

Corrigé de quelques Exercices de Mécanique

1 Référentiels non-galiléens

Exercice 1 Expérience du manège inertiel

1. Le référentiel galiléen \mathcal{R}_g est le référentiel lié au sol. On peut légitimement le considérer galiléen sur une durée de quelques minutes. Le référentiel \mathcal{R} non galiléen nécessaire à l'étude est celui lié au manège. Le référentiel \mathcal{R} est en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire ω constante par rapport à \mathcal{R}_g .
2. Lors du premier lancé, le tireur vise la cible. La force de Coriolis est :

$$\vec{F}_{iC} = -2m\omega\vec{u}_z \wedge \vec{v}$$

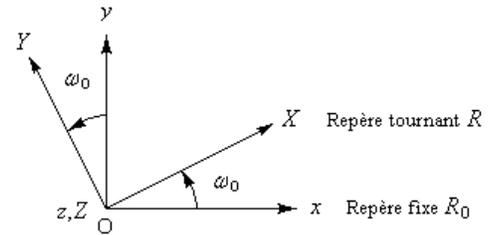


Fig. 2

- Il n'atteint donc pas la cible puisque la force de Coriolis va le dévier de sa trajectoire **vers la droite**. Une autre façon de voir les choses est que dans le référentiel galiléen, la cible tourne vers la gauche. Lorsque la balle atteint le mur, la cible n'y est plus, elle a tourné vers la gauche d'un angle ωt .
3. Comme le vol dure moins longtemps la cible a moins eu le temps de tourner et on arrive donc plus près de celle-ci.
 4. On suppose le mouvement horizontal et on néglige donc le poids.
 5. Dans le référentiel \mathcal{R} , l'équation du mouvement s'écrit : $m\vec{a} = \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC}$. On note $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y$. On a alors : $\vec{F}_{ie} = m\omega^2(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$ et $\vec{F}_{iC} = 2m\omega(-\dot{x}\vec{u}_y + \dot{y}\vec{u}_x)$. Ceci conduit à :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega^2 x + 2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega\dot{x} \end{cases}$$

6. On pose $u = x + iy$ et on a :

$$\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} - \omega^2 u = 0$$

dont la solution est $u(t) = (At + B)\exp(-i\omega t)$. La condition initiale $u(0) = 0$ et $\dot{u}(0) = v_0$ conduit à $u(t) = v_0 t \exp(-i\omega t)$.

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos(\omega t) \\ y = -v_0 t \sin(\omega t) \end{cases}$$

est la solution de ces équations.

On peut remarquer que $X = x \cos(\omega t) - y \sin(\omega t) = v_0 t$ et $Y = x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t) = 0$. Dans le référentiel du laboratoire, la trajectoire est rectiligne uniforme.

7. Le point d'impact sur le mur correspond à $x^2 + y^2 = d^2$, soit $v_0 t = d$. Le point d'impact sur le mur est donc en :

$$x = d \cos(\omega d / v_0)$$

$$y = -d \sin(\omega d / v_0)$$

On constate effectivement que le point d'impact est à droite de la cible et ce d'autant plus que v_0 est faible.

Exercice 2 Système deux masses - ressort

Le pfd appliqué à la masse m dans le référentiel lié au plateau s'écrit :

$$m\ddot{z} = -k(z - \ell_0) - mg - ma_0$$

A l'équilibre dans le référentiel du plateau on a $\ddot{z} = 0$ soit $0 = -k(z_{eq} - \ell_0) - mg - ma_0$

$$m\ddot{z} = -k(z - z_{eq} + z_{eq} - \ell_0) - mg - ma_0 = -k(z - z_{eq})$$

dont la solution est de la forme $z - z_{eq} = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ où $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Pour $t < 0$, on a $z = \ell_0 - mg/k$ et $\dot{z} = 0$. Les conditions initiales $z(0^+) = \ell_0 - mg/k = z_{eq} + A$ et $\dot{z}(0^+) = 0$ conduisent à :

$$z(t) = z_{eq} + \frac{ma_0}{k} \cos(\omega_0 t)$$

Tant que la masse m' est en contact avec le plateau, on a

$$0 = N - m'g + k(z - \ell_0) - m'a_0$$

$$N = (m + m')(g + a_0) - ma_0 \cos(\omega_0 t)$$

La masse ne décolle jamais si N est constamment positive.

Si $a_0 > 0$ $N > 0$ pour tout t .

Si $a_0 < 0$; $N > 0$ pour tout t à condition que $(m + m')(g + a_0) > -ma_0$ ie

$$a_0 > -\frac{(m + m')}{2m + m'}g$$

Exercice 3 Mouvement dans un référentiel en rotation

1. Dans \mathcal{R}' , il faut tenir compte des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis :

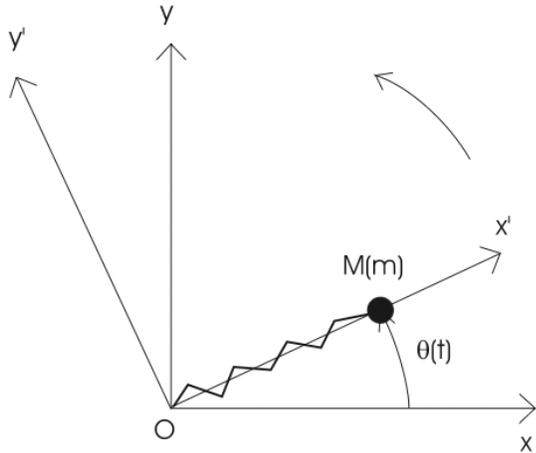
$$\begin{cases} \vec{F}_{ie} = m\Omega^2 x' \vec{u}_{x'} \\ \vec{F}_{iC} = -2m\Omega \dot{x}' \vec{u}_{y'} \end{cases}$$

On obtient, en projetant le PFD selon $\vec{u}_{x'}$:

$$\ddot{x}' + \omega^2 x' = \omega_0^2 l_0$$

avec $\omega^2 = \omega_0^2 - \Omega^2$. La solution de cette équation avec les conditions initiales est :

$$x'(t) = l_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \cos(\omega t) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} l_0$$



2. La réaction \vec{R} exercée par l'axe Ox' sur le point matériel compense le poids et la force de Coriolis, on a donc

$$\vec{R} = 2m\Omega\dot{x}'\vec{u}_{y'} + mg\vec{u}_z$$

Exercice 4 Objet sur une remorque

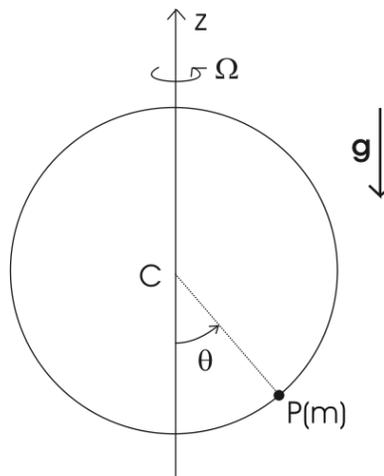
On suppose la boîte fixe dans le référentiel lié à la remorque. On a alors $0 = N - mg - m\ddot{z}$ or $z = e \cos(\frac{2\pi}{L}x)$ et $x = vt$, d'où $\ddot{z} = -e(\frac{2\pi}{L}v)^2 \cos(\frac{2\pi}{L}vt)$. Finalement :

$$N = m \left(g + e \left(\frac{2\pi}{L}v \right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{L}vt \right) \right)$$

La boîte décolle si N peut s'annuler ie pour

$$v > \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{e}}$$

Exercice 5 Anneau en rotation



1. En tenant compte des forces d'inertie, on obtient en projection selon $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_k)$:

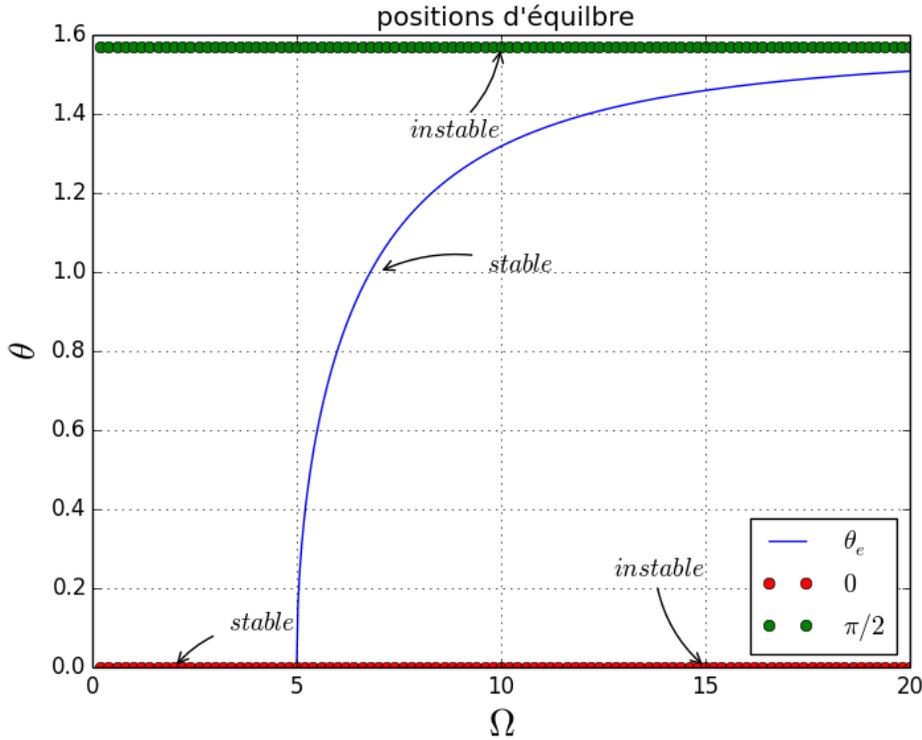
$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + R_r + mR\Omega^2 \sin^2 \theta \\ mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + mR\Omega^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 = R_k + 2mR\Omega\dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

2. Les positions d'équilibre sont données par $\ddot{\theta} = 0$ soit

$$0 = -g \sin \theta \left(1 - \frac{R\Omega^2}{g} \cos \theta\right)$$

On peut définir une pulsation critique $\Omega_c = \sqrt{g/R}$.

- Si $\Omega < \Omega_c$, les seules positions d'équilibre sont $\theta = 0$ et $\theta = \pi$
- Si $\Omega > \Omega_c$, les positions d'équilibre sont $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ et $\cos \theta_e = \frac{\Omega_c^2}{\Omega^2}$



Pour discuter de la stabilité de chacune des positions d'équilibre, on peut étudier l'équation du mouvement lorsque l'anneau est écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\varepsilon \ll 1$. L'équation du mouvement est

$$\ddot{\theta} + (\Omega_c^2 - \Omega^2 \cos \theta) \sin \theta = 0$$

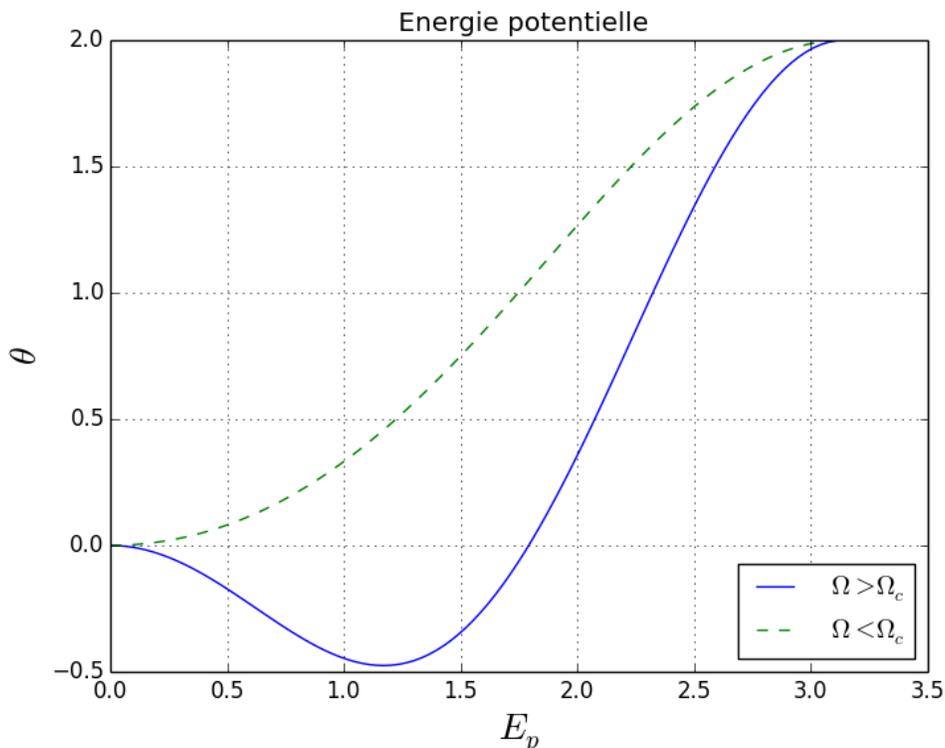
On écrit $\theta = \theta_{\text{équilibre}} + \varepsilon$ et on fait le développement à l'ordre 1 en ε :

- autour de la position d'équilibre $\theta = 0$ elle s'écrit $\ddot{\varepsilon} + (\Omega_c^2 - \Omega^2)\varepsilon = 0$: stable si $\Omega < \Omega_c$, instable sinon.
- autour de la position d'équilibre $\theta = \pi$ elle s'écrit $\ddot{\varepsilon} - (\Omega_c^2 + \Omega^2)\varepsilon = 0$: toujours instable.
- autour de la position d'équilibre $\theta = \theta_e$ elle s'écrit $\ddot{\varepsilon} + \Omega^2 \sin^2 \theta_e \varepsilon = 0$: toujours stable lorsqu'elle existe.

3.

$$E_p(\theta) = mgR(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2}m\Omega^2 R^2 \sin^2 \theta = mgR \left(1 - \cos \theta - \frac{\Omega^2}{2\Omega_c^2} \sin^2 \theta\right)$$

4. On retrouve sur le graphe suivant que la position d'équilibre $\theta = 0$ est stable si $\Omega < \Omega_C$ (minimum de E_p), instable sinon, $\theta = \pi$ toujours instable et $\theta = \theta_e$ toujours stable lorsqu'elle existe (minimum de E_p).



Exercice 6 Satellite dans la soute d'une navette

1. $m\omega_0^2 r = \mathcal{G}mM_T/r^2$ et $g_0 = \mathcal{G}M_T/R^2$ d'où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{r^3}}$$

2. Définition de Wikipedia : "L'impesanteur ou apesanteur est l'état d'un système dans lequel aucune accélération, causée par la gravitation ou toute autre force, ne peut être mesurée par un observateur dans le système en question. Cela inclut les situations de chute libre, comme les situations où le système est suffisamment éloigné de toute source de gravité pour que celle-ci puisse être négligée. Techniquement, un corps n'est pas en situation d'impesanteur en chute libre s'il est suffisamment grand, ou si le champ gravitationnel est suffisamment intense et non uniforme, pour que le corps soit sujet à des forces de marée non négligeables."

Dans le référentiel \mathcal{R}_N non galiléen de la navette, un objet est soumis à des forces d'inertie.

Tant que l'objet est immobile dans \mathcal{R}_N , la force de Coriolis est nulle.

La seule force d'inertie restante est la force centrifuge, $m\omega_0^2 r \vec{u}_r$. L'objet est aussi soumis à la gravitation terrestre, $-\mathcal{G}mM_T/r^2 \vec{u}_r$. La résultante de ces deux actions est nulle si l'objet est exactement en A (ou sur le cercle de centre C et de rayon $r = CA$). Ainsi dans le référentiel de la navette, tout se passe comme si l'objet situé en A n'était soumis à aucune force : il reste immobile à l'endroit où il est abandonné sans vitesse initiale. On dit qu'il est en impesanteur.

Dans le vie courante, on parle souvent d'apesanteur pour décrire les astronautes qui semblent flotter dans la navette. Cependant, ce terme ne devrait être utilisé que lorsque l'objet n'est soumis à aucune attraction (infiniment loin de tout astre).



3. Dans \mathcal{R}_N le référentiel lié à la navette, un point matériel P de masse m est soumis à :
- la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\omega_0^2((r+x)\vec{u}_r + y\vec{u}_\theta)$
 - la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{iC} = -2m\omega_0(-y\vec{u}_r + x\vec{u}_\theta)$
 - la force d'attraction gravitationnelle de la Terre $\vec{F}_{grav} = -m\frac{g_0R^2}{((r+x)^2+y^2+z^2)^{3/2}}((r+x)\vec{u}_r + y\vec{u}_\theta + z\vec{u}_z)$
4. La puissance de la force de Coriolis est toujours nulle.

$$\mathcal{E}_{Pgrav} = -m\frac{g_0R^2}{((r+x)^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\mathcal{E}_{Pie} = -\frac{1}{2}m\omega_0^2((r+x)^2+y^2)$$

et comme $g_0R^2 = \omega_0^2r^3$, on a :

$$\mathcal{E}_{Ptot} = -m\omega_0^2\left(\frac{1}{2}[(r+x)^2+y^2] + \frac{r^3}{((r+x)^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right)$$

- 5.
- $$\mathcal{E}_P \approx -\frac{m\omega_0^2}{2}(3x^2 - z^2)$$
- \mathcal{E}_P est minimum en z et maximum en x et neutre en y autour de A . La position d'équilibre est a priori instable en x et stable en z mais si un mouvement s'amorce, la force de Coriolis non prise en compte dans ce raisonnement en terme d'énergie potentielle agit et il faut étudier de plus près les équations du mouvement.

6. Dans le cadre de l'approximation de la question précédente, $\vec{F}_{grav} + \vec{F}_{ie} = -\overrightarrow{grad}\mathcal{E}_P \approx \frac{m\omega_0^2}{2}(6x\vec{u}_x - 2z\vec{u}_z)$
 Le PFD appliqué au point matériel s'écrit alors, en tenant compte de la force de Coriolis :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 3\omega_0^2 x + 2\omega_0 \dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega_0 \dot{x} \\ \ddot{z} = -\omega_0^2 z \end{cases}$$

$z(t)$ est donc borné, l'équilibre est stable vis à vis des perturbations dans la direction z .

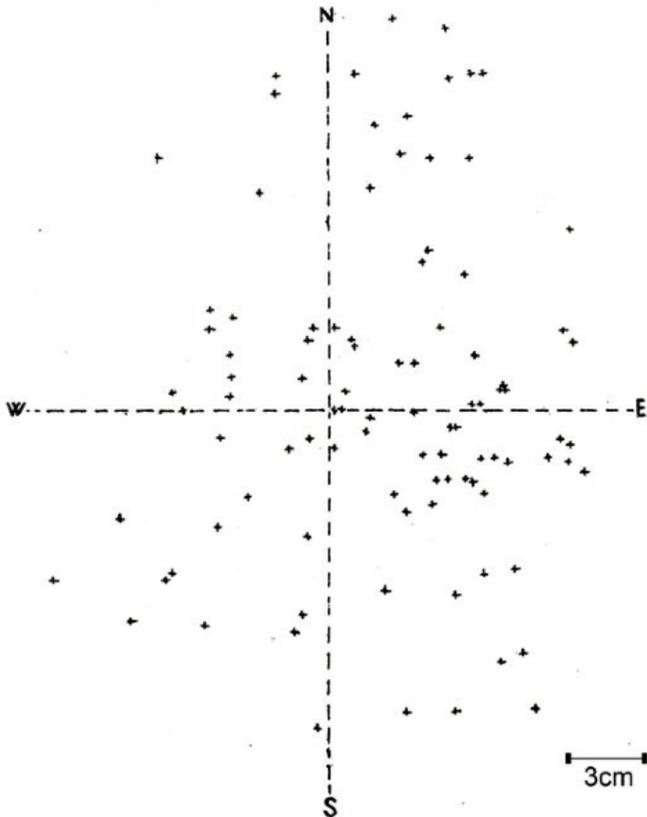
Les mouvements en x et y sont couplés. On peut intégrer la seconde équation pour obtenir $\dot{y} = -2\omega_0 x + A$, puis $\ddot{x} = 3\omega_0^2 x + 2\omega_0(-2\omega_0 x + A)$ soit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\omega_0 A$$

L'équilibre est stable vis à vis des perturbations dans la direction x , ce qui n'était pas la conclusion obtenue par une simple étude en terme d'énergie potentielle. La force de Coriolis a tendance à stabiliser la position d'équilibre vis-à-vis des perturbations dans la direction x . On a lors $x(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi) + 2A/\omega_0$

Ainsi $\dot{y} = -2\omega_0 B \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{3}{7}A$ et donc $y(t) = -\frac{2}{7}B \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{3}{7}At + C$. On constate qu'apparaît une dérive selon y . L'équilibre est donc instable dans la direction y .

Exercice 7 Déviation vers l'est



1.

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\Omega_T(\cos \lambda z - \sin \lambda y) \\ \ddot{y} = -2\Omega_T \sin \lambda x \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega_T \cos \lambda x \end{cases}$$

2. $F_{iC} \approx mg/1000$ conduit à $v \approx g/(2000\Omega_T) \approx 60 \text{ m.s}^{-1}$.

3. Pour une chute libre d'une hauteur h , on atteint la vitesse $v^* = \sqrt{2gh}$ en un temps $t^* = \sqrt{2h/g}$. Le mouvement étant en première approximation vertical, on a en première approximation et en ordre de grandeur $\dot{z} \approx -\sqrt{gh}$ et $\ddot{x} \approx 2\Omega_T \cos \lambda \sqrt{gh}$ d'où une déviation $x^* \approx \Omega_T \cos \lambda \sqrt{gh} (t^*)^2$ soit

$$x^* \approx 2\Omega_T \cos \lambda g (h/g)^{3/2}$$

L'application numérique conduit à $x^* \approx 6$ cm. On s'attend à une déviation mesurable.

4. En l'absence de force de Coriolis on aurait $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ et $\dot{z}_0 = -gt$

5. On a alors

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 2\Omega_T \cos \lambda g t \\ \ddot{y}_1 = 0 \\ \ddot{z}_1 = -g \end{cases}$$

Soit avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \Omega_T \cos \lambda g t^2 \\ \dot{y}_1 = 0 \\ \dot{z}_1 = -gt \end{cases}$$

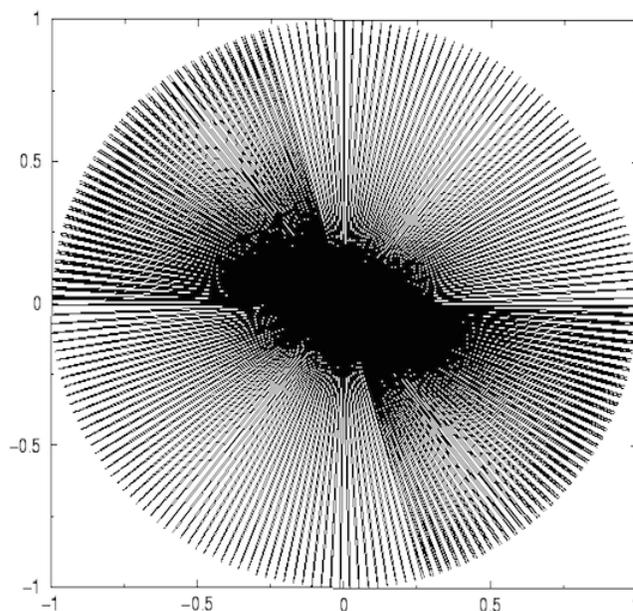
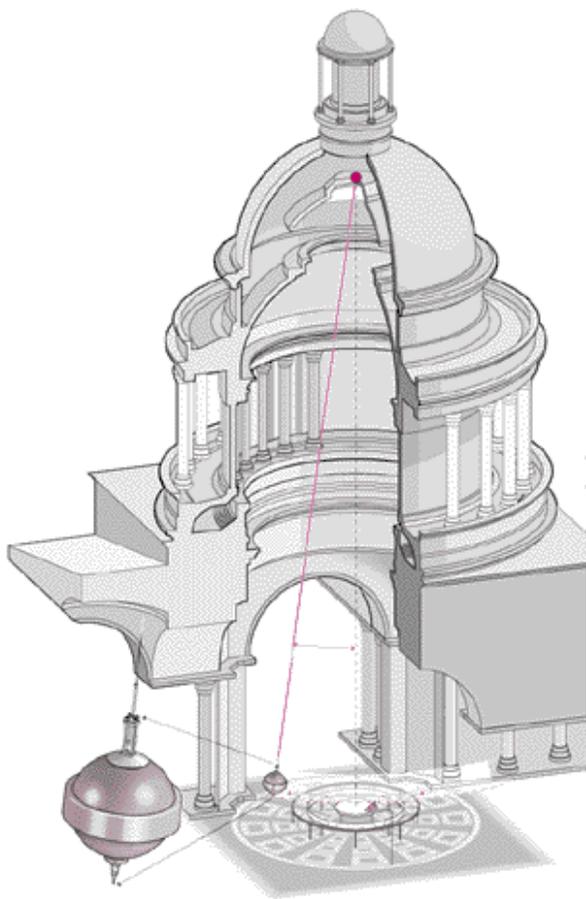
puis

$$\begin{cases} x_1 = \Omega_T \cos \lambda g \frac{t^3}{3} \\ y_1 = 0 \\ z_1 = h - g \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

Ainsi la bille touche le sol à l'instant $t = \sqrt{2h/g}$ et on a alors $x_1 = \frac{1}{3}\Omega_T \cos \lambda g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$

6. L'application numérique donne $x_1 = 27,6$ mm, ce qui est en excellent accord avec la mesure de Reich.
Remarque : on a en $z = 0$, $\dot{z}_1 = -\sqrt{2hg} \approx 55$ m.s⁻¹. La force de Coriolis reste très faible pendant toute la chute, ce qui justifie la méthode des perturbations.
7. On pourrait poursuivre la méthode des perturbations à l'ordre d'après, maintenant qu'on a un mouvement vers l'est ($\dot{x} \neq 0$) on va aussi avoir un mouvement selon y . Comme $\dot{x} > 0$, on aura $\ddot{y}_1 < 0$ et donc une très faible déviation vers le sud.
8. La latitude intervient par $\cos \lambda$, la déviation sera donc vers l'est aussi bien dans l'hémisphère sud que dans l'hémisphère nord.
-

Exercice 8 Pendule de Foucault



1. $\vec{\Omega}_T = \Omega_T(\cos \lambda \vec{u}_y + \sin \lambda \vec{u}_z)$ et $\vec{F}_{iC} = -2m\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}$ conduit à

$$\vec{F}_{iC} = 2m\Omega_T((\sin \lambda \dot{y} - \cos \lambda \dot{z})\vec{u}_x - \sin \lambda \dot{x}\vec{u}_y + \cos \lambda \dot{x}\vec{u}_z)$$

La tension du fil est colinéaire au fil donc $\vec{T} = -T\vec{AM}/\ell$. En écrivant le PFD à la masse m il vient :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -Tx/\ell + 2m\Omega_T(\sin \lambda \dot{y} - \cos \lambda \dot{z}) \\ m\ddot{y} = -Ty/\ell - 2m\Omega_T \sin \lambda \dot{x} \\ m\ddot{z} = -mg - T\frac{z-\ell}{\ell} + 2m\Omega_T \cos \lambda \dot{x} \end{cases}$$

Les oscillations étant de très faible amplitude on a : $z \ll x_0$, d'où $T \approx mg$ et $\dot{z} \ll \dot{x}$ conduit aussi à :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + 2\Omega_T \sin(\lambda) \frac{dy}{dt}$$

et

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega_0^2 y - 2\Omega_T \sin(\lambda) \frac{dx}{dt}$$

où $\omega_0^2 = g/\ell$.

2. Avec le changement de fonction proposé on aboutit à :

$$\ddot{u} + 2i\Omega_T \sin \lambda \dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

3. En supposant que la Terre ne tourne pas ($\Omega_T=0$), $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$ conduit à :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \end{cases}$$

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, $y(t) = A' \cos(\omega_0 t + \varphi')$; le point M décrit dans le cas général une ellipse avec une période

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

4. Dans le cas où la Terre tourne, on a $\ddot{u} + 2i\Omega_T \sin \lambda \dot{u} + \omega_0^2 u = 0$, $\Delta = -4\Omega_T^2 \sin^2 \lambda - 4\omega_0^2 \approx -4\omega_0^2$. Les racines du polynôme caractéristique sont $\underline{r} = -i\Omega_T \sin \lambda \pm i\omega_0$ et les solutions sont donc de la forme

$$\underline{u} = A \exp((-i\Omega_T \sin \lambda + i\omega_0)t) + B \exp((-i\Omega_T \sin \lambda - i\omega_0)t)$$

Les conditions initiales imposent $u(0) = x_0 = A+B$ et $\dot{u}(0) = 0$ conduit à $A \approx B$. Finalement $A \approx B \approx x_0/2$ soit $u(t) = x_0 \exp(-i\Omega_T \sin \lambda t) \cos \omega_0 t$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega_0 t \cos((\Omega_T \sin \lambda)t) \\ y(t) = -x_0 \cos \omega_0 t \sin((\Omega_T \sin \lambda)t) \end{cases}$$

5. L'existence de la rotation de la Terre implique que le plan de la trajectoire du point M tourne autour de l'axe vertical (Oz) par rapport aux axes fixés au sol avec la vitesse angulaire

$$\Omega = -\Omega_T \sin(\lambda)$$

En effet si on se place dans un référentiel tournant à la vitesse angulaire Ω par rapport au référentiel lié au sol, on peut calculer $x' = x \cos \Omega t + y \sin \Omega t = x_0 \cos \omega_0 t$ et $y' = 0$.

Aux pôles, $\sin \lambda = 1$ la rotation se fait à la vitesse de rotation de la Terre $\Omega = -\Omega_T$

Sur l'équateur $\sin \lambda = 0$ on n'observe pas de rotation du plan des oscillations.

6. Avec les valeurs de l'expérience du Panthéon à Paris, la période de rotation complète de l'ellipse est $T=31h 47min$.

Exercice 9 2001 l'Odyssée de l'espace

La rotation de l'anneau sur lui-même permet grâce à la force d'inertie d'entraînement de reproduire la gravité. Le plancher de la station est alors sur le rayon extérieur. Pour que les astronautes subissent une gravité équivalente à celle ressentie sur Terre il faut que la force centrifuge liée à la rotation de la station sur elle-même soit de l'ordre de g soit $R\omega^2 \approx g$. On veut par ailleurs que cette force soit à peu près uniforme (autorisons par exemple une variation de 10%) sur toute la hauteur $h \approx 3m$ de l'habitable. $h\omega^2 < g/10$. Ceci conduit à : $\omega < \sqrt{g/10h} \approx 0,58 \text{ rad.s}^{-1}$ soit $R > 10h = 30 \text{ m}$.



Si l'astronaute court, il est soumis à la force de Coriolis. Si il court dans le sens de rotation de l'anneau celui-ci semble plus lourd, comme soumis à une pesanteur $g + \delta g$ avec $\delta g \approx 2\omega v$. Si il court dans l'autre sens, il semblera plus léger. Pour limiter cette sensation à 10%g avec une vitesse de l'ordre de 3m.s^{-1} . On doit assurer que $2\omega v < g/10$, ce qui conduit à $\omega < g/20v = 0,17 \text{ rad.s}^{-1}$, soit encore $R > 360 \text{ m}$.

Exercice 10 Fusée

1. Dans le référentiel galiléen, on considère le système fermé {fusée+ masse de gaz $m(t)$ contenue dans la fusée à l'instant t }. Un bilan de quantité de mouvement en projection sur z entre les instants t et $t + dt$ conduit à :

$$\frac{dP_{tot}}{dt} = -(M + m(t))g$$

or $P_{tot}(t) = (m(t) + M)v(t)$

et $P_{tot}(t + dt) = (m(t) - D_m dt + M)v(t + dt) + D_m dt(v(t) + u)$.

Donc à l'ordre 1 : $dP_{tot} = P_{tot}(t + dt) - P_{tot}(t) = (m + M)(v(t + dt) - v(t)) + D_m dt u$, ce qui conduit à l'expression demandée :

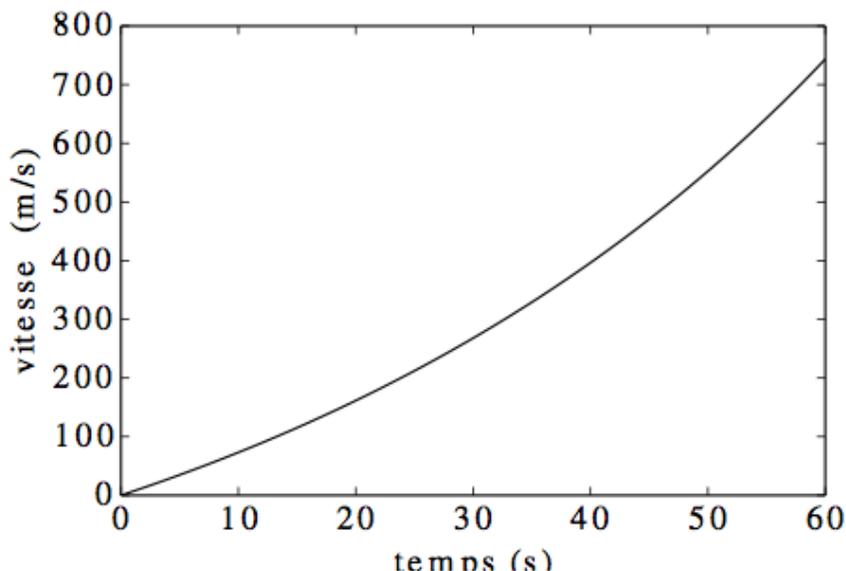
$$(m + M) \frac{dv}{dt} = -(M + m(t))g - D_m u$$

2. La fusée décolle, avec une accélération initiale de $6,6 \text{ m.s}^{-2}$, ce qui est supportable : les passagers ressentent un poids apparent de $1,67 g$ environ.
3. Avec $m(t) = m_0 - D_m t$ l'intégration de l'équation du mouvement conduit à

$$v(t) = -gt - u \ln \left(1 - \frac{D_m t}{M + m_0} \right)$$

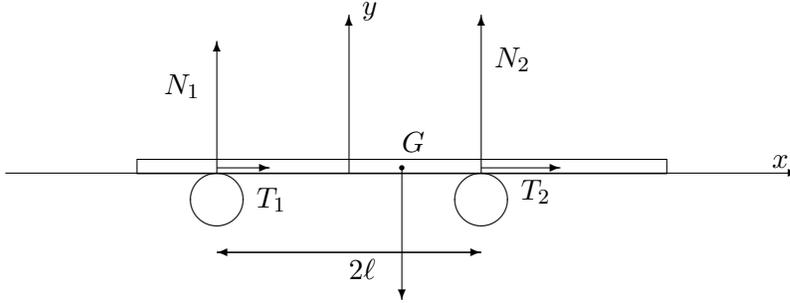
$v(15\text{s}) = 115 \text{ m.s}^{-1}$.

Plus la fusée est légère, plus l'accélération augmente.



2 Frottement solide

Exercice 11 Expérience de Timochenko



On suppose ici que $f_d = f_s = f$.

- Supposons tout d'abord que le rouleau de gauche tourne dans le sens horaire et le rouleau de droite dans le sens trigonométrique. A l'instant $t = 0$ on suppose que $x_G = a < 0$ et $\dot{x}_G = 0$. Il y a alors glissement sur les deux rouleaux.

La vitesse de glissement sur le rouleau de gauche est :

$$u_1 = 0 - R\omega < 0$$

La vitesse de glissement sur le rouleau de droite est :

$$u_2 = 0 - (-R\omega) = R\omega > 0$$

Ainsi

$$T_1 = +fN_1$$

et

$$T_2 = -fN_2$$

Il reste à déterminer N_1 et N_2 . Pour cela appliquons le PFD en projection selon y à la planche et le théorème du moment cinétique à la planche en G :

$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

$$N_1(\ell + x) = N_2(\ell - x)$$

N_1 et N_2 doivent être positives, et le contact n'est donc bien sûr possible que si $-\ell < x < \ell$.

On a donc :

$$N_2 = mg \frac{\ell + x}{2\ell}$$

et

$$N_1 = mg \frac{\ell - x}{2\ell}$$

soit finalement

$$T_2 = -fmg \frac{\ell + x}{2\ell}$$

et

$$T_1 = fmg \frac{\ell - x}{2\ell}$$

Le PFD appliqué à la planche s'écrit :

$$m\ddot{x} = T_1 + T_2 = -fmg\frac{x}{\ell}$$

On aboutit à l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec $\omega_0^2 = fg/\ell$. La solution de cette équation est :

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t)$$

et on a donc

$$\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t) = -a\sqrt{fg/\ell} \sin(\omega_0 t)$$

La vitesse de glissement sur le rouleau de gauche est :

$$u_1 = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t) - R\omega$$

La vitesse de glissement sur le rouleau de droite est :

$$u_2 = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t) + R\omega$$

Ces vitesses de glissement ne s'annulent jamais à condition que $a\omega_0 < R\omega$. On suppose cette condition vérifiée, il y a alors toujours glissement sur les deux rouleaux et l'équation du mouvement est toujours valable.

2. Le mouvement est alors périodique de période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{fg}}$$

La mesure de la période donne accès au coefficient de frottement.

Si la condition $a\omega_0 < R\omega$ n'est pas vérifiée il y aura alors une phase de glissement sur l'un des cylindres et de non glissement sur l'autre. Ici on aura non glissement à partir de l'instant t_1 tel que

$$u_2 = 0 = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t_1) + R\omega$$

Pour $t > t_1$ on a $\dot{x} = -R\omega$, donc $\ddot{x} = 0 = T_1 + T_2$ et ce tant que $|T_2| < fN_2$.

Or $T_2 = -T_1 = -fmg\frac{\ell-x}{2\ell}$ et $N_2 = mg\frac{\ell+x}{2\ell}$. Ainsi on a non glissement sur le rouleau de droite tant que $x > 0$. Lorsque la planche passe en $x = 0$ le glissement sur le cylindre de droite reprend, et on est ramené au cas précédent. Avec une origine des temps prise à cet instant pour lequel $x = 0$ et $\dot{x} = -R\omega$ on a ensuite $x(t) = -R\omega \sin(\omega_0 t)$ et il n'y plus de phase de non glissement puisque $-R\omega \leq \dot{x} \leq R\omega$.

Si les rouleaux tournent dans l'autre sens, les vitesses de glissement sont opposées et le PFD à la planche conduit à $m\ddot{x} = fmg\frac{x}{\ell}$, la planche ne peut pas rester entre les rouleaux, elle va tomber du système.

Exercice 12 Equilibre sur un plateau tournant

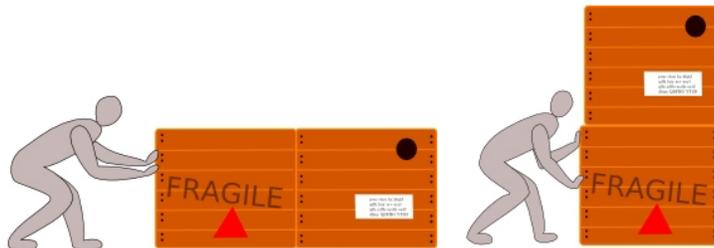
Dans le référentiel lié au plateau, on suppose le jeton immobile on aura donc :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = 0$$

donc $N = mg$ et $T = -m\omega^2 r$. Le jeton ne glisse pas si $|T| < fN$ ie $\omega^2 r < fg$.

Exercice 13 Comment pousser des caisses

C'est pareil la force à appliquer pour provoquer le mouvement est $f m_{tot} g$ sauf que dans le cas où les caisses sont empilées la caisse du haut risque de glisser sur la caisse du bas si l'accélération est trop importante.



Exercice 14 Règle qui tombe d'une table

TEC à la barre :

$$\Delta E_c = W_{frottement}$$

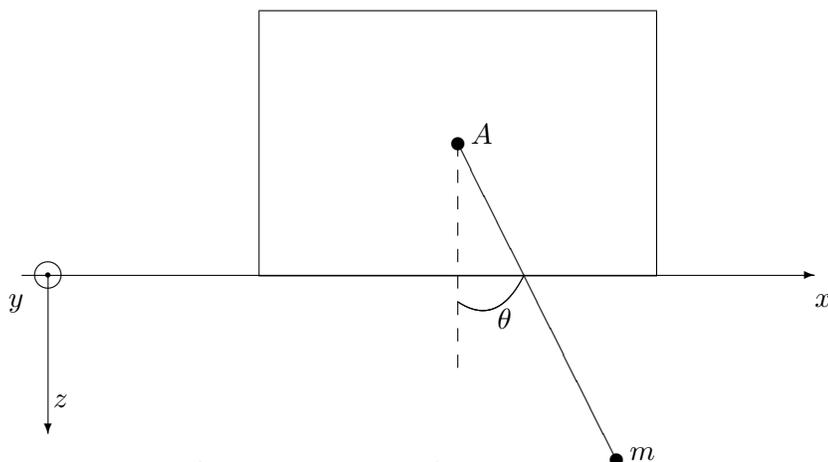
On suppose que la règle reste sur la table :

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 = -f m g d$$

où d est la distance parcourue. La règle reste sur la table à condition que $d < -x_0$ ie :

$$v_0^2 < -2x_0 f g$$

Exercice 15 Chariot et pendule



1. Le système {chariot + pendule} est soumis à son poids et à la force du sol sur le chariot, qui n'a qu'une composante normale puisqu'il n'y a pas de frottement. La projection sur x de la quantité de mouvement de ce système est donc constante. Dans le référentiel lié au chariot la vitesse du point matériel de masse m est $\vec{v}(m)/\mathcal{R}_{chariot} = \ell \dot{\theta} \vec{u}_\theta$. Dans le référentiel lié au sol elle vaut donc :

$$\vec{v}(m)/\mathcal{R}_{sol} = \ell \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{x} \vec{u}_x = (\ell \dot{\theta} \cos(\theta) + \dot{x}) \vec{u}_x - \ell \dot{\theta} \sin(\theta) \vec{u}_z$$

La projection selon x de la quantité de mouvement du système est donc : $M\dot{x} + m(\dot{x} + \ell \dot{\theta} \cos \theta) = cte$ On peut également écrire la conservation de l'énergie mécanique du système :

$$E_C(chariot) + E_C(pendule) + E_{pes}(pendule) = cte$$

soit :

$$\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m \left[(\dot{x} + \ell\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (\ell\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right] + mgl(1 - \cos \theta) = E$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + m\ell\dot{\theta} \cos \theta \dot{x} + mgl(1 - \cos \theta) = E_{mec}}$$

2. Si à $t = 0$ le pendule et le chariot sont immobiles, on a $M\dot{x} + m(\dot{x} + \ell\dot{\theta} \cos \theta) = 0$ soit

$$\dot{x} = -\alpha \ell \cos \theta \dot{\theta}$$

où $\alpha = m/(m + M)$.

On peut remarquer que si le chariot est très lourd alors $\alpha \approx 0$ et le chariot est alors presque immobile.

On injecte cette expression de \dot{x} dans la conservation de l'énergie mécanique pour obtenir :

$$E = m\ell^2 \left[\frac{\dot{\theta}^2}{2}(1 - \alpha \cos^2 \theta) + \frac{g}{\ell}(1 - \cos \theta) \right]$$

On dérive cette expression :

$$0 = \dot{\theta} \left[\ddot{\theta}(1 - \alpha \cos^2 \theta) + \alpha \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell} \sin \theta \right]$$

Dans le cas d'oscillations de faible amplitude on ne garde que les termes d'ordre 1 :

$$0 = \ddot{\theta}(1 - \alpha) + \frac{g}{\ell}\theta$$

On a des oscillations de pulsation ω avec :

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} \frac{m + M}{M} = \omega_0^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

On peut remarquer ici aussi que si le chariot est très lourd, il est immobile et on retrouve la pulsation du pendule de longueur ℓ , $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.

3. On suppose que le chariot ne glisse pas sur le sol. On a donc :

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

On suppose toujours les oscillations de faible amplitude.

Le PFD appliqué au chariot s'écrit :

$$0 = \vec{T} + \vec{N} + M\vec{g} + \vec{F}_{pendule \rightarrow chariot}$$

Le PFD appliqué au pendule s'écrit :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{g} - \vec{F}_{pendule \rightarrow chariot}$$

En sommant ces expressions on aboutit à :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{T} + \vec{N} + (M + m)\vec{g}$$

Or la quantité de mouvement du pendule est $\vec{P} = m\ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta = m\ell\dot{\theta}(\cos \theta \vec{u}_x - \sin \theta \vec{u}_z)$. On a donc :

$$N = (m + M)g - m\ell(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)$$

$$T = m\ell(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

On remplace dans ces expressions $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ par leurs expressions et on se limite à l'ordre 1 en θ_0 pour aboutir à :

$$N \approx (m + M)g$$

$$T \approx -m\ell\theta_0\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$

Le chariot ne glisse pas si $|T| < fN$ soit

$$f > \frac{m\theta_0}{m + M}$$

On constate bien sûr que plus le chariot est lourd plus il est difficile de le faire glisser.

Exercice 16 Mesure d'un coefficient de frottement

Méthode énergétique :

1. A quelle condition y a-t-il mouvement ?

On note F la tension du fil et $\vec{T} = T\vec{u}_x$ la composante tangentielle des actions de contact de la table sur le bloc. Le PFD appliqué à la masse M s'écrit :

$$M\ddot{x} = F + T$$

Supposons que la masse m est trop faible pour déclencher le glissement : on a alors $T = -F$. Or cette force se transmet à travers la poulie et on a donc aussi soit $F = mg$ et donc finalement $T = -mg$. La condition de non glissement du bloc sur la table est $|T| < fMg$. Il n'y aura donc pas de glissement tant que $mg < fMg$ ie tant que

$$m < fM$$

2. Méthode par le PFD :

Dans la première phase du mouvement, le fil est tendu et on a :

$$M\ddot{x} = F + T$$

avec $T = -fMg$ puisqu'il y a glissement. De plus, le PFD appliqué à la masse m s'écrit maintenant : $m\ddot{x} = mg - F$ donc $F = mg - m\ddot{x}$.

Remarque : on n'a pas $F = mg$, la tension du fil n'est pas égale au poids de la masse m car il n'y a plus équilibre

On a ainsi finalement :

$$(m + M)\ddot{x} = -fMg + mg$$

Dans cette première phase du mouvement on a une accélération constante :

$$\ddot{x} = a_1 = \frac{(m - fM)g}{m + M}$$

On retrouve le fait que l'accélération n'est positive que si $m > fM$. On intègre cette équation du mouvement : $v = a_1 t$ puis $x = \frac{1}{2} a_1 t^2$. Lorsque la masse a parcouru la distance h , on a donc $h = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$ la vitesse est alors :

$$v_1 = \sqrt{2ha_1}$$

La masse m touche le sol (il y a un choc qui doit dissiper l'énergie cinétique). Le fil n'est plus tendu et l'équation du mouvement de la masse M devient alors :

$$M\ddot{x} = -fMg$$

On a là encore une accélération constante.

$$\ddot{x} = -a_2$$

où $a_2 = fg$. On choisit une nouvelle origine des temps à l'instant t_1 , on a $v = v_1 - a_2t'$ puis $x - h = v_1t' - \frac{a_2}{2}t'^2$. Lorsque la masse M s'immobilise on a donc : $0 = v_1 - a_2t'$ soit $d = v_1t' - \frac{a_2}{2}t'^2 = \frac{v_1^2}{2a_2}$. On remplace v_1 par l'expression obtenue précédemment pour obtenir :

$$d = \frac{ha_1}{a_2} = \frac{h(m - fM)}{(m + M)f}$$

soit

$$f = \frac{hm}{Mh + d(m + M)}$$

Méthode énergétique :

Première phase du mouvement : TEC à l'ensemble des deux masses plus le fil plus la poulie (de masse nulle et en liaison pivot parfaite) entre l'instant initial et le moment où la masse m touche le sol :

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W_{\text{frottement}}$$

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 - mgh = -fMgh$$

d'où

$$v_1^2 = \frac{2(m - fM)gh}{m + M}$$

Deuxième phase du mouvement : TEC à la masse M :

$$\Delta E_c = W_{\text{frottement}}$$

$$-\frac{1}{2}Mv_1^2 = -fMgd$$

soit

$$v_1^2 = 2fgd$$

En égalisant ces deux expressions, on aboutit au même résultat que précédemment.

La vitesse acquise par la masse m lui donne de l'énergie cinétique et celle-ci est dissipée dans le choc.

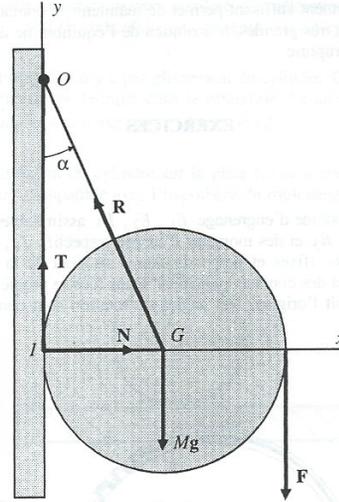
Exercice 17 Echelle contre un mur

Exercice 18 Arc-boutement : Dérouler du papier toilette

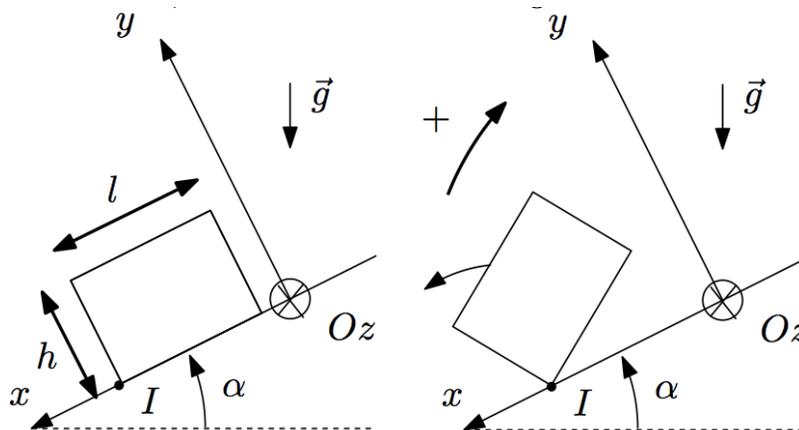
1. On a trois inconnues : R, T et N . A l'équilibre : $N - R \sin \alpha = 0$, $T + R \cos \alpha - Mg - F = 0$ et $Ta + Fa = 0$. On a donc $T = -F$, $R = (2F + Mg) / \cos \alpha$ et $N = (2F + Mg) \tan \alpha$.
2. Il n'y a pas de glissement tant que $F < f(2F + Mg) \tan \alpha$. A la limite du glissement, l'égalité conduit à

$$F_0 = Mg \frac{f \tan \alpha}{1 - 2f \tan \alpha}$$

3. F_0 est une fonction croissante de f qui diverge lorsque $f \rightarrow f_0$ avec $f_0 = 1/(2 \tan \alpha)$. Si $f > f_0$ on aura beau tirer aussi fort qu'on le peut, il sera impossible de provoquer le glissement.



Exercice 19 Basculement

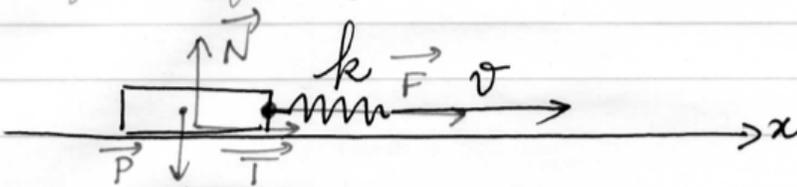


1. Si $\tan \alpha > f$, le bloc glisse. (sauf si il bascule avant !)
2. On suppose que le bloc commence à basculer. Il est donc tourné d'un angle $\varepsilon \ll \alpha$ et le contact avec le plan incliné ne se fait plus que sur l'arête. Le TMC par rapport à l'axe Iz indique que le bloc continue à basculer si son barycentre est passé au dessus de I (le moment du poids est alors négatif). La condition de basculement est donc $\tan \alpha > l/h$. On constate que plus le bloc est bas moins il est susceptible de basculer.
3. Ainsi la condition de glissement sans basculement s'écrit $f < \tan \alpha < l/h$ Elle n'est vérifiée que si $f < l/h$ le bloc doit donc vérifier $l > fh$ pour toutes les valeurs de f envisagées, soit $l > h$, il faut donc que le bloc soit plus large que haut. Pour $f=0,5$, il faut que $l > h/2$.

Exercice 20 Corde autour d'un cylindre

Exercice 21 Les tartines de beurre

Exercice 22 Régime fixe-glisse



1. $m\ddot{x} = kl + T$

en régime permanent $l = l_p$ et $\ddot{x} = 0$ $\left. \begin{array}{l} \dot{x} = v \\ T = -f_d mg \end{array} \right\}$

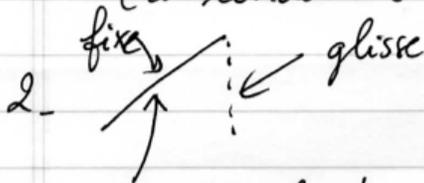
$$l_p = f_d \frac{mg}{k}$$

$l = l_p + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll l_p$ $l(t) = vt - x + c \frac{t^2}{2} = l_p + \varepsilon$

$m(\ddot{\varepsilon}) = k(l_p + \varepsilon) - f_d mg = k\varepsilon$

$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0 \rightarrow$ stable petite oscillations

(à condition que $\dot{x} = v - \dot{\varepsilon}$ ne s'annule pas).



$l(t) \rightarrow$ à la vitesse v

phase fixe : $0 = kl + T$

OK tant que $|T| \leq f_s mg$ ie $kl \leq f_s mg$

ie $l \leq \boxed{l_1 = \frac{f_s mg}{k}}$ \rightarrow on lit $\boxed{f_s = 0,37}$

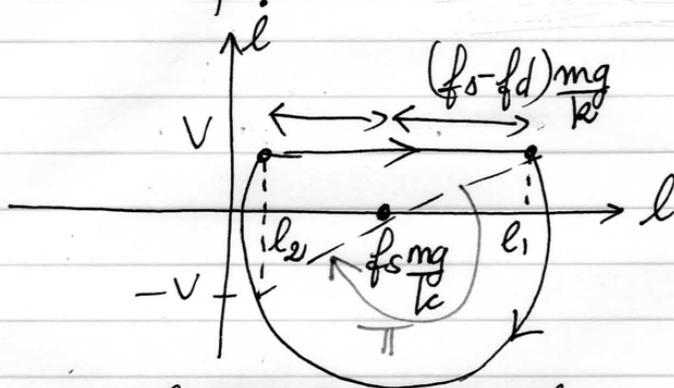
phase glisse: $m\ddot{x} = -m\ddot{l} = kl - f_d mg$

$\ddot{l} + \omega_0^2 l = f_d g \Rightarrow l(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + f_d g \frac{m}{k}$

or $l(0) = l_1 = \frac{f_s mg}{k}$ et $\dot{l}(0) = v \Rightarrow B \omega_0 = v$
 $A + \frac{f_d mg}{k} = l_1$

$l(t) = \left(\frac{f_s - f_d}{k} \right) mg \cos(\omega_0 t) + \frac{v}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{f_d mg}{k}$

s'arrête pour $\dot{l} = V$ on a alors $l = l_2$



on a la même longueur l_2 pour $\dot{l} = -V$
quand $\omega_0 t = \pi$

$$\rightarrow l_2 = f_d \frac{mg}{k} - (f_s - f_d) \frac{mg}{k}$$

$$\frac{k l_2}{mg} = 2 f_d - f_s \approx 0,31 \Rightarrow f_d = \frac{1}{2} \left[\frac{k l_2}{mg} + f_s \right] = \frac{1}{2} (0,31 + 0,37)$$

$$\boxed{f_d \approx 0,34 < f_s}$$

4. durée de la phase fixe: $\Delta t \approx \frac{l_1 - l_2}{V} \approx \frac{mg}{kV} (0,37 - 0,31)$
 $\Delta t \approx \frac{1,6 \times 9,8}{1,5 \cdot 10^4 \times 10 \times 10^{-6}} \times 0,06 \approx 6,3 \text{ s}$
 ↑ bon OG.

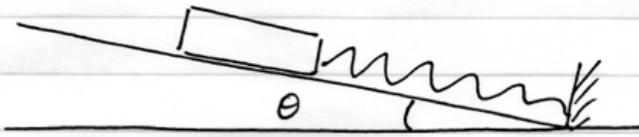
durée de la phase glisse: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$
 $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{1,6}{1,5 \cdot 10^4}} \approx 2\pi \cdot 10^{-2} \text{ s} \ll \Delta t$
 ↑ conforme au graphe

→ période $T_0 \approx \Delta t \approx 6,3 \text{ s}$

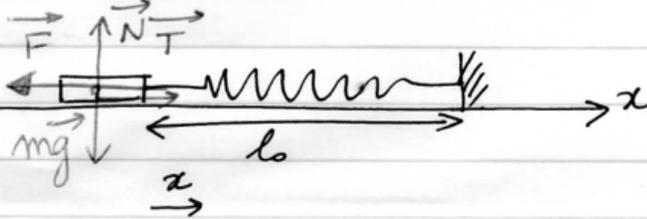
5. audible 20 Hz - 20 kHz $\Rightarrow T_0 \in \left[\frac{1}{20 \cdot 10^3} - \frac{1}{20} \right]$
 ie T_0 [50 μs; 50 ms]

augmenter $f \rightarrow$ ultrasons en coupant la raie

Exercice 23 Hystérésis de frottement



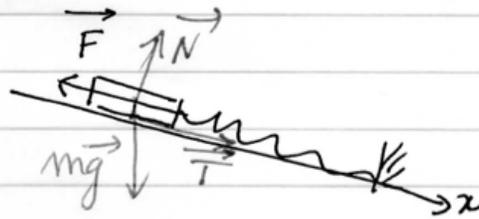
1. $\begin{cases} x=0 \\ \theta > 0 \end{cases}$ ressort détendu



$$F = -kx$$

$T = kx$ possible tant que $|kx| \leq f_s mg$

ie $|x| \leq f_s \frac{mg}{k}$



2. équilibre à l'angle θ

$$\begin{cases} N = mg \cos \theta \\ T - kx + mg \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Dans cette phase $x=0 \Rightarrow T = -mg \sin \theta$

\Rightarrow équilibre à cette position tant que $\tan \theta \leq f_s$

$$\tan \theta_1^+ \leq f_s$$

Mvt : $m\ddot{x} = T - kx + mg \sin \theta_1$

avec $T = -f_d N$ et $N = mg \cos \theta_1$

$$m\ddot{x} = -f_d mg \cos \theta_1 - kx + mg \sin \theta_1$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = g (\sin \theta_1 - f_d \cos \theta_1) \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin \omega_0 t + \frac{mg}{k} (\sin \theta_1 - f_d \cos \theta_1)$$

A $t=0$ $x=0$ et $\dot{x}=0$

$$\begin{cases} A + \frac{mg}{k} (\sin\theta_1 - f_d \cos\theta_1) = 0 \\ \omega_0 B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{mg}{k} (\sin\theta_1 - f_d \cos\theta_1) \\ B = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{mg}{k} (\sin\theta_1 - f_d \cos\theta_1) (1 - \cos\omega_0 t)$$

La masse s'arrête lorsque $\dot{x}=0 \rightarrow \sin\omega_0 t = 0$
 $x(t_1) = \frac{2mg}{k} (\sin\theta_1 - f_d \cos\theta_1) \rightarrow \cos\omega_0 t_1 = -1$

$$x_1 = \frac{2mg}{k} (\sin\theta_1 - f_d \cos\theta_1) = \frac{2mg}{k \sqrt{1+f_s^2}} (f_s - f_d)$$

La masse reste en équilibre en $x=x_1$ si $|T| \leq f_s N$

$$\begin{cases} T - kx_1 + mg \sin\theta_1 = 0 \Rightarrow T = kx_1 - mg \sin\theta_1 \\ N = mg \cos\theta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = mg (\sin\theta_1 - 2f_d \cos\theta_1) \\ T = mg \cos\theta_1 (\tan\theta_1 - 2f_d) \\ T = \frac{mg}{\sqrt{1+f_s^2}} (f_s - 2f_d) \end{cases}$$

$$\frac{|T|}{N} = \frac{|f_s - 2f_d|}{\sqrt{1+f_s^2}} = \frac{|2(f_s - f_d) - f_s|}{\sqrt{1+f_s^2}} = \frac{|f_s - 2(f_s - f_d)|}{\sqrt{1+f_s^2}} \leq f_s$$

3. $x=x_1$ reste la position d'équilibre tant que $|T| \leq f_s N$
 avec $N = mg \cos\theta$

et $T = +kx_1 - mg \sin\theta$ cond^e satisfaite

automatique pour $0 \leq \theta \leq \theta_1$

$$\text{Pour } \theta \leq 0 \quad T = kx_1 - mg \sin\theta \leq f_s mg \cos\theta$$

$$2mg (\sin\theta_1 - f_d \cos\theta_1) - mg \sin\theta \leq f_s mg \cos\theta$$

$$\frac{2}{\sqrt{1+f_s^2}} (f_s - f_d) - \sin\theta \leq f_s \cos\theta$$

$$|f_s - f_d| \ll \frac{>0}{f_s} \Rightarrow -\sin\theta \leq f_s \cos\theta \Rightarrow \tan\theta_2 = -f_s$$

$$\theta_2 = -\theta_1 \quad \text{à l'ordre 0}$$

• + précisément
$$2 \frac{(f_s - f_d)}{(\sqrt{1+f_s^2})^2} \leq \frac{\sin\theta + f_s \cos\theta}{\sqrt{1+f_s^2}}$$

$$2 \frac{f_s - f_d}{1+f_s^2} \leq \cos\theta_1 \sin\theta + \sin\theta_1 \cos\theta = \sin(\theta + \theta_1)$$

à l'ordre 1 en ε
$$\theta = -\theta_1 + 2 \frac{f_s - f_d}{1+f_s^2}$$

Equation du mouvement :
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + T + mg \sin\theta_2 \\ N = mg \cos\theta_2 = 0 \Rightarrow T = + f_d mg \cos\theta_2 \end{cases}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_d g \cos\theta_2 + g \sin\theta_2 = \frac{g}{\sqrt{1+f_s^2}} (f_d - f_s)$$

$$x(t') = A' \cos \omega_0 t' + B' \sin \omega_0 t' + \frac{mg}{k \sqrt{1+f_s^2}} (f_d - f_s)$$

$$t'=0 \quad \dot{x}(t'=0) = 0 \Rightarrow B' = 0$$

$$x(t'=0) = x_1 = \frac{2mg}{k \sqrt{1+f_s^2}} (f_s - f_d) = A' + \frac{mg (f_d - f_s)}{k \sqrt{1+f_s^2}}$$

$$x(t') = \frac{mg}{k} \frac{(f_s - f_d) [3 \cos \omega_0 t' - 1]}{\sqrt{1+f_s^2}} \Rightarrow A' = \frac{3mg (f_s - f_d)}{k \sqrt{1+f_s^2}}$$

Comme précédemment cette phase de glissement cesse lorsque $\dot{x} = 0$ $\sin \omega_0 t' = 0 \rightarrow \cos \omega_0 t' = -1$

$$x_2 = -4 \frac{mg}{k} \frac{(f_s - f_d)}{\sqrt{1+f_s^2}} = -2x_1$$

4 - Reste en x_2 à condition que $|\Pi| \leq f_s |N|$

avec $N = mg \cos\theta_2$

$$T = kx_2 - mg \sin\theta_2 = -4 mg \frac{(f_s - f_d)}{\sqrt{1+f_s^2}} + mg \frac{f_s}{\sqrt{1+f_s^2}}$$

$$T = \frac{mg}{\sqrt{1+f_s^2}} [f_s - 4(f_s - f_d)]$$

$$\frac{T}{N} = |f_s - 4(f_s - f_d)| \leq f_s \quad \dots \quad \frac{T}{N} = |f_s - 2n(f_s - f_d)|$$

La masse quitte x_2 pour $\theta_3 \geq \theta_1$
 $\ddot{x} + \omega_0^2 x = g(\sin\theta_1 - f_d \cos\theta_1)$ (cf 2.)
 $= \frac{g}{\sqrt{1+f_s^2}} (f_s - f_d)$

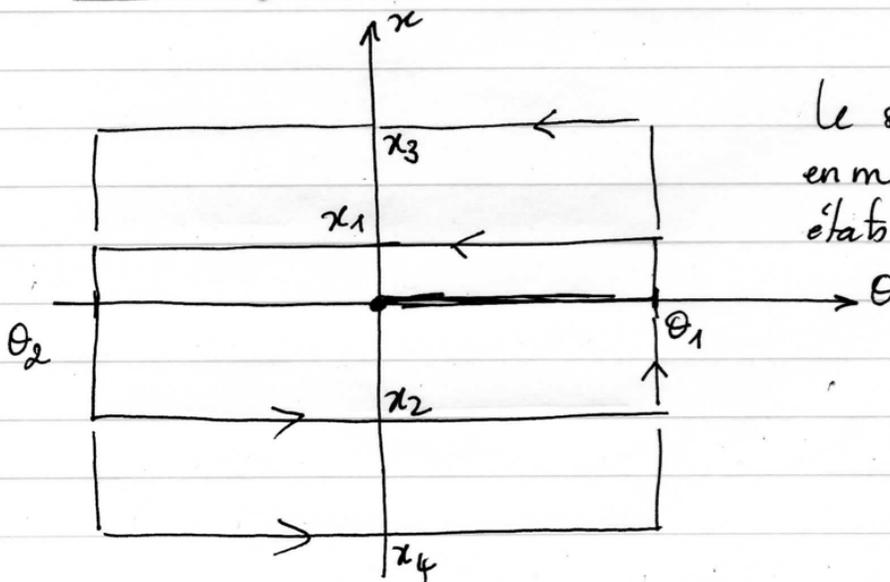
$$x(t) = A_3 \cos(\omega_0 t) + \frac{mg}{k\sqrt{1+f_s^2}} (f_s - f_d)$$

$$x(0) = x_2 = -2x_1 = A_3 + \frac{x_1}{2} \Rightarrow A_3 = -\frac{5}{2}x_1$$

Quand $\cos \omega_0 t = -1$ la masse cesse de glisser

$$x_3 = -A_3 + \frac{x_1}{2} = \frac{5}{2}x_1 + \frac{x_1}{2} = 3x_1$$

$$x_n = (-1)^{n+1} x_1 \quad \theta_n = (-1)^{n+1} \theta_1$$



Le système garde en mémoire ses états antérieurs.

modèle valable tant que $|f_s - 2n(f_s - f_d)| \leq f_s$
 $\Rightarrow 2n(f_s - f_d) - f_s \leq f_s$
 $\Rightarrow n \leq \frac{f_s}{f_s - f_d}$ - au delà la masse ne s'arrête pas en x_m

Exercice 24 Saut à l'élastique

3 Révisions de MPSI

Exercice 25 Bille sur un igloo

On note R le rayon de l'igloo et θ l'angle parcouru depuis le sommet. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos \theta = mgR$$

d'où $v = R\dot{\theta} = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}$. On applique le PFD à la pièce :

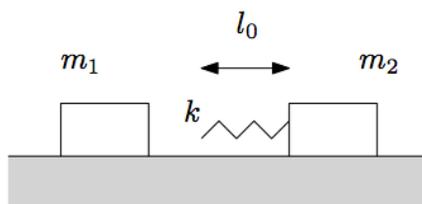
$$m\vec{a} = m\vec{g} + N\vec{u}_\theta$$

Soit avec $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_r - R\dot{\theta}^2\vec{u}_\theta$:

$$N = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2 = mg(3 \cos \theta - 2)$$

La pièce décolle de l'igloo lorsque N s'annule ie pour $\boxed{\cos \theta = 2/3}$

Exercice 26 Collision



1. Tant que les deux masses sont en contact avec le ressort, le PFD appliqué à la masse m_1 s'écrit :

$$m_1\ddot{x}_1 = -k(x_2 - x_1 - l_0)$$

et le PFD appliqué à la masse m_2 s'écrit :

$$m_2\ddot{x}_2 = k(x_2 - x_1 - l_0)$$

On a en sommant ces deux équations $m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$.

Notons $r = x_2 - x_1$, on a

$$\mu\ddot{r} = -k(r - l_0)$$

avec $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ la masse réduite et ce tant que la masse m_1 reste en contact avec le ressort. Durant cette phase on a

$$r(t) = l_0 - \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

où $\omega = \sqrt{k/\mu}$. La distance minimale entre les deux masses est donc $r_{min} = l_0 - \frac{v_0}{\omega}$

2. Le contact est rompu lorsque la force exercée par le ressort sur la masse m_1 s'annule soit lorsque $r(t) = l_0$ ie la première fois que $\sin \omega t = 0$ soit pour $\omega t = \pi$ on a alors :

$$\dot{r} = -v_0 \cos(\omega t) = +v_0 = v_2 - v_1$$

or on a aussi $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_0$. On en déduit, en notant $\alpha = m_1/m_2$:

$$v_1 = v_0 \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

$$v_2 = v_0 \frac{2\alpha}{\alpha + 1}$$

Exercice 27 puits de potentiel

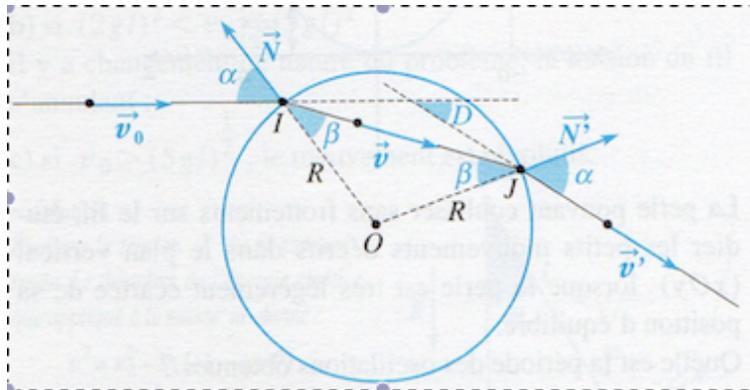
La force qui dérive de cette énergie potentielle est nulle partout sauf sur la discontinuité en $r = R$ où elle est infinie. La trajectoire est donc rectiligne par morceaux. Par ailleurs l'énergie potentielle est négative dans la sphère, c'est une interaction attractive.

Si $b > R$ la particule n'est pas déviée puisque elle va rester dans une zone de l'espace où l'énergie potentielle est uniforme donc la force nulle.

Si $b < R$, la particule est déviée lorsqu'elle pénètre dans la sphère de rayon R . Le potentiel ne dépend que de r on a une force centrale, ie le moment cinétique de la particule par rapport à O se conserve au cours du mouvement. Si on note a la distance la plus faible par rapport à O , $v_0 b = v_1 a$. Que l'on peut aussi écrire en utilisant les angles d'incidence α et de réfraction β , $v_0 \sin \alpha = v_1 \sin \beta$: la quantité de mouvement selon \vec{u}_θ se conserve puisque la force est radiale.

Par ailleurs la conservation de l'énergie mécanique s'écrit : $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - U_0$ donc $v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2U_0}{m}}$ on a donc

$$\sin \alpha = \sqrt{1 + \frac{2U_0}{m v_0^2}} \sin \beta$$



La particule est déviée d'un angle $D = 2(\alpha - \beta)$.

On peut faire une analogie avec les lois de la réfraction en optique géométrique. Si on décide que l'indice est 1 pour $r > R$ alors il vaut $n = \sqrt{1 + \frac{2U_0}{m v_0^2}}$ à l'intérieur de la sphère.

Exercice 28 Orbite de transfert

1. $2a = 2R_T + h + h'$ AN : Avec $R_T = 6400$ km, $a = 24700$ km.
2. La troisième loi de Kepler donne la relation entre le demi grand axe et la période pour toutes les orbites : $\frac{T^2}{a^3} = cte$. En appliquant cette loi pour l'orbit (H) et sur l'orbite géostationnaire on obtient ainsi la durée du transfert $T_H/2$:

$$\boxed{\frac{T_H}{2} = \frac{T_{geo}}{2} \left(\frac{a}{R_T + h'} \right)^{3/2}}$$

Avec $T_{geo} = 24$ h, on obtient $T_H/2 = 5$ h 20 min

3. Sur l'orbite basse

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{R_T + h}}$$

sur l'orbite haute

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{R_T + h'}}$$

AN : $v_1 = 7,77$ km.s⁻¹, $v_2 = 3,08$ km.s⁻¹. Moteur éteint l'orbite de transfert est décrite sans apport d'énergie. La conservation de l'énergie mécanique sur la demi-ellipse de transfert s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{\mathcal{G}mM}{R_T + h} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{\mathcal{G}mM}{R_T + h'} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2a}$$

La conservation du moment cinétique s'écrit $v_A(R_T + h') = v_P(R_T + h)$. On déduit de ces deux équations de conservation :

$$v_P = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M(R_T + h')}{(R_T + h)a}}$$

et

$$v_P = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M(R_T + h)}{(R_T + h')a}}$$

$v_P = 10,2$ km.s⁻¹ et $v_A = 1,60$ km.s⁻¹. On constate bien qu'il faut allumer le moteurs pour augmenter brutalement l'énergie cinétique (sans changement d'énergie potentiel) du satellite pour le faire changer d'orbite aux points P puis A .

4. L'énergie fournie par le moteur par kg de satellite pour changer de vitesse est exactement égale à la variation d'énergie mécanique du satellite entre l'orbite basse et l'orbite haute

$$\frac{\Delta E_m}{m} = \frac{\mathcal{G}M}{2} \left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T + h'} \right)$$

5. On ne peut pas passer de l'orbite basse à l'orbite haute en fournissant moins que ΔE_m .
-

Exercice 29 Pendule

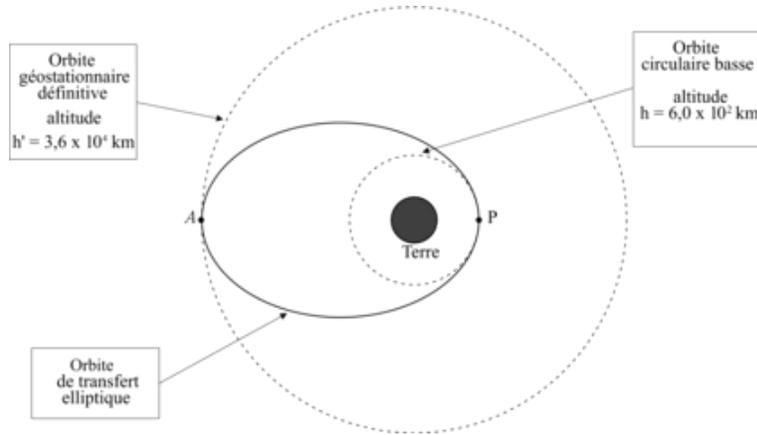


FIGURE 1 – Orbite de transfert

1. $OM + BM = 2a$: Le point M est sur une ellipse de foyers O et B .

Notons $(x, 0, z)$ les coordonnées du point M .

Le cas où $h=0$ est évident, par symétrie du problème, la perle se trouve au milieu, on a donc $x = D/2$ et donc z tel que $x^2 + z^2 = a^2$.

La longueur du fil est constante, on a donc la relation suivante entre les coordonnées x et z du point M :

$$2a = \sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{(D-x)^2 + (z-h)^2} = cte$$

On peut dériver cette expression pour obtenir :

$$\frac{2x + 2zdz/dx}{2\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{-2(D-x) + 2(z-h)dz/dx}{2\sqrt{(D-x)^2 + (z-h)^2}} = 0$$

Lorsque le point M est à sa position d'équilibre, z est maximum et on a alors $\frac{dz}{dx} = 0$ soit :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{(D-x)}{\sqrt{(D-x)^2 + (z-h)^2}}$$

Ceci traduit le fait que les angles que font la corde avec la verticale est le même de chaque côté de la perle.

2. On vérifie que pour $h=0$, on retrouve

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{(D-x)}{\sqrt{(D-x)^2 + z^2}}$$

soit $x = D - x$, on a alors en effet $x = D/2$.

Le résultat précédent peut aussi se retrouver en disant que le résultat est inchangé si on allonge le fil jusqu'à avoir B à la hauteur de O , on se retrouve alors dans le cas symétrique et les angles entre le fil et la verticale sont donc égaux.

3. Dans le cas où $h=0$, on choisit l'origine du système de coordonnées au milieu des deux points d'attache du fil. L'équation de l'ellipse sur laquelle se déplace le point M a alors pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

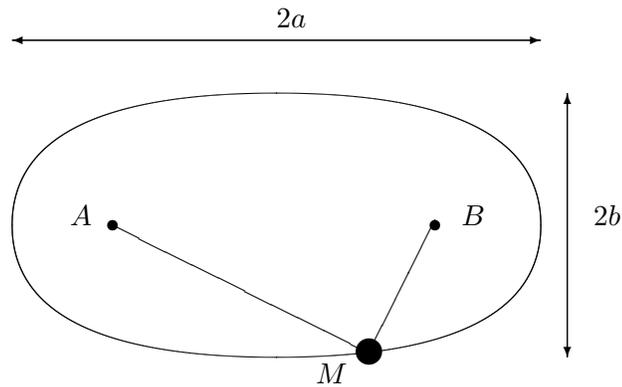
avec b le demi-petit axe de l'ellipse donné par $(D/2)^2 + b^2 = a^2$ (expression obtenue lorsque M est au point le plus bas). On a donc finalement

$$z = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit :

$$E_p = -mgz = -mgb\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

On vérifie bien sûr aisément que l'énergie potentielle est minimale pour $x=0$.



Pour des oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre, on peut écrire

$$E_p \approx -mgb\left(1 - \frac{x^2}{2a^2}\right)$$

L'énergie cinétique de la perle est $E_c = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)$, soit avec $\dot{z} = \dot{x} \times dz/dx$,

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right)$$

Au voisinage de la position d'équilibre, on a $dz/dx \approx 0$, donc $E_c \approx \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

Finalement la conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

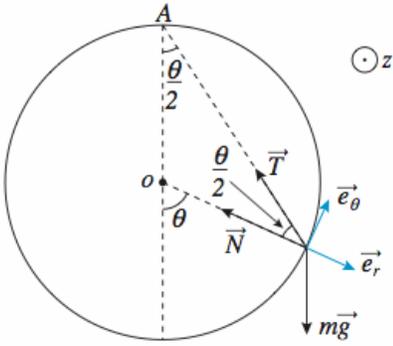
$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgb\left(1 - \frac{x^2}{2a^2}\right) = Cte$$

Et on aboutit en dérivant à l'équation du mouvement : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ où $\omega^2 = gb/a^2$.

Dans le cas où $D \ll 2a$, les deux points d'attache du fil sont pratiquement confondus et on a alors un pendule simple de longueur a , qui doit donc osciller à la pulsation ω_0 telle que $\omega_0^2 = g/a$. Or $b = \sqrt{a^2 - (D/2)^2} \approx a$ lorsque $D \ll 2a$. On retrouve donc le résultat attendu.

Exercice 30 Oscillateurs couplés

Exercice 31 Rappel élastique

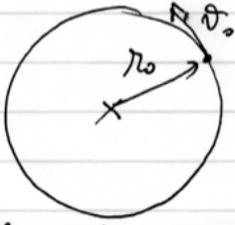


La réaction du support étant normale au cercle, on peut l'éliminer :

- en utilisant la relation fondamentale de la dynamique, en projection sur \vec{e}_θ ;
- en appliquant le théorème du moment cinétique au point fixe O , car \vec{N} "passe par O " ;
- en utilisant la conservation de l'énergie mécanique, le poids et la traction \vec{T} de l'élastique dérivant d'une énergie potentielle, la réaction \vec{N} ne travaillant pas (normale à tout instant à la vitesse de la masselotte).

Exercice 32 Champ de force en $1/r^n$

1.



$$-m \frac{v_0^2}{r_0} = F(r_0)$$

2. Selon \vec{u}_r $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$

$$\text{or } r^2 \dot{\theta} = C = r_0^2 \dot{\theta}_0 = r_0 v_0 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{r_0 v_0}{r^2}$$

$$\ddot{r} - \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} = F(r)$$

$$\text{On pose } r = r_0 + \varepsilon \left. \begin{array}{l} \ddot{\varepsilon} - \frac{r_0^2 v_0^2}{(r_0 + \varepsilon)^3} = \frac{F(r_0 + \varepsilon)}{m} \end{array} \right\}$$

$$\ddot{\varepsilon} - \frac{r_0^2 v_0^2}{r_0^3} \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{r_0} + o\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)\right) = \frac{F(r_0)}{m} + \frac{1}{m} \frac{dF(r_0)}{dr} \varepsilon + o(\varepsilon)$$

$$\ddot{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{m} \left[\frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0) \right] = 0$$

stable si $F(r_0) + 3F'(r_0) < 0$

$$3. \text{ Si } F(r) = \frac{\sqrt{k}}{r^n} \text{ attractive } r_0 \quad k > 0 \quad \frac{mk}{r_0^{n+1}} - \frac{3k}{r_0^{n+1}} < 0$$

$$n-3 < 0$$

gravitation $n=2$ ok!**Exercice 33** Avance du périhélie de Mercure**Préliminaire**

1.

$$\vec{A} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}}{\alpha} - \vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \frac{\vec{L}}{\alpha} - \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

or $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\alpha}{m} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$, $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $L = mr^2 \dot{\theta}$ donc :

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = 0}$$

Le vecteur \vec{A} de Runge-Lenz se conserve au cours du mouvement. On choisit arbitrairement l'axe des x pour que $\vec{A} = A\vec{e}_x$ avec $A > 0$.

$$\vec{r} \cdot \vec{A} = rA \cos(\theta) = \frac{r^2 \dot{\theta} L}{\alpha} - r = \frac{L^2}{m\alpha} - r$$

On en déduit immédiatement :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$$

avec $p = \frac{L^2}{m\alpha} = \frac{L^2}{GM_0 m^2}$ et $e = A$.

2.

$$p = \frac{2r_A r_P}{r_A + r_P}$$

Avance du périhélie

3. Pour pouvoir traiter V_P comme une perturbation, on doit avoir : $V_P \ll V$ soit $\frac{GM_0 L^2}{c^2 m r^3} \ll \frac{GM_0 m}{r}$ or $L \approx mrv$. L'approximation est donc valable à condition que $v^2 \ll c^2$.

On calcule pour la Terre $v_T = \frac{2\pi R_T}{T_T} \approx 30$ km/s et pour Mercure, en utilisant la troisième loi de Kepler

$\frac{T_T^2}{R_T^3} = \frac{T_M^2}{R_M^3}$ on aboutit à : $v_M = v_T \left(\frac{T_T}{T_M}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 50$ km/s. Et on conclut que l'approximation est donc valide.

4. On a toujours $V = V(r) + V_P(r)$, la force est une force centrale, le moment cinétique \vec{L} se conserve.

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \frac{\vec{L}}{\alpha} - \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Avec maintenant, $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\alpha}{m} \frac{\vec{e}_r}{r^2} - \frac{\epsilon}{mr^4} \vec{e}_r$, on aboutit à :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\epsilon \dot{\theta}}{GmM_0 r^2} \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\epsilon(1 + e \cos \theta)^2}{GmM_0 p^2} \dot{\theta} (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y)$$

On intègre cette expression sur une "période" :

$$\Delta \vec{A} = \frac{\epsilon}{GmM_0 p^2} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \theta)^2 \cos \theta d\theta \vec{e}_y$$

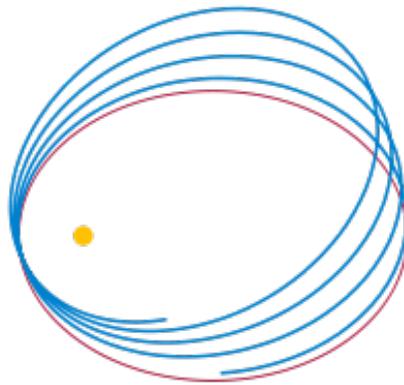
Et avec l'indication donnée dans l'énoncé on aboutit à :

$$\Delta \vec{A} = \frac{\epsilon}{GmM_0 p^2} 2e\pi \vec{e}_y$$

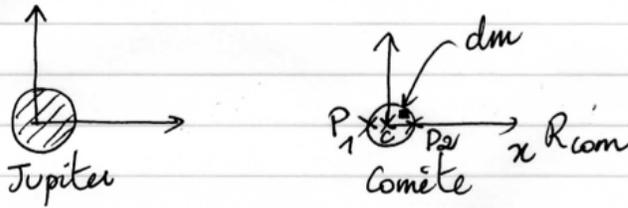
On a donc une petite variation de la direction de l'axe de l'ellipse au cours du temps. En une période la direction de \vec{A} a tourné d'un angle $\Delta\varphi$ tel que $\tan \Delta\varphi = \frac{\|\Delta \vec{A}\|}{\|\vec{A}\|} = \frac{2\pi\epsilon}{GmM_0 p^2} = \frac{6\pi GM_0}{c^2 p}$.

$$\Delta\varphi \approx \tan \Delta\varphi = \frac{3\pi GM_0}{c^2} \frac{r_A + r_P}{r_A r_P}$$

5. En un siècle le grand axe de l'ellipse a tourné de : $\delta\Omega = 100 \frac{T_0}{T} \Delta\varphi = 2.10^{-4}$ rad = 43,1 secondes d'arc. La mesure concorde avec ce calcul !



Exercice 34 Limite de Roche



Dans R_{com} , la masse dm autour d'un point P est soumise à :

- * l'attract^o gravitationnelle de la Comète
- * celle de Jupiter
- * la force d'inertie d'entraîn^t.

$$\bullet \quad dm \vec{a}(P/R_{com}) = dm \vec{G}_{Com}(P) + dm \vec{G}_{Jup}(P) - dm \vec{a}_e$$

où $\vec{a}_e = \vec{a}(C/R_J)$

• Dans R_{Jup} supposé galiléen
 $M_c \vec{a}(C/R_{Jup}) = M_c \vec{G}_{Jup}(C)$

$$\vec{a}(P/R_{com}) = \vec{G}_{Com}(P) + \underbrace{\vec{G}_{Jup}(P) - \vec{G}_{Jup}(C)}_{\text{terme de marée}}$$

$$G_{Com}(P) = G \frac{M_c}{R_c^2}$$

$$\vec{G}_{Jup}(P) - \vec{G}_{Jup}(C) = GM_J \left[\frac{-1}{(d+R_c)^2} + \frac{1}{d^2} \right] \vec{u}_x$$

$$\approx GM_J \frac{(2d+R_c)R_c}{d^4} \approx \frac{2GM_J R_c}{d^3}$$

Cohésion assurée si $\frac{M_c}{R_c^2} > \frac{2M_J R_c}{d^3} \Rightarrow d > \left(\frac{2M_J}{M_c} \right)^{\frac{1}{3}} R_c$

$$d_{lim} = \left(\frac{2M_J}{M_c} \right)^{\frac{1}{3}} R_J \longrightarrow d_{lim} = 1,36 R_J = 97000 \text{ km}$$

soit $h = d_{lim} - R_J = 0,36 R_J = 25500 \text{ km}$