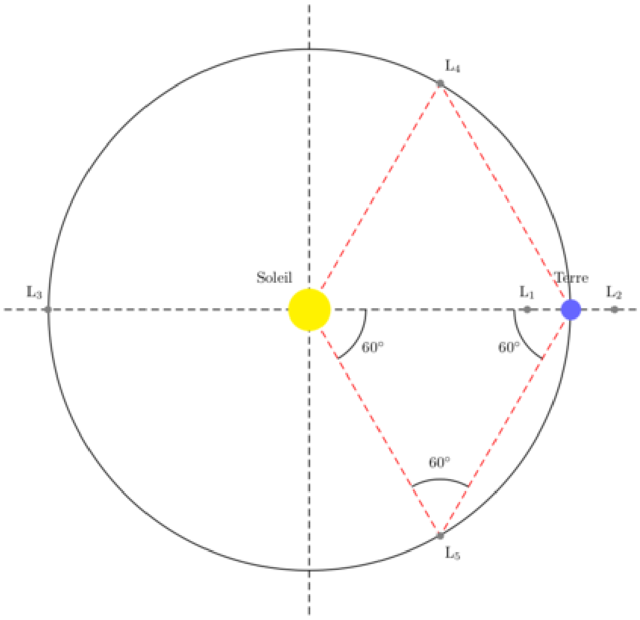
DM 8

pour le jeudi 14 décembre 2023

⋆ ⋆ ⋆

Les points de Lagrange : X 2002

⋆ ⋆ ⋆



Positions des 5 points de Lagrange

Utilisation des points de Lagrange selon Wikipedia

Les points L1 et L2 sont des équilibres instables, ce qui les rend utilisables dans le cadre de missions spatiales : on n'y trouve pas de corps naturels, et un équilibre dynamique peut y être maintenu pour une consommation de carburant raisonnable (le champ gravitationnel étant faible dans leur voisinage).
Les principaux avantages de ces positions, en comparaison des orbites terrestres, sont leur éloignement de la Terre et leur exposition au Soleil constante dans le temps. Le point L1 se prête particulièrement à l'observation du Soleil et du vent solaire. Ce point a été occupé pour la première fois en 1978 par le satellite ISEE-3, et est actuellement occupé par les satellites SoHO, DSCOVR, Advanced Composition Explorer et Lisa Pathfinder9. Le point L2 est à l'inverse particulièrement intéressant pour les missions d'observation du cosmos, qui embarquent des instruments de grande sensibilité devant être détournés de la Terre et de la Lune, et fonctionnant à très basse température. Il est actuellement occupé par les satellites Herschel, Planck, WMAP, Gaia et le sera par le JWST en 2018.
Il a été un temps envisagé de placer un télescope spatial au point L4 ou L5 du système Terre-Lune, mais cette option a été abandonnée après que des nuages de poussière y ont été observés.

On étudie dans ce problème les points de Lagrange et leur stabilité.

L'objet du problème est d'étudier certains aspects du mouvement de trois corps en interaction gravitationnelle. On désignera par $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle.

I

Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle forment un système isolé. À l'instant t, elles sont situées respectivement aux points A_1 et A_2 repérés dans un référentiel galiléen par $\vec{R}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ et $\vec{R}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, avec les vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$; on pose $\vec{r} = \overrightarrow{A_1A_2}$ et $r = \|\vec{r}\|$.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux masses.

2. Déterminer la position de leur centre d'inertie C. Quelle est la trajectoire de C ? Déterminer sa vitesse.

3. Calculer l'énergie cinétique des deux masses dans le référentiel barycentrique ; montrer qu'elle est égale à celle d'une masse ponctuelle de vitesse $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ et de masse μ que l'on déterminera en fonction de m_1 et m_2.

4. Montrer que le mouvement relatif de m_2 par rapport à m_1, caractérisé par $\vec{r}(t)$, est équivalent à celui de cette masse ponctuelle soumise à une force que l'on explicitera et dont on précisera les caractéristiques.

5. À quelle condition portant sur r et $v = \|\vec{v}\|$ les deux masses restent-elles *à distance finie* l'une de l'autre ?

6.a) À quelle condition sur r et v les deux masses restent-elles *à distance fixe* r_0 l'une de l'autre ?

b) Déterminer dans ce cas la période T de leur mouvement, ainsi que la vitesse angulaire Ω, en fonction des masses, de r_0 et $\mathcal{G}$.

II

On étudie un cas particulier du problème à trois corps « restreint », à savoir :

• Deux masses m_1 et m_2 sont beaucoup plus grandes que la troisième m, soit $m_1 \gg m$ et $m_2 \gg m$. La masse m est supposée ponctuelle comme m_1 et m_2.

• Les deux masses m_1 et m_2, à distance constante l'une de l'autre, effectuent un mouvement de rotation à la vitesse angulaire Ω autour de leur centre d'inertie C. Ce mouvement, décrit au **I.6**, n'est pas affecté par la présence de la troisième masse m.

On ne considère dans cette partie que les situations où les trois masses restent alignées au cours du temps. La masse m est située au point A. On prendra la direction $\overrightarrow{A_1A_2}$ comme axe $x'Cx$ d'origine C, avec $\overrightarrow{CA_1} = -r_1\vec{e}_x$ et $\overrightarrow{CA_2} = r_2\,\vec{e}_x$, $\overrightarrow{CA} = x\vec{e}_x$, $\vec{e}_x$ vecteur unitaire.

1. Exprimer, en fonction de x et à l'aide des paramètres du système, la composante selon $x'Cx$ de la force totale qui s'exerce sur la masse m dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire Ω.

2. Montrer que dans ce référentiel tournant cette composante dérive d'une fonction $U(x)$ qui joue le rôle d'une « énergie potentielle ». Expliciter $U(x)$.

3. Effectuer une étude qualitative de $U(x)$ en fonction de x ; par une analyse graphique, montrer qu'il y a trois positions « d'équilibre » possibles pour la masse m et les situer qualitativement par rapport aux masses m_1 et m_2.

4. Discuter de la stabilité de ces positions d'équilibre dans le référentiel tournant, vis-à-vis des déplacements selon l'axe $x'Cx$.

III

1. Trois masses, a priori différentes, m_1, m_2 et m_3 sont situées respectivement aux trois sommets A_1, A_2, A_3, d'un triangle équilatéral de côté d ; soit C leur centre d'inertie.

$\vec{F}_1$ étant la résultante des forces de gravitation s'exerçant sur la masse m_1, montrer que :

$$\vec{F}_1 = -Gm_1\frac{(m_1 + m_2 + m_3)}{d^3}\overrightarrow{CA_1}$$

2. En déduire que, si les masses tournent dans leur plan avec une certaine vitesse angulaire commune Ω que l'on déterminera, elles sont en équilibre relatif.

On limite, dans toute la suite de cette partie, l'étude au cas où, comme en **II**, l'une des masses, $m_3(= m)$, est beaucoup plus petite que les deux autres m_1 et m_2, dont le mouvement circulaire n'est pas modifié par m. On prend la direction $\overrightarrow{A_1A_2}$ comme axe $X'CX$. La masse m, placée en A, est repérée par $\vec{R}(t) = \overrightarrow{CA}$ de coordonnées (X, Y). On s'intéresse à la stabilité de la masse m au voisinage du sommet A_3 du triangle équilatéral de base A_1A_2, en limitant d'abord l'étude aux mouvements dans ce plan. On oriente l'axe $Y'CY$ de telle sorte que l'ordonnée de A_3 soit positive.

3. Écrire, dans le référentiel tournant, « l'énergie potentielle » $U(X,Y)$ dont dérive la somme des forces gravitationnelles et d'inertie d'entraînement agissant sur la masse m ; on posera $\|\overrightarrow{AA_1}\| = d_1(X,Y)$ et $\|\overrightarrow{AA_2}\| = d_2(X,Y)$.

4. Écrire l'expression vectorielle de l'accélération $\vec{a}$ de la masse m dans le référentiel tournant, à l'aide du vecteur rotation $\vec{\Omega}$, de la vitesse $\vec{v}(v_x, v_y)$ dans ce référentiel et de $\overrightarrow{\text{grad}}(u)$ où $u(X,Y) = U(X,Y)/m$.

Dans la suite, on notera $u_X(X,Y) = \dfrac{\partial u(X,Y)}{\partial X}$, $u_{XY}(X,Y) = \dfrac{\partial^2 u(X,Y)}{\partial X \partial Y}$, etc..

5. En vue d'étudier la stabilité de m au voisinage du point A_3, on pose $X = X_0 + x$, $Y = Y_0 + y$, où (X_0, Y_0) sont les coordonnées du point d'équilibre A_3 de la masse m, dont on ne demande pas le calcul explicite.

Écrire les équations du mouvement, en se limitant aux termes du premier ordre en x et y. Pour alléger l'écriture, on notera : $u_{XX} = u_{XX}(X_0, Y_0) \quad u_{XY} = u_{XY}(X_0, Y_0)$ etc..

6. On cherche des solutions du type : $x = a\exp(\lambda t)$, $y = b\exp(\lambda t)$, où a et b sont des constantes.

Montrer que λ doit vérifier l'équation caractéristique :

$$\lambda^4 + \lambda^2(4\Omega^2 + u_{XX} + u_{YY}) + (u_{XX}u_{YY} - u_{XY}^2) = 0$$

7. On admet que si l'on pose :

$$\lambda = \lambda'\Omega \qquad m_1 = \alpha(m_1 + m_2) \qquad m_2 = (1-\alpha)(m_1 + m_2)$$

et que l'on évalue les dérivées partielles figurant dans l'équation caractéristique de la question **III.6**, la variable λ'^2 vérifie l'équation du second degré suivante :

$$\lambda'^4 + \lambda'^2 + \frac{27}{4}\alpha(1-\alpha) = 0 \,.$$

Soit Δ le discriminant de cette équation.

a) Que conclure sur la stabilité de la position d'équilibre si $\Delta \geqslant 0$?

b) Même question si $\Delta < 0$.

c) En déduire les valeurs de α pour lesquelles la position d'équilibre est stable.

8. Pour le système Lune - Terre, le rapport de la masse légère m_1 à la masse totale (m_1+m_2) est $\alpha = 0,012$. En considérant ce système comme isolé, quelles conclusions en tirez-vous quant à la stabilité de la position d'équilibre d'un petit objet dont la position formerait un triangle équilatéral avec les centres de la Terre et de la Lune ?

Même question pour le système Jupiter - Soleil pour lequel $\alpha = 0,001$. L'observation des « planètes troyennes », de même période de révolution que Jupiter autour du Soleil et faisant avec lui et le Soleil un triangle équilatéral, conforte-t-elle votre conclusion ?

9. Par une analyse qualitative des forces s'exerçant dans le référentiel tournant, étudier la stabilité de la position A_3 vis-à-vis de petits mouvements orthogonaux au plan XCY.