

Corrigé du DS 4

Le jeudi 7 décembre 2023

★ ★ ★

Problème 1 : Détection des exoplanètes

★ ★ ★

★ ★ ★

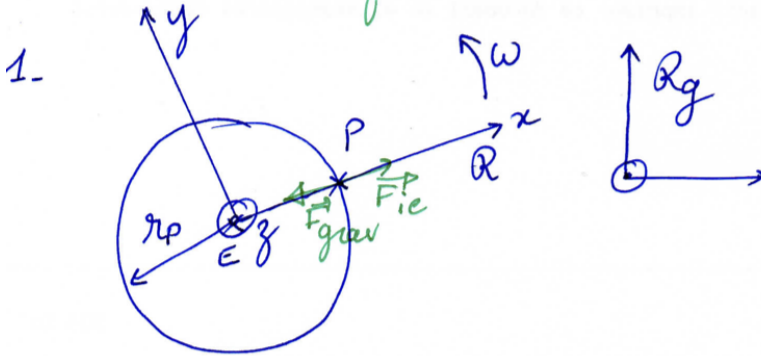
Problème 2 : Centrale inertielle

★ ★ ★

Détection des exoplanètes

- Fascinantes exoplanètes

A. Une loi fondamentale



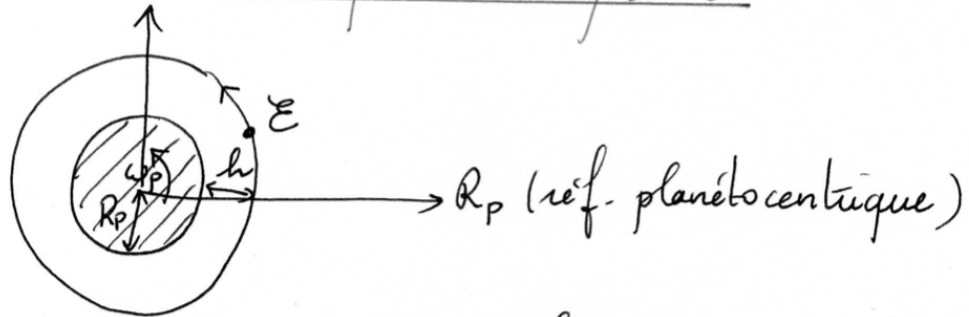
Le système {étoile + planète} est supposé isolé
 → le centre de masse du système a un mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel R_g galiléen. Ce centre de masse est presque confondu avec E car $M_E \gg M_P$.
 Le référentiel centré sur E dont un des axes (ici (Ex)) est dans la direction de la planète P est non galiléen. Dans ce référentiel R , la planète est soumise à l'attraction gravitationnelle de l'étoile et à la force d'inertie d'entraînement. P est en équilibre dans R sous l'effet de ces 2 forces.

$$\vec{F}_{\text{grav}} + \vec{F}_{\text{ie}} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{F}_{\text{grav}} = -\frac{M_E M_P G}{r_p^2} \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_{\text{ie}} = M_P \omega^2 r_p \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T_P} \quad \text{la vitesse angulaire de rotation de } P \text{ autour de } E$$

$$\text{Ainsi} \quad \frac{4\pi^2}{T_P^2} r_p = \frac{M_E G}{r_p^2} \Rightarrow \boxed{\frac{T_P^2}{r_p^3} = \frac{4\pi^2}{G M_E}}$$

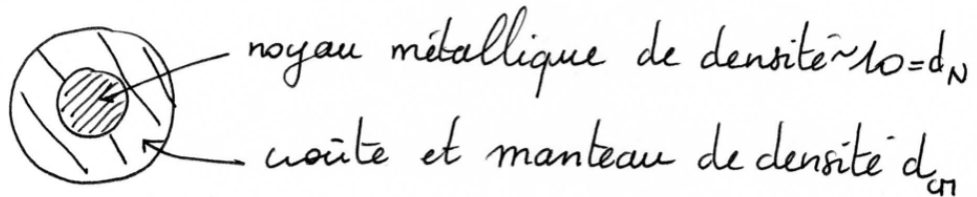
B. Principales caractéristiques de la planète



2. La troisième loi de Kepler utilisée dans ce cas s'écrit :

$$\frac{T^2}{(R_p + h)^3} = \frac{4\pi^2}{G M_p} \Rightarrow M_p = \frac{4\pi^2}{G} \frac{(R_p + h)^3}{T^2}$$

A.N. : $M_p = 1,51 \cdot 10^{24} \text{ kg}$



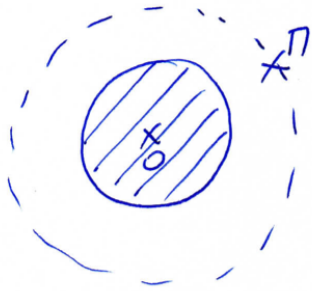
Dans ce modèle on aurait

$$M_p = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R_T}{2}\right)^3 \times d_N \rho_{\text{eau}} + \frac{4}{3} \pi \left(R_p^3 - \left(\frac{R_T}{2}\right)^3\right) d_{PM} \rho_{\text{eau}}$$

$$\text{soit } d_{PM} = \frac{M_p \times \frac{3}{4\pi}}{\left[R_p^3 - \left(\frac{R_T}{2}\right)^3\right] \rho_{\text{eau}}} - d_N \frac{\left(\frac{R_T}{2}\right)^3}{R_p^3 - \left(\frac{R_T}{2}\right)^3}$$

$d_{PM} \simeq 1,9$ cette valeur semble raisonnable :
la structure de la planète est sans doute comparable à celle de la Terre.

3.



La distribution de masse est
à symétrie sphérique
 $\Rightarrow \vec{A}(M) = A(M) \vec{u}_r$
↑
champ de gravitation

Le théorème de Gauss en gravitation s'écrit :

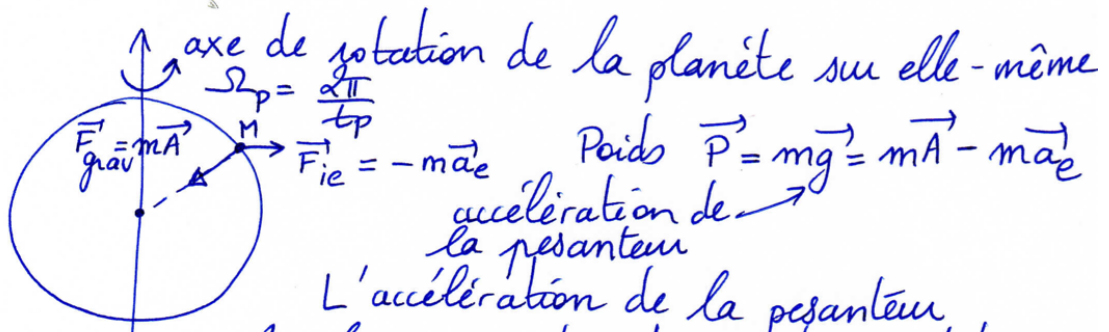
$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$$

si on applique le théorème de Gauss à une
sphère de rayon $r \geq R_p$

$$A \times 4\pi r^2 = -4\pi G M_p \Rightarrow A(r) = -\frac{G M_p}{r^2}$$

A.N. : Pour $r = R_p$ $|A(R_p)| = \frac{G M_p}{R_p^2} = 4,03 \text{ m.s}^{-2}$

4.



L'accélération de la pesanteur
est la somme des champs de gravitation
 $\vec{A}(M)$ et de l'opposé de l'accélération d'entraînement
dans le référentiel lié à la planète.
Soit H le projeté orthogonal de M à la surface de
la planète sur son axe de rotation : $-\vec{a}_e = \Omega_p^2 \vec{HM}$

$$\vec{g} = \vec{A} + \Omega_p^2 \vec{HM}$$

aux pôles $\|\vec{g}\| = \|\vec{A}\| = \frac{G M_P}{R_p^2} = 4,03 \text{ m.s}^{-2}$

sur l'équateur $\|\vec{g}\| = \frac{G M_P}{R_p^2} - \Omega_p^2 R_p = 3,99 \text{ m.s}^{-2}$

$$\Omega_p^2 R_p = \frac{4\pi^2}{T_p^2} R_p = 4,00 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-2} \ll A(R_p)$$

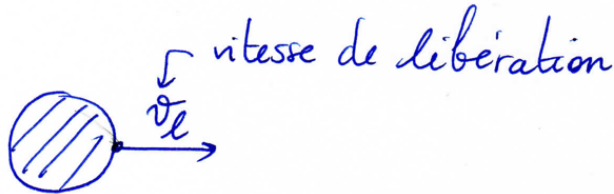
($T_p = 70,2 \cdot 10^3 \text{ s}$) $\frac{\Delta g}{g} \sim 1\%$

Cet écart est trop faible pour le mesurer à l'aide du dispositif proposé.

Autres méthodes de mesure de g : (gravimétrie)

- * période d'un pendule de longueur l connue
- * position d'un système masse-ressort à l'équilibre

5.



La conservation de l'énergie mécanique entre l'état initial et l'état final où le corps est à l'infini s'écrit :

$$\frac{1}{2} m v_l^2 - G \frac{m M_P}{R_p} = 0 \quad \begin{array}{l} \swarrow E_{\text{pot}} = 0 \text{ et } E_{\text{c}\infty} \geq 0 \\ \uparrow \text{cas limite} \\ \text{d'égalité donne } v_l \end{array}$$

$$v_l = \sqrt{\frac{2 G M_P}{R_p}}$$

A.N. : $v_l = 6,35 \text{ km.s}^{-1}$

6. La planète retient les gaz de son atmosphère si leur vitesse est plus petite que la vitesse de libération. On constate sur la figure 1 que toutes les molécules envisagées ont des vitesses inférieures à $3 \text{ km.s}^{-1} < v_e$. Les gaz étudiés (CO_2 $M=44 \text{ g/mol}$; O_2 $M=32 \text{ g/mol}$; H_2O $M=18 \text{ g/mol}$ et même He $M=4 \text{ g/mol}$) sont donc retenus dans l'atmosphère de cette planète.

7. L'énergie cinétique moyenne de translation d'une molécule de gaz à l'équilibre est donnée par le théorème d'équipartition

$$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2} m (\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle) = \frac{3}{2} k_B T = \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle$$

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} = \sigma_v$$

$\frac{1}{2} k_B T$ par terme quadratique

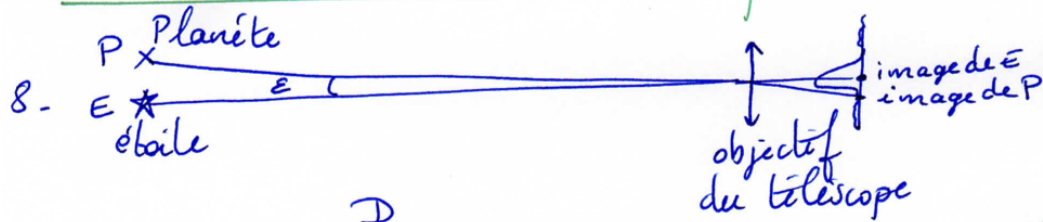
$$\boxed{\sigma_v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}} \quad \text{avec } R = k_B N_A$$

↑ masse molaire

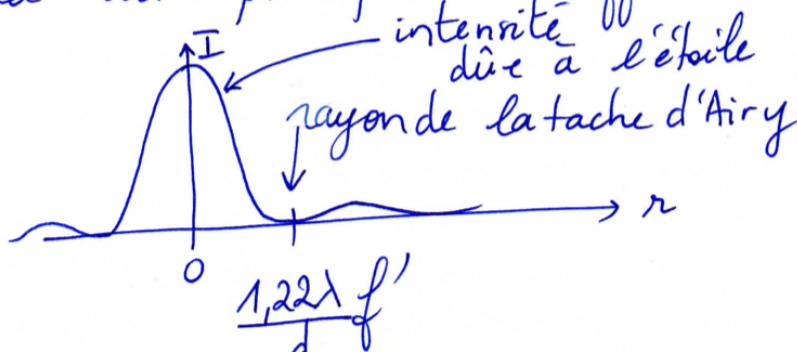
Pour O_2 , $M = 32 \text{ g.mol}^{-1}$ $\sigma_v = 475 \text{ m.s}^{-1}$ à 290 K

or on lit sur le graphique $v_{pp}(\text{O}_2, 290 \text{ K}) \approx 0,4 \text{ km.s}^{-1}$
et $0,8 \times \sigma_v \approx v_{pp}$: les résultats sont cohérents

C. Détection d'une exoplanète depuis la Terre



Le pouvoir séparateur est limité par la diffraction, le critère de Rayleigh donne le pouvoir séparateur, en supposant que 2 objets peuvent être séparés si leur distance angulaire est supérieure à la taille du disque d'Airy de chaque objet (taille de la tache principale de diffraction).



L'image de la planète, vue sous un angle ϵ par rapport à l'étoile vérifie le critère de Rayleigh si $\epsilon > \frac{1,22\lambda}{d}$

Pour le système Jupiter - Soleil $\epsilon \approx \frac{a_J}{D}$
avec $D = 42$ années-lumière
= distance du système E+P au télescope.

Dans le visible $\lambda \sim 500 \text{ nm}$
 $\epsilon_{\min} = 1,2 \frac{\lambda}{d} \sim 1,2 \times \frac{500 \cdot 10^{-9}}{1,93} \sim 3 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$

$$\frac{a_J}{D} \sim \frac{778 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{42 \times 365 \times 24 \times 3600 \times 3 \cdot 10^8} \sim 2 \cdot 10^{-6} \text{ rad} > \epsilon_{\min}$$

Le pouvoir séparateur du télescope permet de "voir" directement Jupiter depuis 51-Pegasus.

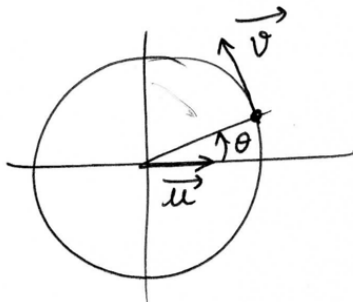
- Le critère de Rayleigh est établi pour 2 objets émettant des intensités comparables. L'intensité "émise" (réfléchi) par la planète étant sensiblement plus faible que celle de son étoile, il est très difficile de l'observer directement même si l'écart angulaire est supérieur à la résolution du télescope.
- Il faut par ailleurs tenir compte de la traversée de l'atmosphère qui réduit notablement la résolution du télescope.

9. Dans $Oxyz$, $\vec{v}(E/R) = \vec{v}(G/R) + \vec{v}$
 $v_r = \vec{v}(E/R) \cdot \frac{\vec{OG}}{OG}$ on note $\vec{u} = \frac{\vec{OG}}{OG}$

On suppose la Terre dans le plan de l'orbite
 et $\vec{v}_G = v_G \vec{u}$ avec $v_G > 0$

↳ le système s'éloigne à la vitesse radiale $\underline{v_G}$.

$$v_r = v_G + \vec{v} \cdot \vec{u} = v_G - v \sin \theta$$

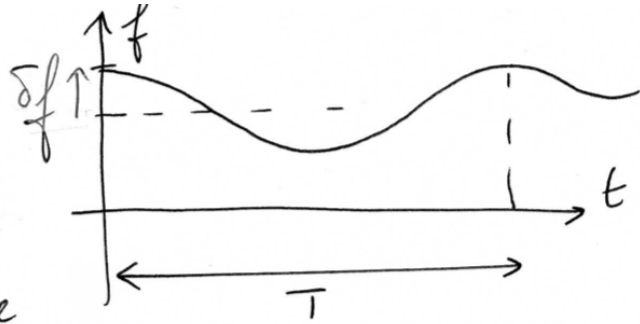


$$v_{r \max} = v_G + v \quad v_{r \min} = v_G - v > 0$$

$$\delta f = \frac{1}{2} (|\Delta f|_{\max} - |\Delta f|_{\min}) = \frac{1}{2} \left(\frac{v_G + v}{c} - \frac{v_G - v}{c} \right) f$$

$$\boxed{\delta f = \frac{v}{c} f}$$

10. le spectre de la lumière se décale périodiquement avec le mouvement de l'étoile par rapport au centre de gravité G du système $\{E+P\}$.



Ainsi, si on est capable de détecter ce décalage, on a accès à la période T du mouvement.

Si la planète est proche de son étoile, la période T est plus courte. Ainsi pour une durée d'observation Δt donnée, on ne pourra observer que des systèmes dont la période T est inférieure ou de l'ordre de Δt .

$$v = 2\pi \frac{GE}{T} = c \frac{\Delta f}{f} \Rightarrow GE = \frac{T}{2\pi} c \frac{\Delta f}{f}$$

$$11. GE = \frac{M_P}{M_P + M_E} EP \Rightarrow EP \simeq \frac{M_E}{M_P} GE \quad \text{car } M_P \ll M_E$$

$$\text{or } \frac{T^2}{GP^3} \simeq \frac{T^2}{EP^3} = \frac{4\pi^2}{G M_E} \Rightarrow EP = \left(\frac{T^2}{4\pi^2} G M_E \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow M_P = M_E \frac{GE}{EP}$$

$$M_P = M_E \frac{GE}{T^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{4\pi^2}{G} \right)^{\frac{1}{3}}$$

La mesure de Δf et T donne accès à M_P et EP .

12. Pour le système Soleil-Jupiter $\frac{\Delta f}{f} = \frac{v}{c}$

avec $v = \frac{2\pi a_J}{T_J} \frac{M_J}{M_S}$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{2\pi \times 778 \cdot 10^9 \times 1,90 \cdot 10^{27}}{4335 \times 24 \times 3600 \times 3 \cdot 10^8 \times 1,99 \cdot 10^{30}} = 4,2 \cdot 10^{-8}$$

La précision requise est très grande!

25. Energie électrique stockée dans le condensateur : $E_C = \frac{1}{2} C (U + b(t))^2$. On a donc

$$\langle E_C \rangle = \frac{1}{2} C U^2 + \frac{1}{2} C \langle b^2 \rangle$$

car $\langle b \rangle = 0$.

26. Le théorème d'équipartition s'applique au terme relatif au bruit dans l'expression précédente et on a donc :

$$\frac{1}{2}C \langle b^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

Ainsi

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{k_B T}{C}}$$

Les fluctuations de la tension aux bornes du condensateur sont plus faibles si la capacité du condensateur augmente, de la même façon que la vitesse des particules de masse plus grande fluctue peu. La capacité joue un rôle inertiel, comme la masse.

$$\sigma_b = 2.97 \times 10^{-7} \text{ V}$$

Cette fluctuation peut sembler faible, pour des expériences usuelles, mais on a vu précédemment, qu'on veut ici mesurer la fréquence avec une très grande précision.

Problème 2 : Centrale inertielle

Centrale intellectuelle

Etude d'un accéléromètre pendulaire

Pour la manette dans la main d'un joueur agitant rapidement la main, on peut estimer une amplitude A de l'ordre de 20 cm avec 5 allers-retours par secondes :

$$X(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \Rightarrow |\ddot{X}|_{\max} = A \times \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sim 0,2 \times \left(\frac{2\pi}{1} \times 5\right)^2 = 0,2 \cdot 10\pi^2$$

$$|\ddot{X}| \sim 2 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-2} \quad |\ddot{X}| \sim 20g > 5g$$

Le résultat montre qu'il ne sert à rien d'agiter trop vite la manette !

Pour un mouvement d'amplitude $A=20$ cm avec un aller-retour en 5 secondes (très lent) on obtient $|\ddot{X}| \sim 4 \left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 = 0,2 \times \frac{4\pi^2}{25} \sim 3 \cdot 10^{-1} \text{ m.s}^{-2} \sim 3 \cdot 10^{-2}g$ c'est typiquement l'ordre de grandeur de la plus petite accélération mesurable.

Dans le référentiel lié au boîtier, la troisième de la résultante cinétique s'écrit (appliquée à la masse) :

$$m \ddot{X} = -kX - 2m\gamma \dot{X} - m\alpha t$$

ou projection sur $\vec{x}$

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_p^2 X = -\alpha \quad \text{pour } t > 0$$

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega_p^2 = 4(\gamma^2 - \omega_p^2)$$

$$\gamma > \omega_p \quad \gamma = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_p^2}$$

$$\gamma < \omega_p \quad \gamma = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_p^2 - \gamma^2}$$

• $\gamma < \omega_p$ régime pseudo-périodique

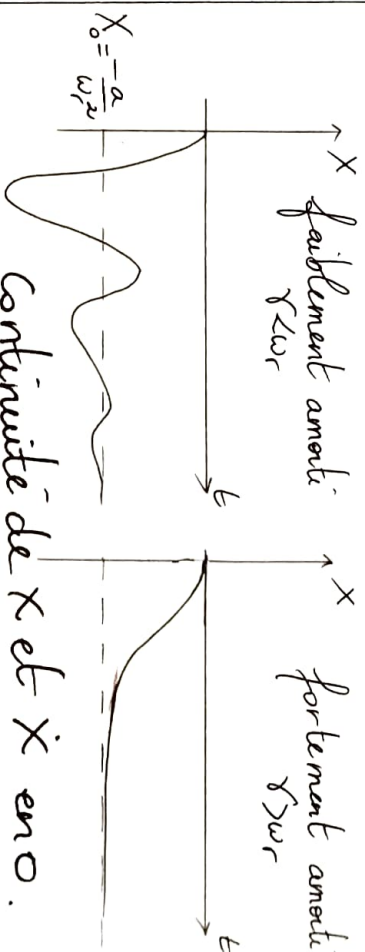
$$X(t) = A \exp(-\gamma t) \cos\left(\sqrt{\omega_p^2 - \gamma^2} t + \varphi\right) - \frac{\alpha}{\omega_p^2}$$

• $\gamma > \omega_p$ régime aperiodique

$$X(t) = A' \exp[-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_p^2}] t] + B' \exp[-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_p^2}] t] - \frac{\alpha}{\omega_p^2}$$

4- Dans les deux cas, l'amortissement conduit à

$$X \rightarrow -\frac{\alpha}{\omega_p^2} = X_0$$



Continuite de X et $\dot{X}$ en 0.

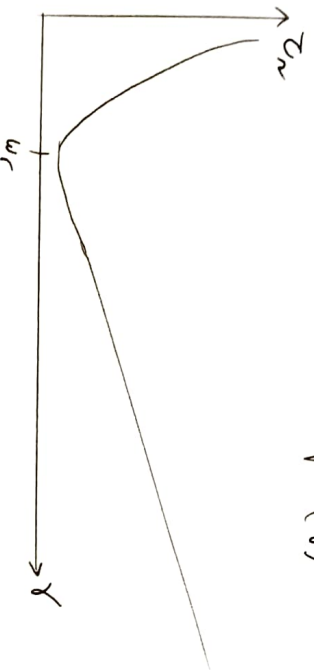
Pour $\gamma < \omega_p$ on a des oscillations amorties avec un temps caractéristique

$$\tau \sim \frac{1}{\gamma}$$

Pour $\gamma > \omega_p$, le temps d'amortissement correspond à la décroissance exponentielle la plus lente soit

$$\tau \sim \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_p^2}}$$

7- Pour $\gamma \gg \omega_r$ $z \sim \frac{1}{\gamma [1 - \sqrt{1 - (\frac{\omega_r}{\gamma})^2}]} \approx \frac{\gamma}{\omega_r^2}$



8- Le temps de réponse est minimum pour $\gamma = \omega_r$ et vaut alors

$$z_{\min} \sim \frac{1}{\omega_r}$$

9- $Q = \frac{\omega_r}{\gamma} = 5$ on a donc le cas d'un faible amortissement.

$$z_r \sim \frac{1}{\gamma} = \frac{5}{\omega_r} = \frac{5}{2\pi \times 5500} \sim 10^{-4} \text{ s}$$

et $X_0 = -\frac{a}{\omega_r^2} = -\frac{g}{(2\pi \times 5500)^2} \sim \frac{-10}{\pi^2 \times 1,1^2} 10^8 \sim -8 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 8 \text{ nm}$

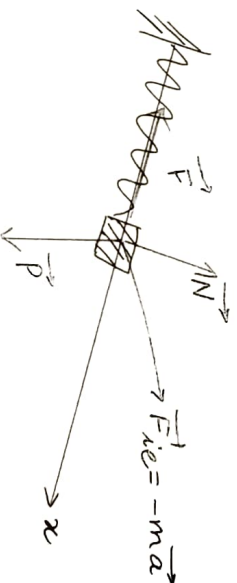
On constate que $X_0 \sim 10 \text{ nm}$ ce qui permet la miniaturisation.

10- $z_{\min} \sim \frac{1}{\omega_r}$

$$X_0 \sim -\frac{a}{\omega_r^2}$$

si on veut un temps de réponse court, on doit choisir ω_r élevé, mais on a alors X_0 faible et donc une sensibilité faible.

Le choix de ω_r résulte donc d'un compromis entre temps de réponse (court si $\omega_r \uparrow$) et sensibilité (meilleure si $\omega_r \downarrow$).



Le théorème de la résultante cinétique appliqué à la masse d'épreuve en projection sur $\vec{u}$ dans le référentiel lié au boîtier vient:

$$m\ddot{x} = -kx - \delta m \dot{x} - m a \cdot \vec{u} + m \vec{g} \cdot \vec{u}$$

Après l'amortissement, $X \rightarrow X_0 = \frac{m}{k} (g - a) \cdot \vec{u}$

$$X_0 = \frac{(g - a) \cdot \vec{u}}{\omega_x^2}$$

Rq: on reboue pour $\vec{u} = \vec{u}_x$, $X_0 = -\frac{a \cdot \vec{u}_x}{\omega_x^2}$

Ainsi cet accéléromètre mesure non pas $\vec{a} \cdot \vec{u}$ mais $(\vec{a} - \vec{g}) \cdot \vec{u}$.

Accéléromètre vibrant

19.



$\vec{T}_1$ action de la masse d'éprouve sur la lame 1
 $\vec{T}_2$ 2.

Le fluage de la résultante cinétique appliquée à la masse d'éprouve dans le référentiel du laboratoire s'écrit : $0 = \vec{T}_2 - \vec{T}_1 - \vec{T}_2$

$$\Delta \text{ on doit noter } \vec{T}_2 = -\vec{T}_1 \text{ ou } \vec{T}_1 = +(\vec{T}_1 \vec{u}_x)$$

ainsi lorsque $T_1 > 0$ les lames sont en tension (conformément aux notations adimensionnelles)

$$\Rightarrow \vec{T}_2 - \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$$

$$u_1 - u_2 = \alpha (T_1 - T_2) = +\alpha \vec{T}_2 = u_1 - u_2$$

Avec cet accéléromètre, la cause de la masselotte est nulle, on n'a donc pas le pb du régime transitoire de l'accéléromètre pendulaire. Le temps de réponse est plus court. La sensibilité de l'accéléromètre est liée à α . Si $\alpha \uparrow$ on gagne en sensibilité mais on perd en amplitude de mesure d'accélération puisqu'on doit assurer $\Delta \omega \ll \omega_0$.

9

21.

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int_{x=0}^L \mu dx \dot{y}^2 = \frac{\mu \omega^2 \sin^2(\omega t)}{2} \int_0^L \dot{y}(x) dx$$

22.

$$y(x,t) \uparrow \frac{ds}{dx} \downarrow y(x,t) \uparrow$$

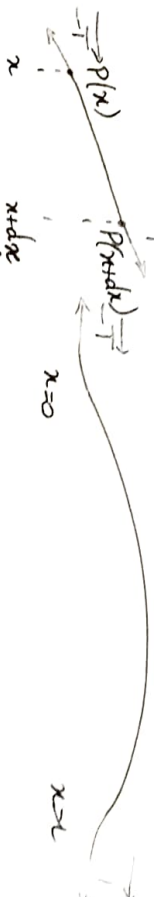
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

or $\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{\partial y}{\partial x}$

et pour des petites déformations de la lame $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \ll 1$ $ds \approx dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)$
l'allongement est $\delta(x) = ds - dx$

$$\delta(x) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$\Delta = \int_{x=0}^L \delta(x) = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$



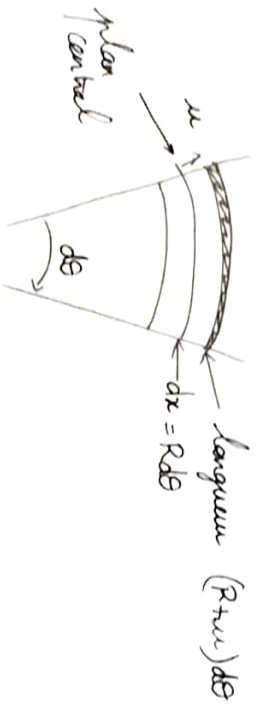
On peut de voir de l'énergie potentielle, tout se passe comme si la lame s'était allongée de Δ sous l'effet de la tension T , exercée par un opérateur extérieur.

$$E_{\text{tension}} = W_{\text{op}} = T \Delta = \frac{T}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$E_{\text{tension}}(t) = \frac{T}{2} \cos^2 \omega t \int_0^L \dot{y}(x)^2 dx$$

10

24. De la même façon la portion dx s'est allongée nous l'effet de la courbure de $u(x)$



L'énergie potentielle de cette portion est ainsi

$$dE_{\text{courbure}} = \frac{1}{2} k (u d\theta)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{dx} E b du \right) (u d\theta)^2$$

soit pour toute la traverse

$$dE_{\text{courbure}} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} \frac{E b}{dx} du u^2 d\theta^2$$

25

a



$$\theta \approx \tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow d\theta = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

$$dE_{\text{courbure}} = \frac{1}{2} E b \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \right)^2 \int_{-h/2}^{h/2} u^2 du$$

soit

$$E_{\text{courbure}} = \frac{1}{2} B \int_0^L \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

$$\text{avec } B = E b \int_{-h/2}^{h/2} u^2 du = \frac{E b h^3}{12}$$

$$E_{\text{courbure}}(t) = \frac{B}{2} \cos^2 \omega t \int_0^L y''(x)^2 dx$$

26. En l'absence de toute dissipation, l'énergie mécanique se conserve. On a donc :

$$E_m = E_c(t) + E_{\text{tension}}(t) + E_{\text{courbure}}(t) = \text{cte}$$

$$\text{avec } E_c(t) = \frac{1}{2} M \dot{u}^2 \sin^2 \omega t \int_0^L y'^2(x) dx$$

$$E_{\text{tension}}(t) = \frac{T}{2} \cos^2 \omega t \int_0^L y'(x)^2 dx$$

$$E_{\text{courbure}}(t) = \frac{B}{2} \cos^2 \omega t \int_0^L y''(x)^2 dx$$

$$\text{Soit } E_m = \text{cte} = \frac{M \omega^2 h^3 \sin^2 \omega t}{2L} \int_0^L y'^2(x) dx + \frac{\cos^2 \omega t}{2} \left(T \int_0^L y'(x)^2 dx + B \int_0^L y''(x)^2 dx \right)$$

Soit en dérivant par rapport à t :

$$0 = \int_0^L \frac{M \omega^2}{L} y'^2(x) dx - T y'(x)^2 - B y''(x)^2 dx \times \omega \sin 2\omega t$$

Cette relation doit être vérifiée à chaque instant ainsi :

$$\omega^2 = \frac{L}{M} \frac{\int_0^L T y'(x)^2 dx + \int_0^L B y''(x)^2 dx}{\int_0^L y'^2(x) dx}$$

On a donc

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \beta T \quad \text{avec}$$

$$\omega_0^2 = \frac{B L}{M} \frac{\int_0^L y''(x)^2 dx}{\int_0^L y'^2(x) dx}$$

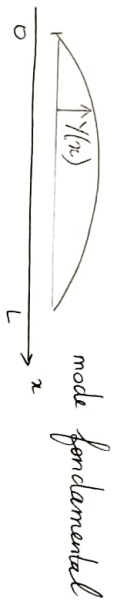
$$\text{et } \beta = \frac{L}{M} \frac{\int_0^L y'(x)^2 dx}{\int_0^L y'^2(x) dx}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \beta T}$$

13

Si $\beta T \ll \omega_0^2$ alors $\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\beta T}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 + \frac{\beta T}{2\omega_0}$

On retrouve la relation (1) avec $\alpha = \frac{\beta}{2\omega_0}$



$$\int_0^L y^2(x) dx = \int_0^L y_0^2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right)^2 dx = y_0^2 \int_0^L \left(1 - 2\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right) dx$$

$$= y_0^2 L \left(1 + 0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} y_0^2 L$$

$$\int_0^L y''(x)^2 dx = y_0^2 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 \int_0^L \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = y_0^2 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 \times \frac{L}{2}$$

ainsi $\omega_0^2 = \frac{BL}{\eta} \frac{y_0^2 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 \times \frac{L}{2}}{\frac{3}{2} y_0^2 L} = \frac{BL}{3\eta} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{BL}{3\eta} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2\omega_0} \quad \text{or} \quad \int_0^L y'^2(x) dx = y_0^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 = y_0^2 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \times \frac{L}{2}$$

$$\alpha = \frac{L}{2\eta} \frac{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \times \frac{L}{2} y_0^2}{\frac{3}{2} y_0^2 L \sqrt{\frac{BL}{3\eta} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4}} \quad \boxed{\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{3B\eta}}}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{54 \cdot 10^{-8} \times 2 \cdot 10^{-3}}{3 \times 10^{-4} \cdot 10^{-4}}} \times \left(\frac{2\pi}{2 \cdot 10^{-3}}\right)^2 \times \frac{1}{2\pi} = \left(\frac{54 \times 2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot 10^6$$

or $54 = 9 \times 6 \quad \Rightarrow \quad f_0 = 6 \times \pi \cdot 10^4 \sim 90 \text{ kHz}$

$$\text{et } \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{3B\eta}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}}{3 \times 54 \cdot 10^{-8} \times 10 \times 10^{-9}}}$$

14

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3 \times 54}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 10^7 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \cdot 10^7 \approx 5 \cdot 10^5 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{N}^{-1}$$

La variation de fréquence de la lame est

$$\Delta f = \frac{\alpha T}{2\pi} \quad \text{avec } T = mg$$

$$\Rightarrow \Delta f = \frac{5 \cdot 10^5 \times 10 \cdot 10^{-6} \times 10}{2\pi} \sim 8 \text{ Hz} \ll f_0$$

Le décalage en fréquence est très faible, ce qui justifie le DL effective.

Pour mesurer un tel décalage, on peut utiliser comme pour la mesure de l'effet Doppler, un montage tel que le suivant :

