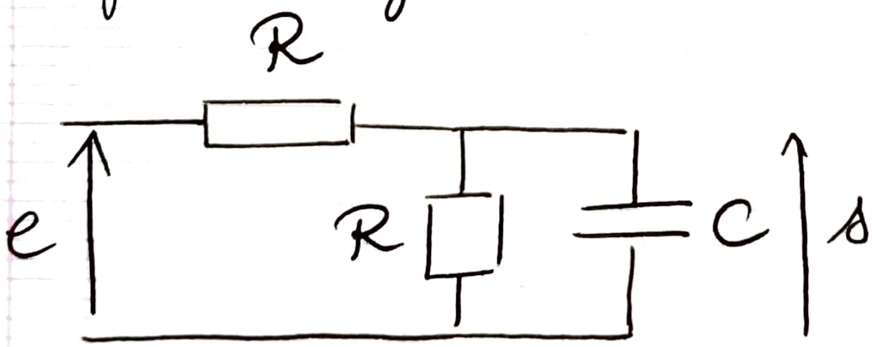
$$\frac{f_1}{f_0} \simeq \frac{3}{4} \Rightarrow f_0 \ \frac{4}{3} f_1 \simeq 2\,kHz$$

avec f_2 $\quad \left(\frac{0{,}5}{0{,}15}\right)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = 1 + \left(\frac{f_2}{f_0}\right)^2$

$$\frac{\sqrt{91}}{3} \simeq \left(\frac{f_2}{f_0}\right)$$

$$\Rightarrow f_0 \simeq \frac{3}{\sqrt{91}} f_2$$

$$f_0 \simeq 3\,kHz$$



$$\underline{H} = \frac{Z}{Z+R} = \frac{1}{1+\frac{R}{Z}} = \frac{1}{1+R\left(\frac{1}{R}+jC\omega\right)}$$

(3)

$$\underline{H} = \frac{1}{2 + jRC\omega} = \frac{1/2}{1 + j\frac{RC}{2}\omega}$$

$$\omega_0 = \frac{2}{RC} = 2\pi f_0$$

on peut proposer : $R = 1\,k\Omega$

et $C = \frac{1}{\pi R f_0} \simeq \frac{1}{\pi \times 10^3 \times 3.10^3}$

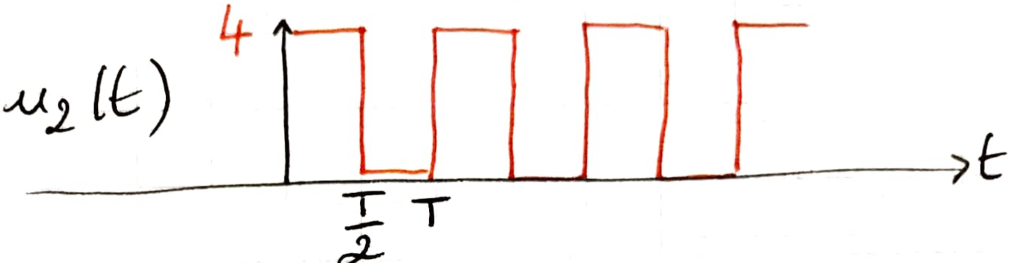
$C \sim 0{,}1\,\mu F$

(1)

Exo 7 : Décomposition en série de Fourier et valeur efficace.

$u_1(t) = 2\sin(2\pi f t)$

$u_2(t)$



1- $f = 1\,kHz$ $\quad T = \frac{1}{f} = 1\,ms$

$\langle u_1 \rangle = 0$ et $\langle u_2 \rangle = 2V$

$u_2 - \langle u_2 \rangle$ est une fonction impaire

$\Rightarrow u_2 - \langle u_2 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n \times 2\pi f t)$

avec $b_n = \frac{2}{T} \int^{T} u_2(t) \sin(n \times 2\pi f t)\,dt$

$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} 4 \sin(2\pi n f t)\,dt$

$b_n = \frac{8}{T} \left[\frac{-\cos(2\pi n f t)}{2\pi n f} \right]_0^{T/2}$

$b_n = \frac{4}{n\pi} \left(1 - (-\cos(\pi n T))\right)$

si $n = 2p$ $\quad b_{2p} = 0$

si $n = 2p+1$ $\quad b_{2p+1} = \dfrac{8}{(2p+1)\pi}$

$$\boxed{u_2(t) = 2 + \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)} \sin\left((2p+1)2\pi f t\right)}$$

2_ $U_{eff} = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$

* $U_1^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T 4 \sin^2(2\pi f t)\,dt = \dfrac{4}{T} \times \dfrac{T}{2} = 2$

$U_{1eff} = \sqrt{2}\ V = \dfrac{U_{1m}}{\sqrt{2}}$ $\quad$ où $U_{1m} = 2V$

Pour un signal sinusoïdal de valeur moyenne nulle $U_{eff} = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$

* $U_2^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u_2^2(t)\,dt = \dfrac{1}{T}\int_0^{T/2} 16\,dt = 16 \times \dfrac{1}{2}$

$U_2 = \sqrt{8}\ V$

③

3- $u_2^2 = \left[2 + \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin(2(2p+1) f t)\right]^2$

$$\langle u_2^2 \rangle = 4 + \left(\frac{8}{\pi}\right)^2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \times \frac{1}{2}$$

$$= 4 + \frac{1}{2} \frac{8^2}{\cancel{\pi^2}} \times \frac{\cancel{\pi^2}}{\cancel{8}} = 4 + 4 = 8$$

$\rightarrow \sqrt{\langle u_2^2 \rangle} = \sqrt{8}$ V

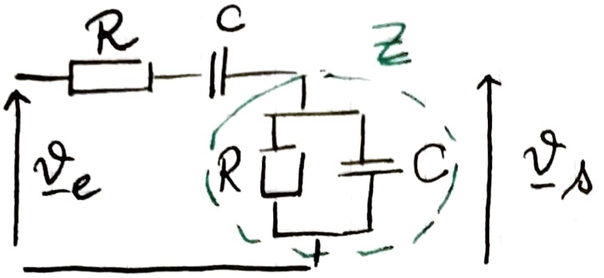
Théorème de Parseval :
(cf poly sur les séries de Fourier)

Si $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$

$$\langle f^2 \rangle = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2}\right)$$

①

Exo 9 : Réponse indicielle du pont de Wien



1- $\underline{H} = \dfrac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \dfrac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R + \dfrac{1}{jC\omega}} = \dfrac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{jC\omega}\right) \times \dfrac{1}{\underline{Z}}}$

avec $\dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{1}{R} + jC\omega = \dfrac{1}{R}(1 + jx)$

où $\boxed{x = RC\omega = \dfrac{\omega}{\omega_0} = \omega\tau \qquad \tau = RC = \dfrac{1}{\omega_0}}$

$\underline{H} = \dfrac{1}{1 + \left(1 + \dfrac{1}{jx}\right)(1 + jx)} = \dfrac{1}{1 + \left(1 + 1 + jx + \dfrac{1}{jx}\right.}$

$$\boxed{\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \begin{cases} H_0 = \dfrac{1}{3} \\ Q = \dfrac{1}{3} \end{cases}}$$

c'est un passe-bande à large bande

(2)

Asymptotes : • A basse fréquence $x \ll 1$

$\underline{H} \sim jx$ (domaine dérivateur)

$G_{dB} = 20 \log x$

$\varphi = \pi/2$

• A haute fréquence $x \gg 1$

$\underline{H} \sim \frac{1}{jx}$ (domaine intégrateur)

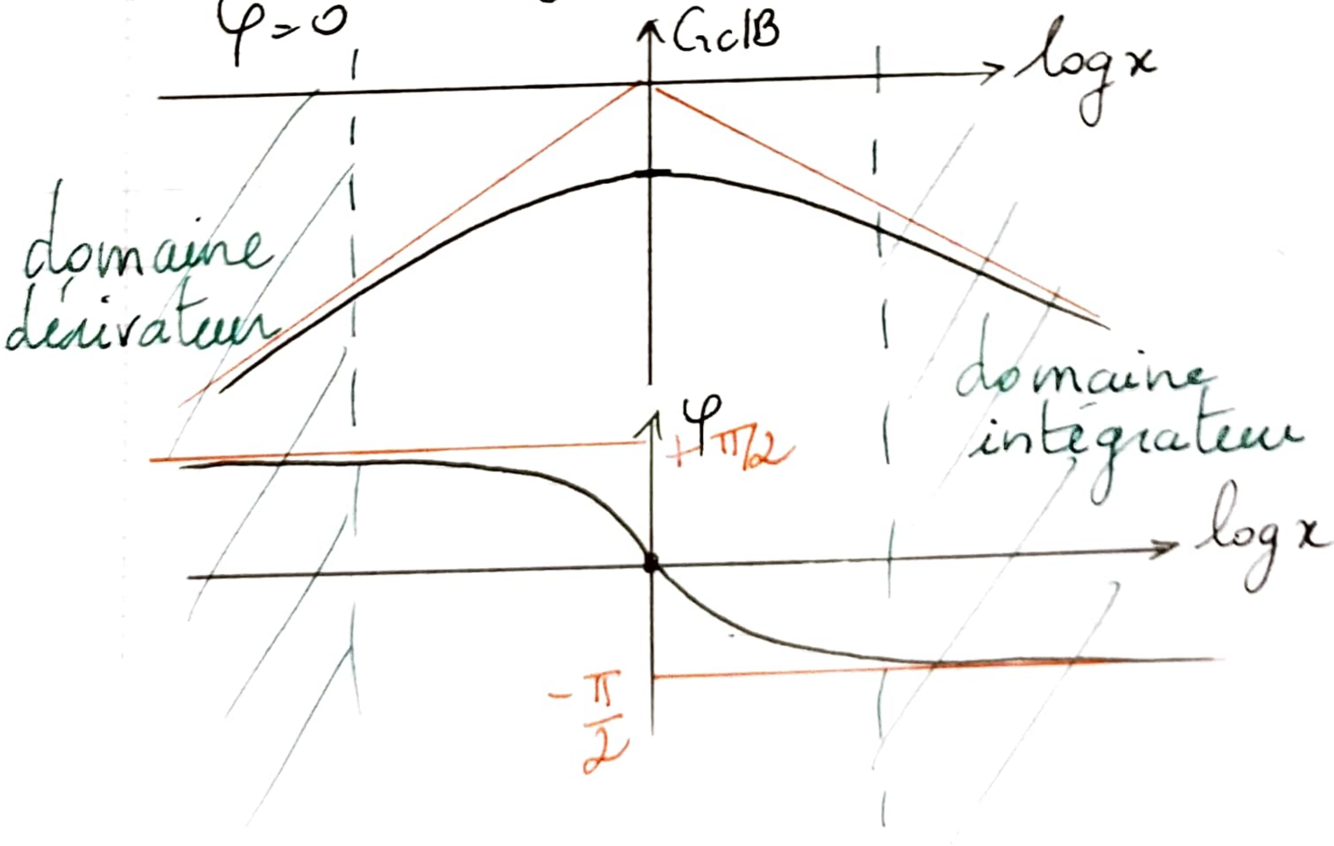
$G_{dB} = -20 \log x$

$\varphi = -\pi/2$

Réel : Pour $x = 1$ $H = H_0 = \frac{1}{3}$

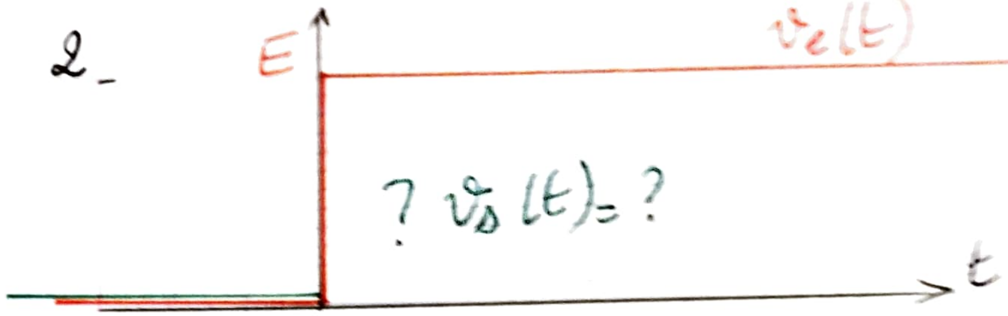
$G_{dB} = -20 \log 3 = -9{,}5 \text{ dB}$

$\varphi = 0$



③

2-



La fonction de transfert de ce filtre est celle d'un passe-bande :

→ les basses fréquences ne sont pas transmises ⇒ $s(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

→ les hautes fréquences ne sont pas transmises ⇒ $s(0^+) = s(0^-)$ (la discontinuité n'est pas transmise)

On peut revenir à l'équation différentielle qui lie v_e et v_s :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{H_0}{Q}jx}{\frac{jx}{Q} - x^2 + 1} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}}$$

④

avec $H_0 = Q = \frac{1}{3}$

$$\underline{H} = \frac{jx}{1+3jx-x^2} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}}$$

$$\tau \frac{dv_e}{dt} = v_s + 3\tau \frac{dv_s}{dt} + \frac{d^2v_s}{dt^2}\tau^2 \qquad (*)$$

Pour $t>0$ $\frac{dv_e}{dt} = 0$

$$0 = v_s + 3\tau \frac{dv_s}{dt} + \left(\frac{dv_s}{dt}\right)^2 \tau^2$$

$$\Delta = \frac{9-4}{\tau^2} = \frac{5}{\tau^2} > 0$$

on note $\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{2\tau}(3-\sqrt{5})$

$\frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{2\tau}(3+\sqrt{5})$ $\Big\}$ $\tau_1 > \tau_2$

$$v_s(t) = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}$$

v_s est la tension aux bornes d'un condensateur $\Rightarrow v_s(0^+) = v_s(0^-) = 0$

⑤

$$\Rightarrow A+B=0$$

$$v_s(t) = A\, e^{-\frac{3t}{2\tau}} \times 2\,sh\left(\frac{\sqrt{5}}{2\tau}t\right)$$

On peut pour trouver une autre CI intégrer (*) entre 0^- et 0^+ :

$$\int_{0^-}^{0^+} \tau \frac{dv_e}{dt}\,dt = \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} v_s(t)\,dt}_{0} + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} 3\tau \frac{dv_s}{dt}\,dt}_{3\tau(v_s(0^+)-v_s(0^-))=0} + \int_{0^-}^{0^+} \tau^2 \frac{d^2v_s}{dt^2}\,dt$$

$\downarrow$

$$\tau(E-0) = \tau^2\left[\frac{dv_s}{dt}(0^+) - \underbrace{\frac{dv_s}{dt}(0^-)}_{0}\right]$$

$$\frac{dv_s}{dt}(0^+) = \frac{E}{\tau}$$

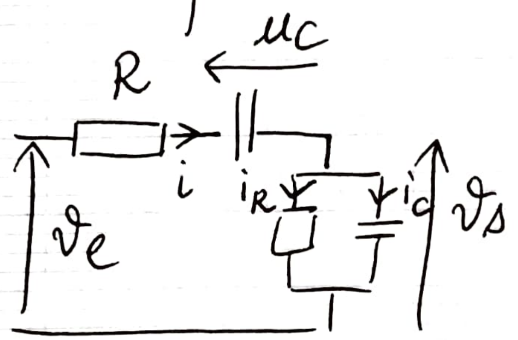
or $$\frac{dv_s}{dt} = 2A\left[-\frac{3}{2\tau}sh\left(\frac{\sqrt{5}}{2\tau}t\right) + \frac{\sqrt{5}}{2\tau}ch\left(\frac{\sqrt{5}}{2\tau}t\right)\right]e^{-\frac{3t}{2\tau}}$$

$$\frac{dv_s}{dt}(0^+) = \frac{A\sqrt{5}}{\tau} = \frac{E}{\tau} \Rightarrow A = \frac{E}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{v_s(t) = \frac{2E}{\sqrt{5}}\, e^{-\frac{3t}{2\tau}}\, sh\left(\frac{\sqrt{5}}{2\tau}t\right)}$$

⑥

Rque : Pour trouver la 2e CI on peut aussi revenir au circuit



v_s et u_C sont continues

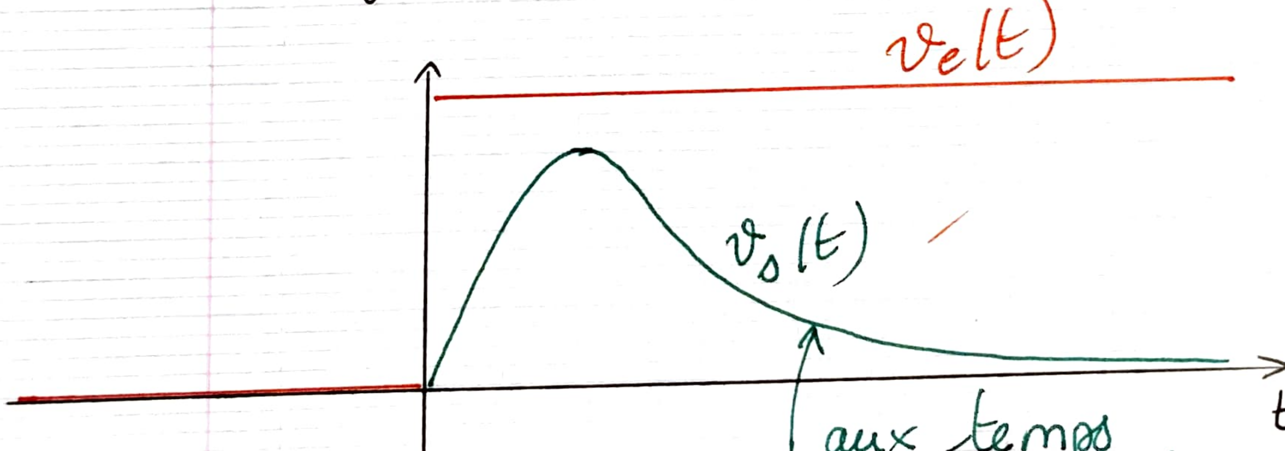
$$\Rightarrow v_e(0^+) = v_s(0^+) + u_C(0^+) + Ri(0^+)$$
$$= Ri(0^+) = E$$

or $i(0^+) = i_R(0^+) + i_C(0^+)$

et $i_R(0^+) = \dfrac{v_s(0^+)}{R} = 0$

$$\Rightarrow i_C(0^+) = i(0^+) = \frac{E}{R} = C\frac{dv_s}{dt}(0^+)$$

$$\frac{dv_s}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC} = \frac{E}{\tau}$$

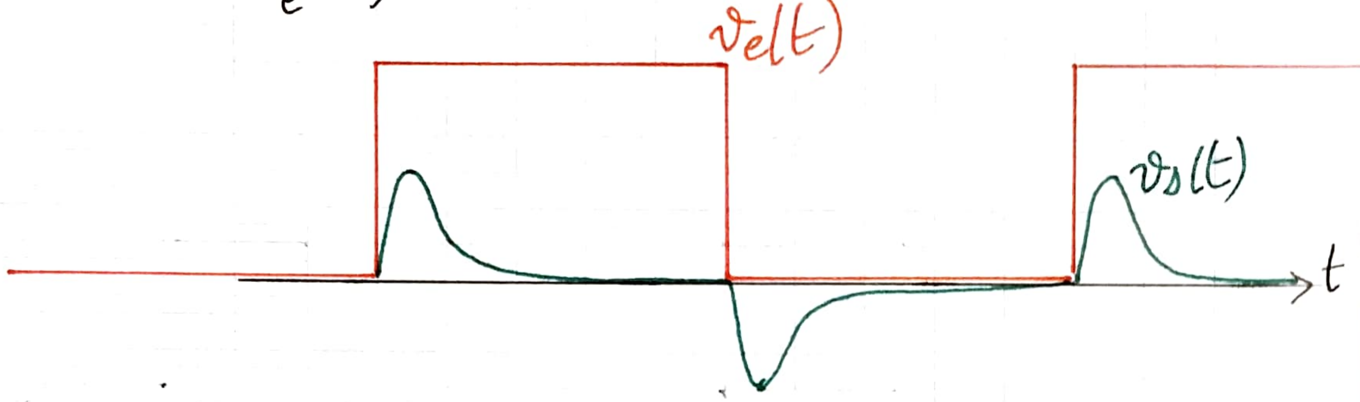


aux temps "longs" $v_s(t) \simeq Ae^{-\frac{t}{\tau_1}}$

1 7

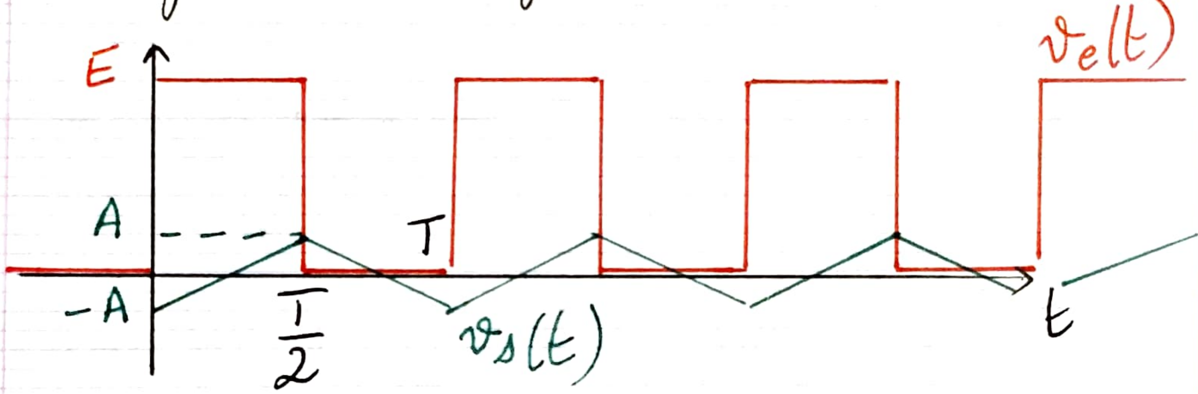
E:

3. Pour une tension créneau de période $T \gg \tau$, on retrouve l'allure obtenue pour l'échelon ; la tension v_s a le temps de revenir à 0 avant une nouvelle discontinuité de $v_e(t)$.



Pour une tension créneau de période $T \ll \tau$ la "bosse" n'a pas le temps de se former. La valeur moyenne de v_s est nulle : $\langle v_s \rangle = 0$
et toutes les composantes spectrales de $v_e(t) - \langle v_e \rangle$ sont dans le domaines intégrateur du filtre
$\Rightarrow$ on a donc
$$\tau \frac{d v_s(t)}{dt} \simeq v_e - \langle v_e \rangle$$

On a donc un signal de sortie de valeur moyenne nulle et de très faible amplitude (aucune harmonique autour de ω_0 ie rien dans la bande passante du filtre).
Ce faible signal est un signal triangulaire.



Pour toutes les harmoniques
$$\tau \frac{ds_n}{dt} \simeq e_n \Rightarrow \tau \frac{ds}{dt} = e - \langle e \rangle$$
somme sur $n \geq 1$

Pour $0 < t < \frac{T}{2}$:

$$\tau \frac{dv_s}{dt} = \frac{E}{2} = \tau \times \frac{2A}{T/2} \Rightarrow A = \frac{E}{8}\frac{T}{\tau} \ll E$$

①

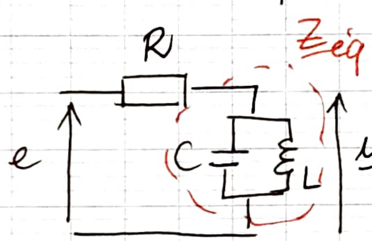
Transmission d'un signal créneau par un filtre

1) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 3{,}162 \cdot 10^4$ rad/s

$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5{,}033$ kHz

$Q_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 316$ ($\gg 1$ filtre très sélectif)

2) $\frac{\underline{u_s}}{\underline{e}} = \frac{Z_{éq}}{Z_{éq}+R} = \frac{1}{1+\frac{R}{Z_{éq}}}$ avec $\frac{1}{Z_{éq}} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$

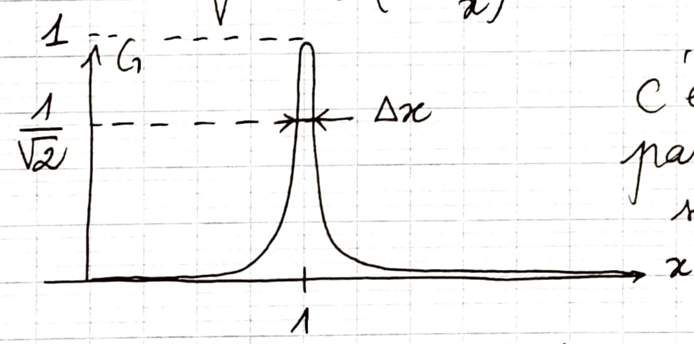


$\underline{H} = \frac{1}{1+R\left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega}\right)}$

$\underline{H} = \frac{1}{1+j\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)} = \frac{1}{1+jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

On vérifie $RC = \frac{Q_0}{\omega_0}$ et $\frac{R}{L} = Q_0\omega_0$

$G = |H| = \frac{1}{\sqrt{1+Q_0^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$ où $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$



c'est un passe-bande très sélectif.

$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour $Q_0\left(x-\frac{1}{x}\right) = \pm 1 \rightarrow \Delta x = \frac{1}{Q_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$

$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0}$ $\Delta f = \frac{f_0}{Q_0}$

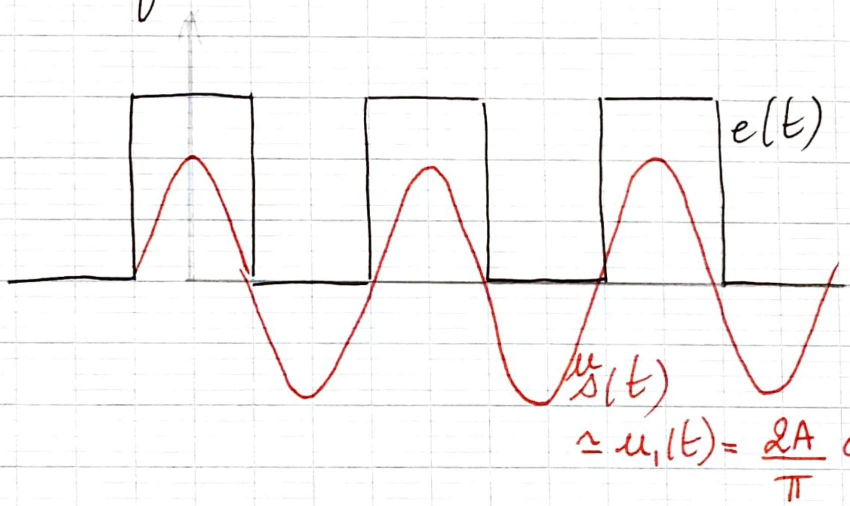
$\Delta\omega = 100$ rad/s $\Delta f = 16$ Hz

$\varphi = -\arctan\left(Q_0\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$

3)

p	0	1	2	3
$\frac{\pi B_p}{2A}$	1	$3{,}95.10^{-4}$	$1{,}32.10^{-4}$	$6{,}6.10^{-5}$
φ_p	0	$-89{,}9$	$-89{,}96$	$-89{,}97$

Seule le fondamental est transmis, sans déphasage.
Les harmoniques de rang $(2p+1)$ avec $p \geq 1$ sont fortement atténuées



Oscilloscope numérique

1. Un signal triangle ou créneau ou pire une impulsion présente dans son spectre des fréquences > 10MHz. Pour le créneau ou le triangle ce sont les multiples de cette fréquence. Les oscilloscopes de TP sont à 60MHz

2. Il faut respecter le critère de Shannon et donc
$F_e > 2 f_{max}$

3. On dispose de 256 ko ie $256 \times 1024 = 262\,144$ octets
ce qui fait 131 072 valeurs à stocker

déf° : un octet est un multiplet de 8 bits, il permet de représenter 2^8 nombres soit 256 valeurs ≠.
k.o $= 2^{10} \times 1$ octet $= 1024 \times 1$ octet

Pour une période 13 107 valeurs
$f = 10$ kHz, 1 période $T = \frac{1}{f} = 10^{-4}$ s
$F_e = 131$ Méch/s
↑
10^6

Si on prend $F_e = 100$ Méch/s alors <u>10 période</u> = 1ms
⇒ 10^5 éch ⇒ <u>occupe donc 2.10^5 octets</u> (ie 2.10^5 cases de la mémoire tampon)
ou encore 10^4 échantillons par période
(ce qui est très élevé)

4. Plus petite variation détectable

$\frac{q}{\Delta s} = \frac{1}{2^n - 1}$ ex $n = 12$ $\frac{1}{2^{12} - 1} = 2{,}44.10^{-4} = 244$ p.p.m

5. $\frac{10^{-4}\,V}{240\,V} = \frac{1}{2{,}4}.10^{-6} \simeq 0{,}5$ ppm inatteignable avec les convertisseurs proposés

6. 240V → 24V 244 p.p.m × 24V $= 244 \times 24.10^{-6}$
$\simeq 5$ mV

Convertisseur numérique analogique (CNA) en échelle

1) Si K_0 est relié à la masse, alors la résistance $2R$ est reliée à la masse

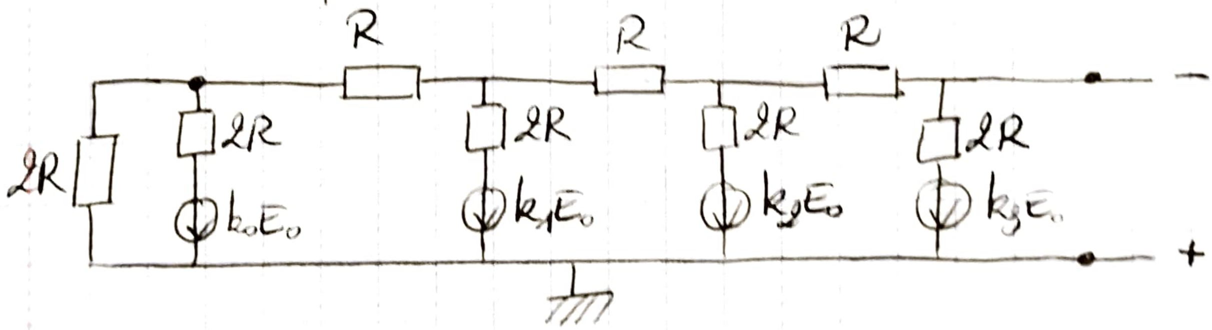
$k_0 = 0$

Si K_0 est relié à la source de tension, alors la résistance $2R$ est connectée au générateur selon le schéma suivant :

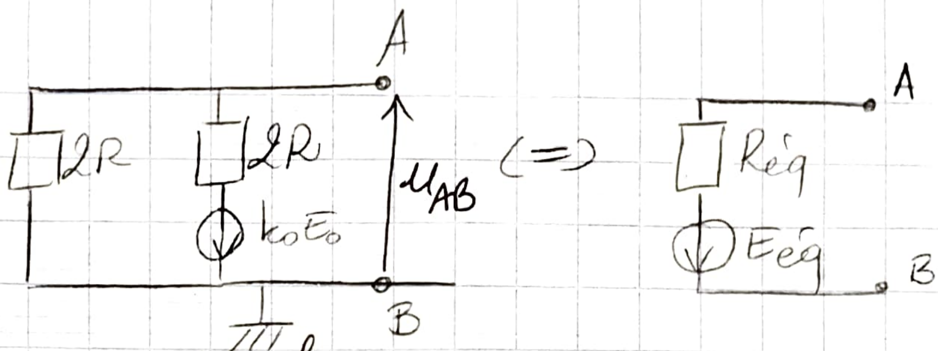
$k_0 = 1$

Soit finalement :

De même pour les autres interrupteurs.
$\Rightarrow$ Schéma équivalent



2)

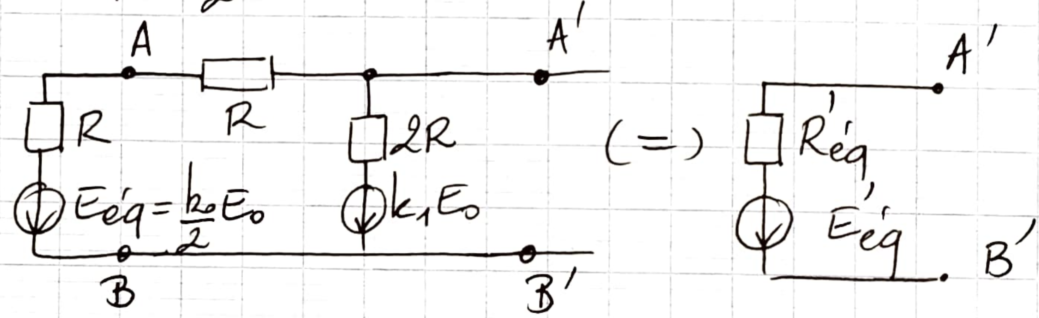


théorème de Thevenin :

• $R_{éq} = 2R \parallel 2R$ $\qquad \frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} = \frac{1}{R}$

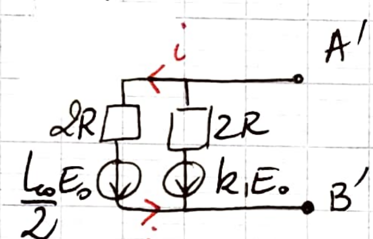
• en sortie ouverte $u_{AB} = \frac{2R}{4R}(-k_0E_0) = -\frac{k_0}{2}E_0$

$\Rightarrow E_{éq} = \frac{k_0}{2}E_0$



• $R'_{éq} = 2R \parallel 2R$ $\qquad R'_{éq} = R$

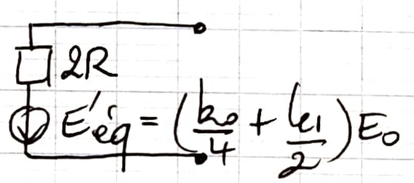
• en sortie ouverte



$\left(\frac{k_0}{2} - k_1\right)E_0 = 4Ri$

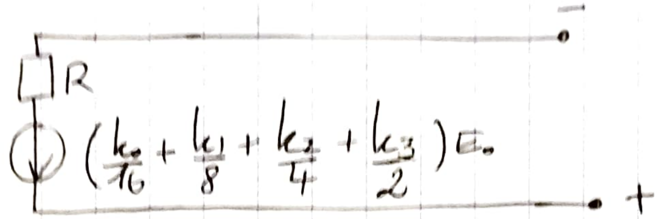
$u_{A'B'} = 2Ri - k_0E_0$

$= \left(\frac{k_0}{2} - k_1\right)\frac{E_0}{2} - \frac{k_0}{2}E_0 = -\left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_0}{4}\right)E_0$

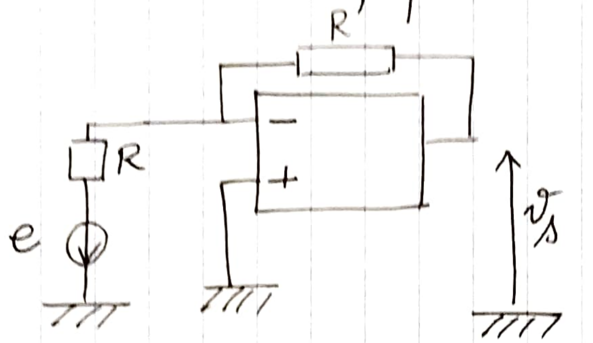


De proche en proche, on aboutit à :

③



Le circuit est équivalent à :



avec
$e = (\frac{k_0}{16}+\frac{k_1}{8}+\frac{k_2}{4}+\frac{k_3}{2})E_0$

3) $V^+ = 0$ En régime linéaire $V^- = 0$

or $V^-\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) = -\frac{e}{R} + \frac{v_s}{R'} \Rightarrow 0$

$\Rightarrow v_s = \frac{R'}{R} e$

$v_s = \frac{E_0 R'}{16R}[k_0 + 2k_1 + 4k_2 + 8k_3]$

$v_s = \frac{E_0 R'}{16R}[k_0 2^0 + k_1 2^1 + k_2 2^2 + k_3 2^3]$

Nombre binaire : $k_3 k_2 k_1 k_0$ (4 bits)

La valeur $\begin{cases} \text{minimale est } v_s = 0 \\ \text{maximale est } v_s = \frac{15}{16}\frac{R'}{R}E_0 \end{cases}$

La résolution est $\frac{1}{16}\frac{R'}{R}E_0$.