Corrigé du DM 6

pour le jeudi 23 novembre 2023

⋆ ⋆ ⋆

Photoluminescence : Détection du signal (X Physique/SI 2014 extrait)

⋆ ⋆ ⋆

Photoluminescence - Détection du signal (X Physique - SI 2014)

Détection synchrone (analogique)

Principe de la détection synchrone

1. La fonction de transfert d'un filtre passe bas d'ordre 1 s'écrit

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{H_0}{1+j\omega\tau}$$

on peut écrire la relation entre e et s dans le domaine temporel sous la forme :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = H_0 e$$

Dans le domaine des hautes fréquences ($\omega \gg \omega_c = \frac{1}{\tau}$) $\underline{H} \sim \frac{1}{j\omega\tau} H_0$ ie $\tau \frac{ds}{dt} \simeq e \times H_0$

$\Rightarrow$ A haute fréquence, un passe-bas d'ordre 1 peut être assimilé à un intégrateur

$$s \simeq \frac{1}{\tau} H_0 \int_{t-\tau}^{t} e(t')dt' \quad \text{pour} \quad f \gg \frac{1}{2\pi\tau}$$

- $\overline{m(t,T_i)} = \displaystyle\int_{t-T_i}^{t} P(u)du$

or $P(t) = S(t)\cos(\omega_0 t - \varphi)$
$= [\Gamma s(t) \cos\omega_0 t + b(t)] \cos(\omega_0 t - \varphi)$

②

La formule de trigonométrie rappelée dans l'énoncé conduit à

$$P(t) = \frac{1}{2}\Gamma s(t)[\cos(2\omega_0 t - \varphi) + \cos\varphi] + b(t)\cos(\omega_0 t - \varphi)$$

Ainsi :

$$\overline{m(t,T_i)} = \frac{\Gamma}{2}\int_{t-T_i}^{t} s(u)[\cos(2\omega_0 u - \varphi) + \cos\varphi]\,du + \underbrace{\int_{t-T_i}^{t} b(u)\cos(\omega_0 u - \varphi)\,du}_{B(t,T_i)}$$

Le bruit $b(t)$ a un spectre blanc, de spectre très large.
$b(t)\cos(\omega_0 t - \varphi)$ a un spectre très large aussi. Les basses fréquences de ce spectre correspondent aux fréquences qui sont autour de ω_0 dans le spectre de $b(t)$. Si le bruit est très faible dans une certaine bande de fréquence autour de $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ alors à la sortie du filtre passe-bas, on aura $B(t,T_i) \simeq 0$ (en tout cas, on l'espère $\ll \overline{m}(t,T_i)$)

2- Après passage dans le second multiplieur,

$S \longrightarrow P$

$P(t) = \frac{\Gamma}{2} s(t) \cos\varphi$ $\longrightarrow$ m̂ spectre que s

$+ \frac{\Gamma}{2} s(t) \cos(2\omega_0 t - \varphi)$

$+ \quad b(t) \cos(\omega_0 t - \varphi)$

* Dans le 2e terme $s(t)\cos(2\omega_0 t - \varphi)$, on aura pour chaque composante spectre de s de la forme $a_\omega \cos(\omega t + \varphi_\omega)$ avec $0 < \omega < \Omega$

$a_\omega \cos(\omega t + \varphi_\omega) \cos(2\omega_0 t - \varphi)$

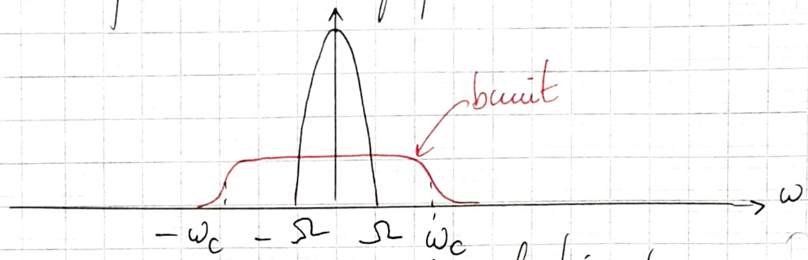
$= \frac{a_\omega}{2} \left[\cos((2\omega_0 + \omega)t + \varphi_\omega - \varphi) + \cos((2\omega_0 - \omega)t - \varphi - \varphi_\omega) \right]$

$\rightarrow$ On retrouve le spectre de s de part et d'autre de $2\omega_0$.

* De même, chaque composante du spectre blanc du bruit donne dans P deux contributions de part et d'autre de $\omega_0 \Rightarrow$ spectre blanc

Spectre de P (après passage de S dans le multiplieur)

Après passage dans l'intégrateur, les composantes haute-fréquence sont éliminées.



pulsation de coupure du filtre passe-bas.

Rque : l'énoncé choisit de représenter les spectres pour des pulsations positives et négatives ce qui correspond à une décomposition sur des exponentielles complexes

$\Rightarrow \cos\omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$ peut être représenté par un pic à la pulsation ω_0 et un à la pulsation $-\omega_0$ (identique).

3- Pour reproduire le plus fidèlement possible la forme de $s(t)$, il faut que la pulsation de coupure de l'intégrateur (passe-bas) vérifie :

$$\underbrace{\Omega \ll \omega_c}_{\text{pour récupérer tout le signal } s} \underbrace{\ll 2\omega_0}_{\text{pour ne pas récupérer le signal répliqué autour de } 2\omega_0}$$

5

En d'autres termes, il faut que la durée d'intégration T_i soit très grande devant $\frac{2\pi}{2\omega_0}$ (pour faire disparaître les composante de pulsation autour de $2\omega_0$, ie de période autour de $\frac{T_0}{2} \ll T_i$).

Mais que $T_i \ll \frac{2\pi}{\Omega}$ pour que la composante de plus petite période (dans $s(t)$) reste constante sur la durée T_i.

$$\boxed{\frac{\pi}{\omega_0} \ll T_i \ll \frac{2\pi}{\Omega}}$$

On aura alors

$$\overline{m(t,T_i)} = \frac{\Gamma}{2} s(t) \int_{t-T_i}^{t} \cos\varphi \, dt' + 0 + 0$$

$\overline{m(t,T_i)} \simeq \frac{\Gamma}{2} s(t) \cos\varphi$ et on a donc tout intérêt à choisir $\varphi = 0$

pour obtenir le signal le plus grand possible.

6

Réalisation d'une détection synchrone

4_ $S(t) = u(t)\, s(t)$

Les fréquences présentes dans le spectre du signal créneau ~~sont~~ les

$$\boxed{f_n = \frac{2\pi}{T_0} \times (2n+1) \quad n \in \mathbb{N}}$$

$$S(t) = \frac{4U}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} s(t) \cos\left(2\pi(2n+1)\frac{t}{T_0}\right)$$

Tout se passe comme si $s(t)$ était modulé par une infinité de porteuses sinusoïdales aux fréquences f_n.

5_ $\underline{H}(jx) = A \frac{2mjx}{1 + 2mjx - x^2} = \frac{A}{1 + \frac{1}{2m} j\left(x - \frac{1}{x}\right)}$

c'est un filtre passe bande d'ordre 2 centré en $x = 1$ (ie $\omega = \omega_c$), de facteur de qualité $Q = \frac{1}{2m} > \frac{1}{2}$ $\quad \underline{H} = \frac{A}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$

$x \ll 1$ $\quad \underline{H} \sim jx \frac{A}{Q}$ $\quad \begin{cases} G_{dB} = 20\log\left(\frac{A}{Q}\right) + 20\log x \\ \varphi = \pi/2 \end{cases}$

$x \gg 1$ $\quad \underline{H} \sim -j\frac{1}{x} \times \frac{A}{Q}$ $\quad \begin{cases} G_{dB} = 20\log\left(\frac{A}{Q}\right) - 20\log x \\ \varphi = -\pi/2 \end{cases}$

$x = 1$ $\quad \underline{H} = A$ $\quad \begin{cases} G_{dB} = 20\log A \\ \varphi = 0 \end{cases}$

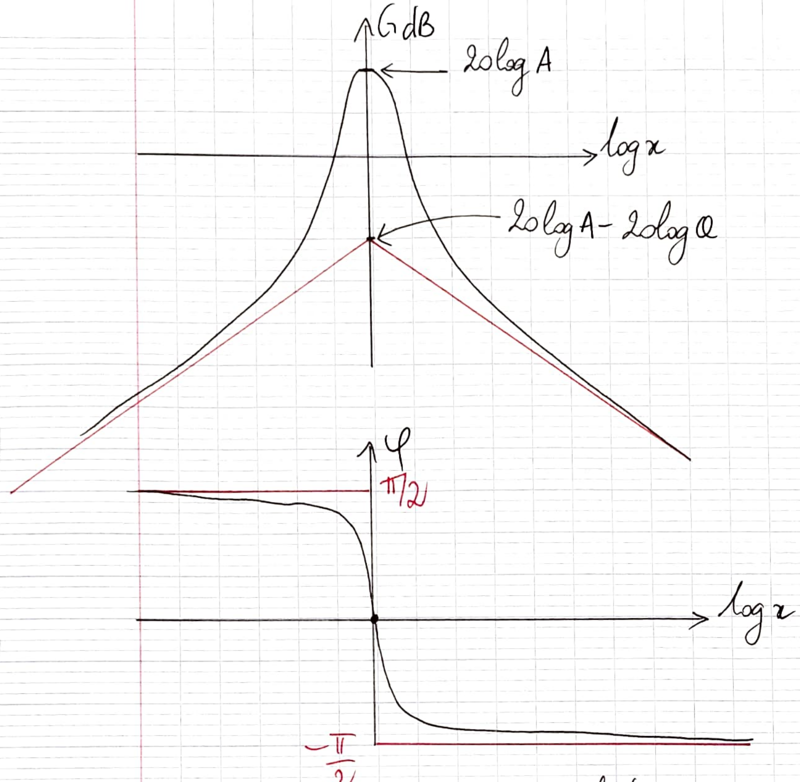


Diagramme de BODE du filtre de Sallen-Kay avec $Q \gg 1$

6. L'énoncé donne $\underline{H} = K \dfrac{jRC\omega}{1+(3-K)jRC\omega + (jRC\omega)^2}$

avec $K = 1+\dfrac{R_1}{R_2}$ pour le filtre de Sallen-Kay

On identifie immédiatement, en réorganisant un peu

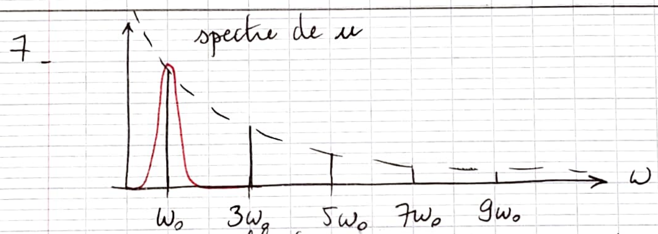
$$\underline{H} = \frac{K}{3-K}\,\frac{1}{1+\frac{j}{(3-K)}\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

$A = \dfrac{K}{3-K}$ $\quad Q = \dfrac{1}{3-K}$ $\quad$ et $\quad \omega_c = \dfrac{1}{RC}$

soit $\boxed{\begin{cases} \omega_c = \dfrac{1}{RC} \\ A = \dfrac{R_1+R_2}{2R_2-R_1} \\ Q = \dfrac{R_2}{2R_2-R_1} \end{cases}}$

On peut remarquer que pour $R_1 = 2R_2$ $A \to \infty$. Il ne faut pas imaginer que le gain sera infini autour de ω_c ; le calcul de $\underline{H}$ suppose que l'ALI est en régime linéaire ; il se mettrait en saturation.

7.



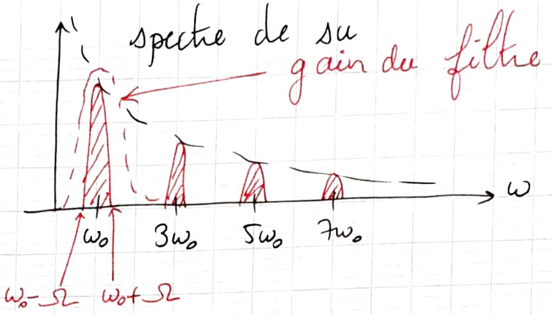
- Si c'est effectivement u qui entre dans le filtre alors on souhaite qu'il sélectionne le fondamental et qu'il élimine les harmoniques de rang $2n+1$ avec $n \geq 1$.

On veut donc $\omega_c = \omega_0$

et $\dfrac{\Delta\omega}{2} \ll 2\omega_0 \Rightarrow \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega} \gg \dfrac{1}{4}$

Il faut donc $Q \gg \dfrac{1}{4}$

- Si l'entrée du filtre est su



On veut toujours $\omega_c = \omega_0$
mais maintenant on veut aussi $\Omega \ll \frac{\Delta\omega}{2} \ll 2\omega_0$
pour conserver toute l'information de s.

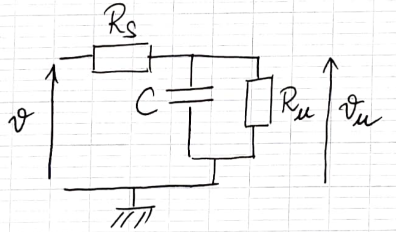
Echantillonneur bloqueur (numérique)

8. $v_e(t) = K_0\, e(t)\, v(t)$ avec $e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_e)$

$$\Rightarrow v_e(t) = K_0 \sum_{n=0}^{\infty} v(t)\,\delta(t - nT_e)$$

La durée d'un signal $\delta(t - nT_e)$ est très brève, on peut considérer que $v(t)$ n'a pas le temps de changer de valeur pendant cette durée.

9. Le circuit de gauche de la figure 8, en tenant compte de la résistance de sortie du générateur est le suivant :



$$\frac{v_u}{v} = \frac{Z}{Z+R_s} = \frac{1}{1+\frac{R_s}{Z}}$$ avec $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_u} + jC\omega$

$$\frac{v_u}{v} = \frac{1}{1+\frac{R_s}{R_u} + jR_sC\omega}$$ qui correspond à l'éq. différentielle suivante :

$$\left(1+\frac{R_s}{R_u}\right) v_u + R_s C \frac{dv_u}{dt} = v$$

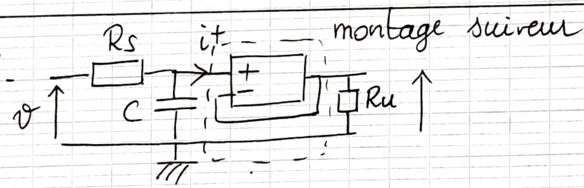
Soit $\tau \frac{dv_u}{dt} + v_u = \frac{1}{1+\frac{R_s}{R_u}}\, v$ avec $\boxed{\tau = \frac{R_sC}{1+\frac{R_s}{R_u}}}$

Le temps au bout duquel la tension aux bornes du condensateur atteint 95% de sa valeur limite est 3τ. ($e^{-3} = 0{,}05$)

(si $\begin{cases} v = v_0 = c^{te} \\ v_u(0) = 0 \end{cases}$ $v_u(t) = v_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$)

10. Lorsque K bascule en position ouverte, le condensateur se décharge dans la résistance R_u avec un temps typique de décharge $\tau_{décharge} = R_uC$.

11.



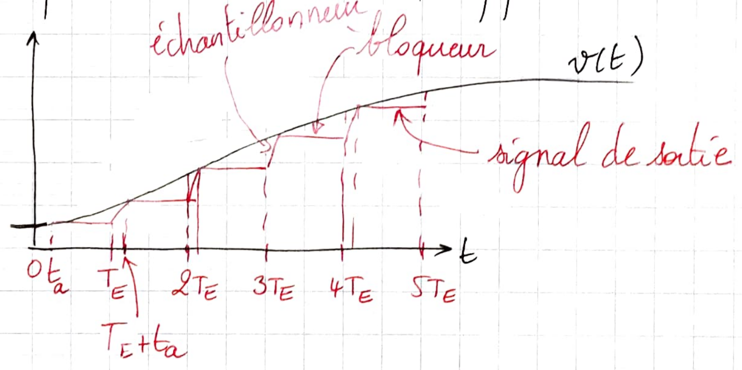
$i^+ \simeq 0$ (AO idéal)

11

On a maintenant intercalé un montage suiveur. La tension aux bornes de R_u est toujours la même que celle aux bornes de C mais maintenant

- lorsque K est ouvert, le condensateur se décharge très lentement ($i^+ \simeq 0$, ie résistance d'entrée de l'ALI très grande) $\Rightarrow t_h$ très long
- lorsque K est fermé, le temps de charge du condensateur devient $\tau = R_S C$, indépendant de R_u.
  $\Rightarrow t_a = 3R_S C$ temps d'acquisition

12. Le signal d'entrée de l'échantillonneur bloqueur sera noté $v(t)$, supposé continu.

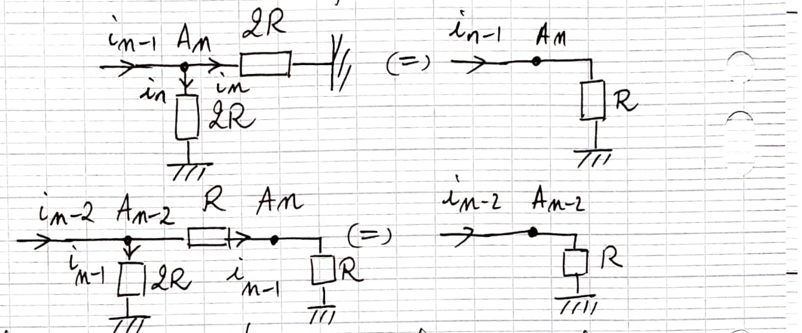


Lorsque K est ouvert, la tension de sortie reste constante.
Lorsque K est fermé, le condensateur se charge en un temps t_a jusqu'à $v(nT_E)$ (si on suppose v ne varie pas pendant la durée t_a)
Il faut que $t_a \ll T_E$

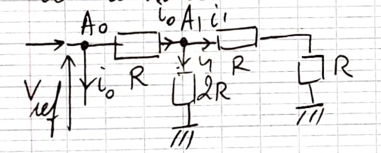
12

Restitution du signal après traitement

13. On remarque tout d'abord que l'AO fonctionne en régime linéaire $\Rightarrow V^- = V^+ = 0$.
Ainsi la tension aux bornes des résistances 2R est la m̂ $\forall$ position de l'interrupteur e_k.



et ainsi de suite de proche en proche



La résistance de l'ensemble du circuit à droite de A_1 est égale à 2R.

14. Le courant i_0 à gauche de A_1 se divise en deux moitiés égales $\Rightarrow i_1 = \frac{i_0}{2}$ car il "voit" deux résistances de m̂ valeur.

15. Le m̂ raisonnement s'applique à chaque noeud. $i_2 = \frac{i_1}{2} = \frac{i_0}{2^2}$ .... $\boxed{i_k = \frac{i_0}{2^k}}$

Le courant i_S est la somme de tous les courants i_k correspondants à des interrupteurs en position fermée ($e_k = 1$)

Ainsi $i_s = \sum_{k=0}^{n} e_k i_k = i_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{e_k}{2^k}$

or $i_0 = \frac{V_{ref}}{2R}$

$\Rightarrow \boxed{i_s = \frac{V_{ref}}{2R} \sum_{k=0}^{n} \frac{e_k}{2^k}}$

---

16. $i_s = \frac{V_{ref}}{2^{n+1} R} \left(2^n e_0 + 2^{n-1} e_1 + \dots + 2^0 e_n \right)$

Le nombre écrit en base 2 : $e_0 e_1 e_2 \dots e_n$ correspond au nombre $e_0 2^n + e_1 2^{n-1} + \dots + e_n$ écrit en base 10.

---

17. Le nombre de valeurs disponibles avec les $n+1$ bits est 2^{n+1}. Si on veut avoir au moins 250 valeurs, il faut $2^{n+1} > 250$

or $2^8 = 256$. On choisit $n \geq 7$

Codage sur 8 bits

---

18. Pour lisser le signal, il faut éliminer les hautes fréquences présentes dans son spectre. On veut ici obtenir un signal continûment dérivable, on doit donc utiliser un filtre passe-bas d'ordre 2.

Quelques aspects pratiques

Bruit de quantification

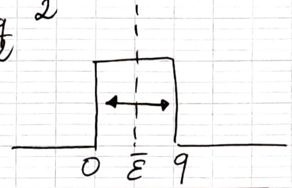
19. $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{q} \int_0^q \varepsilon \, d\varepsilon = \frac{1}{q} \left[\frac{\varepsilon^2}{2} \right]_0^q = \frac{1}{q} \times \frac{q^2}{2} = \frac{q}{2}$

L'écart type s'écrit σ avec :

$$\sigma^2 = \frac{1}{q} \int_0^q \left(\varepsilon - \frac{q}{2} \right)^2 d\varepsilon = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} u^2 du = \frac{1}{q} \times 2 \times \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^{\frac{q}{2}}$$

$u = \varepsilon - \frac{q}{2}$

$$\sigma^2 = \frac{2}{q} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{q}{2} \right)^3 = \frac{q^2}{12}$$



$$\sigma = \frac{q}{\sqrt{12}} = \frac{q}{2\sqrt{3}}$$

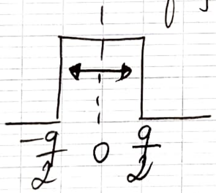
Pour une répartition uniforme de la variable aléatoire ε dans l'intervalle $[0; q]$,
$\bar{\varepsilon} = \frac{q}{2}$ et $\sigma = \frac{q}{2\sqrt{3}}$

---

20. On utilise maintenant l'intervalle $\left[-\frac{q}{2} ; \frac{q}{2} \right]$

On a de façon évidente $\bar{\varepsilon} = 0$

et le même écart-type $\sigma = \frac{q}{2\sqrt{3}}$



$$\sigma^2 = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{q/2} \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{2}{q} \left[\frac{\varepsilon^3}{3} \right]_0^{\frac{q}{2}} = \frac{2}{q} \times \frac{1}{3} \times \frac{q^3}{2^3}$$

$$\sigma^2 = \frac{q^2}{12}$$

Pour une répartition uniforme de la variable aléatoire ε dans l'intervalle $\left[-\frac{q}{2} ; \frac{q}{2} \right]$
$\bar{\varepsilon} = 0$ et $\sigma = \frac{q}{2\sqrt{3}}$

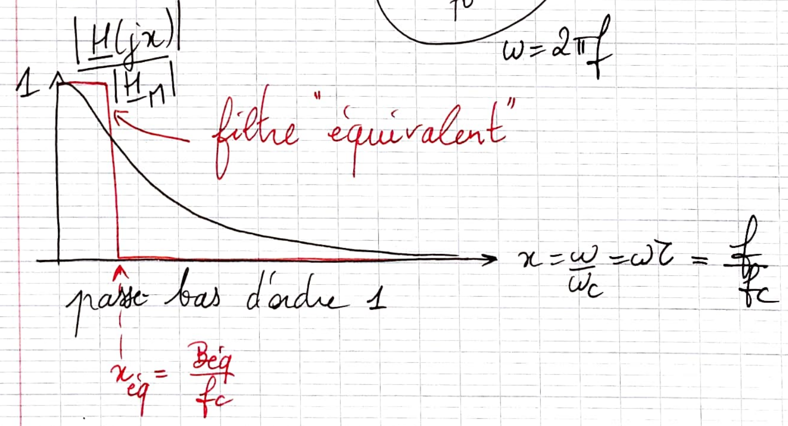
21. L'écart type est le même pour chacun des modes de quantification.
On préférera la quantification linéaire centrée à la quantification par défaut puisque la valeur moyenne est nulle.
Ainsi on n'introduit pas d'erreur systématique (qu'on a) en codant toujours par défaut

Bruits d'origine physique

22. Si la fonction de transfert était de module $|H_M|$ sur un intervalle de largeur $B_{éq}$ en fréquence on aurait

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{|H(j\omega)|^2}{|H_M|^2}\, d\omega = \int_{f_0}^{f_0+B_{éq}} 1 \times df = B_{éq}$$

$\omega = 2\pi f$



23. $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$ $\qquad \frac{|H(j\omega)|^2}{|H_M|^2} = \frac{1}{1+(\omega\tau)^2}$

On note $x = \omega\tau$ $\qquad d\omega = \frac{dx}{\tau}$

$$B_{éq} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\frac{dx}{\tau} = \frac{1}{2\pi\tau}\left[\arctan x\right]_0^\infty = \frac{1}{2\pi\tau}\times\frac{\pi}{2}$$

$$B_{éq} = \frac{1}{4\tau} = \frac{\omega_c}{4} = \frac{\pi}{2} f_c$$

On constate que, cette bande passante est conforme à ce qui est représenté sur la partie gauche de la figure 11.
$\left(\frac{\pi}{2} = 1{,}57\right)$

24. Pour $H = A\,\frac{2mjx}{1+(jx)^2 + 2m(jx)}$

$$|H|^2 = A^2\frac{4m^2x^2}{(1-x^2)^2+4m^2x^2}$$

$$|H|_M^2 = |H(x=1)|^2 = A^2$$

$$\frac{|H|^2}{|H_M|^2} = \frac{4m^2x^2}{(1-x^2)^2+4m^2x^2}$$

$$B_{éq} = \frac{1}{2\pi}\times \cancel{4}\cancel{m^2}\,\omega_c \times \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^2}{(1-x^2)^2+4m^2x^2}\,dx}_{\frac{\pi}{\cancel{4m}}}$$

$$B_{éq} = \frac{m\omega_c\pi}{2} = m\pi^2 f_c$$

$\omega_c = 2\pi f_c$

$$\left(\frac{|H|}{|H_n|}\right)^2 = \frac{1}{1+\frac{1}{4m^2}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$$

La largeur à mi-hauteur en énergie correspond à $\frac{1}{4m^2}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 1$

$$x-\frac{1}{x} = \pm 2m \quad \Rightarrow \quad \Delta x = 2m$$
$$\Rightarrow \quad \Delta f_{\frac{1}{2}} = 2m f_c = \frac{f_c}{Q}$$

$$Q = \frac{1}{2m}$$

$$\frac{B_{éq}}{\Delta f_{\frac{1}{2}}} = \frac{m\pi^2 f_c}{2m f_c} = \frac{\pi^2}{2}$$

$B_{éq}$ est en ordre de grandeur la largeur à mi-hauteur de la bande passante ($m \ll 1$ ne change rien au résultat).

$m \ll 1 \Rightarrow$ le filtre passe-bande est très sélectif.

Un filtre passe-bande très sélectif va permettre d'éliminer une grande partie du bruit, dont le spectre est très étendu.

- L'idéal est d'utiliser un signal centré sur une fréquence située dans une gamme de fréquence de faible bruit.
- Il faut évid^t choisir la bande passante assez large pour ne pas perdre d'information

en même temps qu'on élimine le bruit !

25. $B_{éq}$ est une fréquence
$\Rightarrow e B_{éq}$ est un courant
$\Rightarrow (e B_{éq}\, i_d)^{\frac{1}{2}}$ est un courant, G est sans dimension $\Rightarrow i_{sc}$ est bien un courant

$k_B T$ est une énergie
$\to B_{éq} k_B T$ est une puissance, comme Ri^2
$(R_a B_{éq} k_B T)^{\frac{1}{2}}$ est homogène à Ri
$\Rightarrow$ c'est une tension

26. $$\frac{i_J}{i_{sc}} = \frac{1}{G}\left(\frac{4 k_B T \cancel{B_{éq}}}{R_a\, 2 e i_d \cancel{B_{éq}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{G}\left(\frac{4 k_B T}{2 e i_d R_a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

En prenant $T = 300K$, on obtient
$$\frac{i_J}{i_{sc}} = 0{,}23$$
Ces intensités sont du même ordre de grandeur.

27. Choisissons $B_{éq} = 1\,kHz$ comme valeur "raisonnable"

$\to$ $i_k \sim 10^{-12}$ A
$i_b \sim 2.10^{-8}$ A
$i_J \sim 10^{-10}$ A
$i_{sc} \sim 6.10^{-10}$ A

Le rapport signal/bruit vaut alors :
$$\frac{i_k}{\sqrt{i_b^2+i_J^2+i_{sc}^2}} = 6.10^{-5} \ll 1$$

$\to$ Le rapport signal sur bruit est extrêmement faible !! Le signal est donc difficile à extraire