

Corrigé DS 3

Le vendredi 24 novembre 2023

Problème 1 : Bilan thermique dans une lampe à incandescence



Problème 2 : Jean PERRIN et l'hypothèse atomique

Problème 1 : Bilan thermique dans une lampe à incandescence

I.C - Evolution de la température au voisinage des points de fixation

I.C.1) La tige métallique est un très bon conducteur thermique (λ élevé), ce qui explique que la température y est quasiment uniforme.

On peut remarquer par ailleurs que la section étant beaucoup plus large que celle du filament l'effet Joule y a un effet bien moindre et la température y est donc beaucoup plus faible.

I.C.2) En régime permanent, l'énergie contenue entre les sections x et $x + dx$ est constante : la somme des puissances reçues est nulle.

$$j(x)S - j(x + dx)S + \rho \frac{dx}{S} I^2 - \sigma_1 T^4(x) 2\pi r dx = 0$$

Avec $S = \pi r^2$, en utilisant la loi de Fourier et en supposant λ indépendant de la température, on aboutit à :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{2}{r} \sigma_1 T^4 - \frac{\rho}{(\pi r^2)^2} I^2 \right)$$

I.C.3) On a bien :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{T^4 - T_0^4}{\delta^2 T_0^3} = 0$$

où

$$T_0^4 = \frac{\rho I^2 r}{2\sigma(\pi r^2)^2}$$

On constate bien sûr que la température du filament est une fonction croissante du courant qui le traverse et une fonction décroissante du rayon du filament, ce qui explique que l'on choisit un filament fin pour fabriquer une lampe (ou un grille pain).

$$\frac{2\sigma_1}{\lambda r} = \frac{1}{\delta^2 T_0^3}$$

On a donc :

$$\delta = \left(\frac{\lambda r}{2\sigma_1 T_0^3} \right)^{1/2}$$

A.N. : $\delta = 2,8$ mm

I.C.4) En multipliant par dT/dx l'équation vérifiée par T on a :

$$\frac{dT}{dx} \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{dT}{dx} \frac{T^4}{\delta^2 T_0^3} + \frac{dT}{dx} \frac{T_0^4}{\delta^2 T_0^3} = 0$$

On intègre cette équation entre $x = 0$ (où $T = T_V$) et $x \rightarrow \infty$ (où $T = T_0$ et $dT/dx = 0$) :

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0}^2 = \frac{T_0^5 - T_V^5}{5\delta^2 T_0^3} - \frac{T_0^4}{\delta^2 T_0^3} (T_0 - T_V)$$

En tenant compte du fait que $T_V \ll T_0$, on aboutit à :

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0}^2 \approx \frac{8T_0^2}{5\delta^2}$$

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} \approx \gamma \frac{T_0}{\delta}$$

avec $\gamma = 2\sqrt{2}/5 = 1,26$.

La température passe de T_V à T_0 sur une longueur de l'ordre de $d \approx \delta/\gamma \approx 2 \text{ mm} \ll L$. On peut donc considérer avec une bonne approximation que la température du filament est T_0 sur toute sa longueur.

I.C.5) La puissance thermique cédée par le filament à la tige support par conduction au niveau de la section $x = 0$ est donnée par :

$$\mathcal{P}_{ther} = -\pi r^2 j(x=0) = \pi r^2 \lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} \approx \pi r^2 \lambda \gamma \frac{T_0}{\delta}$$

et la puissance totale rayonnée par le filament dans les conditions normales est à peu près :

$$\mathcal{P}_r \approx \sigma_1 T_0^4 \times 2\pi r L$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\mathcal{P}_{ther}}{\mathcal{P}_r} \approx \frac{\gamma \delta}{L}$$

A.N. : $\frac{\mathcal{P}_{ther}}{\mathcal{P}_r} \approx 9 \%$, ce qui n'est tout de même pas négligeable (d'autant qu'il y a les mêmes pertes en $x = L$). La puissance fournie à l'ampoule est donc en grande partie perdue par conduction au niveau des contacts avec le support. Le reste est rayonné, mais malheureusement en grande partie dans l'infrarouge et donc encore inutile ! Une ampoule à filament est (comme un grille pain), un bon système de chauffage mais un mauvais éclairage en terme de rendement.

I.C.6) Pour augmenter la puissance à température et rayon du filament constant, il faut augmenter la longueur du filament. On constate effectivement que le rapport $\frac{\mathcal{P}_{ther}}{\mathcal{P}_r}$ diminue quand L augmente.

Partie II : Lampe à incandescence en régime sinusoïdal forcé à basse fréquence

II.A - Etude théorique de l'évolution périodique de la température

II.A.1) Equation d'évolution de la température

- $dH = mc_p dT$
- $dH = \mathcal{P}_e(t)dt - \mathcal{P}_r(t)dt$ avec $\mathcal{P}_e = u_a(t)i(t)$ et $u_a(t) = R_0 i(t)$, on a $\mathcal{P}_e = u_a^2(t)/R_0$. On écrit $T = T_0 + \theta$ et on aboutit à :

$$mc_p \frac{d\theta}{dt} = \frac{u_a^2}{R_0} - 2\pi r L \sigma_1 (T_0 + \theta)^4 \quad (1)$$

II.A.2) $\langle \theta \rangle = 0$

On prend la valeur moyenne de l'équation précédente pour obtenir :

$$mc_p \left\langle \frac{d\theta}{dt} \right\rangle = \frac{\langle u_a^2 \rangle}{R_0} - 2\pi r L \sigma_1 \langle (T_0 + \theta)^4 \rangle$$

or $(T_0 + \theta)^4 = T_0^4 + 4T_0^3(\theta + o(\theta))$ car $\theta \ll T_0$. A l'ordre 1 en θ on a donc $\langle (T_0 + \theta)^4 \rangle \approx T_0^4$.
De plus :

$$\left\langle \frac{d\theta}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{1}{\tau} (\theta(\tau) - \theta(0)) = 0$$

On a donc finalement :

$$0 = \frac{u_{aRMS}^2}{R_0} - 2\pi r L \sigma_1 T_0^4$$

$$\boxed{T_0^4 = \frac{u_{aRMS}^2}{R_0(2\pi r L \sigma_1)}}$$

On trouve, fort heureusement, une température du filament qui croît avec la valeur efficace de la tension.

II.A.3) Filament alimenté par une tension sinusoïdale

1. $\mathcal{P}_e = \frac{u_a^2(t)}{R_0} = \frac{U_a^2}{R_0} (\cos \omega t + 1)$
2. L'équation (1) peut être linéarisée. La linéarité implique le fait que l'excitation à la pulsation ω conduit à des oscillations de température à la même pulsation.
3. L'équation (1) linéarisée en tenant compte de $\theta \ll T_0$ conduit à :

$$m c_p \frac{d\theta}{dt} = \frac{u_a^2}{R_0} - 2\pi r L \sigma_1 (T_0^4 + 4T_0^3 \theta) \quad (2)$$

On passe en notation complexe avec $\theta(t) = \text{Re}(\underline{\theta} \exp(i\omega t))$ pour obtenir :

$$m c_p i \omega \underline{\theta} \exp(i\omega t) = \frac{U_a^2}{R_0} (1 + \exp(i\omega t)) - 2\pi r L \sigma_1 T_0^4 - 8\pi r L \sigma_1 T_0^3 \underline{\theta} \exp(i\omega t)$$

On retrouve pour le terme constant :

$$T_0^4 = \frac{U_a^2}{R_0(2\pi r L \sigma_1)}$$

et pour le terme en $\exp(i\omega t)$ on aboutit à :

$$\underline{\theta} = \frac{\theta_0}{1 + i \frac{\omega}{\omega_C}}$$

avec

$$\theta_0 = \frac{U_a^2}{T_0^3 R_0 8\pi r L \sigma_1} = \frac{T_0}{4}$$

et

$$\omega_C = \frac{8\sigma T_0^3}{r \mu c_p}$$

4. Il s'agit d'un filtre passe-bas d'ordre 1. On constate effectivement que ω_C ne dépend pas de la longueur du filament. On a

$$\theta_m = \frac{T_0/4}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_C)^2}}$$

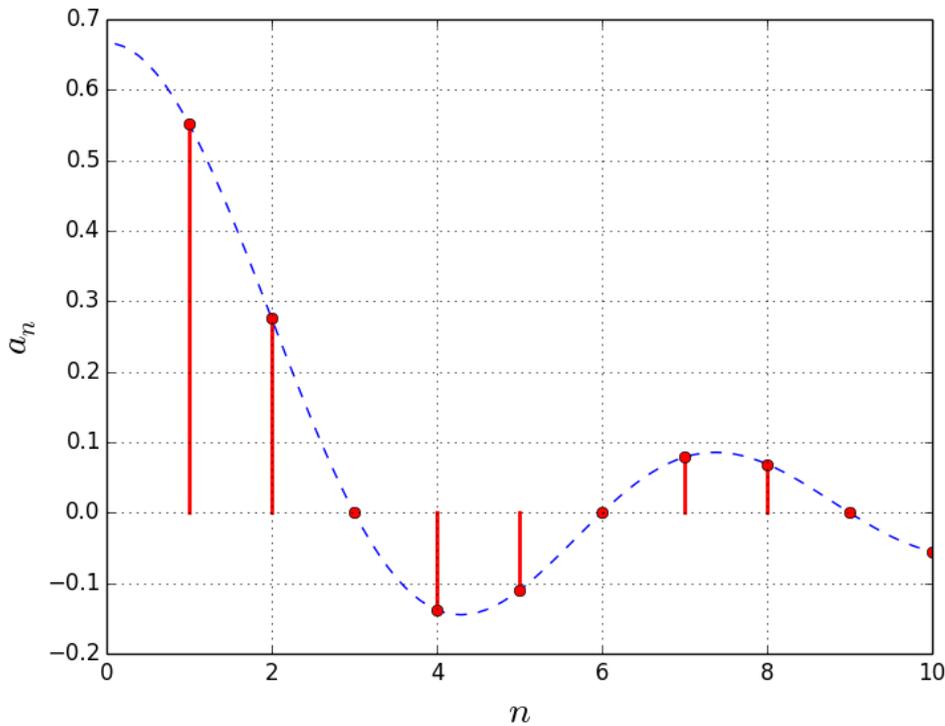
La condition $\theta_m < T_0/10$ conduit à $\boxed{\omega > \omega_C \sqrt{21}/2}$.

5. A.N. : $\nu_C=2,45$ Hz. Cette fréquence très basse implique qu'à la fréquence de 50 Hz les oscillations de température du filament sont tout à fait négligeables, le filament est donc à la fois à température uniforme sur toute sa longueur et à température constante au cours du temps. La température moyenne du filament est déterminée par la puissance électrique moyenne fournie.

II.B - Modulation de l'intensité lumineuse par largeur d'impulsion

II.B.1) Une variation de α produit une variation de la puissance moyenne fournie, donc de la température moyenne et donc de l'intensité lumineuse émise.

II.B.2) $a_0/2$ est la valeur moyenne de $u_a(t)$. On a donc $a_0/2 = \alpha U$
 La fonction $u_a(t)$ est paire : tous ses coefficients b_n sont nuls.



On constate que pour $\alpha = 1/3$, tous les a_{3p} sont nuls. On peut remarquer que la formule proposée pour les a_n est également valable pour $n = 0$.

II.B.3) La fonction $P_e(t)$ est, comme $u_a(t)$, périodique de période τ et définie entre $-\tau/2$ et $\tau/2$ par :

$$\begin{cases} P_e(t) = \frac{U^2}{R_0} & \text{pour } |t| < \frac{\alpha\tau}{2} \\ P_e(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$P_e(t)$ a donc exactement la même décomposition en série de Fourier que $u_a(t)$, en remplaçant U par U^2/R_0 . Soit

$$P_0 = \alpha \frac{U^2}{R_0} \quad \text{et} \quad P_n = \frac{2U^2}{n\pi R_0} \sin(n\alpha\pi)$$

II.B.4) D'après l'équation (1) linéarisée dans le cas de faibles écarts de température par

rapport à la température moyenne, on a :

$$m c_p \frac{d\theta}{dt} = P_e(t) - 2\pi r L \sigma_1 (T_0^4 + 4T_0^3 \theta) \quad (3)$$

On passe en notation complexe et on injecte les décompositions en série de Fourier de $P_e(t)$ et de $\theta(t)$ pour obtenir :

$$m c_p \sum_{n=1}^{\infty} i n \omega \underline{\theta}_n \exp(i n \omega t) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \exp(i n \omega t) - 2\pi r L \sigma_1 T_0^4 - 8\pi r L \sigma_1 T_0^3 \sum_{n=1}^{\infty} \underline{\theta}_n \exp(i n \omega t)$$

$$(2\pi r L \sigma_1 T_0^4 - P_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [(m c_p i n \omega + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3) \underline{\theta}_n - P_n] \exp(i n \omega t) = 0$$

On en déduit par unicité de la décomposition en série de Fourier (de la fonction identiquement nulle) que :

$$P_0 = 2\pi r L \sigma_1 T_0^4 \quad \text{et} \quad \underline{\theta}_n = \frac{P_n}{(m c_p i n \omega + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3)} \quad \forall n \geq 1$$

En remplaçant P_n par son expression on obtient :

$$\underline{\theta}_n = \frac{P_n}{8\pi r L \sigma_1 T_0^3} \frac{1}{1 + i n \frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{T_0 \sin(n\alpha\pi)}{2n\alpha\pi} \frac{1}{1 + i n \frac{\omega}{\omega_c}}$$

Et comme ν_c est très faible, on a pour toutes les harmoniques du signal $n\omega \gg \omega_c$, donc :

$$\underline{\theta}_n \approx -i \frac{\omega_c}{n\omega} \frac{T_0 \sin(n\alpha\pi)}{2 n\alpha\pi}$$

II.B.5) L'égalité de Parseval s'écrit

$$\langle \theta^2 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 / 2$$

on a ici $c_n = |\theta_n|$

$$\theta_{RMS}^2 = \frac{1}{2} \frac{T_0^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\alpha\pi) / (n\alpha\pi)^2}{1 + (n\omega/\omega_c)^2}$$

D'où le taux d'ondulation :

$$\delta_0 = \frac{\theta_{RMS}}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{8}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\alpha\pi) / (n\alpha\pi)^2}{1 + (n\omega/\omega_c)^2}}$$

Lorsque la fréquence augmente, il est clair que le taux d'ondulation tend vers 0. La température du filament ne suit pas les variations rapides de $P_e(t)$.

Le filtre étant un passe-bas d'ordre 1 on peut remarquer que celui-ci agit comme un pseudo intégrateur. On aura donc une température qui oscille très peu autour de sa valeur moyenne, et les oscillations, de faible amplitude, seront triangulaires puisque l'excitation est carrée.

II.C. Vérification expérimentale

II.C. 1) a) Il faut orienter la photodiode vers le filament !

II.C. 1) b) La puissance absorbée par la photodiode est proportionnelle à la puissance émise par rayonnement par le filament. On suppose la puissance rayonnée de façon isotrope et on a donc, en notant P_e la puissance émise par rayonnement :

$$P_{\text{incidente}} = \frac{S}{4\pi D^2} P_e$$

II.C. 1) c) La réponse n'est pas $u_s = KT^4$ car le capteur n'absorbe pas tout le rayonnement mais seulement la fraction entre $\lambda=0,45 \mu\text{m}$ et $1,1 \mu\text{m}$. Une fraction importante du rayonnement émis n'est pas absorbé, or c'est la puissance totale qui est proportionnelle à T^4 . De plus il se peut que la réponse du capteur ne soit pas plate mais dépende de λ .

II.C. 1) d) On sait que $u_s = KT^{7,5}$ soit avec $T = T_0 + \theta$:

$$u_s = K(T_0 + \theta)^{7,5} = KT_0^{7,5} \left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right)^{7,5}$$

L'amplitude des oscillations, liée à θ vaut $0,84 \times \sqrt{2}$ V et la valeur moyenne est 7,1 V. On peut considérer que $\theta \ll T_0$, et on a alors $u_s = KT_0^{7,5} (1 + 7,5 \frac{\theta}{T_0} + o(\frac{\theta}{T_0}))$:

$$\begin{cases} KT_0^{7,5} = 7,1 \\ KT_0^{7,5} \times 7,5 \frac{\theta_m}{T_0} = 0,84\sqrt{2} \end{cases}$$

Soit $\theta_m = 58,0$ K pour l'amplitude des oscillations de température.

A la question II.A.3) on avait $\theta_m = \theta_0 / \sqrt{1 + (f/f_c)^2}$, avec $\theta_0 = T_0/4$ et $f_c = 2,45$ Hz. Avec $f = 40$ Hz, on obtient $\theta_m = 39,7$ K. L'ordre de grandeur est en bon accord mais c'est tout.

II.C. 2) On constate tout d'abord sur le graphe que les fréquences utilisées pour l'étude sont élevées, puisqu'on a $\ln f > 2$ soit $f \gg f_c$. On peut donc écrire $\theta_m \approx \theta_0 \frac{f_c}{f}$ donc :

$$U_S \approx KT_0^{6,5} \frac{7,5}{\sqrt{2}} \theta_0 \frac{f_c}{f}$$

$$\ln U_S = \ln \left(KT_0^{6,5} \frac{7,5}{\sqrt{2}} \theta_0 f_c \right) - \ln f$$

On constate effectivement sur le graphe que les droites ont bien une pente de -1, ce qui confirme le caractère passe-bas d'ordre 1 de l'expression de θ .

II.C. 3) L'ordonnée à l'origine est décalée car la température moyenne T_0 est différente dans les deux expériences. On a $\theta_0 = T_0/4$ et $f_c = \frac{4\sigma_1 T_0^3}{\pi \mu r c_p}$ à remplacer dans l'expression ci-dessus de $\ln U_S$. L'écart entre les deux droites est donc donné par :

$$10,5 \ln \left(\frac{T_0(6V)}{T_0(4V)} \right) = 1,3$$

soit

$$\frac{T_0(6V)}{T_0(4V)} = \exp(1,3/10,5) = 1,13$$

Lorsque le filament est alimenté sous 6 V, on avait $T_0 = 2000$ K, on a donc sous 4V, $T_0 = 1770$ K.

Jean Perrin et l'hypothèse atomique

I Equilibre vertical d'un gaz à la température ambiante

1. Pour $T_0 = 300\text{K}$ et $P_0 = 1\text{bar} = 10^5\text{Pa}$, le volume molaire d'un gaz parfait est donné par $V_m = \frac{RT_0}{P_0} = \frac{8,3 \times 300}{10^5} = 25 \cdot 10^{-3}\text{m}^3/\text{mol}^{-1}$

$$V_m = 25\text{L/mol}$$

Volume du récipient : $V = Sh \sim 995\text{m}^3$
 Volume occupé par l'ensemble des sphères associé aux molécules :

$$V_b = \frac{V}{V_m} \times N_A \times \frac{4}{3} \pi R_m^3 \sim 995 \times 4 \cdot 10^{24} \times 6,0 \cdot 10^{-23} \times 4 \cdot 10^{-30}$$

$\underbrace{\quad}_{\text{nb de moles du gaz}}$
 $\underbrace{\quad}_{\text{volume d'une molécule pris comme une sphère.}}$

$$\frac{V_b}{V} \sim 10^{-4} \ll 1$$

2. Gaz parfait : pas d'interactions entre les molécules de gaz.

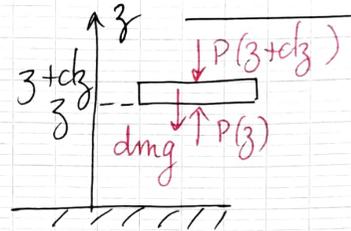
$V_b \ll V$: les molécules de gaz sont très éloignées les unes des autres. On peut considérer, dans ces conditions de température et de pression que l'air se comporte

(2)

comme un gaz parfait.

$$3. E_{cm} = \frac{1}{2} m_m v^2$$

$$E_{pm} = m_m g z$$



L'agitation thermique empêche les molécules de gaz de se regrouper au fond du récipient

$$\langle E_{cm} \rangle = \frac{1}{2} \times 3 \times k_B T, \text{ selon le théorème d'équipartition.}$$

$$\langle E_{pm} \rangle = m_m g \frac{h}{2}$$

$$\frac{\langle E_{cm} \rangle}{\langle E_{pm} \rangle} = \frac{3RT_0}{Mgh} \sim \frac{3 \times 8 \times 300}{30 \cdot 10^{-3} \times 10 \times 1} \sim 2 \cdot 10^4 \gg 1$$

$$4. \rho(z) = P(z) \frac{M}{RT}$$

L'équilibre mécanique de la tranche de gaz comprise entre z et $z+dz$ et sur la section S s'écrit :

$$0 = -dm g + P(z)S - P(z+dz)S$$

$$\text{avec } dm = S dz \rho(z)$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho(z)g$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{gM}{RT} P(z) = -\frac{P(z)}{H}$$

(4)

5. Cette équation s'intègre immédiatement en

$$P(z) = P(z=0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

$$\frac{P(z)}{P_0} = A(z) \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT_0}{gM}$$

$$H = \frac{k_B T_0}{g m_m}$$

$$\text{A.N.: } H = \frac{8,3 \times 300}{9,8 \times 30 \cdot 10^{-3}}$$
$$H = 8 \text{ km}$$

Dans le récipient considéré

$$\left. \begin{aligned} - \left(\frac{P(h) - P_0}{P_0} \right) &= 1 - \exp\left(-\frac{h}{H}\right) \\ \text{or } \frac{h}{H} &\sim 10^{-3} \end{aligned} \right\} 1 - \exp\left(-\frac{h}{H}\right) \approx \frac{h}{H} \ll 1$$

$\frac{\Delta P}{P_0} \sim 10^{-3}$: Dans un récipient de qq. mètres de hauteur, la variation de pression n'est pas détectable avec un manomètre usuel.

Si le récipient était rempli d'eau liquide, on aurait $\frac{dP}{dz} = -\rho_{\text{liq}} g$

$$P(z) = P(0) - \rho_{\text{liq}} g z \Rightarrow P(0) - P(h) = \rho_{\text{liq}} g h$$

Pour $h \sim 1 \text{ m}$, on a $\Delta P \sim 10^3 \times 10 \times 10^0 \sim 10^4 \text{ Pa}$
 $\Delta P \sim 0,1 \text{ bar}$ est une variation de pression significative, que l'on mesure aisément avec un manomètre usuel.

$$6. A(z) = \exp\left(-\frac{z}{H}\right) = \exp\left(-\frac{m_m g z}{k_B T_0}\right)$$

$$E(z) = m_m g z = E_{pm}(z) - E_{pm}(z=0)$$

est l'énergie potentielle de pesanteur d'une molécule de gaz à la hauteur z - $E_p(z=0)$.

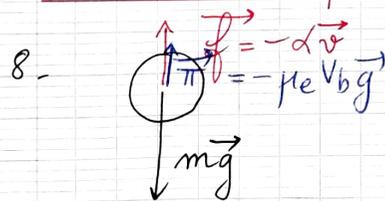
$\frac{P(z)}{P_0} = \exp\left(-\frac{E_{pm}(z)}{k_B T}\right)$: la probabilité pour une molécule de gaz d'avoir l'énergie potentielle $E_{pm}(z)$ est proportionnelle au facteur de Boltzmann.

$$7. c_g(z) = \frac{n}{V} = \frac{P(z)}{RT_0}$$

$$\Rightarrow \frac{c_g(z)}{c_{g0}} = \frac{P(z)}{P_0} \Rightarrow c_g(z) = c_{g0} A(z)$$

avec $c_{g0} = \frac{P_0}{RT_0}$

II. Etude d'un équilibre de sédimentation

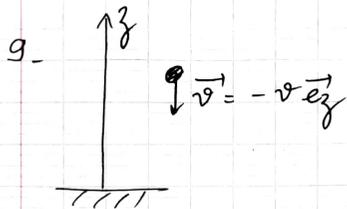


Un grain est soumis à :

- son poids $\mu_p v_b g = m g$
- la poussée d'Archimède : $\pi = -\rho_e v_b g$

La résultante des forces de flottabilité visqueux $f = -d v$

5



On applique le PFD à un grain dans R_{lab} :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \mu_e V_b \vec{g} - \alpha \vec{v}, \text{ soit en proj. sur } z:$$

$$-m \frac{dv}{dt} = -mg + \mu_e V_b g + \alpha v$$

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = \frac{(m_b - \mu_e V_b) g}{\alpha} = \frac{m^* g}{\alpha} \text{ avec } \tau = \frac{m_b}{\alpha}$$

$$v(t) = v_\ell (1 - e^{-t/\tau}) \text{ où } v_\ell = \frac{m^* g}{\alpha}$$

$$m^* = m_b - \mu_e V_b = (\mu_b - \mu_e) V_b = m_b (1 - \frac{\mu_e}{\mu_b})$$

La résultante du poids et de la poussée d'Archimède s'écrit $\vec{P} + \vec{\pi} = m^* \vec{g}$ d'où le nom de "masse apparente" donné à m^* .

$$\tau = \frac{m_b}{\alpha} = \frac{4,1 \cdot 10^{-17}}{4,5 \cdot 10^9} \sim 10^{-8} \text{ s} \Rightarrow \text{Les grains atteignent leur vitesse limite extrêmement rapidement.}$$

$$v_\ell = \frac{m^* g}{\alpha} = \frac{1}{6} \frac{mg}{\alpha} = \frac{1}{6} g \tau \sim \frac{1}{6} 9,8 \cdot 10^{-8} \sim 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m^* = \frac{0,2}{1,2} m = \frac{m}{6}$$

6

densité de grain = n_b de grains / u.v.

$$10. \quad j_c = - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{m}^{-3}}}{c(z)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}}{v_\ell} \quad [j_c] = \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{j_m}_{\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}} = -D \frac{dc}{dz} \quad \Rightarrow [D] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

en $\text{m}^{-3} \cdot \text{m}^{-1}$

Lorsque la répartition de concentration $c(z, t)$ a atteint son état d'équilibre $c(z)$ on a $j_c + j_m = 0$

$$\Rightarrow -c(z) v_\ell - D \frac{dc}{dz} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{dz} = -\frac{v_\ell}{D} c(z) \Rightarrow c(z) = c_0 A(z)$$

$$\text{avec } H_b = \frac{D}{v_\ell} = \frac{D \alpha}{m^* g} = \frac{D}{m^* g} 6\pi \eta R_b$$

$$11. \quad E_p^*(z) = m^* g z \quad \vec{P} + \vec{\pi} = -d\vec{E}_p^* \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow A(z) = \exp\left(-\frac{m^* g z}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{z}{H_b}\right)$$

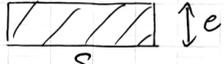
à condition que $H_b = \frac{6\pi R_b \eta D}{m^* g} = \frac{k_B T}{m^* g}$

$$\Rightarrow D = \frac{k_B T}{6\pi R_b \eta}$$

$$12. N = \int_0^{h_1} c(z) S dz \approx c_0 S \int_0^{\infty} \exp(-\frac{z}{H_b}) dz$$

$$N \approx c_0 S H_b \Rightarrow c_0 = \frac{N}{S H_b} \text{ volume}$$

13. nb de grains dans une tranche de section S et de hauteur e ($e \ll H_b$)



$$n(z) = S e c(z) N_A \Rightarrow n(z) = S e N_A c_0 \exp(-\frac{z}{H_b})$$

$$\Rightarrow \ln n(z) = \ln(S e N_A c_0) - \frac{z}{H_b}$$

On constate que les données collectées par Jean Peurin confirment cette loi puisque l'ajustement linéaire passe dans les points de mesure compte-tenue des incertitudes.

$$\Rightarrow H_b = \frac{1000}{24} \mu\text{m} \approx \frac{1000}{25} \approx 4.10^1 \mu\text{m} \quad (H_b = 41,7 \mu\text{m})$$

L'hypothèse h_1 supposée ∞ correspond à $h_1 \gg H_b$. Or ici $h_1 \sim 100 \mu\text{m}$ et $H_b \sim 40 \mu\text{m}$, on n'a pas vraiment $h_1 \gg H_b$!
Ceci dit, cette hauteur est largement suffisante pour observer une diminution notable de la concentration entre le haut et le bas du récipient

$$14. H_b = \frac{k_B T_0}{m^* g} \Rightarrow k_B = \frac{H_b m^* g}{T_0}$$

$$k_B = 40 \cdot 10^{-6} \times \frac{1 \times 4,1 \cdot 10^{-7} \times 9,8}{(273+20)}$$

En faisant l'A.N. à 1 chiffre significatif

$$k_B \approx \frac{4 \cdot 10^{-5} \times 4 \cdot 10^{-7} \times 10}{6 \times 300} \approx \frac{16 \cdot 10^{-23}}{18} \approx 9 \cdot 10^{-24} \text{ J.K}^{-1}$$

Le résultat est correct en ordre de grandeur mais sous-estime k_B .

Il semble y avoir une erreur systématique en plus des incertitudes inhérentes à l'expérience.

$$k_B = H_b \frac{m^* g}{T_0}$$

→ H_b estimé par régression linéaire sur le comptage :

- * compter plus longtemps
 - * vérifier qu'on a bien $e \ll H_b$ mais réduire e va réduire le nb de grains comptés
 - * est-on sûr d'avoir toujours le même ? (méthode optique)
 - * a-t-on bien $e \gg R_b$: il faut savoir si le grain est dans la zone
 - * les grains s'agitent (mvt brownien) ce qui rend difficile le comptage
- on peut supposer g et T_0 bien connus
→ $m^* = m(1 - \frac{\rho_e}{\rho_b})$: les grains sont-ils de taille (R_b) uniforme?